Préface

Philippe Nabonnand
Université Nancy 2, LPHS – Archives Poincaré

La question des fondements des mathématiques réfère la plupart du temps aux débats concernant les diverses tentatives de définir un cadre formel à l'activité mathématique, proposées par les mathématiciens à la fin du 19^{e} siècle et au début du 20^{e} siècle. La conjonction des progrès de la logique, de l'arithmétisation de l'analyse et des travaux sur les axiomatisations des géométries ont imposé un cadre théorico-historique bien particulier à la « crise des fondements » du début du 20^{e} siècle : la notion de fondement en mathématiques est liée aux problèmes posés par l'utilisation de l'infini actuel, aux rapports entre logique et théorie des ensembles et plus généralement au statut du formalisme mathématique. Cette crise a débouché sur la formalisation de l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel qui, qu'on le veuille ou non, reste le fondement formel de la pratique de la plupart des mathématiciens. Encore de nos jours, l'essentiel des réflexions historiques ou systématiques sur les fondements se place dans ce cadre conceptuel. De nombreux travaux sur l'histoire des fondements des mathématiques laissent supposer que les mathématiciens n'ont commencé à s'intéresser aux fondements de leur discipline qu'avec les paradoxes de la théorie naïve des ensembles.

Or à toutes les époques, les mathématiciens ont cherché sinon à donner un statut aux objets qu'ils manipulent ou construisent, au moins à justifier leurs méthodes. Ainsi, comme le montre Brendan Larvor (*Proof in C17 Algebra*), l'émergence de la notion de preuve algébrique est l'objet de discussions très vives entre les tenants de l'orthodoxie géométrique et ceux qui se rendaient à l'évidence que nombre de résultats algébriques ne pouvaient être prouvés géométriquement. Les travaux de Hindenburg s'inscrivent clairement dans une visée fondatrice puisque, comme Philippe Seguin (*La recherche d'un fondement absolu des mathématiques par l'Ecole combinatoire de C.F. Hindenburg*) le rappelle, il ne s'agissait, dans l'idée de Hindenburg, rien moins que d'asseoir l'analyse et l'algèbre sur une nouvelle discipline : l'analyse combinatoire. Ces deux exemples que l'on pourrait multiplier, montrent que pendant longtemps, la question des fondements des mathématiques s'est concentrée sur celle des méthodes ; cependant, les points de vue fondateurs des algébristes du 17^{e} siècle et ceux de Hindenburg à la fin du 18^{e} sont radicalement opposés : en effet, pour Viète, Harriot ou Pell, il s'agit de définir les règles, les notations et les types de manipulation qui sont valides alors que déjà chez Hindenburg, l'idée d'une discipline fondatrice de l'ensemble des mathématique apparaît. Que l'objet de cette discipline fondatrice soit la combinatoire peut être considéré comme symptomatique de l'idéal combinatoire du 18^{e} siècle.

Dans une certaine mesure, on retrouve le même esprit combinatoire dans les travaux mathématiques de Grassmann. Comme Hindenburg, Grassmann se réfère à la *Caractéristique* de Leibniz et il semble avoir été influencé, par l'intermédiaire du philosophe Fries, par le point de vue de Hindenburg. Dominique Flament (*H.G. Grassmann et l'introduction d'une nouvelle discipline : l'Ausdehnungslehre*) montre que sa présentation des mathématiques pures comme une théorie générale des formes amène Grassmann à concevoir et construire une «nouvelle branche purement abstraite de la mathématique» consacrée à l'étude des formes combinatoires et continues, l'*Ausdehnungslehre*, dont une des applications sera la géométrie. Les démarches fondatrices de Hindenburg et de Grassmann apparaissent originales dans la mesure où la construction de la discipline fondatrice s'effectue essentiellement dans le calcul.

Au contraire, Cantor fonde sa théorie des ensembles à partir de la définition des notions d'ensemble et d'infini. La validité des méthodes mathématiques est assurée par la pertinence des définitions de base. Ainsi, l'utilisation de l'infini en mathématiques est justifiée par sa définition. Christian Tapp (*Philosophical Aspects of the Background to Cantor's Theory of Sets*) montre que les soucis de Cantor au sujet des fondements concernent l'appréhension des notions de base de sa théorie ; il suit les différentes positions que Cantor défend entre 1886 et 1895 et montre que sa position philosophique ne peut pas se réduire comme on le fait trop souvent au platonisme.

