

Évolution des analogies L'exemple de l'analogie chaleur–électricité

Etienne Bolmont
LPHS

Résumé : Les analogies chaleur–électricité, très utilisées au dix-neuvième siècle, montrent un exemple de l'évolution des analogies dans les phases de découverte et de justification d'une théorie. À la lumière des écrits des savants, de Ohm à Feynman, nous montrerons les différentes formes que l'analogie peut prendre ainsi que son rôle dans l'élaboration des idées scientifiques, notamment dans le domaine de l'électricité.

Abstract: Analogies between heat and electricity commonly used during the 19th century show an exemple of analogies evolution in theories discovery and justification phases. According to the scientists writings, from Ohm to Feynman, we want to present the differents shapes of the analogy and its part in elaborating scientific ideas, especially in electricity.

1 Introduction

Nous décrirons l'analogie comme une correspondance établie entre deux objets A et B conduisant à inférer les propriétés ou caractéristiques de B à partir de la considération de A. Paul Weingartner [Weingartner 1979] envisage trois catégories d'objets entre lesquels des analogies peuvent exister : les objets naturels, les artefacts et les objets abstraits. Il s'agira ici essentiellement, mais pas seulement, d'analogies entre objets abstraits, notamment entre des théories.¹

L'analogie *fonctionnelle* fait correspondre deux « objets » qui ont des fonctions ou des propriétés analogues dans leurs domaines propres. L'analogie *substantielle* se rapproche de ce type d'analogie en cela que l'on considère la nature des objets, leur substance ou plus généralement leurs propriétés dans la comparaison.

L'analogie *structurelle* fait correspondre les relations entre objets d'un domaine propre aux relations entre objets d'un autre domaine, c'est une analogie des relations. Quand on considère de plus une concordance entre la forme des équations dans les deux domaines considérés, on parle alors d'analogie *formelle*. L'analogie dite mathématique est généralement une analogie formelle. L'analogie structurelle peut être examinée dans le cadre des relations entre structures, notamment selon la distinction entre isomorphisme et homomorphisme :

L'*isomorphisme* est une idée qui domine la présentation des analogies car il donne à l'analogie un caractère rigoureux et donc valorisant. On rencontre alors le terme d'analogie vraie. L'analogie dite *complète* sous-entend également l'isomorphisme, par opposition à l'analogie partielle qui se réfère plutôt à l'homomorphisme.

L'*homomorphisme* ne s'appuie pas sur une bijection entre les domaines reliés par l'analogie. C'est évidemment le cas le plus général, l'isomorphisme étant l'exception, ou alors, on ne considère dans la correspondance analogique que les sous-ensembles isomorphes, ce qui revient à ne mettre en correspondance, par leurs dimensions, que des parties qui jouent, dans les objets auxquels elles appartiennent, des rôles équivalents.

L'analogie formelle donne l'exemple de l'isomorphisme, et les limites que les auteurs fixent à l'emploi des analogies sont dues au fait que, sans quitter les domaines considérés, on puisse s'écarter des sous-ensembles isomorphes. On peut alors considérer que dans des domaines homomorphes, il existe des flots isomorphes. La tendance à l'assimilation des théories que l'analogie implique, souvent naturellement chez les savants,

1. On pourra se reporter à notre thèse. [Bolmont 1999]

conduit à essayer d'étendre les flots isomorphes à l'ensemble des domaines concernés par l'analogie.

Cette idée est développée de manière intéressante par Mary Hesse qui définit les analogies *positive*, *négative* ou *neutre* [Hesse 1986]. Ainsi, comparant les deux domaines mis en correspondance, les parties isomorphes constituent le fondement de l'analogie positive et les éléments et relations reconnus totalement divergents définissent l'analogie négative, qu'on pourrait également qualifier de non-analogie. Comme l'affirme Mary Hesse, l'analogie négative est « implicitement reconnue et tacitement ignorée ». Il reste alors un ensemble non encore exploré, constitué par tous les objets qui n'ont pas encore été clairement définis comme appartenant à l'analogie positive ou à l'analogie négative, qui va être le champ d'extension possible de l'analogie et qui forme l'analogie neutre. Ce concept d'analogie neutre est essentiel dans le raisonnement analogique dans un contexte de découverte.

Nous allons tenter de donner, dans cet article, une idée de l'évolution des analogies en physique. Les analogies peuvent être utilisées sur de longues périodes, se modifiant plus ou moins profondément selon les auteurs et disparaissant parfois complètement. Les transformations que subit une analogie au cours du temps peuvent être relativement complexes à analyser. Cependant, on perçoit, à l'aide des définitions précédentes, que ces changements suivent un cours particulier que nous allons décrire en nous appuyant sur l'exemple de l'analogie chaleur-électricité dans les travaux des savants du dix-neuvième siècle.

L'analogie chaleur-électricité présente l'avantage pour notre propos de s'étaler sur une période longue, elle n'a d'ailleurs pas encore disparu actuellement dans le traitement de certains problèmes concernant les transferts de chaleur. De plus, de nombreux acteurs du monde scientifique du dix-neuvième siècle l'ont prise en compte, tant dans la période de découverte que dans celle de la justification de la théorie électrique, et le grand nombre de textes qui s'y rattachent contribue à former une image relativement claire d'une évolution dans le temps de cette analogie.

2 L'Analogie chaleur-électricité

2.1 Origine implicite de l'analogie

Au début du 19^e siècle, une hypothèse vaguement formulée était présente dans les esprits sur la base de considérations empiriques qui viennent à l'appui d'un lien entre chaleur et électricité et font apparaître

un certain caractère de réciprocité : les bons conducteurs de l'électricité sont aussi des bons conducteurs de la chaleur ; le passage de l'électricité fait apparaître de la chaleur ;² on peut produire de l'électricité et de la chaleur en quantités importantes par friction. Des considérations théoriques s'y ajoutent, notamment le fait que, depuis longtemps, l'électricité comme la chaleur étaient considérées comme des fluides que l'on pouvait stocker dans des récipients.

L'analogie naît ainsi sous la forme d'une relation entre deux objets naturels. Ces phénomènes ne seraient-ils pas l'expression d'une seule et même substance fondamentale ? Si ce pas ne peut pas être franchi sans un appui théorique, l'élan qu'apporte cette question permet la mise en place d'un raisonnement qui utilise l'analogie. L'analogie substantielle est alors établie : *l'électricité se comporte comme la chaleur*. Il faut noter ici qu'il ne s'agit pas d'une identification, mais bien d'une analogie qui rapproche, d'une façon plutôt floue, les deux domaines considérés, en donnant ainsi une impulsion vers une recherche plus approfondie des relations entre ces deux domaines.

2.2 Naissance de l'analogie

Si ces considérations ne sont jamais développées de façon explicite, la véritable naissance de l'analogie se situe dans les travaux de George Simon Ohm. Avec lui, l'analogie avec la chaleur devient une analogie structurelle formelle. L'analogie va alors se construire dans une forme beaucoup plus élaborée, plus formalisée, qui fera correspondre des objets abstraits tels que lois ou théories ... Elle tire une grande partie de sa légitimité de la théorie de la chaleur, qui triomphe au début du dix-neuvième siècle.

2.3 La théorie de la chaleur

La théorie de la conduction thermique est à cette époque bien établie grâce aux travaux de Fourier puis de Poisson.³ Elle est traduite par une équation différentielle fondamentale, exprimant que, dans les corps

2. Cet effet sera appelé plus tard *effet Joule* (1841). L'effet thermoélectrique sera découvert par Seebeck en 1821 puis Peltier découvrira l'effet inverse en 1834.

3. Fourier (Joseph), *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Mathématicien et physicien français, Fourier enseigne à l'Ecole Polytechnique dès sa création en 1795, participa à la campagne d'Egypte en 1798 et eut une carrière politique liée à l'Empire napoléonien. Membre de l'Académie des sciences (1817) puis secrétaire perpétuel (1822), il entra ensuite à l'Académie Française en 1826.

isotropes, la chaleur s'écoule normalement aux surfaces isothermes, proportionnellement au taux de diminution de la température suivant cette normale à l'instant t considéré et proportionnellement à un paramètre κ fonction de la température. Elle présente des caractéristiques importantes quant à l'analogie avec les théories électriques :

- C'est une théorie mathématique, qui s'appuie sur un formalisme abouti et dans laquelle Fourier a introduit de nouvelles méthodes mathématiques de résolution.
- C'est une théorie qui décrit des phénomènes de diffusion d'un fluide qualifié d'impondérable et qui s'appuie sur une hypothèse de transmission des actions de proche en proche au sein de la matière.
- Ce n'est pas une théorie mécanique, par son caractère d'irréversibilité, par la description d'un mouvement de la chaleur indépendant d'une interaction mécanique avec la matière.

