Des fondements vers l'avant. Sur la rationalité des mathématiques et des sciences formalisées [*]

Michel Paty [†]
Equipe REHSEIS (UMR 7596), CNRS et Université Paris 7-Denis Diderot, Centre Javelot, F- 75251 Paris-Cedex 05.

Résumé : L'insuffisance du logicisme pour la question des fondements des mathématiques nous invite à la poser sous un point de vue *épistémologique*, en termes de *rationalité* et non plus seulement de *logique*, et à l'étendre aux sciences formalisées portant sur la nature, comme la physique, voire à la pensée scientifique en général. On doit tenir compte, dans tous les cas, des changements qui correspondent à des constructions conceptuelles : ce sont eux qui assurent en même temps, après coup, le bien-fondé des théories qui les ont préparés, en sorte que si des fondements rationnels peuvent être obtenus, ce n'est, en règle générale, que « vers l'avant ». Ces changements posent également la question de leurs conditions de possibilités. La conclusion est qu'il faut admettre, pour que ces changements, et avec eux un accroissement de la connaissance, soient possibles, des transformations corrélatives dans les formes mêmes de la rationalité, mathématique, physique et, d'une manière générale, de la rationalité scientifique.

Abstract : *Forward foundations. On the rationality of mathematics and of formalized sciences.* — The failure of logicism for the question of foundations of mathematics invites us to consider this question under an *epistemological*

∗. *Contribution au Colloque International « Aperçus philosophiques en logique et en mathématiques. Histoire et actualité des théories sémantiques et syntaxiques alternatives »*, Nancy, 30 sept.-4 oct. 2002 (le 1er octobre).

†. Courriél : paty@paris7.jussieu.fr

Philosophia Scientiæ, 9 Cahier 2, 2005, 109–130.

point of view, in terms of *rationality* and not only of *logic*, and to extend it from mathematics to formalized sciences bearing on nature, such as physics, and even to scientific thought in general. One must take into account, in all cases, changes which correspond to conceptual constructions : they secure at the same time, afterwards, the well-foundedness of the theories which have prepared them ; consequently, we should admit as a general rule that rational foundations can only be obtained "forward". These changes ask also the question of their conditions of possibility. We get the conclusion, for such changes to be possible and together with them enhancement of knowledge, that one must admit correlated transformations in the very forms of rationality, mathematical ones, physical ones and of scientific rationality in general.

1 Introduction

Je voudrais aborder la question des fondements d'un point de vue épistémologique, différemment du point de vue logique proprement dit et de la philosophie de la logique, en considérant non seulement les mathématiques, mais également les sciences qui leur sont directement apparentées, soit formelles (comme la physique mathématique), soit formalisées (la physique théorique, avec aussi l'astronomie et la cosmologie) ou non formalisées (comme d'autres sciences de la nature, ainsi que sociales), pour voir dans quelle mesure cela a un sens de considérer aussi pour elles la question de leurs « fondements ». Je m'attacherai, en particulier, aux aspects conceptuels, c'est-à-dire ce qui concerne les concepts et relations de concepts (et par là la structure des théories), en n'oubliant pas leur nature évolutive et donc leur dimension historique.

Il est clair que ce qui est visé par ce biais ce sont *des fondements rationnels*, et non plus simplement logiques, quitte à remettre en chantier les deux notions de *fondement*, d'une part, souvent liée implicitement à un sens logique, et de *rationalité*, d'autre part, conçue comme une norme structurante mais sans être plus précisément définie.

Après une évocation de quelques leçons que l'on peut tirer des problèmes de fondement (logique) des mathématiques, je m'arrêterai en premier lieu à la question de leur rationalité et de la confrontation de cette rationalité à l'évolution des mathématiques. Cette évolution consiste en un élargissement des mathématiques, de leurs objets et de leurs opérations, qu'il n'est possible de concevoir que moyennant un élargissement corrélatif des formes mêmes de la rationalité mathématique qui les soustend et les légitime.

De là, nous passerons à la physique, qui entretient, parmi les « sciences de la nature », un rapport privilégié avec les mathématiques. Ce rapport n'est pas tant un rapport d'« application », comme s'il ne s'agissait que de plaquer des relations mathématiques sur des résultats de mesures physiques, qu'un rapport de *constitution* et de *nécessité d'existence*, en ce sens que les mathématiques sont incorporées à la physique qui seulement avec leur aide peut penser ses objets et leurs relations. Un théorie physique est une élaboration *sui generis* de concepts quantitatifs en relation, et non pas une « traduction » en termes mathématiques de concepts qui pourraient être conçus de manière seulement « qualitative », entendue au sens de qualités sensibles. [1] Le sens physique des concepts physiques est indissociable de leur forme mathématique, et c'est ce qui fait le sens profond du renouvellement de la physique moderne à partir des XVII^e et XVIII^e siècles. J'examinerai quelle est la forme prise, dans cette discipline à la fois mathématisée et portant sur la nature, par les questions du type des fondements (par exemple, en considérant la notion de « complétude théorique »). Nous en tirerons une leçon également sur les formes de rationalité (physique) et sur leurs élargissements, que nous pourrons rapprocher de celle obtenue par la considération des mathématiques, et peut-être étendre aux sciences d'une manière générale, dans la mesure où celles-ci sont structurées rationnellement.

2 Approche épistémologique de la question des fondements

Il a toujours été impossible de trouver des fondements stables et définitifs pour les mathématiques et, à plus forte raison, pour les autres sciences formalisées, mais portant sur la "nature", que sont la physique mathématique et la physique théorique. Il s'agit de fondements logiques, qui seraient définis strictement : de la logique à l'arithmétique, de celle-ci aux autres disciplines mathématiques. Cette notion de fondement s'accompagne de l'idée *de fermeture logique*, de *complétude* du système des propositions.

En fait, la question des fondements est généralement posée pour les mathématiques pures, dans la mesure où elles sont indépendantes du

1. Paty [2001a et b]. C'est ici le sens ancien du mot « qualitatif », celui de la scolastique. Plus loin, nous l'emploierons dans un sens différent. Le sens du mot « qualitatif », tel qu'il est employé de nos jours pour désigner des concepts ou une approche, en physique théorique ou mathématique, n'est plus du tout le même que celui qu'il avait dans la physique pré-galiléenne, puisqu'il comprend désormais l'idée d'une représentation au moyen de grandeurs mathématiques. C'est, pour ainsi dire, *du qualitatif dans le quantitatif.*

monde empirique. Pour les sciences de la nature, une telle question impliquerait non seulement la *rationalité* des représentations, mais aussi la *réalité du monde*, puisque cette dernière est requise, par ses contraintes spécifiques, pour fonder les représentations que l'on s'en donne, sans quoi le monde ne serait que notre représentation, à quelque degré arbitraire et sans référence de légitimité propre.

