La recherche d'un fondement absolu des mathématiques par l'Ecole combinatoire de C. F. Hindenburg (1741-1808)

Philippe Séguin
Nancy

Résumé : Carl Friedrich Hindenburg (1741-1808), le fondateur de la « prétendue Ecole combinatoire » (Eugen Netto), est un personnage largement oublié aujourd'hui. Pourtant, le *Dictionary of Scientific Biography* lui consacre un article. Il est vrai que l'Ecole combinatoire eut un grand succès en Allemagne à la fin du 18ème siècle, mais seulement en Allemagne, puis elle tomba en discrédit.

En fait, l'Ecole combinatoire ne se proposait rien moins que de fonder l'analyse — et si possible toutes les mathématiques — sur l'analyse combinatoire, une nouvelle branche des mathématiques qui était la création de Hindenburg : la problématique des fondements était au cœur de cette tentative.

Abstract: Carl Friedrich Hindenburg (1741-1808), founder of the "so-called Combinatorial School" (Eugen Netto), had been forgotten until recently. However, an article about him can be found in the *Dictionary of Scientific Biography.* The Combinatorial School was very successful in Germany — and there only — towards the end of the 18th century, but later fell into discredit.

In fact, it aimed at nothing less than founding analysis — and if possible the whole of mathematics — on a new branch of mathematics, combinatorial analysis, which was Hindenburg's creation : the problematic of foundation was at the heart of Hindenburg's endeavour.

Philosophia Scientiæ, cahier spécial 5, 2005, 61–79.

1 Introduction : « la prétendue Ecole combinatoire »

Le site-web consacré à Johann Friedrich Pfaff nous informe que celui-ci a publié plusieurs articles dans la revue *Archiv für die reine und angewandte Mathematik* (1795-1800) éditée par Carl Friedrich Hindenburg. On peut y lire également que l'œuvre majeure de ce dernier, *Le théorème du multinôme, le théorème le plus important de toute l'analyse* (*Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis*, 1796), serait de nature « à faire aujourd'hui se dresser les cheveux sur la tête » [Pfaff, 2002, 8].[1] Une telle remarque suscite forcément la curiosité : qui est ce Hindenburg dont les idées furent si fantastiques, au sens hoffmannien du terme ?

L'*Abrégé d'Histoire des Mathématiques* de Dieudonné ne fait aucune référence à ce nom. Mais deux colonnes lui sont consacrées dans le *Dictionary of Scientific Biography*. On y apprend qu'il a été le fondateur de « l'Ecole combinatoire » mais que ses « grandes espérances » sont restées vaines ; *le théorème du multinôme*, lit-on, est le résumé de son « système unifié ». La bibliographie mentionne *l'Histoire des mathématiques* de Moritz Cantor où figure, à la rubrique « combinatoire », la phrase suivante d'Eugen Netto :

Après ces résultats [il s'agit des travaux des Bernoulli, de Moivre et d'Euler], nous arrivons à une époque étrange, celle de la prétendue Ecole combinatoire (« *die sogenannte kombinatorische Schule* »). (Netto, 1908, 201)[2]

Cette formule, « *die sogenannte kombinatorische Schule* », est reprise systématiquement dans les ouvrages allemands, par exemple dans le *Mathematisches Wörterbuch* [Haas, 1974] à l'entrée « Hindenburg » ou dans les livres de Gerhardt [Gerhardt, 1877, 201] et de Reiff [Reiff, 1889, 148]. Ainsi s'installe l'impression que cette Ecole combinatoire est véritablement la partie honteuse des mathématiques allemandes, et pourtant, à la fin du 18^e^ siècle, elle occupait le devant de la scène mathématique en Allemagne. C'est ce paradoxe que j'aimerais élucider en formulant deux questions, la première à la façon de Pierre Boutroux dans *L'idéal scientifique des mathématiciens* [Boutroux, 1920], la seconde selon un mode kantien :

[1] Die erste *Sammlung* [...] trägt zum Beispiel den aus heutiger Sicht haarsträubenden Titel *Der polynomische Lehrsatz* [...].

[2] Nach diesen Ergebnissen kommen wir zu einer merkwürdigen Epoche, zu der der sogenannten **kombinatorischen Schule**.

1. Quel fut l'idéal mathématique de Hindenburg ?
2. Comment les espérances (déçues) de Hindenburg ont-elles pu être partagées en Allemagne, et rien qu'en Allemagne, au point qu'il ait pu créer quelque chose comme une école ?

2 Hindenburg et l'expression du multinôme

Hindenburg n'a jamais été titulaire d'une chaire de mathématiques. Il fut, de 1786 à sa mort, professeur de physique à l'Université de Leipzig, où il avait étudié en particulier les mathématiques, la physique et la philosophie. Il fit également des études de mathématiques à Göttingen où il fut l'élève d'Abraham Kästner. Hindenburg le cite parmi des noms plus prestigieux comme Moivre ou Jacques Bernoulli au début de son premier ouvrage consacré au multinôme, *Methodus nova et facilis serierum infinitarum exhibendi dignitates exponentis indeterminati* [...] (1778). Ce travail inaugurait une longue série de publications, quelques livres, et surtout de nombreux articles parus dans les différentes revues que Hindenburg fonda en collaboration : le *Leipziger Magazin für Naturkunde, Mathematik und Astronomie* (1781-1785), suivi du *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik* (1786-88), l'*Archiv für die reine und angewandte Mathematik* (1795-1800), et la *Sammlung kombinatorisch-analytischer Abhandlungen* (*Recueil de traités d'analyse combinatoire*), dont l'objectif était précisément de diffuser les idées de l'Ecole combinatoire. Cette revue connut trois livraisons : en 1796 (*Der polynomische Lehrsatz*), en 1800 et en 1803.