2.4 Hypothèses de G. Ohm

En 1827, Ohm [Ohm 1860] se réfère aux équations de la chaleur de Fourier et il établit l'analogie entre conduction thermique et conduction électrique. La loi d'Ohm a d'abord été considérée comme une extension aux courants électriques du problème connu du « mur indéfini de Fourier ». L'analogie pouvait apparaître alors au niveau mathématique comme une simple transposition d'une modélisation de la conduction de la chaleur par Fourier, comme une simple analogie formelle.

Mais le cadre épistémologique de l'analogie se dévoile dans les considérations que Ohm met en avant pour distinguer le cas particulier du champ de l'analogie : la distribution de l'électricité dans un corps.

Trois lois servent de base à tout ce mémoire et contiennent les seuls principes qui ne soient pas démontrés par le raisonnement : la première fait connaître la distribution de l'électricité dans l'intérieur d'un seul et même corps ; la seconde se rapporte à la dispersion de l'électricité dans l'atmosphère ambiante ; la troisième exprime le mode de développement de l'électricité au point de contact de deux corps hétérogènes ; ces deux dernières lois sont purement expérimentales, mais la première est, en partie du moins, hypothétique.⁴

Poisson (Siméon Denis), physicien et mathématicien français, un des créateurs de la physique mathématique où il perfectionne le traitement des équations différentielles contribuera également à la théorie de la chaleur : il est l'auteur d'une théorie mathématique de la chaleur (1835).

4. [Ohm 1860], 1827 ; p. 26.

La deuxième loi s'appuie sur les expériences de Coulomb : la perte d'électricité par unité de temps du conducteur vers l'air est proportionnelle à la force électroscopique de l'électricité (tension), à la surface exposée et à un coefficient qui dépend de l'air ; reconnaissant que cette seconde loi a peu d'effets sur les courants galvaniques, Ohm la prit en compte pour compléter la théorie et la rendre parallèle à la théorie de la chaleur de Fourier. La troisième loi établit que deux corps en contact maintiennent une différence de force électroscopique (tension électrique) à leur surface commune, ce qui est le principe de base de la théorie de la pile.

À l'opposé d'une démarche empirique, à la base des lois de la dispersion élaborées par Coulomb ou des lois définissant les tensions au contact de deux métaux différents, l'analogie conduit à une démarche hypothético-déductive ; la ressemblance entre les deux phénomènes (électrique et thermique) est une hypothèse que l'on va tenter de vérifier en calquant ses conséquences sur celles plus connues de la conduction thermique.⁵

Ohm situe les fondements de sa réflexion au niveau microscopique, à l'échelle des molécules électrisées auxquelles il attribue une tension électrique (qu'il désigne sous les termes de *force électroscopique*). La conduction électrique se fait pour lui par communication d'électricité⁶ d'une molécule électrisée à une molécule contigüe, sur l'idée d'une décroissance extrêmement rapide de l'influence électrostatique en fonction de la distance, selon la loi de Coulomb. Alors, Ohm présente la base de sa construction de l'analogie :

J'ai admis que la grandeur du flux entre deux molécules contigües est proportionnelle, toutes choses égales d'ailleurs, à la différence des tensions que possèdent les deux molécules, de la même manière que dans la théorie de la chaleur on considère le flux de chaleur entre deux molécules comme proportionnel à la différence de leurs températures.⁷

L'expression «toutes choses égales d'ailleurs» définit le cadre d'application de l'analogie : nous ne devons considérer que la conduction électrique et la différence de tension ; étendre l'analogie à d'autres grandeurs

5. La signification du terme hypothèse peut être rattachée à celle que lui ont attribuée les positivistes, c'est à dire à celui d'une conjecture invérifiable, ici notamment parce qu'elle porte sur la nature microscopique de la matière. Cette interprétation conduira les positivistes à rejeter ces théories dites 'hypothétiques'.

6. électricité libre par opposition à l'électricité liée à la matière. La force électroscopique n'est pas liée à la matière, il n'y a pas interaction entre électricité et matière.

7. [Ohm 1860], 1827 ; p. 26.

électriques n'est pas dans le propos initial de Ohm. Cette hypothèse fondatrice de l'analogie fait donc correspondre les grandeurs suivantes :

conductibilité calorifique	conductibilité électrique
température	potentiel électrique (= tension)
flux de chaleur	flux d'électricité (= intensité)

Mais l'analogie seule ne suffit pas, il faut lui adjoindre les deux autres considérations empiriques citées précédemment pour aboutir aux lois mathématiques :

Au moyen de ces trois principes fondamentaux, on peut établir les conditions auxquelles se trouve soumise la propagation de l'électricité dans des corps de nature et de forme quelconque ; les équations différentielles que l'on obtient sont de la même forme que celles qui ont été établies par Fourier et Poisson pour la propagation de la chaleur, et elles peuvent être traitées de manière analogue, [...] ⁸

Nous trouvons ici une conjonction d'hypothèses de nature différente conduisant à la théorie : par induction, à partir des considérations expérimentales, on obtient deux des hypothèses fondamentales et l'analogie établie avec un autre phénomène en constitue la troisième qui, quant à elle, ne semble présenter aucun caractère empirique. Elle est construite a priori si on s'attache aux écrits de Ohm. La difficulté dans cette description de la démarche de Ohm se situe dans la prise en compte des expériences qu'il a conduites sur la conductivité des métaux. Les lois trouvées empiriquement et que Ohm tente de justifier théoriquement n'ont-elles pas orienté l'analogie ? ou faut-il ne voir dans l'analogie qu'une idée de comparaison a priori, seulement fondée sur le concept de propagation, commun aux phénomènes de la chaleur comme de l'électricité ?

Une nouvelle forme de l'analogie apparaît dans l'expression mathématique de l'identité des équations différentielles. ⁹ Elle renforce la précédente en l'incluant. On peut alors traiter mathématiquement, de manière analogue, les problèmes de propagation de la chaleur et les problèmes de propagation de l'électricité, ce qui conduit Ohm à envisager le rapprochement intime des deux classes de phénomènes :

[...] , quand il n'existerait pas d'autre raison pour rapprocher ces deux classes de phénomènes naturels, nous serions encore en droit de conclure qu'il existe entre eux une liaison intime ; cette analogie deviendra de plus en plus manifeste à mesure que nous pénétrons plus avant dans le sujet. ¹⁰

8. au même endroit.

9. Le titre de l'ouvrage de Ohm [Ohm 1860] le souligne par l'expression : *Mathematisch bearbeitet*.

10. au même endroit ; p. 26.

L'analogie évolue ainsi de l'expression d'une simple comparaison entre les phénomènes, soit vers une identification, un pas souvent envisagé lors de la construction des analogies et que certains n'hésiteront pas à franchir, soit vers une 'intimité' mathématique dont l'existence se justifierait dans l'analogie formelle. Elle se modifie lors de la construction même de la théorie, ici en se précisant, en se renforçant. Ohm reste cependant prudent en limitant de facto le champ d'application de l'analogie, en définissant ainsi l'analogie positive :

Les recherches mathématiques du genre de celles dont je viens de parler sont extrêmement difficiles et, pour les faire généralement admettre, il convient de les présenter graduellement ; il est donc très heureux que, parmi les questions qui se rapportent à la propagation de l'électricité, il y en ait une classe importante, pour laquelle les difficultés disparaissent presque entièrement ; [...]

Cette dernière remarque illustre le concept d'analogie neutre de Mary Hesse :

[...] si l'expérience venait à démontrer plus tard que les corps possèdent une propriété analogue à celle que, dans la théorie de la chaleur, on appelle capacité, la loi que nous avons établie devrait subir une légère modification, que nous indiquerons à l'endroit convenable.¹¹

Quelles sont les justifications que Ohm met en avant pour introduire l'analogie ?

[...] je crois que la voie que j'ai ouverte se recommande par sa généralité, sa simplicité et sa clarté[...]¹²

Il oppose sa démarche à celle de Laplace qui entend étendre les expressions analytiques de la mécanique à d'autres phénomènes concernés par des lois de transmission entre états et positions voisines, ce qui caractérise l'analogie mécanique. Ohm reproche à Laplace cette idée que le formalisme mathématique de la mécanique est apte à définir les grandeurs physiques, même lorsque les fonctions imaginées pour représenter ces grandeurs sont discutables. Cette dernière opinion heurtera beaucoup les physiciens, qui auront toujours l'exigence d'une définition des grandeurs utilisées qui ait un sens physique. En suivant fidèlement son modèle Fourier, Ohm se distingue ici par son refus de l'hypothèse mécaniste, ce qui explique peut-être le peu d'échos que sa découverte va entraîner.