La question des fondements telle qu'elle a été posée pour les mathématiques jusqu'au théorème de Gödel suppose une construction axiomatique des mathématiques qui les dissocie de toute attache à des disciplines traditionnellement liées à elles comme la physique mathématique ou la physique théorique. De cette dissociation, un exemple très clair est la géométrie axiomatique de Hilbert qui d'ailleurs, une fois posée, a eu pour effet de modifier les termes de la question du rapport de la géométrie à l'espace du monde physique : voir, à cet égard, les différences d'argumentation dans les débats entre, respectivement, Helmholtz et Poincaré, puis Reichenbach et Einstein, qui se situent, pour les premiers avant, pour les seconds après, la publication des *Fondements axiomatiques de la géométrie* de Hilbert. [2]

En corollaire, donc, à la question des fondements (logiques) des mathématiques (conçues axiomatiquement), la séparation des mathématiques d'avec les sciences qui « pensent par les mathématiques » se voit consommée, sur une base formelle. Et, plus généralement que pour la seule question des fondements logiques, il est fréquent de voir évacuer, dans les considérations fondamentales sur les mathématiques, le lien que celles-ci entretiennent avec d'autres sciences, y compris la physique. Cela vaut autant pour les disciplines scientifiques que, par contrecoup, pour la philosophie et l'histoire des mathématiques, ces dernières semblant maintenir encore, comme un effet de retard, une séparation d'avec leurs homologues sur la physique, que les sciences elles-mêmes ont désormais dépassé. [3]

Car les mathématiques ne sont pas coupées, ni par nature ni en pratique, des autres sciences, en particulier de la physique, ne serait-ce que par leur commun appel à la rationalité, et à la rationalité mathématique même, qui imprègne désormais la physique tout entière. Ce lien est en premier lieu un lien d'origine, puisque les mathématiques ont très longtemps tiré leur inspiration de la considération du monde naturel, physique. C'est d'ailleurs pour cette raison même que la question a été posée de savoir si la connaissance mathématique proprement dite, appa-

2. [Paty 1993a], chapitres 6 et 7.

3. Ceci est une revendication contre une certaine conception encore fort répandue aujourd'hui chez les historiens et les philosophes des mathématiques.

remment indépendante du monde empirique, n'est pas cependant elle-même une science fondée sur l'empirisme, venue, comme les autres, de l'expérience du monde et des sens. Mais la réponse que Poincaré a donné voici plus d'un siècle à cette question semble bien être toujours valable (si les propositions des mathématiques étaient d'origine seulement empirique, elles ne correspondraient pas à la certitude qu'on leur reconnaît [4]), à moins de considérer que les présupposés de la connaissance tout entière doivent être remis en chantier voire abandonnés, à commencer par l'idée même de vérité. Mais ce serait là trop cher payer la liberté d'examiner de manière critique la connaissance : nous garderons, du moins, l'*idée* de *vérité* ne serait-ce que pour sa fonction régulatrice, pour laquelle les mathématiques constituent toujours le meilleur guide, leur vérité étant celle-là même du *raisonnement*.

Reste à savoir si, les mathématiques étant désormais ce qu'elles sont, autonomes par leurs contenus et leurs méthodes, et les sciences de la nature (la physique) ce qu'on en sait, le rapport ne serait plus désormais que dans un sens : les mathématiques continuant de structurer la physique, mais ne trouvant plus dans cette dernière de source d'inspiration. En fait, il y a toujours eu fort peu de mathématiciens pour le penser, même dans la période la plus haute du formalisme et de l'axiomatique, et nous voyons depuis quelques années un retour très remarquable des mathématiques les plus novatrices vers les problèmes frontières de la physique quantique (géométries non commutatives, espaces algébriques d'opérateurs, etc.).

On pourrait continuer à invoquer un schéma d'ordre (de dépendance) hiérarchique et fondationnel tel que la rationalité mathématique fonderait la rationalité dans le sens courant, et celle-ci, à son tour, fonderait l'intelligibilité les sciences de la nature, « fondation » étant ici à entendre du point de vue de l'entendement (la question de leur autre pilier fondationnel dans la réalité restant par ailleurs posée). C'est en quelque sorte un schéma de cette nature qui était sous-jacent à la pensée de Frege. [5] Pour lui, le fondement logique de l'arithmétique (si un tel fondement était possible, ce qu'il espérait), entraînait pour celle-ci le statut de science générale du raisonnement sur des objets quelconques. De là s'ensuivait d'ailleurs son applicabilité à la réalité. Comme l'a bien écrit Peter Clarke : « A la question "Pourquoi l'arithmétique s'applique-t-elle à la réalité ?", le logiciste donne une réponse claire : "Parce qu'elle s'applique à tout ce qui peut être pensé." C'est la science la plus générale possible ». Et P. Clarke souligne : « Dans le cas le plus simple où la

4. [Poincaré 1902].
5. [Frege 1884].

question est soulevée - l'application des nombres cardinaux - la solution de Frege est que l'arithmétique peut s'appliquer à la réalité parce que les concepts, qui coiffent les choses, sont eux-mêmes coiffés par des concepts numériques ». [6] A tout concept, selon Frege, correspond un nombre. Mais la manière fregéenne de répondre à la question de l'applicabilité par sa conception du fondement est également liée au caractère pré-kantien de son réalisme, pour lequel les objets que décrit la pensée correspondent directement aux objets qui existent dans la réalité. Or des objets qui existent peuvent être comptés. La pensée commencerait par le comptage, et elle pourrait ensuite construire toutes choses à partir des nombres.