L'œuvre de Hindenburg la plus souvent mentionnée, *Der polynomische Lehrsatz*[3], est en réalité un recueil d'articles collectif. Sa contribution personnelle occupe la moitié du volume, environ 150 pages, et consiste en une longue apologie et défense de ce qu'il considère comme sa création, l'analyse combinatoire. Il y résume ce qu'il estime être son apport scientifique en s'appuyant notamment sur deux de ses premiers articles, *Infinitomii dignitatum exponentis indeterminati historia leges ac formulae* [...] (1779), et *Novi systematis permutationum combinationum ac variationum primas lineas* [...] (1781). A compter de 1779, Hindenburg ne cessera de se référer à Leibniz, qui fait figure d'autorité suprême, notamment à sa notion de caractéristique, à son texte de jeunesse *De arte combinatoria* (1666) et à l'idée que l'algèbre est soumise à la combinatoire. Il envoya *Infinitomii*, où il proposait une démonstration combinatoire du théorème du multinôme à partir du théorème du

[3] Désignée par *"Lehrsatz"* dans cet article.

binôme, à Lagrange, qui l'en remercia, tout en émettant le souhait de disposer « de tables toutes construites pour le développement des différents termes de ces puissances ». Hindenburg cite cette lettre dans l'*Archiv* de 1798 page 370 [Jahnke, 1990, 177]. Ce n'est qu'en 1794 que Hindenburg pensa avoir trouvé la solution et qu'il présenta l'idée de tables qu'il baptisa « involutions ».

Avec l'article *Novi systematis* commencent les tentatives de Hindenburg pour fonder l'analyse combinatoire sur un nouveau système de signes, une nouvelle langue symbolique. Il est remarquable qu'il ne reprend pas la notation de Leibniz à double indice, qu'il connaît (cf. *Infinitomii*), mais il opère à partir de lettres empruntées à différents alphabets, en utilisant par exemple 'A 'B, etc. pour une combinaison sans répétition, A' B', etc. pour une combinaison avec répétition, les majuscules gothiques pour les coefficients binômiaux, les minuscules gothiques pour les coefficients polynômiaux, etc. (voir *Lehrsatz*, p. 285 et Cajori, tome 2, p. 65). Cependant, il semble que ses efforts pour introduire un nouveau symbolisme n'aient guère été couronnés de succès. Il évoque en effet dans la préface de *Lehrsatz* les plaintes de certains de ses lecteurs au sujet du nombre de signes introduits (*Lehrsatz*, p. 6-7). Et pourtant, ce premier numéro de la revue semble avoir eu un effet déterminant sur la formation de l'Ecole combinatoire. On dispose par exemple du témoignage direct de Stahl qui, dans la préface à son *Abrégé de l'analyse combinatoire (Grundriss der Combinationslehre*, 1800), la première introduction consacrée au sujet, dit ne s'être vraiment intéressé à l'analyse combinatoire qu'à partir de 1796 [Stahl, 1800, VII]. On sait d'autre part que le nombre d'articles concernant celle-ci augmenta très sensiblement après 1796 jusqu'à environ 1800. La raison en est certainement la prétendue démonstration par Klügel, l'auteur du *Mathematisches Wörterbuch*, du théorème multinômial de façon entièrement combinatoire selon la méthode de Hindenburg, mais en faisant dépendre le binôme du multinôme, et non l'inverse, ce qui était nouveau. Cette démonstration valait d'ailleurs « pour toutes les sortes d'exposants » (*Lehrsatz*, p. 3), autrement dit, même pour un exposant irrationnel. Mais justement, dans ce dernier cas, elle nous semble aujourd'hui bien insuffisante. La voici :

> Le théorème du binôme et du polynôme vaut aussi bien pour les exposants irrationnels d'une puissance que pour les exposants rationnels, puisque les quantités irrationnelles sont des limites qui s'approchent infiniment des deux côtés des quantités rationnelles, et donc ce qui est vrai de ces dernières l'est aussi de leur limite. (*Lehrsatz*, p. 83)[4]

[4]Für irrationale Exponenten einer Potenz gelten der binomische und polynomi-

En fait, c'est à la recherche d'une loi unique que s'est attaché Hindenburg, en exprimant par des formules et des signes nouveaux les permutations, combinaisons, arrangements, les coefficients, exposants, les quantités fixes et variables, etc. Il pensait (*Lehrsatz*, p. 159) que la « méthode combinatoire » devait avoir « une application tout à fait générale » dans l'analyse si l'on arrivait à la reformuler de façon adéquate, en introduisant des opérations combinatoires selon des règles précises, avec des signes « appropriés et expressifs », ce qui en rendrait l'application « commode ». Alors seulement, la « méthode combinatoire » deviendrait une « analyse combinatoire », c'est-à-dire dans l'esprit de Hindenburg une « science fondamentale autonome » (*Lehrsatz*, p. 155). Hindenburg insiste sur la simplicité d'emploi de sa méthode, qui serait d'après lui le garant de l'application la plus générale.

Finalement, il ne s'agit rien moins que d'asseoir « l'analyse » sur une caractéristique générale et combinatoire. Le terme « caractéristique » n'est pas emprunté par hasard à Leibniz puisque Hindenburg se propose tout simplement de poser les fondements d'une nouvelle langue de signes combinatoires (« Zeichensprache », *Lehrsatz*, p. 283) permettant de résoudre de plus en plus de problèmes : ce serait son aspect *ars inveniendi*. Ces signes devraient donc être définitifs et choisis de sorte à former « l'harmonie la plus parfaite » (*Lehrsatz*, p. 284).

Comme il a été dit plus haut, le recueil de 1796 eut un écho en Allemagne, mais seulement en Allemagne. C'est cela qu'il s'agit d'interpréter maintenant. Les conceptions de Hindenburg faisaient-elle dresser les cheveux sur la tête de Lagrange et de Laplace ? Pour quelles raisons l'analyse combinatoire ne s'est-elle développée qu'en Allemagne ? Envisageons tout d'abord le contexte mathématique de l'époque.