11. [Ohm 1860], p. 27.

12. au même endroit, p. 26. On retrouve dans cette citation une considération fréquente sur la validité reconnue d'une théorie qui augmente avec sa simplicité et gagne en 'beauté'.

L'équation différentielle fut ensuite résolue par Ohm pour obtenir des relations entre des grandeurs directement mesurables et conduisit à la formule empirique traduisant la loi qui porte son nom.¹³ Toute la démarche de Ohm conduit à la justification de la loi par une dérivation mathématique, dans une démarche hypothético-déductive où l'analogie joue un rôle essentiel. Pour lui, cette justification est nécessaire pour interpréter les données expérimentales et cette conception n'est pas partagée par la plupart de ses contemporains. Les expériences menées par Ohm furent à leurs yeux moins persuasives que celles que Fechner conduira plus tard dans les années 1830. Le traité de physique de Pouillet [Pouillet 1837] présente d'ailleurs uniquement la loi empirique sans justification théorique.

2.5 Phase d'adoption

2.5.1 Kirchhoff

En 1845, Kirchhoff [Kirchhoff 1857] identifie la tension avec le potentiel électrostatique et achève la traduction en langage électrique des résultats de Fourier sur les conducteurs à deux et trois dimensions. Il revient sur l'analogie en 1847, dans une approche semblable à celle de Ohm, à savoir qu'il développe une théorie qui le conduit à une équation différentielle dans laquelle il reconnaît l'équation de propagation de la chaleur de Fourier, ce qui l'autorise à en utiliser les solutions, dans une rigueur mathématique plus achevée que celle d'Ohm :

[...] so erhält man [] welche Gleichung von derselben Form wie diejenige ist, welche die Fortpflanzung der geleiteten Wärme bestimmt. In dem betrachteten Falle pflanzt sich also die Elektrizität ähnlich wie die geleitete Wärme fort.¹⁴

Dans ce texte, il fait allusion aux travaux de W. Thomson¹⁵ sur la conduction dans les câbles télégraphiques sous-marins :

Thomson hat die Bewegung der Elektrizität in einem unterseeischen Telegraphendrahte untersucht ; er hat dabei die Annahme gemacht, ohne die

13. Cette résolution n'est pas sans poser de problèmes car l'approche de Ohm n'était pas celle d'un mathématicien : il a utilisé les séries infinies de Fourier (comme ce dernier l'avait fait dans sa théorie de la chaleur) sans examiner leur convergence mais en les traitant comme des polynômes finis.

14. Kirchhoff, 1857, p. 167 : ... ainsi on obtient [] une équation de la même forme que celle qui détermine la propagation de la conduction de la chaleur. Dans le cas observé, l'électricité se propage aussi comme la chaleur le fait ...

15. Phil. Mag. Ser.IV, Vol. II, p.157.

Zulässigkeit derselben zu prüfen, dass die Induction keinen merklichen Einfluss ausübt, und hat gezeigt, dass dann die Elektrizität sich wie die geleitete Wärme bewegt.¹⁶

2.5.2 Thomson

William Thomson [Thomson 1884], à la même époque, publie plusieurs textes dans lesquels on peut remarquer une prise en compte de l'analogie chaleur-électricité, en envisageant des grandeurs électriques différentes du courant électrique : en 1842, *On the uniform motion of heat in homogeneous bodies, and its connexion with the mathematical theory of electricity* ; et en 1845, *On the mathematical theory of electricity in equilibrium* . Thomson y établit l'analogie formelle complète entre les équations du champ électrostatique et celles de la conduction thermique stationnaire.

Dans une note ajoutée en 1854, il déclare :

The general conclusions established in it show that the laws of distribution of electric or magnetic force in any case whatever must be identical with the laws of the distribution of the lines of motion of heat in certain perfectly defined circumstances . . .¹⁷

La note suivante pourrait montrer que Thomson situe ses travaux dans un autre cadre que ceux de Ohm :

The analogy with the conduction of heat on which these views are founded, has not, so far the author is aware, been noticed by any other writer.¹⁸

Ceci peut se comprendre dans le sens où le travail de Thomson est consacré à la description des lignes de force électriques dans les diélectriques alors que celui de Ohm l'était à la diffusion de l'électricité dans les conducteurs. C'est sa présentation que Thomson juge comme originale : c'est une analogie géométrique,¹⁹ qu'il nous faut distinguer de celle que Ohm a mise en avant. Thomson ne compare pas les mouvements de deux fluides électrique et thermique, mais la forme des courbes décrites par la

16. [Kirchhoff 1857], p. 167.

17. [Thomson 1884], p. 1 : On the uniform motion of heat in homogeneous bodies, and its connexion with the mathematical theory of electricity, 1842, note ajoutée en 1854, *Cambridge Math. Journal*. Ces textes ne seront pas sans influence sur Maxwell, qui suivra les cours de Thomson à Cambridge.

18. au même endroit ; p. 2.

19. Thomson a beaucoup utilisé cette forme d'analogie structurelle dans laquelle la structure comparée s'appuie essentiellement sur des considérations géométriques, par exemple sur la similitude de courbes obtenues expérimentalement ou théoriquement.

chaleur dans son mouvement et de celles données par la distribution du champ électrostatique ou magnétique.

Thomson fait ainsi appel à l'analogie mathématique dans son exposé des lois de l'électricité statique. Il affirme :

Corresponding to every problem relative to the distribution of electricity on conductors, or to forces of attraction and repulsion exercised by electrified bodies, there is a problem in the uniform motion of heat that presents the same analytical conditions, and which, therefore, considered mathematically, is the same problem.

Il le fait en accord avec les idées de Faraday d'une propagation des forces électriques par une action se propageant de proche en proche dans le diélectrique entourant les particules chargées. Cette remarque prend une signification essentielle dans la justification de l'analogie avec la conduction thermique. La transmission de la chaleur correspond aussi à une transmission de proche en proche, ce que personne ne conteste alors.

L'analogie, choisie en référence aux idées fondamentales de la propagation de l'interaction électrique grâce à un médium, devient ici une arme au service de ses tenants dans la mesure où elle a de bons résultats, contre l'idée de force à distance comme l'avait développée Coulomb. Ainsi,

Now, if we wish to consider the corresponding problem in the theory of heat, we must suppose the space between *A* and *B*, instead of being filled with the dielectric medium (that is a non-conductor for electricity), to be occupied by any homogeneous solid body, and sources of heat or cold to be so distributed over terminating surfaces, . . . The problem of *distributing sources of heat, according to these conditions*, is mathematically identical with the problem of distributing *electricity in equilibrium* on the surfaces of *A* and *B*.²⁰

Il reprend cette idée majeure dans la conclusion de son mémoire :

It is, no doubt, possible that such forces at a distance may be discovered to be produced entirely by the action of contiguous particles of some intervening medium, and we have an analogy for this in the case of heat, where certain effects which follow the same laws are undoubtedly propagated from particle to particle. It might also be found that magnetic forces are propagated by means of a second medium, and the force of gravitation by means of a third. We know nothing, however, of the molecular action by which such effects could be produced, and in the present state of physical science

20. [Thomson 1884] ; p. 28 : On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium, 1845, *Cambridge and Dublin Math. Journal*.

it is necessary to admit the known facts in each theory as the foundation of the ultimate laws of action at a distance.²¹

L'utilisation de l'analogie par Thomson se justifie donc dans le cadre d'une théorie de la propagation des actions à distance grâce à un médium, l'éther. La convergence de ces idées et du modèle de la diffusion de la chaleur dans un solide semble pour lui un point fort à l'appui de la théorie, presque une preuve ou du moins une forte présomption de la justesse des vues de Faraday auxquelles il adhère. Thomson fait correspondre dans l'analogie :

Heat	Electrostatics
permanent temperature	potential
sources of heat	distribution of static charges
resultant flux of heat	resultant attraction of electrical bodies, in direction and magnitude

Alors, l'analogie prend une orientation heuristique :

The problem in each case is determinate, and we may therefore employ the elementary principles of one theory, as theorems, relative to the other.²²

Les exemples que Thomson donne concernent le théorème fondamental de Coulomb en électricité appliqué à la théorie de la chaleur et les propositions, évidentes dans la théorie de la chaleur, qui constituent les fondements des théorèmes de Green sur le potentiel en électricité.²³ La théorie analytique de la chaleur de Fourier présente pour lui le caractère avéré d'une théorie mathématique, ce qui, par la correspondance des lois, conduit à une théorie mathématique de l'électricité. Ceci lui permet alors d'affirmer le caractère mathématique de l'analogie :

And this may be done if we consider them merely as actual truths, without adopting any physical hypothesis, although the idea they naturally suggest is that of the propagation of some effect by means of the mutual action of contiguous particles; just as Coulomb, although his natural law suggest the idea of material particles attracting or repelling one another at a distance, most carefully avoids making this a physical hypothesis, and confines himself to the consideration of the mechanical effects, which he observes and their necessary consequences.