On objectera à Frege, comme à tous ceux qui après lui continuent de s'inspirer du programme fregéen même modifié, que les « objets » que la pensée scientifique (les mathématique, la physique, mais aussi les autres sciences) se propose de décrire ne lui sont jamais donnés directement et qu'elle ne les connaît qu'à travers des élaborations mentales et conceptuelles. Et les concepts par lesquels cette pensée scientifique représente ses « objets » (qui sont parfois seulement des propriétés, ou même des relations de propriétés) ne sont pas seulement des grandeurs numériques. Les nombres en tant que tels sont trop restrictifs pour pouvoir représenter toutes les sortes possibles d'objets (et de relations d'objets ou de propriétés) en mathématiques et dans les sciences mathématisées. Il est possible d'invoquer d'autres entités que des nombres ou des fonctions à valeurs numériques pour exprimer des concepts qui sont des grandeurs (ou des quantités), y compris des grandeurs continues : par exemple, des grandeurs géométriques ou algébriques, y compris différentielles, voire même d'autres, comme des vecteurs d'espaces abstraits (de Hilbert. . .), des opérateurs, etc. [7]

Ces grandeurs peuvent aussi fort bien ne pas être restreintes à celles qui relèvent de la « mesure » (au sens du XVII^e^ siècle, c'est-à-dire de proportions et de rapports) mais concerner la position relative (comme Descartes parlait de l'*ordre*, dans ses *Règles pour la direction de l'esprit* de 1627 : « l'ordre et la mesure », et Leibniz de la *situation* [8]). Ou encore, comme l'exprimerait Riemann dans sa dissertation de 1854 sur les fondements de la géométrie, à propos des propriétés des variétés, ces dernières ne sont pas seulement concernées par la métrique mais aussi par la topologie (*l'analysis situs*, d'abord développée par Riemann et à sa suite par Poincaré [9]).

6. [Clarke 2003].
7. [Paty 2003].
8. Voir [Paty 2001a].
9. Voir [Paty 2001a].

L'« applicabilité des mathématiques » (au sens de leur mise en IJuvre dans des problèmes et dans la pensée conceptuelle même) est directement reliée aux divers types possibles de grandeurs ou quantités qui peuvent être considérés dans le champ de cette « application » (comme la physique). Prenons, par exemple, le cas du raisonnement géométrique et, en particulier, l'étude qualitative des courbes représentées par des systèmes d'équations différentielles, telle que Poincaré l'a inaugurée vers la fin du XIX^e siècle.[10] La recherche des solutions exactes, par des nombres, se voit dépassée par celle des solutions « qualitatives » (types de comportements des solutions pour une famille de courbes, etc.), pour lesquelles le raisonnement s'avère avoir beaucoup plus de prise. Cet exemple montre comment le raisonnement mathématique (et, par voie de conséquence, le raisonnement dans d'autres disciplines scientifiques qui ont recours à la pensée mathématique) ne se restreint pas à des nombres ou à des solutions de systèmes d'équations dans le sens généralement admis.

On peut dire que l'impossibilité de *fonder* les mathématiques (et simplement l'arithmétique elle-même) *sur la logique pure* est, à tout le moins, cohérente avec cette constatation qui nous vient, de son côté, des leçons de la *pratique des mathématiques.*

3 L'élargissement des mathématiques et des formes de la rationalité mathématique

L'absence de fondement logico-rationnel pour les mathématiques pose à tout le moins la question de la *nature de la rationalité* qui est en jeu dans l'invention et le raisonnement mathématiques. A cet égard, l'histoire des mathématiques nous donne de riches renseignements. Elle montre, comme l'histoire des autres sciences, mais avec ses modalités spécifiques, un élargissement sans cesse plus grand de leur champ, de leurs objets, des types de relations entre ces objets et de leurs transformations, et des passages d'une branche des mathématiques à une autre, témoignant pour une *unité des mathématiques* qui se révèle chemin faisant et s'éclaire plus encore *a posteriori.*[11] Cela même fait bien voir que les formes de la rationalité qui opère en mathématiques ne sont pas uniformes et statiques, qu'elles ont été l'objet de modifications qui furent le plus souvent des élargissements. On peut effectivement rapporter directement les élargissements des mathématiques à des élargissements de la

10. [Poincaré 1889].
11. Voir [Lautman 1977], [Dieudonné 1977].

rationalité qui leur est sous-jacente : à y bien regarder, ce sont ces derniers qui rendent possibles les premiers. Le problèmes se pose dès lors de savoir quelle est la nature de ces changements et *élargissements de la rationalité*, ou du moins des *formes de la rationalité* mises en IJuvre dans le travail mathématique.

On voit d'ailleurs que si la rationalité (utilisons ce collectif pour signifier « les formes de la rationalité ») mathématique évolue, un fondement statique et absolu des mathématiques ne pouvait être qu'illusoire. A chaque état de cette rationalité devront, en effet, correspondre d'autres exigences ou d'autres modalités pour des fondements. Ceci ne présuppose, il convient de le souligner fortement, aucun « relativisme cognitif », puisque nous rapportons le bien-fondé de connaissances comme les mathématiques à la *rationalité*, qui ne cesse de demeurer elle-même, comme *fonction régulatrice de la pensée*, tout en se transformant et en se développant. [12]

Si la question des fondements peut continuer de se poser, ce n'est plus en termes de fondements logiques, mais de connaissance *rationnelle.* Souligner que le rationnel déborde le logique n'est, en un sens, pas une nouveauté. On trouve cette idée exprimée en des termes quelque peu différents chez des auteurs comme Henri Poincaré, David Hilbert, Jean Cavaillès. Poincaré se rapporte à l'« intuition », Hilbert et Cavaillès à un *raisonnement qui porte sur de l'intuitif.*

Poincaré exprimait la double exigence de la pensée, en mathématiques, qu'étaient à ses yeux d'une part la rigueur, du côté de la logique, de l'autre l'« intuition », que nous pouvons placer du côté de la raison (du moins selon une certaine interprétation de l'intuition selon Poincaré qu'il y aurait lieu de développer, ce que nous ne pouvons faire ici). [13] C'est par l'intuition, estimait Poincaré, que le monde mathématique a à voir avec le réel, alors même que c'est par l'éloignement de la réalité que les notions mathématiques parviennent à la rigueur, [14] quand elles sont réduites à la logique : on a atteint la rigueur « en restreignant de plus en plus la part de l'intuition dans la science, et en faisant plus grande celle de la logique formelle ». [15] Mais cette rigueur logique, si elle était seule,

12. Voir [Paty 2001d].

13. Paty [en préparation].

14. [Poincaré 1889].

15. Il en évoque en exemples les notions d'abord regardées comme primitives, irréductibles et intuitives, comme celles de nombre entier, de fraction, de grandeur continue, d'espace, de point, de ligne, de surface, etc. . . « Aujourd'hui, une seule subsiste, celle de nombre entier ; toutes les autres n'en sont que des combinaisons, et à ce prix on obtient la rigueur parfaite. » Et encore : « Nous ne démontrons plus que la surface est égale à l'intégrale, mais nous considérons l'intégrale comme la définition de

ne laisserait pas de place à l'*invention*, sans laquelle il n'y aurait pas de mathématiques. « Entre les facultés de l'esprit », poursuivait Poincaré, « l'intuition n'est pas la moins précieuse. C'est par elle que le monde mathématique reste en contact avec le monde réel ; et quand même les mathématiques pures pourraient s'en passer, il faudrait toujours y avoir recours pour combler l'abîme qui sépare le symbole de la réalité ». On notera que la remarque vaut non seulement concernant le monde réel matériel, mais aussi le monde de la « réalité mathématique » en ce qui concerne ses contenus propres (mais évidemment, le logicisme, auquel s'opposait Poincaré, ne concevait pas de « contenus mathématiques » plus riches que les symboles logiques). En bref, aux yeux de Poincaré, l'intuition est nécessaire pour le géomètre pur : « C'est par la logique qu'on démontre, mais c'est par l'intuition qu'on invente » ; et : « Sans [l'intuition], le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées ».