3 Le contexte mathématique

3.1 Le contexte mathématique international

Pour bien resituer la tentative de Hindenburg dans son contexte mathématique, il faut se rappeler que la grande époque théorique de l'Ecole combinatoire, 1796-1800, est encore bien éloignée des débuts du souci de rigueur en l'analyse avec Cauchy, Abel et d'autres à partir des années vingt. Les mathématiciens manipulaient les séries infinies comme des

sche Lehrsatz eben so gut als für rationale, da irrationale Grössen Gränzen sind, welchen sich rationale Grössen von beiden Seiten ohne Ende nähern, daher was von diesen letztern wahr ist, auch von ihrer Gränze gilt.

polynômes, même s'ils savaient bien qu'il existait des séries divergentes et qu'on ne pouvait donc pas toujours leur attribuer une somme. Cependant, depuis la formulation de la série du binôme par Newton pour un exposant fractionnaire et ses innombrables applications, le pragmatisme prévalait. Il est caractéristique du style de cette époque qu'Euler, dont l'*Introductio ad analysin infinitorum* (1748) fut fondamentale pour les générations suivantes, pensait que toute fonction pouvait être exprimée en une série infinie de puissances. Pour lui, il n'y avait pas de différence fondamentale entre l'algèbre du fini (le travail sur les polynômes) et l'algèbre de l'infini (l'analyse infinitésimale) [Boutroux, 1920, 129, Dahan-Peiffer, 1986, 218-219]. Lagrange adoptera la même attitude dans la *Théorie des fonctions analytiques* en 1797 lorsqu'il considérera l'analyse comme une généralisation de l'algèbre. Dans ce contexte, il faut dire quelques mots du rôle particulier qu'a joué le théorème du binôme pendant tout le 18^e siècle.

3.1.1 La série infinie du binôme

La série infinie du binôme avait été énoncée par Newton, sans démonstration, pour un exposant fractionnaire. Le 18^e siècle vit fleurir un nombre impressionnant de démonstrations, surtout après l'édition de la *Méthode des fluxions* de Newton par John Colson en 1737. Même après le mémoire d'Abel, *Recherches sur la série* $1+(m/1)x+\ldots$, paru en 1826, de nouvelles démonstrations furent publiées. Euler n'en donna pas moins de quatre, en 1755 (*Institutiones calculi differentialis*), 1774 (*Demonstratio theorematis neutoniani* [...]), 1776 (*Nova demonstratio* [...]), et 1779 (*De serie maxime* [...]), et à chaque fois il y trouva lui-même une lacune. Il y avait plusieurs méthodes, certaines étaient purement algébriques, d'autres annonçaient les travaux de Cauchy, d'autres enfin partaient du calcul différentiel. Plus rares étaient celles qui partaient du théorème du multinôme de Moivre, mais on peut noter une démonstration de Castillon en 1742 (article sans titre paru dans les *Philosophical Transactions*), de Clairaut dans les *Élémens d'Algèbre* (1746), de Klügel en 1770 (*Analytische Trigonometrie*). La première démonstration d'Euler (1755) partait du calcul différentiel, ainsi que deux démonstrations de Kästner, le maître de Hindenburg, (*Theorema binomiale universaliter demonstratum*, 1758, et *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, 1761). Mais que dire d'une démonstration du théorème du binôme reposant sur la méthode qu'elle était censée fonder ? En effet, le théorème du binôme jouait un rôle bien particulier dans l'analyse du 18^e siècle.

3.1.2 Le binôme : « la base de toute l'Analyse sublime »

L'enjeu de la démonstration du binôme était beaucoup plus important que la simple démonstration d'un théorème, au vu de sa place dans l'analyse. En effet, on remarque que dans la plupart des traités de calcul différentiel de l'époque, le théorème est énoncé très tôt dans le corps du texte et souvent accompagné d'une démonstration.[5] A la suite de Newton, on le considère comme la pièce principale de l'analyse, et Euler, après l'avoir qualifié de « théorème universel » dans l'*Introductio ad analysin infinitorum* [Euler, 1, 8, 85), en fait dans son article de 1774 « la base de toute l'Analyse sublime » [Euler, 1, 15, 207]. Pensivy fait remarquer que même Cauchy lui accorde une place centrale dans l'*Analyse algébrique*, en faisant converger toutes les notions préalablement établies, apparemment sans lien, vers la démonstration du théorème dans la sixième partie [Pensivy, 1987-88, 8]. Sans doute le besoin d'une démonstration se faisait-il également plus pressant du fait que l'exposant ne pouvait se limiter aux nombres rationnels, même négatifs. La question d'un exposant irrationnel, et même « impossible », c'est-à-dire imaginaire, s'imposait de plus en plus. Le besoin d'une démonstration du théorème du binôme était donc lié à la problématique du fondement de l'analyse. Il faut dire que les mathématiciens furent très tôt conscients de ce problème.

3.1.3 Le problème des fondements

En effet, si la démonstration du binôme comme fondement de l'analyse peut sembler aujourd'hui n'avoir été qu'une vague espérance, le fait que le calcul infinitésimal ne reposait pas sur un fondement stable était une certitude.

En 1734, Berkeley, en s'attaquant dans *The Analyst* au statut des « quantités évanouissantes » de Newton, c'est-à-dire aux fondements du calcul différentiel, sans mettre en doute les résultats, formula la difficulté avec précision : qu'étaient ces objets mathématiques qui étaient tantôt quelque chose, tantôt rien ? Des années plus tard, d'Alembert énoncera dans les *Éléments* la même critique pratiquement dans les mêmes termes [d'Alembert, *Essai sur les éléments de philosophie*, 292]. En 1759, Lagrange écrivit à Euler qu'il avait élaboré « la vraie métaphysique » du calcul infinitésimal [Lagrange, 14, 173]. Mais ce n'est qu'en 1797, avec la *Théorie des fonctions analytiques*, un an donc après le *Théorème du multinôme*, qu'il pense avoir réussi. Voici le titre en entier : *Théorie des*

[5] C'est le cas par exemple dans les ouvrages de Kästner [1761] et de L'Huilier [1795], ce qui était bien connu de Hindenburg.

fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

En 1797, Lagrange était à Paris depuis dix ans. Mais c'est sous son égide que l'Académie de Berlin avait proposé un prix en 1784 concernant les fondements du calcul infinitésimal. Le lauréat, Simon L'Huillier, ne réussit pas à convaincre le jury, mais on voit bien que la problématique des fondements était tout à fait actuelle quand Hindenburg fit paraître son ouvrage collectif. Parallèlement à l'intérêt croissant pour cette question, on peut constater quelque chose comme une ambiance de fin de siècle chez beaucoup de mathématiciens : une époque arrive à son terme.