21. au même endroit ; p. 37.

22. au même endroit ; p.29.

23. Green George (1793-1841), mathématicien britannique introduisit la notion de potentiel sous forme d'une fonction (de Green) fondamentale dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Thomson, dans un esprit positiviste, se démarque bien d'une analogie de caractère physique, avec cette particularité d'une hypothèse non fondée sur des faits observables, malgré l'idée de la propagation des actions de proche en proche. L'analogie sur laquelle il s'appuie est une analogie mathématique à caractère géométrique.

Par la suite, Thomson ne perdra jamais cette tendance à comparer les phénomènes de la chaleur et ceux de l'électricité, notamment dans le problème des diélectriques et, comme Kirchoff le signalait, dans celui des effets capacitifs des câbles télégraphiques. Il introduit également l'analogie dans les problèmes liés au magnétisme, celui des substances ferro-, dia- ou paramagnétiques pour lequel il remarque notamment :

The same demonstration . . . shows that the lines of magnetic force will be altered by it [a magnet] precisely as the lines of motion of heat in corresponding thermal circumstances would be altered by introducing a body of greater or of less conducting power of heat. Hence we see how strict is the foundation for an analogy on which *the conducting power of a magnetic medium for lines of force* may be spoken of, and we have a perfect explanation of the condensing action of a paramagnetic, and the repulsive effect of a diamagnetic, upon the lines of force of a magnetic field, which have been described by Faraday.²⁴

La question de la perméabilité magnétique lui donne l'occasion de réunir dans quatre analogies des phénomènes électriques, magnétiques, thermiques et hydrodynamiques. Dans chaque domaine,²⁵ il fait correspondre les grandeurs suivantes :

Domaines	Grandeurs correspondantes
Polarisation des diélectriques	<i>Capacité spécifique inductive</i> d'un diélectrique (susceptibilité électrique)
Induction magnétique des para- et diamagnétiques	<i>Capacité inductive magnétique</i> , ou selon Faraday, <i>pouvoir conducteur pour les lignes de force</i> (susceptibilité magnétique)
Conduction de la chaleur dans un solide hétérogène	<i>Conductivité thermique</i> d'un solide
Écoulement irrotationnel d'un liquide	<i>Flux</i> du liquide

24. [Thomson 1884], p. 33, note ajoutée en mars 1854.

25. L'écoulement irrotationnel est un cas idéalisé : l'écoulement est irrotationnel si le liquide est incompressible, n'a pas de viscosité et si sa circulation est nulle.

Ceci le conduit à la suggestion d'une unification du vocabulaire : les phénomènes sont semblables, il est possible d'utiliser le même terme qui perd son caractère métaphorique en gagnant le statut de concept plus élaboré :

The common word "permeability" seems well adapted to express the specific quality in each of the four analogous subjects²⁶

2.5.3 Maxwell

*On Faraday's Lines of Force*²⁷ est la première publication importante de Maxwell dans le domaine de l'électricité et du magnétisme. Il y présente les travaux de Faraday et son interprétation des lignes de force qui se rattachent maintenant au concept de lignes de champ.

A propos de la théorie de l'attraction à distance, dont les résultats sont conformes à l'expérience, il montre qu'on peut l'interpréter de plusieurs façons, notamment par une image de propagation de proche en proche empruntée à celle de la chaleur :

Les formules ont une signification mathématique et leurs résultats sont en concordance avec les phénomènes naturels.

... Nous n'avons qu'à substituer source de chaleur par centre d'attraction, ... et la solution d'un problème d'attraction est transformée en celle d'un problème sur la chaleur.²⁸

Maintenant, la conduction de la chaleur est supposée procéder par action entre les particules contiguës d'un milieu, alors que la force d'attraction est une relation entre des corps éloignés, et si nous ne connaissons rien de plus que ce qui est exprimé dans les formules mathématiques, rien ne distinguera un ensemble de phénomènes de l'autre.

Il est vrai que si nous introduisons d'autres considérations et observons des faits supplémentaires, les deux sujets prendront différents aspects, mais la ressemblance de quelques unes de leurs lois restera, et peut encore être utile à faire naître des idées mathématiques appropriées.

C'est dans l'usage de telles analogies que j'ai essayé de prendre conscience, sous une forme convenable et opérationnelle, de ces idées mathématiques qui sont nécessaires à l'étude des phénomènes de l'électricité. Ces méthodes sont généralement suggérées par les procédés de raisonnement trouvés dans les recherches de Faraday, et qui, quoique interprétées mathématiquement par Thomson et d'autres, sont très généralement supposées d'un caractère

26. Thomson, 1884, p. 489 : Magnetic Permeability, and analogues in Electro-static Induction, Conduction of heat, and Fluid Motion. (mars 1872)

27. [Maxwell 1890] : *On Faraday's Lines of Force* (repris de *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol X part 1. 10/12/1855 et 11/02/1856).

28. Voir Thomson (1841), *Camb.Math. Journal* Vol. III, pp. 71–84.

indéfini et non mathématique, quand on les compare avec celle employées par les mathématiciens.

Maxwell situe ici le cadre de son utilisation des analogies, qu'il qualifie de physiques, mais qui sont plus exactement des analogies entre grandeurs qui en plus de représentations formelles similaires ont une signification physique définie. Cette analogie entre les grandeurs n'implique pas une analogie substantielle, il faut se garder de ce genre de conclusion hâtive, en évitant des hypothèses physiques hâtives :

[...] En électrostatique, il existe entre le potentiel et l'électricité le même rapport qu'il y a en Hydrostatique entre la pression et le fluide, et en Thermodynamique entre la température et la chaleur. L'électricité, le fluide, la chaleur tendent à passer d'un endroit à un autre, si le potentiel, la pression, la température sont plus élevés au premier point qu'au second. Un fluide est certainement une substance, et certainement aussi, la chaleur n'est pas une substance : donc, si nous pouvons tirer profit d'analogies de ce genre, pour nous faire une idée nette des relations qui existent entre les quantités électriques, nous devons bien prendre garde que l'une ou l'autre de ces analogies ne nous induise à croire que l'électricité est une substance comme l'eau, ou un état de mouvement comme la chaleur.²⁹

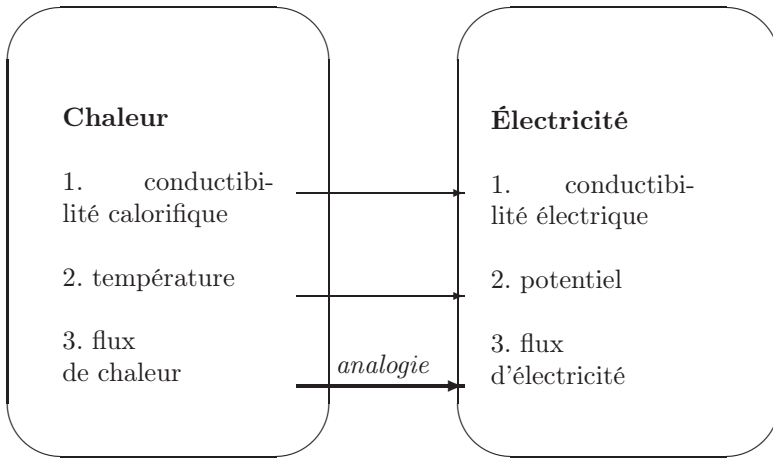
Ceci étant affirmé, les relations établies dans un domaine seront transposées à l'autre :

L'analogie entre la théorie de la conduction de l'électricité et la théorie de la conduction de la chaleur est, à première vue, presque complète. Si nous prenons deux systèmes géométriquement semblables, et tels que la conductibilité calorifique d'une partie du premier soit proportionnelle à la conductibilité électrique de la partie correspondante du second, et si l'on fait la température de chaque partie du premier proportionnelle au potentiel électrique de la même partie du second, le flux de chaleur à travers une aire quelconque prise dans le premier sera proportionnel au flux d'électricité à travers l'aire correspondante dans le second.³⁰

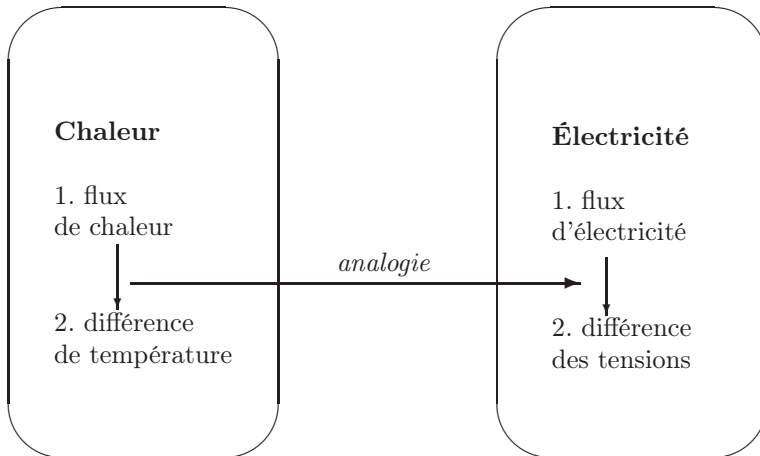
La définition qu'il donne de l'analogie est ici sous sa forme élémentaire qui est celle de la proportionnalité, entre les grandeurs isomorphes des deux domaines. Cette expression est équivalente à celle qu'utilise Ohm dans ses implications mais Maxwell fait dans un premier temps correspondre les grandeurs des deux domaines dans une relation de proportionnalité alors que Ohm fait correspondre par l'analogie les relations entre les grandeurs dans chaque domaine :

29. [Maxwell 1990], §72.