Quant à Hilbert lui-même, sa position à cet égard est bien éloignée du logicisme, puisqu'il écrit en 1922 : « Déjà Kant a montré que la mathématique dispose d'une matière assurée, indépendamment de toute logique et, par suite, ne pourra jamais être fondée par la logique seule, d'où l'échec de Frege et de Dedekind. Bien au contraire, la condition préalable pour l'application des *raisonnements* logiques est la présence d'un donné dans la représentation, certains objets concrets extra logiques qui *intuitivement* se trouvent là comme une expérience immédiate, antérieure à toute pensée. (...) Si la déduction logique veut être assurée, elle doit porter sur des objets embrassables du regard sur toutes les faces, tels que leurs signes distinctifs, leurs relations réciproques soient *intuitivement* donnés avec eux, comme quelque chose qui ne se laisse réduire à rien d'autre et qui n'en a pas besoin ».[16] En citant cette remarque de Hilbert, Cavaillès la commente de la façon suivante : « L'idée est bien kantienne, la mathématique est plus que la logique, en tant qu'elle est pensée effective, et que toute pensée effective suppose application de la pensée abstraite à une *intuition* ».[17]

Dès lors, si la logique est débordée par le rationnel et si celui-ci travaille sur des objets donnés dans l'intuition, quelle est l'instance qui pourrait assurer les fondements d'une science comme les mathématiques ? On voit, bien entendu, que le terme « fondements » doit être pris dans un

la surface. Cette notion de la surface, autrefois fondée sur l'intuition, ne nous paraît plus légitime par elle-même » ([Poincaré 1889]).

16. [Hilbert 1922, 170] (souligné par moi, MP) : traduit et cité par Jean Cavaillès dans [Cavaillès 1938, 91-92].

17. [Cavaillès 1938a, 91–92] (souligné par moi, MP).

sens plus large que celui de la formulation logique initiale, et qui inclue la garantie de légitimité sur la base de ce qui est connu et bien établi mais sans s'y restreindre. Il reste de l'idée initiale la pensée d'une vue unitaire et déductive pour les mathématiques (aussi bien que pour telle autre science considérée, notamment la physique), qui est inhérente à l'idée même de théorie. L'intelligibilité plus complète de cette science nous est donnée quand son assise est plus fondamentale.

Cette assise, Cavaillès la situe pour sa part dans la construction même des mathématiques, et dans ce qu'il appelle le « geste » de la pensée du mathématicien qui construit ses objets, lié à son « intuition », projetant des contenus. [18] On lit, dans ses *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* : « Rejeter ou fonder une théorie n'est travail définitif ni dépourvu de degrés ; (. . .) il ne peut s'opérer par simple investigation logique ; (. . .) les considérations pragmatistes du mathématicien militant ont le dernier mot ». [19] Ces « considérations pragmatistes du mathématicien » sont celles, en fait, de sa pratique, qui est un travail rationnel, sur du rationnel et par des moyens rationnels. Analysant la conception de Cavaillès de la création des concepts mathématiques, Gilles Gaston Granger souligne ce double trait : pour Cavaillès, le développement historique des mathématiques est *rationnel*, et il y a une *objectivité* du devenir mathématique. C'est, remarque Granger, le paradoxe fascinant de l'histoire des mathématiques, qu'elle est imprévisible quoique rationnelle. [20] Si le fondement des mathématiques se trouve, pour Cavaillès, dans leur élaboration même, ou peut-être, pour mieux dire, dans la perspective qu'ouvre cette dernière, c'est que, pour lui, il y a une immanence du rationnel mathématique qui se manifeste dans la construction même des mathématiques. footnote [21] Cette conception (dans une veine spinozienne) de l'immanence lui fait exprimer l'insuffisance du recours au sujet transcendantal et la nécessité d'en venir à ce qu'il appelle une « philosophie du concept ». On trouve, à la fin de son livre (écrit en prison, en 1942) *Sur la logique et la théorie de la science*, cette déclaration : « Ce n'est pas une philosophie de la conscience [à la Husserl] mais une philosophie du concept qui peut donner une doctrine de la science ». [22]

18. Cette notion de « geste » a été reprise et illustrée plus récemment par notre collègue et ami regretté Gilles Châtelet ([Châtelet 1993]).

19. [Cavaillès 1938b].

20. [Granger 2003, 81–92], chap. 8 (« Jean Cavaillès et l'histoire »).

21. [Cavaillès 1946].

22. [Cavaillès 1946]. Sur la vie de Cavaillès, son engagement dans la Résistance, son emprisonnement par le régime de Vichy, puis son assassinat par les nazis, voir Aglan et Azéma [2002].

Sous l'idée d'une « philosophie du concept », nous pouvons reconnaître une philosophie de la rationalité, qui porterait tant sur les contenus rationnels des concepts produits que sur l'activité rationnelle de construction de concepts. Si la direction est bien posée, en tenant ferme ce qui est obtenu au terme du processus de construction (le concept, avec son contenu rationnel), nous restons encore aux portes de la possibilité de concevoir une connaissance révisée, renouvelée, ou radicalement nouvelle, et de la voir effective et assurée. Nous pouvons suivre l'invite de Cavaillès et inventorier l'histoire de la genèse et du développement des concepts mathématiques pour y trouver la marque de leur nécessité immanente. Cavaillès indique que cette nécessité est dialectique.[23] Mais le terme est encore vague, et la question reste en suspens du rapport entre une philosophie du concept et les *conditions de possibilité* de structures théoriques *nouvelles* par construction de nouveaux concepts et relations de concepts. Nous avons évoqué plus haut l'idée que cette construction est rendue possible par un développement extensif concomitant des *formes de la rationalité mathématique* même, qui se transforme tout en gardant sa fonction d'opération et de lien, « différente et la même », c'est-à-dire élargie dans son identité que garantit le maintien de sa fonction. La condition de possibilité cherchée serait ainsi l'élargissement de ces formes, sinon de la rationalité mathématique elle-même.