3.1.4 L'idéal combinatoire et son épuisement

Dès la moitié du 18*e* siècle, des voix s'élèvent pour constater que les mathématiques parviennent à un lent épuisement. Même Lagrange se joint au concert dans une lettre à d'Alembert du 21 septembre 1781 [Lagrange, 1781, 368]. Il faut dire que vers 1800, trop de problèmes majeurs comme le statut des nombres imaginaires, le problème des parallèles, les fondements de l'analyse restent en suspens. Le constat le plus frappant est certainement celui de Cauchy en 1811, dans un discours intitulé *Sur les limites des connaissances humaines* :

> L'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, les mathématiques transcendantes sont des sciences que l'on peut regarder comme terminées, et dont il ne reste plus à faire que d'utiles applications. [Cauchy, 1811, 2*e* série, 15, 6]

Il est piquant de lire ces lignes sous la plume de l'un de ceux qui contribuèrent de façon déterminante à faire repartir l'analyse sur de nouvelles bases. À la même époque, Delambre, dans son *Rapport historique*, exprime son sentiment comme suit :

> Toutes ces difficultés semblent annoncer que la puissance de notre analyse est à peu près épuisée, comme celle de l'algèbre ordinaire l'était par rapport à la géométrie transcendante au temps de Leibniz et de Newton, et qu'il faudrait des combinaisons qui ouvrent un champ nouveau au calcul des transcendantes et à la résolution des équations qui les contiennent. [Delambre, 1810, 131]

Le terme « combinaison » n'est pas fortuit. Il fait écho par exemple à Laplace, qui remarque en 1796, dans son *Exposition du système du monde* :

> [...] l'analyse nous fait bientôt oublier l'objet principal [de nos recherches] pour nous occuper de combinaisons abstraites, et ce n'est qu'à la fin qu'elle nous y ramène. [Laplace, 1796, 5, 5, 289]

Boutroux voit en cette conception caractéristique des mathématiques du 18^e siècle un idéal « synthétiste » [Boutroux, 1920, 80]. Cet idéal, on pourrait l'appeler l'idéal combinatoire du 18^e siècle. Se référant lui-même à Leibniz, Boutroux dit préférer le terme « synthèse » à celui de « combinatoire », pour éviter de confondre « méthode combinatoire » au sens large et « combinatoire » au sens proprement mathématique. Mais il est remarquable que tout le passage consacré à la « conception synthétiste des mathématiques », c'est-à-dire à la conception née avec l'invention de l'algèbre chez les Arabes et se terminant avec Lagrange et Laplace, est placé sous le signe de la combinaison, terme récurrent tout au long du chapitre [Boutroux, 1920, 80-130]. Dans cette optique, on peut dire que l'analyse combinatoire de Hindenburg représente à la fois une sorte d'absolutisation et d'épuisement de l'idéal combinatoire du 18^e siècle, ce qui répond à ma première question : « Quel fut l'idéal mathématique de Hindenburg ? »

Un autre facteur, négatif celui-là, expliquant le succès de l'Ecole combinatoire en Allemagne, est le vide régnant à la fin du 18^e siècle en Allemagne sur le plan mathématique.

3.2 La misère mathématique allemande et le legs de Lagrange

Avant la réforme Humboldt (1810), les mathématiques étaient très peu enseignées à l'université. Il était rare que les rudiments du calcul différentiel y soient abordés. En fait, cela n'aurait pas été catastrophique sur le plan de la recherche si l'Académie de Berlin, à l'instar de la Royal Society et de l'Académie Royale, avait joué le rôle qu'elle avait joué pendant plusieurs décennies. Mais la mort de Frédéric II mit fin à cette époque, et les années 90 furent une période sombre pour la Prusse. Il n'y avait, mis à part Pfaff, aucun mathématicien d'envergure européenne dans toute l'Allemagne. Lambert était mort à Berlin en 1777, Euler, après un séjour de vingt cinq ans à Berlin (1741-66), était parti pour Saint-Petersbourg et y était décédé en 1783, Lagrange, qui lui avait succédé à Berlin de 1761 à 1787, se trouvait à Paris. Ce n'est qu'en 1801 que le jeune Gauss entra en scène en calculant la trajectoire de la planète Cérès, récemment découverte par Piazzi, et en publiant les *Disquisitiones arithmeticae*. Lagrange avait donc légué un beau problème à l'Allemagne, en 1784, avant de quitter ce désert mathématique. Mais il fut en outre, sans le vouloir, à l'origine d'une série de travaux de la future Ecole combinatoire concernant le fondement de l'analyse.