30. au même endroit, §243.



Analogie entre les grandeurs : Maxwell



Analogie entre les relations : Ohm

L'analogie de Maxwell est dans un premier temps une analogie de proportionnalité des grandeurs des deux domaines concernés, sur le schéma classique du raisonnement analogique. Mais elle n'est qu'un intermédiaire et elle entraîne l'analogie structurelle : il y a alors implication des relations dans un des domaines à l'image de celles qui existent dans l'autre

domaine par l'analogie :

Ainsi dans la comparaison que nous faisons, et où le flux d'électricité correspond au flux de chaleur, et le potentiel électrique à la température, l'électricité tend à passer des points où le potentiel est haut à ceux où il est bas, comme la chaleur tend à passer des points où la température est haute à ceux où elle est basse.³¹

La relation entre les deux théories présente cependant des limites qui apparaissent pour Maxwell (comme pour Ohm) dans la notion de capacité : elle se traduit par la possibilité pour un corps d'emmagasiner une certaine quantité de chaleur ou dans le domaine de l'électricité une certaine charge électrique :

La théorie du potentiel et celle de la température peuvent donc servir à s'éclairer mutuellement ; mais il y a une différence remarquable entre les phénomènes de l'électricité et ceux de la chaleur. [...] La différence entre les phénomènes consiste donc dans ce fait : que les corps sont susceptibles d'absorber la chaleur et de l'émettre, tandis qu'ils n'ont point la propriété correspondante pour l'électricité.

On ne peut échauffer un corps sans lui fournir une certaine quantité de chaleur dépendant de sa masse et de sa chaleur spécifique ; le potentiel électrique, au contraire, peut être élevé à un degré quelconque, de la façon que nous avons déjà décrite, sans communiquer au corps aucune charge d'électricité.

245. Supposons encore un corps préalablement chauffé et placé à l'intérieur d'un vase clos. L'extérieur du vase sera d'abord à la température des objets environnants, s'échauffera bientôt et restera chaud tant que la chaleur du corps intérieur n'aura pas fini de s'échapper.

Il est impossible de faire l'expérience électrique correspondante. Il est impossible d'électriser un corps et de le placer dans un vase creux, de façon que l'extérieur du vase ne montre d'abord aucune trace d'électrisation et devienne ensuite électrisé. Ce sont des phénomènes de ce genre que Faraday a recherchés en vain sous le nom de charge absolue d'électricité.³²

La chaleur peut être cachée à l'intérieur d'un corps et n'avoir point d'action au dehors : mais il est impossible d'isoler une quantité d'électricité, de l'empêcher d'être constamment reliée par induction à une quantité d'électricité contraire.

31. au même endroit.

32. On retrouve aussi chez Faraday cette tendance à l'unification qui échoue ici, mais qu'il a conduite à la réussite en assimilant l'ensemble des phénomènes électriques (électricité voltaïque, statique, « magneto-électricité », thermoélectricité et électricité animale) dans un seul domaine : [Faraday 1839], §7. ; pp.76-102 : Identity of Electricities derived from Different Sources.

Il n'y a donc rien dans les phénomènes électriques qui corresponde à la capacité calorifique. C'est ce qui résulte immédiatement de l'hypothèse suivie dans cet ouvrage, que l'électricité est soumise à la même condition de continuité que les fluides incompressibles. Il est donc impossible de donner à un corps une charge effective d'électricité, en forçant une quantité additionnelle d'électricité à pénétrer dans ce corps.³³

Une hypothèse bloque l'analogie, à savoir l'incompressibilité de l'électricité. Maxwell admet donc l'utilité de l'analogie mais dans les limites précisant les domaines d'application de l'analogie positive et l'analogie négative. Il présente ainsi une autre limite, celle de l'absorption électrique :

L'objet de cette étude est seulement d'indiquer le caractère mathématique véritable de ce qu'on appelle l'absorption électrique, et de montrer quelle différence fondamentale la distingue de phénomènes calorifiques qui paraissent analogues à première vue.

... Dans le cas de la chaleur, il y a une véritable absorption de chaleur par la substance, dont l'effet est d'échauffer cette substance. Il est impossible de produire en électricité un phénomène véritablement analogue, mais on peut l'imiter [...] et lui donner la forme d'une expérience de cours.

Maxwell, en rejetant la possibilité de l'absorption électrique, montre ainsi les risques d'une application trop stricte de l'analogie. Ainsi, l'exploitation de l'analogie mathématique doit être restreinte si l'on prend en compte les phénomènes physiques. L'analogie positive, dans un premier temps mathématique, ne peut davantage se développer sur l'analogie neutre, pour préserver la validité des inférences physiques.

Dans le chapitre sur la théorie de la lumière, Maxwell reprend les termes de l'analogie dans les relations entre l'opacité et la conductibilité électrique des corps. Pour les conducteurs, les équations de propagation d'une perturbation électromagnétique sont de la même forme que les équations de diffusion de la chaleur données par Fourier. Alors :

Ainsi, prenant pour exemple la première, la composante F du potentiel vecteur varie avec le temps et la position, de la même manière que la température d'un corps solide homogène varie avec le temps et la position, les conditions initiales et les conditions à la surface correspondant dans les deux cas, et la quantité $4\pi\mu C$ étant numériquement égale à la conductibilité thermique de la substance, c'est à dire au nombre d'unités de volume de la substance qui seraient échauffés de un degré par la chaleur qui traverse un cube de la substance, ayant pour côté l'unité et ayant deux de ses faces opposées à des températures différant de un degré, les autres faces

33. [Maxwell 1990], §244 et §245.

étant imperméables à la chaleur. Les différents problèmes sur la conduction thermique, dont Fourier a donné la solution, peuvent être transformés en problèmes sur la diffusion des quantités électromagnétiques, en se souvenant que F, G, H sont les composantes d'un vecteur, tandis que, dans les problèmes de Fourier, la température est une grandeur scalaire.³⁴

En dernier lieu, remarquons que Maxwell a également différencié électricité et chaleur, notant que l'équation de continuité qui exprime la conservation de la matière à l'intérieur d'un volume fermé s'applique à l'électricité mais n'est plus valable dans le cas de la chaleur puisqu'il peut y avoir conversion de chaleur en une autre énergie ou inversement.³⁵

Maxwell fait donc un usage très important des analogies. Centrées sur l'analogie mathématique, elles conduisent cependant le savant écossais à les analyser sous le filtre de la physique, en les limitant de facto par l'exigence qu'il exprime qu'elles soient interprétables de façon physique.

2.5.4 Potier

En 1872, Alfred Potier³⁶ présente une utilisation particulière de l'analogie qui permet une meilleure analyse physique du phénomène étudié par la connaissance du phénomène analogue :

La distribution de l'électricité à la surface des conducteurs soumis à leur influence mutuelle est un problème complètement résolu pour les physiciens ; la loi trouvée par Coulomb permettant de mettre ce problème en équation, il ne reste plus qu'une question de pure analyse ; mais, en dehors d'un nombre de cas très restreint, les formules analytiques auxquelles on arrive ne se laissent traduire en nombre que difficilement et péniblement ; sous leur complication, il est impossible de voir, même en gros, l'allure des phénomènes, ce qui est souvent pour les physiciens le point important ; tandis qu'en se laissant guider par l'analogie, il est possible, le plus souvent, de se rendre compte complètement de cette distribution, en comparant l'état électrique d'un système composé de conducteurs séparés par un milieu isolant avec l'état thermique permanent d'un corps conducteur ayant la même forme que le milieu isolant, et dans lequel les conducteurs seraient remplacés par des sources de chaleur à température constante.³⁷

34. au même endroit, § 802.