Ce qui précède repose sur la prise en compte de la genèse et du développement historique des mathématiques : on obtiendra des indications sur les changements corrélatifs de la rationalité qui les sous-tend en examinant comment ces changements sont suscités par le mouvement des mathématiques dans leurs contenus mêmes, en considérant des cas précis, pris au long de l'histoire des mathématiques jusqu'aux travaux actuels. On peut, par exemple, reprendre les cas examinés philosophiquement par Gilles G. Granger dans son livre récent sur l'espace,[24] ou celui de l'intelligibilité des nombres irrationnels telle que Jules Vuillemin la problématise dans sa dernière conférence à la Société française de philosophie pour traiter de la question "Formalisme et réflexion philosophique".[25]

La leçon à en tirer, dans la ligne de la réflexion de ces auteurs poussée selon la perspective de l'immanence, est, me semble-t-il, que les réorganisations structurelles de la pensée théorique et conceptuelle qui donnent lieu à de nouvelles vues synthétiques peuvent être vues comme des *élargissements de la rationalité* qui les sous-tend, correspondant à la mise

23. [Cavaillès 1946, 23].
24. [Granger 1999].
25. [Vuillemin 2000].

en place de principes inédits d'explication rationnelle. Ces principes proviennent en général de l'expérience vécue du sujet connaissant , tout en visant, au-delà de ce dernier, une *représentation intrinsèque* du domaine pris pour objet. (Il peut s'agir, dans le cas d'un rapport à la description du monde naturel, comme nous le verrons d'éléments de connaissance empirique transmués en éléments rationnels par l'octroi d'une fonction théorique [26]). La structuration dynamique de ces éléments de rationalité permet des synthèses constructives ultérieures, et les connaissances nouvelles deviennent possibles.

4 Le rapport des mathématiques à la physique et de la physique aux mathématiques

Cela étant, nous pouvons maintenant revenir à la considération de cette source privilégiée de la pensée mathématique qu'a été de manière générale, dans les différentes cultures, la considération du monde extérieur, physique et sensible ; et en particulier, dans la science moderne comme dans la science contemporaine, la physique elle-même (dans le sens où nous la concevons aujourd'hui), qui entretient depuis sa constitution au XVII^e^ siècle, des liens privilégiés avec les mathématiques. Ce rapport entre les mathématiques et la physique, que l'on avait pu croire aboli par le cours plus abstrait et axiomatique des mathématiques durant une bonne partie du XX^e^ siècle (avec, par exemple, la Géométrie de Hilbert, la Théorie mathématique des probabilités de Kolmogorov, la formalisation axiomatique de Bourbaki, etc.) s'avère en fait à nouveau aussi étroit et fécond pour ces deux sciences que par le passé : il suffit d'évoquer les renouveaux de la physique mathématique, la Géométrie non-commutative de Connes, la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, les tendances récentes de la géométrie et de la topologie algébriques, etc...

Il est donc légitime de considérer que la physique mathématique et théorique n'est pas étrangère à l'« activité mathématique humaine », et que son rapport aux mathématiques et à la question de leur fondements est à prendre en considération au même titre que « les mathématiques (et les mathématiciens) d'autres cultures et leurs pratiques des fondements ». [27] Or, l'un des enseignements de la « pratique mathématique » que

26. [Paty 2001d].

27. Ces deux expressions sont reprises du texte de présentation du *Colloque International "Aperçus philosophiques en logique et en mathématiques. Histoire et actualité des théories sémantiques et syntaxiques alternatives"*, Nancy, 30 sept.-4 oct. 2002, où

l'on voit à l'IJuvre en physique mathématique et théorique concerne un aspect central du problème des fondements de la connaissance, tant en mathématiques et en physique qu'en général, qui est le rôle et la nature du rationnel à l'IJuvre dans cette connaissance.

Les philosophes des sciences parlent souvent de la physique comme d'une *science empirique* (du moins depuis les développements du positivisme et de l'empirisme logiques) mais cette expression ne laisse pas voir à quel point cette science possède un caractère profondément rationnel, qui se jauge à ses *contenus de sens* (ou *contenus sémantiques*, comme on dit en philosophie du langage), inséparables du caractère mathématique de leur formulation. Pour Hans Reichenbach, la physique, pour un domaine considéré, est constituée d'un donné empirique et d'une structure mathématique qui la recouvre, avec des relations de coordination entre les éléments du premier et les grandeurs de la seconde. On remarque que la physique théorique proprement dite n'est pas prise en compte dans un tel schéma, véritablement empiriste et formaliste, où la forme mathématique n'est conçue que comme directement plaquée sur le donné factuel empirique. Une théorie physique d'un domaine de phénomènes ne se ramène nullement à une mathématique directement appliquée au monde de l'empirie, mais constitue un système conceptuel *sui generis*. Si des relations de coordination y sont présentes, c'est au moment des définitions des grandeurs, conçues comme ayant une signification physique et une expression mathématique. Ce qui constitue ensuite la théorie physique proprement dite, ce qui fait la structure de la théorie et ses contenus conceptuels, c'est le jeu des relations de ces grandeurs, dicté par les propositions générales que sont les principes, ou parfois d'autres plus particulières, modèles ou lois phénoménales ou empiriques. Une telle théorie est une *conceptualisation rationnelle* par *mathématisation de concepts*, et la justification de cette dernière (c'est-à-dire la réponse à la question : pourquoi les grandeurs physiques sont-elles mathématiques ?) réside dans le processus de la première. [28]

Il est intéressant de trouver chez Cavaillès une formulation proche de celle que nous venons de suggérer, faite dans son cas à propos du logicisme. « La deuxième difficulté du logicisme », écrit-il, est « le problème posé par la physique ». Il précise que « la notion de coordination n'est pas en effet plus directement utilisable que celle de description mais au contraire la suppose : on ne coordonne que ce qui à même titre fait partie d'un ensemble supérieur, il n'y a coordination du physique au mathématique qu'après une mathématisation du physique, c'est-à-dire un

ce travail a été présenté.

28. Voir Paty [1994a, 1997, 1998, 2001a].

travail descriptif que le logicisme est impuissant à définir ».[29] Ce travail que Cavaillès donne comme *descriptif* - et qui est aussi bien *explicatif* - est assurément de *nature conceptuelle*, comme nous l'avons entendu, et relève donc de l'opération du rationnel.