Lagrange avait en effet énoncé un théorème très important à l'époque (Gauss le mentionne deux fois dans son journal de travail, en 1796), concernant l'inversion des séries. Il s'agissait, quand on a une série $x = ay + by^2 + cy^3$ etc..., d'exprimer y en fonction d'une série infinie de puissances de x. Un élève de Hindenburg, Eschenbach, s'empara du problème et énonça un terme général d'après l'analyse combinatoire, c'est-à-dire reposant sur le multinôme, mais sans démonstration (*Dissertatio de serierum reversione formulis* [...], 1789). En 1793, Rothe un autre élève de Hindenburg, publia une démonstration (*Formulae de serierum reversione demonstratio* [...]), puis Pfaff, deux ans plus tard, démontra l'équivalence du théorème de Lagrange avec celui de Rothe (*Analysis einer wichtigen Aufgabe des Herrn de la Grange*, c'est-à-dire *Analyse d'un problème important posé par Monsieur de la Grange*, et *Ableitung der Lokalformel für die Reversion der Reihen* [...], c'est-à-dire *Déduction de la formule locale pour l'inversion des séries* [...]), avec un avantage pour ce dernier : Lagrange, ne s'intéressant qu'à certaines applications en astronomie, n'avait calculé que quelques termes, tandis que Rothe donnait une solution générale. Ce résultat fut capital pour l'analyse combinatoire, puisqu'il fut considéré comme la preuve que toute fonction pouvait être exprimée en série de puissances ayant pour fondement le multinôme. C'est pour cette raison que Hindenburg termine sa contribution de 1796 par la démonstration du théorème du multinôme et celui de l'inversion des séries. Tout ceci entraîna une grande effervescence autour de Hindenburg, la création d'une nouvelle revue, et l'espoir de fonder peut-être « toute l'analyse » sur l'analyse combinatoire.

3.3 Pourquoi cette école ?

Voilà donc un panorama des raisons mathématiques ayant permis l'éclosion de cette « prétendue école ». Ce sont des choses connues. Elles se trouvent dispersées dans plusieurs ouvrages et articles d'histoire des mathématiques, chez Gerhardt [1877], Reiff [1889], Netto [1901 et 1908], Mehrtens [1981], Pensivy [1987-88], Jahnke [1990], Friedelmeyer [1994 et 1997], et d'autres. Nous pourrions maintenant conclure cette esquisse historique en reprenant les constatations maintes fois répétées, parfois tout simplement recopiées : l'Ecole combinatoire a péché de façon capitale de trois façons, en surévaluant la manipulation purement formelle, en ne s'intéressant pas aux applications, et en n'apportant aucun résultat nouveau. De façon vénielle, on peut lui reprocher de ne pas s'être intéressée aux déterminants et de ne pas avoir repris et perfectionné les notations de Leibniz. Mais en en restant à ce constat, on ne peut pas comprendre pourquoi des hommes comme Pfaff, Klügel, Arbogast, Kramp n'ont pas senti leurs cheveux se dresser sur leur tête à la simple vue du symbolisme de Hindenburg. J'aimerais donc proposer une interprétation en partant de l'idée que ce que Reiff appelle « le sentiment mathématique » [Reiff, 1877, 153], on pourrait dire aussi l'esprit, l'attitude, peut venir de quelque chose qui dépasse le strict point de vue mathématique et l'englobe. En d'autres termes, j'aimerais considérer cette Ecole combinatoire et ses attentes, ses ambitions, et ses désillusions, cette partie honteuse des mathématiques allemandes, d'un point de vue herméneutique, c'est-à-dire en envisageant le mouvement général de la pensée en Allemagne, à cette époque, par opposition au reste de l'Europe et répondre ainsi à la deuxième question posée dans l'introduction : comment les espérances (déçues) de Hindenburg ont-elles été possibles au point qu'il ait pu créer une « école » ? J'aimerais notamment tenter de donner une raison à ce parti pris radicalement formaliste qui paraît aujourd'hui tellement surprenant dans ce contexte. Dans ce but, j'esquisserai une confrontation intellectuelle entre l'Allemagne, pays de Hindenburg, et la France, pays culturellement et scientifiquement dominant au 18^{e} siècle en général et dans les années 1790-1800 en particulier, c'est-à-dire dans la période qui nous intéresse.

4 Le contexte intellectuel

4.1 L'Allemagne, « la nation retardataire »[6]

Dans son livre *De l'Allemagne*, Heinrich Heine oppose l'Allemagne et la France. Selon lui, la révolution que les Français ont faite sur le plan politique, les Allemands l'ont faite dans le domaine de l'esprit. Pour bien comprendre l'importance d'une telle réflexion pour notre problématique, il importe de mesurer la disproportion entre les deux pays. Au 18^{e} siècle, la France existe en tant qu'état, elle a une vraie capitale. L'Allemagne, elle, existe comme unité linguistique, mais pas en tant qu'état, et Berlin n'est que la capitale de la Prusse. L'Allemagne ne pouvait compter que sur la force spirituelle et intellectuelle de ses pasteurs et de sa bourgeoisie piétiste privée de pouvoir politique pour rattraper un retard immense sur tous les plans de la vie intellectuelle. En littérature, Goethe puis Schiller mirent l'Allemagne sur un pied d'égalité avec les grandes nations dès les années 1770-80. En mathématiques, ce n'est qu'avec Gauss, à partir de 1801, que l'Allemagne comble son retard. Ces deux réveils, tardifs,

[6] [Plessner, 1959].

devaient porter leurs fruits. Entre-temps, l'Allemagne avait accouché de trois systèmes philosophiques dont deux vont retenir notre attention : le criticisme kantien et l'idéalisme fichtéen.

4.2 Kant, ou le fondement par la critique

En 1781 parut, sans faire beaucoup de bruit, la *Critique de la raison pure* de Kant. Ce n'est qu'après la deuxième édition, 1786, et surtout la formidable publicité que lui fit son premier vulgarisateur et commentateur, Reinhold, avec les *Lettres sur la philosophie kantienne* (*Briefe über die kantische Philosophie*, 1786-87), que Kant s'imposa comme penseur révolutionnaire. En effet, sa critique, sa séparation du domaine de l'entendement, c'est-à-dire de la science, de celui de la raison, c'est-à-dire de la métaphysique, fonda l'autonomie du sujet connaissant. Au début du grand mouvement de l'idéalisme allemand, c'est-à-dire de la prise de conscience par le sujet connaissant de sa liberté, il y a donc une tentative de fondement élaborée uniquement par un retour de la pensée sur elle-même. Mais très vite, dès Reinhold, les commentateurs essayèrent de dépasser le dualisme instauré par Kant entre sujet et objet. Il est difficile de donner une idée de l'espoir suscité par Kant, dans le public cultivé allemand, de pouvoir ériger un système philosophique cohérent donnant un cadre définitif à l'activité libre de l'esprit englobant naturellement l'activité scientifique. Cette attente dura jusqu'en 1794, lorsque Fichte, pendant que la France était encore en pleine turbulence révolutionnaire, fit paraître une série de cours dont le retentissement fut énorme, puisque cet ouvrage est à l'origine du préromantisme et de la grande tentative de l'idéalisme allemand de fondement absolu de la pensée : *La doctrine de la science*.