35. au même endroit, p42, §35.

36. Potier Alfred (1840-1905), ingénieur et physicien français, auteur d'importants travaux en optique et électricité.

37. [Potier 1872], p. 21.

Potier fait ainsi apparaître une distinction entre l'analyste (le physicien mathématicien) et le physicien (expérimental) qui veut donner une description liée aux phénomènes physiques. L'analogie est alors pour lui la meilleure méthode pour accéder à cette description. Il continue en précisant le sens de la relation d'analogie, perçue plus par le physicien que par le mathématicien :

L'identité des équations auxquelles Poisson, Green et Fourier ont été conduits en cherchant à appliquer l'analyse à ces deux problèmes implique nécessairement une relation entre les données et le résultat de l'un et les données et le résultat de l'autre. Je me suis proposé de montrer, ainsi que M. W. Thomson l'avait déjà fait, mais d'une manière plus élémentaire et en quelque sorte géométrique, qu'il n'est pas nécessaire de mettre ces problèmes en équation pour voir qu'ils sont identiques au fond, et que de leur comparaison seule résultent les théorèmes principaux de la théorie de l'électricité.

L'analogie reste structurelle mais non formelle, la géométrisation suffisant à appuyer l'analogie ; c'est une analogie géométrique.

2.5.5 Bouty

En 1878, Bouty³⁸ présente la théorie du potentiel et discute de la validité de l'analogie en mettant en avant les notions de capacités calorifique et électrique d'un corps : L'équation qui exprime qu'un système isolé ne reçoit ni ne perd de chaleur peut s'écrire : $\Sigma C(V - U) = 0$ où V représente des températures, C des capacités calorifiques et U la température finale. Il fait remarquer que l'analogie « ne subsiste que sous un certain point de vue ». Il tient compte de l'existence des capacités électriques alors que Maxwell avait été conduit d'abord à les rejeter puis à les introduire dans l'analogie, et souligne les différences essentielles entre les capacités thermiques et les capacités électriques. Alors que :

38. [Bouty 1878], pp. 37–38. Bouty Edmond (1846-1922), physicien français, connu pour ses travaux en électricité, notamment dans son étude de la conductibilité des solutions salines et le pouvoir diélectrique du mica. A publié avec Jamin un *Cours de Physique de l'École Polytechnique*.

Les capacités calorifiques ne sont pas indépendantes de la température	les capacités électriques sont indépendantes du potentiel.
La capacité calorifique d'un corps est proportionnelle à son volume (au cube des dimensions Ôhomologues)	La capacité électrique varie proportionnellement à la première puissance de ces dimensions
La capacité calorifique d'un corps est proportionnelle à un coefficient spécifique, variable avec la matière, non avec la forme du corps	La capacité électrique d'un conducteur est indépendante de sa matière et proportionnelle à un coefficient spécifique, caractéristique de sa forme extérieure

Considérant ces dissemblances (ou analogie négative selon Mary Hesse), il les écarte du champ de l'analogie. Il ajoute alors, montrant la puissance de l'analogie dans son domaine de validité :

Ces restrictions établies, on pourra, en toute sérénité, traiter par analogie les questions d'électricité en appliquant les théorèmes analogues démontrés pour la chaleur. La sphère d'épreuve, en communication lointaine³⁹ avec un corps jouera le rôle d'un thermomètre à potentiels; et quand elle sera choisie assez petite, elle donnera directement les potentiels, comme le thermomètre donne les températures et pour les mêmes motifs.

On voit de même que, quand deux corps sont au même potentiel (même température électrique), il ne peut passer d'électricité de l'un sur l'autre par voie de communication lointaine; que s'ils sont à des potentiels différents, l'électricité passera du corps à haut potentiel sur le corps à faible potentiel, etc.⁴⁰

Le terme *température électrique* est caractéristique de l'analogie où le mélange de vocabulaire issu des deux domaines permet de mieux associer les concepts, par souci pédagogique certainement. Les considérations de Bouty conduisent cette fois à la prise en compte des conditions expérimentales de vérification de la théorie issue de l'analogie. Les instruments de mesure ou d'observation se correspondent également si on prend quelques précautions.

Bouty nous montre bien que l'analogie persiste quand bien même on rencontre de fortes occurrences de l'impossibilité de concilier les deux théories concernées : il suffit de délimiter le champ de l'analogie, ce qu'il

39. La mise en communication lointaine se justifie par le phénomène d'influence qui existe quand les corps sont proches.

40. [Bouty 1878], p. 38.

fait en définissant l'analogie négative. Dans le cadre de l'analogie positive, on peut alors effectuer toutes les permutations possibles. Bouty tient plutôt pour la théorie du potentiel, opposée aux théories du champ des savants britanniques, et l'utilisation qu'il fait de l'analogie n'exige aucune référence physique fondamentale concernant la diffusion de la chaleur ou de l'électricité. Mais son apport dans l'étude des analogies se situe dans son emploi métaphorique du vocabulaire transféré d'un domaine à l'autre, et surtout à cette extension de l'analogie aux techniques expérimentales.

2.5.6 Poincaré

Henri Poincaré, présente dans son cours *Électricité et Optique* [Poincaré 1990] l'analogie chaleur-électricité sous sa forme mathématique :

La suite des calculs nécessaires nous conduira à des relations tout à fait pareilles à celles qu'a établies Fourier dans l'étude de la conductibilité de la chaleur. Dans le but de faire ressortir l'analogie mathématique qui existe entre les phénomènes électriques et les phénomènes calorifiques, nous commencerons par rappeler brièvement la théorie de Fourier.⁴¹

Il introduit, comme Ohm l'avait fait pour la chaleur, une interprétation moléculaire de la conduction électrique en se référant au travail de Poisson. Mais il s'agit ici de traiter le problème du courant de déplacement introduit par Maxwell pour caractériser les déplacements de charges lors de la polarisation des diélectriques. Poincaré reprend le modèle des cellules de Poisson dont les faces sont soumises à une différence de potentiel $\Delta\Psi$ et portent une charge $q = C\Delta\Psi$ où C est la capacité électrique lors du transfert entre cellules contigües⁴² :

la quantité d'électricité qui passe d'un de ces points à l'autre pendant ce même intervalle est $dq = -Cdt\Delta\frac{d\Psi}{dt}$, [$d\Psi$ étant la différence de potentiel entre les points considérés]

Puis il note l'analogie mathématique avec la formule $dq = -Cdt\Delta V$, liant la quantité de chaleur, la différence de potentiel et la capacité calorifique :

Cette formule est identique à la formule du n°62 qui donne la quantité de chaleur qui passe d'une molécule à l'autre, C étant d'ailleurs dans l'une et l'autre formule indépendant de la quantité dont la variation est indiquée par Δ .

41. [Poincaré 1990] ; p. 51.

42. au même endroit ; p.66. Analogie avec le déplacement de l'électricité dans les cellules.

Il en tire les conséquences :

69. – La loi des échanges d'électricité étant la même que celle des échanges de chaleur dans la théorie de Fourier, nous obtiendrons la quantité d'électricité rapportée à l'unité de surface à travers un élément quelconque en remplaçant dans la formule (6) (65), la température V par la quantité $\frac{d\Psi}{dt}$.

Poincaré relie enfin ce résultat à la théorie de Maxwell et généralise les résultats obtenus aux conducteurs à trois dimensions. Il justifie ce pas par un retour à l'expérience, l'analogie trouve alors une assise forte en jouant le rôle d'une hypothèse validée par l'expérience :

D'ailleurs cette extension se trouve justifiée par la concordance des conséquences théoriques et des faits expérimentaux observés dans quelques cas particuliers.⁴³

Henri Poincaré utilise ainsi essentiellement l'analogie formelle et développe habilement toutes les implications du traitement mathématique, dont qu'il exige une validation expérimentale.

2.5.7 Duhem

Pierre Duhem revient sur l'analogie de Ohm dans sa présentation des méthodes de la physique :

Une similitude entrevue entre la propagation de la chaleur et la propagation de l'électricité au sein des conducteurs a permis à Ohm de transporter de toute pièce, à la seconde catégorie de phénomènes, les équations que Fourier avait écrites pour la première.⁴⁴

Duhem simplifie beaucoup la démarche d'Ohm qui a construit ces équations à partir de son hypothèse moléculaire, ne les a pas transportées mais a construit l'analogie entre elles. Il précise l'étroite relation entre les équations malgré les différences physiques entre les phénomènes :

[...] L'idée du corps chaud et l'idée du corps électrisé sont deux notions essentiellement hétérogènes ; les lois qui régissent la distribution des températures stationnaires sur un groupe de corps bons conducteurs de la chaleur et les lois qui fixent l'état d'équilibre électrique sur un ensemble de corps bons conducteurs de l'électricité ont des objets physiques absolument différents ; cependant, les deux théories qui ont pour mission de classer ces lois s'expriment en deux groupes d'équations que l'algébriste ne saurait distinguer l'un de l'autre ; aussi, chaque fois qu'il résout un problème sur la distribution des températures stationnaires, il résout par le fait même un problème d'électrostatique, et inversement ...⁴⁵

43. au même endroit ; p.87. Conducteurs de forme quelconque.