Les différentes conceptions de l'activité de fondements sont analysées par José Ferreirós (*Dogmas and the Changing Image of Foundations*) qui entre le début du 19^{e} siècle et nos jours, en distingue trois : les deux premières correspondent d'abord aux postures adoptées par les mathématiciens qui, comme Gauss, Dedekind, Frege ou Cantor, portent le projet d'arithmétisation des mathématiques au long du 19^{e} siècle et de fondements logiques ; cette position trouve son achèvement formel avec les axiomatiques de Peano, Russell ou Zermelo. Une nouvelle conception de l'activité de fondements, héritée de la première, émerge avec le programme de Hilbert et la théorie des systèmes formels. José Ferreirós oppose à ces deux conceptions qu'il qualifie de traditionnelles, une vision historiciste défendue par Riemann, Poincaré, Weyl ; la différence essentielle entre ce point de vue et les précédents est qu'il ne s'agit plus de découvrir des structures cachées supposées données a priori mais d'approfondir (et en particulier, généraliser) les cadres conceptuels et méthodologiques de la pratique des mathématiciens.

Russell s'inscrit, malgré l'originalité de sa position, dans la première tradition. Anne-Françoise Schmidt (*Perspectives hétérodoxes de Russell sur la question des fondements*) revient sur le logicisme de Russell ; pour Russell, la logique est une science dont l'objet est la mathématique, et si le calcul logique et les notions fondamentales de la logique peuvent être découverts par une auto-analyse des mathématiques, pour autant, la logique ne constitue pas un fondement des mathématiques puisque le développement des divers domaines mathématiques nécessitent l'introduction de définition. Jacqueline Boniface (*Leopold Kronecker's Conception of the Foundations of Mathematics*) montre que au contraire des opinions convenues au sujet de sa position sur les fondements, fonder les mathématiques pour Kronecker concerne beaucoup plus les méthodes mathématiques que les objets, ce qui est complétement cohérent avec sa vision des mathématiques comme science empirique et plus généralement avec son exigence épistémologique d'autonomie des disciplines. Cette dernière exigence l'amène à chercher les fondement des mathématiques pures (qui se réduisent dans son esprit à l'arithmétique) exlusivement à l'intérieur du champ mathématiques. La théorie des corps de nombres développée par Kronecker illustre que celui-ci est plus proche en ce qui concerne les fondements, d'une conception historiciste telle que la définit José Ferreirós.

Dans cette perspective, Volkert Peckhaus (*Pro and Contra Hilbert : Zermelo's Set Theories*) montre que Zermelo soutient les positions de Hilbert sur la question des fondements tant qu'il s'agit d'approfondir la question de l'usage des ensembles en mathématiques et en particulier de résoudre les problèmes posés par les paradoxes. Lorsque Hilbert développe dans les années 1930 son programme de fondement, Zermelo ne peut le suivre, refusant de choisir entre le finitisme mathématique de Brouwer et celui métamathématique de Hilbert. Il se lance au contraire dans un approfondissement du cadre axiomatique qu'il avait défini vingt ans auparavant. Approfondir, élargir le cadre conceptuel de la pratique mathématique, c'est la posture en matière de fondement des mathématiques que revendique Roger Apéry lorsque il affirme que « [...] l'école constructiviste, loin de renier aucun des résultats des mathématiques classiques, pose les problèmes de façon plus fine ». Pierre Ageron (*La philosophie mathématique de Roger Apéry*) revient sur l'intérêt de Roger Apéry pour la théorie des catégories ; la formulation par Apéry de cette théorie prouve qu'il inscrit complétement celle-ci dans la pratique mathématique et qu'il la conçoit comme une alternative aux conceptions formalistes et\ou structuralistes des fondements. Il est certain que Brouwer n'aurait pas souscrit à l'opinion de Apéry sur les rapports entre mathématiques intuitionnistes et mathématiques classiques. Néanmoins, l'exemple de la notion de suite de choix introduite dès 1927 par Brouwer illustre parfaitement que l'irruption du point de vue intuitionniste dans la pratique mathématique peut être vue comme un enrichissement de l'approche classique. Joop Niekus (*Individual Choice Sequences in the Work of L.E.J. Brouwer*) nous montre une manière de traiter cette notion en évitant de recourir à l'interprétation idéaliste du sujet créateur, retrouvant ainsi la perspective adoptée en 1927 par Brouwer.