4.3 Fichte et l'aspiration au fondement absolu

Il faut citer le titre en allemand pour en prendre la véritable mesure et s'apercevoir que Hindenburg était bien modeste par rapport aux prétentions de l'ouvrage de Fichte : *Die Grundlage der gesammten Wissenschaftslehre*, c'est-à-dire le fondement de toute la doctrine de la science, le terme « Wissenschaftslehre » étant en fait équivalent à « Wissenschaftswissenschaft », c'est-à-dire à une mise à la puissance de la science. Depuis 1794, donc deux ans avant la parution de *Der polynomische Lehrsatz*, la vie intellectuelle allemande était sous le choc, durable, d'une tentative de fondement total de la pensée. Or il se trouve que les conceptions de Hindenburg sur le fondement des mathématiques sont bien proches des idées développées par Fichte dans la première édition de la *Doctrine*.[7] Considérons quelques éléments communs à Hindenburg et à Fichte. Il s'agit non seulement de caractériser la pensée de Fichte, mais aussi l'effet, l'impression produits par cette pensée sur un esprit réceptif dans le contexte de l'époque, comme l'expriment si bien ces quelques lignes tirées de *De l'Allemagne* de Madame de Staël (1810) : « Fichte est dans les idées abstraites une tête mathématique comme Euler ou Lagrange ». [Staël, 1968, 2, 148]

Il y a tout d'abord la recherche du fondement de tout savoir (Fichte) et de tout raisonnement ultérieur. Fichte le déclare dès la première phrase de la *Doctrine*, Hindenburg y fait régulièrement allusion, surtout à partir de 1796.[8] On peut d'ailleurs constater chez les deux auteurs une tendance à la répétition et à la reprise de cette même idée dans un but pédagogique d'explication et de vulgarisation.

Ce fondement doit être absolu chez Fichte, à quoi correspond l'exigence mathématique de Hindenburg de partir de l'infini (« multinôme » se dit en allemand « *Infinitinom* »). En cela, tous deux se situent dans une logique de dépassement qui a marqué l'après-Kant dès ses premiers exégètes, Reinhold et Maïmon [Maïmon 1790]. Pour Fichte, il s'agit de dépasser la philosophie critique de Kant et sa limitation par la chose en soi, chez Hindenburg il faut aller au-delà du binôme en démontrant le multinôme pour l'adopter ensuite comme point de départ.

Tous deux partent d'une formule : chez Fichte, A=A, chez Hinden-

---

[7] A partir de la phrase suivante et jusqu'à la fin du chapitre, le texte est pratiquement identique à un passage d'un article sur Hindenburg et Novalis, qui paraîtra prochainement dans un numéro de la revue *Alliage* consacré aux mathématiques.

[8] Le sous-titre de *Lehrsatz*, « le théorème le plus important de toute l'analyse », c'est-à-dire de l'analyse du fini *et* de l'infini, est programmatique à cet égard : pour Hindenburg, on doit pouvoir reformuler tout le calcul infinitésimal sur le mode de l'analyse combinatoire grâce au théorème du multinôme, c'est-à-dire que l'analyse combinatoire doit *fonder* le calcul infinitésimal. C'est bien dans ce sens que Jahnke comprend l'entreprise de Hindenburg [Jahnke, 1990, 177]. La fin de *Lehrsatz* confirme bien cette interprétation :

> L'**analyse combinatoire** a enfin levé le voile, et désormais plus rien n'est abandonné au hasard aveugle, à savoir **si** ou **quand** nous allons inaugurer la *Legem Naturae* [l'expression est de Moivre]. La voie qu'emprunte la déesse est indiquée partout clairement, et maintenant on peut la suivre d'un pied ferme et sûr. (*Lehrsatz*, 304)
>
> (Die **combinatorische Analysis** hat endlich den Schleyer aufgedeckt, und es bleibt hinfort nicht mehr dem blinden Ungefähr überlassen, **ob** und **wenn** es die *Legem Naturae* herbeyführen will. Die Spur, auf welcher die Göttinn wandelt, ist hier überall deutlich vorgezeichnet, und kann man sie nunmehr festen und sichern Fusses verfolgen.)

burg, le multinôme. Ces formules fondamentales acquièrent leur validité universelle par leur caractère algébrique : on part de lettres ou d'une combinaison de lettres que l'on peut ultérieurement interpréter. Mais au départ, seule la forme importe. La condition absolument nécessaire au fondement de la pensée, qu'elle soit philosophique ou mathématique, semble être le maximum d'abstraction.

Enfin, dernier élément constitutif de la théorie de nos deux auteurs : au commencement, il y a une action du sujet. Ce qui est expressément énoncé chez Fichte ne l'est naturellement pas par Hindenburg, mais il ne faut pas oublier que le fait de poser (« *setzen* » chez Fichte) le théorème du multinôme comme le théorème fondamental de l'analyse relève plus d'un acte de foi que d'une nécessité mathématique. Je pense que c'est l'audace et la réussite apparente de Fichte qui incita Hindenburg à sauter le pas et à faire sa déclaration de 1796 : dans ce climat de confiance en soi et d'optimisme, le sujet connaissant se sentait capable de prendre une telle décision. D'ailleurs, la tentative de Hindenburg était-elle si téméraire ? Fichte n'avait-il pas eu l'audace d'enfreindre l'interdit kantien en réduisant le monde au moi, et ne donnait-il pas l'impression de déduire le monde d'une formule aussi simple que $A = A$? Tout ne porte-t-il pas à croire, au vu de la réaction des grands esprits allemands de l'époque, que ce coup de force correspondait à une attente intellectuelle profonde ? Comparé à ce qu'on pourrait qualifier d'*hybris* fichtéenne, le fait de déduire les mathématiques pures, c'est-à-dire celles qui font totalement abstraction du monde extérieur, d'une formule exprimant l'infini, n'était-il pas incommensurablement plus modeste ?