44. [Duhem 1906], p. 137.

45. Au même endroit ; pp. 141–142.

L'analogie est ainsi, comme pour Poincaré, essentiellement une analogie mathématique. En tant que telle, elle est complète. Elle ne conduit pas à considération sur l'identité des phénomènes physiques. Sa réciprocity est soulignée par Duhem, il n'existe plus de théorie première sur laquelle se calque une théorie seconde, les deux théories sont équivalentes dans leur forme mathématique, l'isomorphisme est évident. L'analogie devient un outil heuristique et perd son statut explicatif.

2.6 Tentatives d'unification physique

Certains savants (Gaugain, Clausius) n'hésitent pas à s'orienter vers une analogie des grandeurs mises en jeu et donc vers une uniformisation physique espérée des deux domaines. On sait que ces tentatives ont été vouées à l'échec dans le cas de cette analogie.

2.6.1 Gaugain

En 1860, l'analogie tend à devenir complète avec Gaugain, le traducteur français de Ohm. Dans sa préface, il affirme :

Je viens de dire qu'il est parvenu à résumer dans un principe unique les lois que l'expérience lui avait permis de constater ; eh bien, ce principe est précisément le même qui sert de base à la Théorie de la chaleur de Fourier. Cette analogie me paraît extrêmement remarquable ; c'est peut-être l'une des plus puissantes raisons qui peuvent porter à croire que l'électricité et la chaleur sont deux manifestations diverses d'un même agent.⁴⁶

L'analogie est poussée vers ses limites, vers une unification des théories. À l'opposé de l'analogie entre lumière et électromagnétisme, nous savons que cet espoir de Gaugain ne pourra se réaliser dans le cas de la transmission de la chaleur.

Mais cette idée est une indication forte sur l'évolution d'une analogie que l'on espère conduire jusqu'à une identification. On est alors entraîné, parfois dans l'ignorance des résultats expérimentaux à étendre le champ d'application de l'analogie. Gaugain se limite cependant à des extensions proches des idées de Ohm :

Le rapprochement que je viens d'indiquer permet d'apprécier toute l'étendue des questions qui se rattachent à la propagation de l'électricité. De même, en effet, que dans la théorie de la chaleur on a deux états différents à considérer : l'état permanent et l'état variable des températures, on

46. [Ohm 1860], p. 2 : préface à Ohm, 1860. Gaugain (1810-1880) ; physicien français qui fut l'auteur de nombreux travaux en électricité.

doit aussi dans la théorie de l'électricité envisager deux états différents : l'état permanent et l'état variable des tensions ; de même que dans la théorie de la chaleur on peut se proposer de déterminer ou la distribution des températures ou le flux de chaleur, dans la théorie de l'électricité on peut rechercher ou la distribution des tensions, ou l'intensité du courant, qui n'est autre chose que le flux d'électricité. Enfin, dans le cas de l'électricité, comme dans le cas de la chaleur, on peut admettre que la propagation s'opère dans les trois dimensions de l'espace, ou supposer qu'elle s'effectue dans le sens d'une seule dimension.⁴⁷

Il revient ensuite sur la définition de l'analogie :

[. . .] ; L'idée qui constitue la principale découverte d'Ohm, c'est que les lois qui régissent la propagation de la chaleur sont communes à l'électricité. Or, ce principe admis, il est clair que, pour arriver à l'équation différentielle fondamentale, il n'est pas nécessaire de rien changer à la marche suivie par Fourier. Il suffit de remplacer, dans la démonstration qu'il a donnée, le mot de température par celui de tension, les mots flux de chaleur par ceux de flux d'électricité ; l'équation différentielle est exactement la même dans le cas de la chaleur et dans le cas de l'électricité. Comme l'ouvrage de Fourier est peu répandu, j'ai cru faire plaisir au lecteur en reproduisant dans la note A les raisonnements que ce savant a employés pour établir l'équation différentielle fondamentale ; on verra qu'ils peuvent s'appliquer à l'électricité sans aucune modification.⁴⁸

C'est le rôle heuristique de l'analogie mathématique qui est mis en avant par Gaugain, mais sur la base de lois communes dont il est difficile de discerner chez l'auteur s'il leur attribue seulement une communauté de forme, ou une identité physique.

2.6.2 Clausius

Plus tard, en 1884, Clausius exprime le même ordre d'idées, en évoquant le sujet de la connexion étroite qui existe entre les forces naturelles ou les grands agents de la nature. Selon Jungnickel et McCormmach [Jungnickel 1986],

Il développa dans ce sens les relations entre chaleur et électricité, les deux domaines auxquels il avait consacré la plus grande part de ses recherches. Jusque là, la chaleur et l'électricité n'avaient pas été réduites à un seul agent : en dépit de ses connexions avec la chaleur, l'électricité était encore insaisissable. Il est vrai que les courants électriques mettent les particules en

47. au même endroit ; pp. 2-3.

48. au même endroit ; pp. 14-15.

mouvement constituant ainsi la chaleur, et, réciproquement, que les mouvements thermiques des atomes donnent naissance à des courants électriques ; mais, de cette transformation familière d'un mouvement d'une sorte en un autre, Clausius tire des inférences sur la nature de l'électricité.⁴⁹

Les transformations énergétiques viennent compliquer le jeu de l'analogie car il existe des possibilités de convertir l'énergie électrique en chaleur (effet Joule) ou, inversement par l'effet thermoélectrique de produire un courant à partir de deux sources de chaleur. Ces deux conversions pouvaient orienter les savants dans la voie de l'unification des théories.⁵⁰

C'est ainsi que Clausius exprime cette idée, qu'il qualifie cependant de précoce :

Agentien, die sich einander verwandeln lassen, müssen ihrem wesen nach gleich sein, gelangt man zu dem schlusse : alle vier Agentien, Licht, Wärme, Magnetismus unt Elektrizität, sind von gleicher Natur und nur verschiedene Formen eines und desselben Agens.⁵¹

2.7 Critique de l'analogie et de ses limites : Heaviside

C'est Oliver Heaviside qui l'exprime le mieux quand il décrit l'analogie entre la diffusion de la chaleur dans une tige et la diffusion de la charge dans un câble. Il montre dans un premier temps qu'il faut adapter l'analogie au cas étudié et ici, les choses ne vont pas de soi :

Il vaut mieux, pour lui, utiliser l'analogie mécanique de la diffusion élastique. Heaviside concède cependant que l'on pourrait quand même revenir à l'analogie avec la chaleur, mais des difficultés se présentent :

Afin de traduire en problèmes de chaleur, peut-être que le plus facile est de considérer la conduction longitudinale de la chaleur dans une tige. Alors V est la température et C le flux de chaleur alors que $R - 1$ et S sont la conductance et la capacité calorifique par unité de longueur de tige. Mais la tige devrait être isolée latéralement. C'est facile d'isoler une tige électriquement ; mais c'est beaucoup plus difficile, sinon impossible, de l'isoler thermiquement de façon équivalente. Ainsi, si le flux de chaleur dans une

49. [Clausius 1885], cité par Jungnickel et McCormmach, [Jungnickel 1986], pp. 84-85.

50. Il est à noter que l'analogie formelle conduit, quant à elle, à une interprétation d'uniformisation mathématique de la nature qui n'a de sens que comme outil universel de description des théories physiques, correspondant à des principes physiques fondamentaux liés par exemple aux notions de conservation.

51. [Clausius 1885], p. 20.

vraie tige est rejeté pour le désir d'une similitude suffisamment proche au problème électrique, nous pouvons imaginer un nombre infini de tiges assemblées en contact côte à côte. Comme les maisons en carton pâte dans une rue se soutiennent l'une l'autre, et préviennent l'accident qui arriverait si elles étaient séparées, ainsi les tiges évitent que la chaleur ne s'échappe par les côtés vers ses voisins, de sorte que le flux longitudinal de chaleur est possible de la même façon que dans une tige parfaitement isolée. C'est le cas du flux de chaleur linéaire dans un conducteur homogène infini.⁵²

Il termine par une conclusion radicale : il faut perdre cette habitude de convertir les problèmes électriques par l'analogie. Heaviside réclame donc l'abandon de cette analogie pour deux raisons,

- les deux théories ne sont pas strictement comparables. L'analogie négative reprend le pas car il existe des différences importantes comme l'auto-induction (câbles téléphoniques), l'isolation électrique est possible alors que l'isolation thermique ne l'est pas. . .
- les deux théories peuvent être autonomes et consacrées à la résolution de problèmes spécifiques. Quand la théorie a suffisamment progressé, elle prend ses distances, son indépendance par rapport à la théorie mère dans l'analogie. On doit les utiliser, à l'intérieur de leur domaine de validité respectif, à la résolution de problèmes spécifiques.