La physique, dans le processus même de théorisation mathématique qui la constitue à des degrés toujours de plus en plus poussés, reste, par nécessité, toujours ouverte à l'« empirique » ; cependant, la modalité la plus dynamique de ce processus de théorisation semble bien être de faire que cet empirique devienne intelligible, selon des modalités de la pensée qui sont rationnelles. Autrement dit, pour devenir pleinement intelligible, cet empirique doit se « vêtir de rationnel », et même se *transformer* en du *rationnel.* Déjà, au premier stade de son expression relationnelle (même simplement empirique), la forme mathématique qui lui est donnée constitue un pas dans cette direction ; elle trouve en général sa justification plus complète dans des pas ultérieurs : par exemple, la forme de la force d'attraction newtonienne mutuelle des corps, généralisée au système solaire, voire à l'Univers. Partie du statut d'hypothèse, elle devient l'axe d'une théorie rationnelle qui décrit, explique et prédit. Il est fréquent en physique (c'est même une circonstance assez universelle) qu'une « loi factuelle » devienne principe d'explication à la faveur de transformations théoriques qui proposent une nouvelle perspective plus fondamentale que les précédentes, établissant ainsi un nouveau « fondement ».

On peut montrer que c'est bien, effectivement, dans ce sens que la connaissance opère, et non selon une dilution du rationnel dans l'empirique. Au terme, on voit que, dans cette science, la question des *fondements de la connaissance théorique* est un appel vers une connaissance plus complète attendue de découvertes futures, c'est-à-dire de nouveaux éléments de pensée rendant compte de quelque chose appartenant au monde, que nous ignorons, et que nous ne soupçonnons peut-être même pas aujourd'hui.

Et cependant, dans la conscience de cet inachèvement, le système des éléments de la connaissance actuelle manifeste une auto-consistance interne[30] qui lui permet de fonctionner comme une base suffisamment ferme (et quasiment stable) pour de nouveaux questionnements : de telle sorte qu'une intelligibilité est acquise, même si elle appelle une intelligibilité ultérieure plus grande. Cette intelligibilité tient à la transformation de l'élément d'abord externe et encore ignoré, puis porté à notre connaissance de manière empirique (en fait, empirique-hypothétique), et enfin

29. [Cavaillès 1946].
30. Voir [Paty 1992].

transcrit et exprimé en proposition rationnelle. Comme exemple, mentionnons la loi de l'attraction newtonienne, formulée d'abord de manière hypothétique-empirique puis portée, par Newton lui-même retrouvant à partir d'elle les lois de Képler, et plus encore par ses successeurs, d'Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Laplace à Lindset et Poincaré, à travers le traitement perturbatif du problème de l'interaction à trois corps, au rang de proposition centrale et pilier théorique du système de la mécanique céleste.[31] Cet élément (initialement « empirique ») est assimilé par la pensée rationnelle selon les modes d'opérativité de cette dernière, mais sans réduction à une forme antérieure. La pensée rationnelle, en quelque sorte, incorpore cet élément tout en se modifiant : elle en fait l'aliment même de sa modification disposé selon ses propres modalités.[32]

Ces remarques, faites à partir de considérations épistémologiques sur les concepts de la physique, leur structuration systémique et leurs évolutions, peuvent être enrichies de considérations sur la formalisation et sur l'axiomatisation des théories ainsi que sur la notion de complétude théorique.

L'axiomatisation, qui a perdu en mathématique même une grande partie de son attrait « fondationnel » et de ses perspectives novatrices, n'en reste pas moins un outil intellectuel de la plus grande utilité. Henri Cartan, l'un des chefs de file de l'école bourbakiste, écrivait, en 1981 : « En fait, la méthode axiomatique est surtout considérée aujourd'hui par les mathématiciens comme un mode de présentation des théories mathématiques, permettant une économie de pensée ; elle fait partie de l'hygiène du mathématicien qui travaille ».[33] L'axiomatisation constitue toujours un moyen d'analyse des propositions d'un système théorique, en mathématique comme d'ailleurs en physique mathématique, qui permet de mettre en évidence la structure de ce système et la dépendance relative de ses propositions.

Prenons la physique mathématique, qui est cette manière de considérer la théorie physique sous son aspect purement formel (en fait, purement mathématique, mais avec des principes et des concepts physiques fixés dans une signification établie), et d'en faire ainsi, dans les conditions particulières d'une analyse systémique, un substitut de la physique proprement dite.[34] On peut pousser plus loin la formalisation en axio-

31. Cet exemple est discuté sous ce rapport dans [Paty 2001d].

32. J'étudie ailleurs (dans l'article « Nouveauté et émergence dans la quête des fondements », en préparation) un rapprochement possible entre cette conception et la « philosophie du concept » annoncée par Cavaillès dans son ouvrage posthume *Logique et théorie de la science* ([Cavaillès 1946], éd. [Cavaillès 1976, 78]).

33. [Cartan 1981].

34. Sur la distinction entre physique mathématique et physique théorique, voir

matisant et éclairer ainsi directement le rapport d'un concept à d'autres dans ce même système, ce qui permet de mesurer, d'une certaine manière, le caractère plus ou moins fondamental de ce système, du moins selon un ordre formel. On peut ainsi, par exemple, énoncer de manière exacte et sous forme de théorème (démontrable) la dépendance du concept de temps par rapport aux autres concepts dans une théorie axiomatisable comme la mécanique rationnelle ou comme la thermodynamique, ce qui constitue un argument solide contre le concept de temps absolu. [35] Il est clair que ce résultat pouvait être aussi obtenu par une analyse épistémologique sur le concept de temps tel qu'il figure dans ces théories par sa signification physique, fonction des autres éléments conceptuels et théoriques (« le temps est déterminé par les changements des choses » ou, plus généralement, « le temps est déterminé par les phénomènes » [36]). L'approche conceptuelle et l'approche formelle permettent l'une et l'autre de conclure dans le même sens sur une question de fondements.

L'axiomatisation d'une théorie de la physique mathématique permet aussi de prolonger, comme à une branche des mathématiques mêmes, des résultats obtenus en mathématiques des fondements, tels que les questions de complétude et de décidabilité. C'est ainsi qu'on a pu montrer le caractère indécidable du comportement chaotique ou régulier de systèmes gouvernés par des équations déterministes, dont la structure mathématique est bien établie. [37]

Cependant le problème de la complétude pour une théorie physique en tant que science formalisée de phénomènes ou d'objets du monde réel ne se réduit pas à ces seules implications de type logico-mathématique. On peut le considérer sous trois autres aspects. Tout d'abord celui de l'assimilation de l'empirique en théorique rationnel dont nous avons parlé plus haut, qui conduit à une formulation théorique auto-consistante, de telle façon que, dans son système conceptuel et formel, la théorie peut être regardée comme *endo-référente* (ses concepts rapportent leur sens à elle-même, en tant que substitut symbolique du réel extérieur). [38]

Le second aspect est celui de la *complétude « au sens faible »*, comme celle posée en exigence par Einstein à propos de la mécanique quantique (dans le célèbre « argument EPR ») : on demande un certain rapport d'adéquation entre la théorie, en son état donné, que l'on sait provisoire,

---

[Paty 1994a] et [Paty 1999].