Conclusion : l'Ecole combinatoire : entre optimisme leibnizien et enthousiasme fichtéen

On comprend mieux, en mettant Hindenburg directement en rapport avec le formidable enthousiasme de la pensée abstraite fichtéenne, comment sa foi dans le formalisme put s'en trouver confirmée. Je pense que c'est la conjonction improbable de deux philosophies, l'une antérieure, l'autre postérieure au kantisme, et toutes deux incompatibles avec lui, qui, sous l'effet catalyseur de la démonstration du théorème de l'inversion des fonctions, mobilisa et rassembla les énergies autour de la personne de Hindenburg : l'une, forte d'une solide tradition mais mise à mal par le criticisme kantien, c'est-à-dire l'optimisme combinatoire leibnizien, l'autre, nouvelle, pleine d'énergie juvénile et de confiance en soi, érigée comme dépassement du dualisme kantien, le formalisme fichtéen de la *Doctrine* de 1794. Cependant, de même que Fichte dut, sur le plan purement philosophique, céder la place à Schelling qui proposait une nouvelle voie, alors que lui-même tentait d'expliquer et de vulgariser sa pensée sans relâche, de même l'analyse combinatoire en tant qu'objet de recherche perdit rapidement du terrain et n'apporta plus grand-chose de nouveau après 1800.

L'année 1801 sonna le glas de l'analyse combinatoire. Le coup décisif lui fut porté de l'intérieur, car c'est justement l'un des vulgarisateurs les plus actifs de l'analyse combinatoire, Weingärtner, qui contribua le mieux à réduire à néant les efforts de Hindenburg. Weingärtner, en effet, écrivit avec Stahl les premières introductions à l'analyse combinatoire, mais dès 1801, il mit, lors de l'exposition du théorème de l'inversion des fonctions, la démonstration récurrente et la démonstration dite « indépendante », c'est-à-dire fondée selon les exigences de Hindenburg, sur un pied d'égalité [Weingärtner, 1801, 342-373]. Cela revenait à nier l'importance du théorème du multinôme comme fondement de l'analyse. L'analyse combinatoire devenait alors une simple école de pensée, et quand eut lieu la réforme Humboldt, elle fut réduite à une sorte d'introduction à l'enseignement mathématique. La deuxième raison de sa faillite est bien sûr la publication des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss, avec lesquelles commence un nouveau chapitre des mathématiques allemandes et des mathématiques en général.

Finalement, l'histoire des mathématiques a eu raison de retenir *Der polynomische Lehrsatz* comme étant l'œuvre principale de Hindenburg, de même que la *Doctrine de la science* est bien l'œuvre principale de Fichte : toutes deux sont un programme irréalisable, et c'est sans doute leur aspect programmatique et prometteur d'absolu qui exerça une véritable fascination en Allemagne pendant les dernières années du 18ème siècle.

Bibliographie

Abel, Niels Henrick

1881 Recherches sur la série $1 + (m/1)x + \dots$, *Œuvres complètes* : Christiania, 1881, volume 1, 219-250 ; réédition Paris : Jacques Gabay, 1992.

D'Alembert, Jean le Rond

1758 *Essai sur les éléments de philosophie*, Paris ; cité d'après *Œuvres complètes*, tome 1, Paris : Belin, 1821 ; réédition Paris : Fayard, 1986.

BERKELEY, GEORGE

1734 *The Analyst*, London ; réédité dans *The Works of George Berkeley*, volume 4, Londres, 1951.

BOUTROUX, PIERRE

1920 *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris ; réédition Sceaux : Jacques Gabay, 1992.

CAJORI, FLORIAN

1928-1929 *A History of Mathematical Notations*, deux volumes, La Salle, Chicago ; réédition New York : Dover Publications, 1993.

CANTOR, MORITZ

1907-1908 *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik.* Quatre volumes, Leipzig : Teubner, 1907-1908.

CASTILLON, JOHANN

1742 Article sans titre paru dans les *Philosophical Transactions.*

CAUCHY, AUGUSTIN

1811 Sur les limites des connaissances humaines, *Œuvres complètes*, série 2, tome 15, Paris : Gauthier-Villars, 1974, 5-7.

1821 *Cours d'analyse*, Paris, réédition Sceaux : Jacques Gabay, 1989.

CLAIRAUT, ALEXIS-CLAUDE

1746 *Élémens d'Algèbre*, Paris.

COLSON, JOHN

1737 *The Method of Fluxions and Infinite Series, by the Inventor, Sir Isaac Newton*, Londres.

DAHAN-DALMEDICO, AMY ET PEIFFER, JEANNE

1986 *Route et Dédales. Une histoire des mathématiques*, Paris : Seuil.

DIEUDONNÉ, JEAN

1978 *Abrégé d'Histoire des Mathématiques*, deux volumes, Paris : Hermann.

DELAMBRE, JEAN-BAPTISTE JOSEPH

1810 *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789*, Paris. Réédition Paris : Belin, 1989.

EULER, LEONHARD

1748 Introductio ad analysin infinitorum, *Opera omnia*, Leipzig : Teubner, 1911-1936, série 1, 8, traduction Paris : ACL, 1987.

1755 Institutiones calculi differentialis, *Opera omnia*, 1, 10.

1774 Demonstratio theorematis neutoniani, *Opera omnia*, 1, 15, 207-216.

1776 Nova demonstratio quod evolutio potestatum binomii newtoniana etiam pro exponenibus fractis valea, *Opera omnia*, 1, 16, 112-121.