On pourrait croire qu'à la suite de ces remarques de Heaviside, l'analogie disparaisse à jamais des problèmes électriques. Il faut alors penser à une deuxième utilisation, dans l'exposé pédagogique des théories. Cette préoccupation didactique est certainement déjà présente dans les écrits de Poincaré.

2.8 Fonction pédagogique de l'analogie : Feynman

Ceci n'empêche pas de traiter encore maintenant certains problèmes de diffusion de la chaleur par des considérations analogues dans le domaine de l'électricité. C'est alors l'isomorphisme qui est utilisé et souvent de façon inverse de sa définition historique première. Ainsi, dans le cours beaucoup plus récent de Richard Feynman⁵³, on retrouve la justification

52. au même endroit.

53. [Feynman 1992]. Richard Feynman (1918-1988), physicien américain, théoricien de la physique contemporaine, en physique de la matière condensée avec sa théorie de la superfluidité, en physique des interactions fondamentales où il fonde l'électrodynamique quantique dans laquelle il utilise un mode de représentation graphique des processus élémentaires, les diagrammes de Feynman. On considère également qu'il a renouvelé la pédagogie de la physique.

de l'usage des analogies, avancée par Duhem, par utilisation pratique des modèles auxquels les diverses théories analogues conduisent :

On peut aussi résoudre les problèmes aux limites par des mesures sur des analogues physiques. L'équation de Laplace se présente dans de nombreux cas physiques différents : dans la propagation de la chaleur en régime permanent, dans l'écoulement irrotationnel d'un fluide, dans l'écoulement d'un fluide dans un milieu étendu, et dans la déformation d'une membrane élastique. Il est fréquemment possible de réaliser un modèle physique qui est analogue au problème électrique que nous voulons résoudre. On peut déterminer la solution du problème auquel on s'intéresse en mesurant une quantité analogue convenable sur le modèle.

Dans un autre chapitre, il montre l'utilisation inverse de l'analogie où l'on part des lois connues de l'électrostatique pour résoudre des problèmes thermiques. Le principe est de trouver le modèle analogue au système qui pose problème, quitte à prendre des libertés par rapport à la réalité : il donne l'exemple de la constante diélectrique qui n'est jamais nulle alors que son équivalent thermique, la conductivité thermique peut l'être. La résolution du problème consiste à imaginer ce qui se passerait si cette constante diélectrique était nulle, pratiquement dans une expérience de pensée. Il ne faut pas, selon lui, conclure à l'unité profonde de la nature. Les problèmes résolus ne sont pas physiquement identiques. À l'examen poussé, les équations ne le sont pas non plus, ce sont des approximations. Mais ce qui est commun à tous ces phénomènes analogues, c'est la cadre de la variation directionnelle et linéaire dans l'espace physique, d'où l'introduction du gradient dans les équations.

Les équations de l'électrostatique sont les équations vectorielles les plus simples. Tout autre problème simple ou toute simplification d'un problème compliqué, doit ressembler à un problème d'électrostatique.⁵⁴

Cette opinion de Feynman peut se laisser envisager par le fait que les équations qui assurent l'analogie formelle entre les deux classes de phénomènes sont des équations qui font intervenir les coordonnées d'espace, autour de principes fondamentaux comme ceux de continuité, de conservation, responsables d'analogies structurelles et que l'on retrouve sans changement d'un domaine à l'autre. C'est cette apparente unité de la nature que Feynman réfute et qui suggérerait aux scientifiques un niveau d'unification d'essence mathématique.

54. [Feynman 1964], §12-7.

3 Conclusion

L'analogie intervient donc sous une forme implicite dans la naissance des idées, dans le sens de l'analogie substantielle. Son évolution consiste le plus souvent en une transition vers l'analogie structurelle, et pour l'analogie structurelle, de l'homomorphisme à l'isomorphisme. Quand la théorie est adulte et autonome, l'analogie peut disparaître. Elle persiste seulement comme un moyen de conduire à bien des calculs en utilisant le formalisme de la deuxième théorie. Il existe cependant des retours (faut-il dire des régressions ?) de l'analogie formelle à l'analogie substantielle, provoqués par des tentatives d'unification physique. L'interprétation de l'analogie formelle peut conduire à ne pas attribuer aux termes présents dans les équations une simple valeur symbolique qui permet les substitutions terme à terme, mais à leur donner une signification physique qui conduit à un rapprochement ontologique, naturel pour le physicien.

Le diagramme suivant résume les évolutions de l'analogie chaleur-électricité. La notion de *force* de l'analogie portée en ordonnée est à prendre au sens que lui attribuaient les savants de la fin du XIXe siècle. Il faut cependant noter que plus on s'élève vers l'isomorphisme, moins l'analogie devient intéressante dans un contexte de découverte. C'est l'analogie neutre qui permet de nouveaux prolongements, alors que la seule considération de l'isomorphisme dans l'analogie positive stérilise l'invention scientifique.

<force >

Analogie
structurell
géométriqu
ou formelle

homomorp

Ohm

Analogie f

Bibliographie

BOLMONT, ETIENNE

1999 *Le rôle épistémique des analogies : l'exemple de l'électricité, du magnétisme et de l'électromagnétisme au XIXe siècle*, Thèse de doctorat, Nancy : Université de Nancy 2, 1999.

POURPRIX, BERNARD

1989 *Contribution à l'histoire de la physique de la matière et des forces au 19ème siècle. La mathématisation des phénomènes de diffusion*, Thèse de doctorat, Lille : Université de Lille, 1989.

CLAUSIUS, RUDOLPH

1885 *Über den Zusammenhang zwischen den grossen Agentien der Natur*, Bonn : Cohen & Sohn, 1884.

BOUTY, EDMOND

1878 Analogie du potentiel avec la température et de la capacité électrique avec la capacité calorifique, in *Cours de Physique de l'Ecole Polytechnique*, Paris : Gauthier-Villars, 1878.

DUHEM, PIERRE

1906 *La théorie physique, son objet – sa structure*, Paris : Chevalier et Rivière, 1906. Cité d'après la réédition : Vrin, 1993.

FEYNMAN, RICHARD

1964 *Electromagnetism*, Reading : Addison-Wesley, 1964. Cité d'après l'édition française : *Electromagnétisme*, Paris : InterEditions, 1992.

FARADAY, MICHAEL

1839 *Experimental Researches in Electricity*, vol.1, London : Bernard Quaritch, 1839.

HEAVISIDE, OLIVER

1971 *Electromagnetic Theory*, New-York : Chelsea Publishing Company, 1971.

HESSE, MARY

1986 *Models and Analogies in Science*, Notre-Dame : Notre-Dame Univ. Press, 1986.

JUNGnickel, CHRISTA ET McCORMACH RUSSEL

1986 *Intellectual Mastery of Nature*, vol.2, Chicago : The Chicago University Press, 1986.

KIRCHHOFF, GUSTAV

1857 Über die Bewegung der Elektrizität in Leitern, *Poggendorff Annalen*, 102.

MAXWELL, JAMES CLERK

1890 On Faraday's Lines of Force, in [*The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 155-229].

1990 *Electricity and Magnetism*.

OHM, GEORG

1860 *Théorie mathématique des courants électriques*, Paris : Hachette, 1860. Edition Cité d'après la réédition de Gabay, 1990.

POINCARÉ, HENRI

1897 Les rapports de l'analyse et de la physique mathématique, *Revue générale des Sciences*, 857-861.

1901 *Électricité et Optique*, Paris : Jacques Gabay. Cité selon la réimpression de Gabay, 1990.

1902 *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion. Cité selon la réimpression de 1968.

POTIER, ALFRED

1872 Analogies de la propagation de la chaleur et de la distribution de l'électricité, *Journal de Physique*, 1.

POUILLET, CLAUDE

1837 *Éléments de physique expérimentale*, Paris : Bechet Jeune, 1837.

THOMSON WILLIAM (LORD KELVIN)

1884 *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism*, Londres : MacMillan, 1884.

1890 Ether, Electricity, and Ponderable Matter, in, [*Mathematical and Physical Papers*, Cambridge : Cambridge University Press, 1890].

WEINGARTNER, PAUL

1979 Analogy among systems, *Dialectica*, 33, 546-558.