Une voie alternative de pratique des mathématiques est celle adoptée par les tenants de l'analyse non-standard ; que ce soit l'école de Robinson ou celle de Nelson-Reeb, il s'agit pour fonder cette pratique, d'ajouter aux objets classiques soit de nouveaux nombres, soit un nouveau prédicat à partir duquel on peut construire les nombres infinitésimaux. Même si la présentation adoptée par Nelson semble plus constructive, le problème de donner un sens à ces nouvelles entités restent entier. C'est dans cette perspective que Yves Péreire (*Le replacement du référent dans les pratiques de l'analyse issues de E. Nelson et de G. Reeb*) compare les pratiques de référentiation dans le cadre conventionnel et dans celui non-standard, montrant que l'on peut rapprocher le point de vue non-standard de l'usage des langues naturelles.

Jean Louis Gardies (*Les mathématiques grecques sous le regard de la théorie des types*) nous propose de relire les *Éléments d'Euclide* à la lumière de la logique des types. Cette approche fait ressortir que les quatre premiers livres restent strictement au niveau le premier ordre logique et qu'ils rassemblent tous les résultats que l'on peut obtenir avec une base aussi restreinte. La notion de raison entre deux grandeurs, introduite au livre V, est donc du second ordre mais Jean Louis Gardies montre que la définition de cet objet du second ordre s'effectue malgré tout avec des objets du premier ordre. La conclusion de Jean Louis Gardies est qu'en droit, les six premiers livres, soit l'ensemble de l'exposé de la géométrie plane, restent au moins en droit (au prix certes d'un coup de génie grammatical comme le définit Jean Louis Gardies) dans les limites du premier ordre logique. Pour l'arithmétique, en traitant les nombres comme de simples individus, l'exposé euclidien de l'arithmétique évite le risque de paradoxes tout en restant aussi dans le cadre du premier ordre. Le prix à payer est une stricte étanchéité entre géométrie et arithmétique. Outre l'intérêt philosophique et historique des thèses défendues par Jean Louis Gardies, — par exemple, on peut noter que cette lecture permet de rendre compte de la présence de deux démonstrations du théorème de Pythagore, la première dans le cas particulier des carrés, la seconde dans le cas général — l'article de Jean Louis Gardies est aussi remarquable d'un point de vue méthodologique : soumettre ainsi la lecture d'un texte à une logique comme celle des types permet de repérer à quel ordre logique le texte se situe, d'en proposer une interprétation qui fait apparaître dans le cas du traité euclidien des cohérences subtiles au niveau de la construction. Il n'y a pas lieu de craindre avec une telle procédure le défaut d'anachronisme : en effet, il ne s'agit pas d'une réécriture, tâche dont l'intérêt serait, au moins d'un point de vue historiographique, douteux mais de faire apparaître un nouveau niveau de lecture et donc de nouvelles manières d'interroger les textes.

Les textes qui suivent sont issus des conférences des sessions historiques du colloque *Philosophical Insight in Logics and Mathematics* (Nancy — 30/09-04/10 2002) organisé par les Archives Henri Poincaré (Université de Nancy 2 – CNRS-UMR 7117) et la Beth Foundation. Jean-Louis Gardies nous avait fait l'honneur de donner une conférence plénière lors de ce colloque. Ce volume est dédié à la mémoire de ce philosophe qui a fait œuvre d'historien en renouvelant l'analyse de nombreux textes classiques et en proposant, comme on vient de le voir dans sa contribution à cet ouvrage, des modes de lecture originaux.