1779 De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque exprimi potest, *Opera omnia*, 1, 16, 162-177.

Eschenbach, H. C. V.

1789 *Dissertatio de serierum reversione formulis analytico-combinatoriis exhibita*, specimen, Leipzig.

Fichte, Johann Gottlieb

1794 *Die Grundlage der gesammten Wissenschaftslehre*, Leipzig, réédition Hamburg : Felix Meiner Verlag, 1979.

Friedelmeyer, Jean-Pierre

1994 Le calcul des dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du 18^{e} siècle, *Cahiers d'Histoire & de Philosophie des Sciences* N° 43 : Nantes, Presses Univ. Nantes.

1997 La création des premières revues mathématiques, *Philosophia Scientiae*, volume 2, cahier 3 : Nancy, 1997, 1-26.

Gauss, Carl Friedrich

1801 *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig ; réédition Sceaux : Jacques Gabay, 1989.

Gerhardt, C. I.

1877 *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München.

Gillipsie, C. C. (éd.)

1970-1980 *Dictionary of Scientific Biography*, New York.

Haas, J. et Schmid, H. L. (éd.)

1974 *Mathematisches Wörterbuch*, Berlin et Stuttgart.

Heine, Heinrich

1855 *De l'Allemagne*, Paris. Réédition Paris : Gallimard, 1998.

Hindenburg, Carl Friedrich

1778 *Methodus nova et facilis serierum infinitarum exhibendi dignitates exponentis indeterminati* [...], Göttingen.

1779 *Infinitomii dignitatum exponentis indeterminati historia leges ac formulae* [...], Göttingen.

1781 *Novi systematis permutationum combinationum ac variationum primas lineas* [...], Leipzig.

1781-85 *Leipziger Magazin für Naturkunde, Mathematik und Astronomie*, Leipzig.

1786-88 *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik*, Leipzig.

1795-1800 *Archiv für die reine und angewandte Mathematik*, Leipzig.

1796-1803 *Sammlung kombinatorisch-analytischer Abhandlungen*, Leipzig.

Jahnke, Hans Niels

1990 *Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform*, Göttingen.

Kästner, Abraham

1758 *Theorema binomiale universaliter demonstratum*, Göttingen.

1761 *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, Göttingen.

Kant, Immanuel

1781 *Kritik der reinen Vernunft*, Königsberg, réédition Hamburg : Felix Meiner Verlag, 1998 ; traduction Paris : PUF, 1971.

Klügel, G. S.

1770 *Analytische Trigonometrie*, Braunschweig.

1803-08 *Mathematisches Wörterbuch*. Leipzig.

Lagrange, Joseph Louis

1759 Lettre à Euler du 24 novembre, *Oeuvres*, Paris : 1867-1892, volume 14, 173.

1781 Lettre à d'Alembert du 21 septembre, *Oeuvres*, 13, 368.

1797 *Théorie des fonctions analytiques*, Paris. *Oeuvres*, 9.

Laplace, Pierre Simon

1796 *Exposition du système du monde*, Paris ; réédition Paris :Fayard, 1984.

Leibniz, Gottfried Wilhelm

1666 *Dissertatio de Arte Combinatoria*, Leipzig ; traduction Paris : *Oeuvre mathématique autre que le calcul infinitésimal*, Paris : Blanchard, 1986, fascicule 1, 111-169.

L'Huilier, Simon

1795 *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris*, Tübingen.

Maïmon, Salomon

1790 *Versuch über die Transzendentalphilosophie*, Berlin ; traduction *Essai sur la philosophie transcendantale*, Paris : Vrin, 1989.

Mehrtens, Herbert

1981 Mathematicians in Germany circa 1800, in *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, Jahnke et Otte éds., Dordrecht, Boston, London : Birhäuser, 1981, 401-420.

NETTO, EUGEN

1901 *Lehrbuch der Combinatorik,* Leipzig : Teubner, réédité d'après la deuxième édition de 1927, New York, s.d.

1908 *Kombinatorik*, [Cantor, 1908, 4, 201-221].

PENSIVY, MICHEL

1987-88 Jalons historiques pour une épistémologie de la série infinie du binôme, *Sciences et techniques en perspective*, Nantes : 1987-88, volume 14.

PFAFF, JOHANN FRIEDRICH

1795a Analysis einer wichtigen Aufgabe des Herrn de la Grange, Leipzig : *Archiv für die reine und angewandte Mathematik*, 1, cahier 1, 81-84.

1795b Ableitung der Lokalformel für die Reversion der Reihen, aus dem Satze des Herrn de la Grange, Leipzig : *Archiv für die reine und angewandte Mathematik*, 1, cahier 1, 85-88.

2002 Site internet réalisé par G. Betsch :
`http://www.mathematik.uni-halle.de/history/pfaff/index.html`

PLESSNER, HELMUTH

1959 *Die verspätete Nation*, Frankfurt am Main : Suhrkamp, 1992.

REIFF, R.

1889 *Geschichte der unendlichen Reihen*, München.

REINHOLD, KARL LEONHARD

1786-87 Briefe über die kantische Philosophie, parues dans le journal *Teutscher Merkur* ; réédition Leipzig : Reclam, 1923.

ROTHE, H. A.

1793 *Formulae de serierum reversione demonstratio universalis signis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita*, Leipzig.

STAËL, GERMAINE DE

1810 *De l'Allemagne*, Paris ; réédition Paris : Garnier-Flammarion, 1968.

STAHL, C. D. M.

1800 *Grundriss der Combinationslehre, nebst deren Anwendung auf die Analysis.* Jena/Leipzig.

WEINGÄRTNER, JOHANN CHRISTOPH

1800-01 *Lehrbuch der combinatorischen Analysis, nach der Theorie des Herrn Professor Hindenburg ausgearbeitet*, Leipzig.