35. Voir les travaux de Newton da Costa et Adonai Sant'Anna ([Costa & Sant'Anna 2001], [Costa & Sant'Anna 2002]).

36. Respectivement, [Mach 1872], [Mach 1883] et [Paty 1994b], [Paty 2001c].

37. [Costa & Doria 1991], [Costa 1997].

38. [Paty 1992].

sous les espèces de ses concepts et de leurs relations, d'une part, et l'objet qu'elle est censée décrire (un système physique individuel, dont on sait qu'il doit être pensable, à l'origine des phénomènes constatés dont la théorie se propose de rendre compte). Cette demande, pour Einstein, était nécessaire pour que l'on puisse se baser sur cette théorie (qui n'est complète qu'en un sens relatif, par rapport à son objet donné) pour aller de l'avant.

Le troisième aspect concerne une *complétude « au sens fort »*, qui correspond, précisément, au type de théorie plus avancée que l'on peut attendre dans la considération d'un objet élargi (qui intègre davantage de propriétés connues d'objets physiques, voire toutes ces propriétés). Cette complétude théorique forte fut formulée par Einstein dans son programme de la relativité générale et de son extension à d'autres champs. Elle comprend les caractères suivants : autonomie théorique, unification des théories dynamiques, capacité à décrire le champ en même temps que sa source, absence ou au moins minimisation des paramètres ou constantes arbitraires. Cette notion est implicitement présente dans les élaborations les plus actuelles en physique quantique des champs d'interactions (champs de jauge unifiés) : elle correspond de fait au critère admis de choix entre les différentes théories et de définition de programmes de recherches. [39]

La complétude au sens faible est une condition requise d'une théorie si l'on veut qu'elle puisse servir de base pour développer une théorie répondant à la complétude au sens fort. [40]

En physique, la justification fondamentale, le fondement, vient de davantage d'achèvement, d'une complétude théorique plus grande. Le fondement est « vers l'avant ». La physique, comme mise en IJuvre de la pensée mathématique, est tirée pour ainsi dire par le monde extérieur qui se manifeste empiriquement, et la « complétude » est un concept métathéorique et épistémologique capable d'exprimer ce mouvement qui lui est interne bien que sollicité par le monde extérieur. Dans ce mouvement vers un plus grand achèvement, vers une plus grande complétude théorique, l'empirique (que la théorie contribue souvent à révéler) est transformé par le travail théorique, dans l'opération même de conceptualisation mathématisée, en constructions et représentations rationnelles. La justification de ce processus de rationalisation ne vient donc pas de par en-dessous (de fondations *statiques*) ; il ne vient pas davantage de qui précède (d'*avant*), comme si toute connaissance présente et future était déjà contenue dans les formes de connaissance précédentes. Elle vient de

39. [Paty 1988].
40. Cette condition était conçue ainsi par Einstein (voir Paty [1993 ; à paraître,a]).

l'*après*, de ce qui est encore *devant nous*, de *vers l'avant* (ce serait, en anglais, *forward*).

Nous ne connaissons la justification et le fondement (au sens d'un terrain solide) d'une connaissance à la fois théorique et d'origine empirique donnée, qu'une fois qu'elle a déjà été obtenue et constituée comme achevée (relativement).

5 Conclusion. Retour à la question des fondements des mathématiques et de la rationalité elle-même

La conclusion qui précède concerne la physique, dont l'examen des procédures propres semble bien la donner pour démontrée. Il est tentant de penser qu'il en va de même en mathématiques, pour des raisons qui sont évidemment différentes, puisque leur mouvement vers l'avant n'est pas directement lié à des connaissances empiriques susceptibles d'être absorbées rationnellement. Mais, pour différentes qu'elles soient, leurs raisons respectives sont homéomorphes. En effet, le mouvement qui, dans les sciences physiques, transforme un élément de connaissance empirique en un élément rationnel, et même en *principe rationnel d'explication*, trouve son analogue dans les mathématiques pures, lorsqu'un nouvel être mathématique est posé, qui va, par ses capacités opératoires, transformer les données d'un problème, voire modifier un champ des mathématiques. L'élément hypothétique posé acquiert droit de cité par cette opérativité dans le champ mathématique, et devient élément de la théorie, un être mathématique au même titre que les autres, dans une structure désormais élargie.[41] A une extension dans les mathématiques correspond alors un élargissement de la rationalité mathématique qui procure l'*intelligibilité* en éclairant les *fondements*.

C'est dans ce sens que l'on peut dire que la connaissance mathématique possède, elle aussi, *son fondement vers l'avant*. Sous les modalités que nous avons retenues, on peut en dire autant des sciences physico-mathématiques, comme on l'a vu. Et cela pourrait bien être un trait général de toute connaissance rationnelle à un état donné de son développement, comme structure systémique considérée sous son aspect de processus dynamique, tout en constatant son état de non-achèvement et de non-clôture à un moment donné de l'histoire, et que ses fondements n'ont pas encore été atteints, et se trouvent encore hors d'atteinte. Elle

41. Voir, par exemple, [Granger 1994] et [[Granger 1999].

n'apparaîtra fondée qu'après, dans un état plus avancé d'achèvement, à un stade théorique ultérieur qui l'aura dépassée.

On doit considérer cependant que la forme mathématique permet d'exprimer, mieux que d'autres expressions de contenus conceptuels, la « fermeture » provisoire qu'implique l'idée même de fondement. C'est qu'elle constitue toujours l'exemple le plus épuré d'une structure rationnelle.

Références

Aglan, Alya & Jean-Pierre Azema

2002 *Jean Cavaillès résistant, ou la Pensée en actes*, Flammarion, Paris, 2002.

Cartan, Henri

1981 Préface de la deuxième édition, *in* ré-éd. de : Cavaillès, J., *Méthode axiomatique et formalisme, Essai sur le problème du fondement des mathématiques* (1938), Hermann, Paris, 1981.

Cavaillès, Jean

1938a *Méthode axiomatique et formalisme, Essai sur le problème du fondement des mathématiques* (Thèse, 1937, 1e éd, 1938), Introduction de Jean-Toussaint Desanti, Préface de Henri Cartan, Hermann, Paris, 1981.

1938b *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* (Thèse complémentaire, 1937, 1e éd, 1938), in [Cavaillès 1962], p. 23-174.

1946 *Sur la logique et la théorie de la science* (rédigé en 1942, 1e éd., 1946), 3e éd., Vrin, Paris, 1976.

1962 *Philosophie mathématique*, Préface de Raymond Aron, Introduction de Roger Martin, Hermann, Paris, 1962.

Châtelet, Gilles

1993 *Les enjeux du mobile. Mathématiques, physique, philosophie*, Seuil, Paris, 1993.

Clarke, Peter

2003 Frege, neo-logicism and applied mathematics, *in* Galavotti, Maria Carla & Friedrich Stadler (eds.), *Vienna Circle Institut Yearbook*, Kluwer, Dordrecht, 2003.

COSTA, NEWTON DA

1997 *O Conhecimento científico*, Discurso Editorial, São Paulo (Br), 1997.

COSTA, NEWTON DA & ANTONIO DORIA

1991 Undecidability and incompleteness in classical mechanics, *International Journal of Theoretical Physics*, 30, 1991, 1041-1073.

COSTA, NEWTON DA & ADONAI SANT'ANNA

2001 The mathematical role of time and spacetime in classical physics, *Foundations of Physics Letters*, 14, 2001, 553-553.

2002 Time in Thermodynamics, *Foundations of Physics*, forthcoming.

DIEUDONNÉ, JEAN

1977 *Panorama des mathématiques pures : le choix bourbachique*, Gauthier-Villars, Paris, 1977.

FREGE, GOTTLOB

1884 *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, W. Koebner, Breslau, 1884. Engl. transl. by J.L. Austin, *The Foundations of Arithmetic*, Blackwell, Oxford, 1950. French transl. by C. Imbert, *Les Fondements de l'arithmétique*, Seuil, Paris, 1970.

GRANGER, GILLES GASTON

1994 *Formes, opérations, objets*, Collection "Mathesis", Vrin, Paris, 1994.

1999 *La pensée de l'espace*, Odile Jacob, Paris, 1999.

2003 *Science, langage, philosophie*, Collection "Penser avec les sciences", EDP-Sciences, Paty, 2003.

HILBERT, DAVID

1922 Neubegründung der Mathematik (1922), in D.H., *Gessamelte Abhandlungen*, Berlin, B.3, 1935.

LAUTMAN, ALBERT

1977 *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Union Générale d'Editions, Paris, 1977.

MACH, ERNST

1872 *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit*, Prag 1872 ; 2e éd., 1909. Trad. angl. par Philip E.B.

Jourdain, *History and roots of the principle of the conservation of energy*, Open Court, Chicago, 1911.

1883 *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch Dargellstellt*, Leipzig, 1883 ; 1933. Trad. fr. par E. Bertrand, *La mécanique. Exposé historique et critique de son développement*, Hermann, Paris, 1904 ; ré-éd., 1923.

Paty, Michel

1988 *La matière dérobée. L'appropriation de l'objet de la physique contemporaine*, Edition des Archives contemporaines, Paris, 1988.

1992 L'endoréférence d'une science formalisée de la nature, *in* Dilworth, Craig (ed.), *Intelligibility in science*, Rodopi, Amsterdam, 1992, p. 73-110.

1993 *Einstein philosophe*, Presses Universitaires de France, Paris, 1993.

1994a Le caractère historique de l'adéquation des mathématiques à la physique, *in* Garma, S. ; Flament, D. ; Navarro, V. (eds.), *Contra los titanes de la rutina. Contre les titans de la routine*, Comunidad de Madrid/C.S.I.C., Madrid, 1994, p. 401-428.

1994b Sur l'histoire du problème du temps : le temps physique et les phénomènes, *in* Klein, Etienne et Spiro, Michel (éds.), *Le temps et sa flèche*, Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1994, p. 21-58 ; 2è éd., 1995 ; Collection Champs, Flammarion, Paris, 1996, p. 21-58.

1997 Predicate of existence and predictivity for a theoretical object in physics, *in* Agazzi, Evandro (ed.), *Realism and quantum physics*, Rodopi, Amsterdam, 1997, p. 97-130.

1998 La philosophie et la physique, *in* Jean-François Mattéi (éd.), *Le Discours philosophique*, volume 4 de l'*Encyclopédie philosophique universelle*, Presses Universitaires de France, Paris, 1998, chap. 123, p. 2104-2122.

1999 La place des principes dans la physique mathématique au sens de Poincaré, *Philosophia Scientiaæ* (Nancy/éd. Kimé, Paris) 3 (2), 1998-1999, 61-74.

2001a La notion de grandeur et la légitimité de la mathématisation en physique, *in* Espinoza, Miguel (éd.), *De la science à la philosophie. Hommage à Jean Largeault*, L'Harmattan, Paris, 2001, p. 247-286. Version angl. : The idea of quantity at the origin of the legitimacy of mathematization in physics, *in* Gould, Carol (ed.), *Constructivism and Practice : Towards a Historical Epistemology*, Rowman & Littlefield, Lanham (Md.,USA), 2003, p. 109-135.

2001b Les concepts de la physique : contenus rationnels et constructions dans l'histoire, *Principia* (Florianopolis, Br), 5, n°1-2, junho-dezembro 2001, 209-240

2001c Réflexions sur le concept de temps, *Revista de Filosofia* (Madrid), 3a época, volumen XIV, 2001, n°25, 53-92.

2001d Intelligibilité et historicité (Science, rationalité, histoire), *in* Saldaña, Juan José (ed.), *Science and Cultural Diversity. Filling a Gap in the History of Science*, Cadernos de Quipu 5, México, 2001, p. 59-95.

2003 Remarks about a "general science of reasoning", *in* Galavotti, M.C. and Stadler, Friedrich (eds.), *Induction and deduction in the sciences. Vienna Circle Institut Yearbook*, Kluwer, Dordrecht, 2003.

à paraître, a *Einstein, les quanta et le réel*, à paraître.

en prép. *Empirisme et convention. Géométrie, physique et philosophie chez Poincaré*, en préparation.

Poincaré, Henri

1889 La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement, *L'Enseignement mathématique*, 1, 1889, 157-162. Repr. dans Poincaré [1913-1965], t. 11, p. 129-133.

1902 *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902.

1913-1965 *Oeuvres*, Gauthier-Villars, Paris, 11 vols., 1913-1965.

Vuillemin, Jules

2000 Formalisme et réflexion philosophique (Séance du 25 mars 2000), *Bulletin de la Société française de Philosophie*, 94e année, n°3, juillet-septembre 2000, 1-44.