PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

GERHARD HEINZMANN

La philosophies des mathématiques de E. W. Beth

Philosophia Scientiæ, tome 3, nº 4 (1998-1999), p. 77-92
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1998-1999__3_4_77_0>

La philosophies des mathématiques de E. W. Beth

Gerhard Heinzmann
Université Nancy 2, Archives – Henri-Poincaré

Abstract. According to Beth, the postwar philosophical climate is characterised by diametrically opposed conceptions of scientism and subjective relativism. What consequences are to be drawn for the philosophy of mathematics ? Refusing to link rationality to absolute evidence, Beth proposes a third doctrine which stands in close relationship to the insights of Bernays and Gonseth. In its central sections, this article analyses Beth's ideas by considering two examples concerning the ontological commitment involved, first, with respect to Carnap's position in the thirties and second, with respect to consequences implied by the Löwenheim-Skolem theorem.

Résumé. Selon Beth, le climat philosophique de l'époque d'après-guerre est caractérisé par une tension entre scientisme et relativisme subjectif. Quelle conséquence faut-il en tirer pour la philosophie des mathématiques ? Refusant de lier la rationalité à une évidence absolue, la synthèse envisagée par Beth est assez proche des solutions proposées par Gonseth et Bernays. Dans sa partie centrale, cet article examine le point de vue de Beth à partir de deux exemples qui concernent l'engagement ontologique : 1° par rapport à la position de Carnap dans les années trente ; 2° par rapport aux conséquences à tirer du théorème de Löwenheim-Skolem.

Philosophia Scientiae, 3 (4), 1998-1999, 77-92

Dans son petit livre intitulé *La crise de la raison et la logique*, Beth se propose comme but final de sa pensée philosophique

> d'arriver à des directives pour la construction d'une nouvelle synthèse doctrinale qui pourra remplacer les grands systèmes philosophiques traditionnels. [Beth 1957, 3]

En fait, selon Beth, le climat philosophique d'après guerre est marqué par la tension entre un rationalisme scientifique, dominé par la logique mathématique et un irrationalisme. Ainsi s'installe un vide que les systèmes du rationalisme traditionnel — Beth mentionne les mouvements thomiste, phénoménologique et matérialiste [Beth 1950, 184] — ne sont pas en mesure de remplir.

Dans cette situation, l'ambition du logicien et philosophe des mathématiques Beth semble bien ambitieuse : En se plaçant dans la tradition du mouvement français de la critique de la science et en s'opposant au Cercle de Vienne [*ibid.*], Beth veut renouveler la philosophie générale. On lui concède, certes, volontiers que

> la question du fondement des mathématiques compte toujours parmi les problèmes classiques de la philosophie systématique et [que], de ce fait, toute méthode et toute discipline qui peut contribuer à élucider cette question prend une certaine importance philosophique. [Beth 1957, 4]

Il est cependant difficile à un lecteur non averti de ce manuel classique monumental que constitue *The Foundations of Mathematics* [1959] de dégager des différents points de vue la synthèse doctrinale promise. Circonstance en apparence aggravante, on peut lire dans *Épistémologie mathématique et psychologie*, écrit en collaboration avec Piaget :

> Mon point de vue se caractérise précisément par l'effort continu de comprendre tout autre point de vue comme une position raisonnable. J'ai en horreur les doctrines qui nous obligent à rejeter toute autre opinion comme "dénuée de sens". [Beth/Piaget 1961, 4]

Est-ce là le principe de tolérance d'un encyclopédisme désuet ou d'un syncrétisme ? Beth continue :

> En même temps, je suis d'avis que les différentes conceptions traditionnelles concernant les fondements de la logique et des mathématiques se sont toutes révélées inadéquates en face de la situation actuelle. Ainsi s'impose, me semble-t-il, la nécessité d'une sorte de synthèse doctrinale des différentes tendances contemporaines qui

On est tenté de dire : L'équilibre se rétablira de lui-même après que les extrêmes auront passé leur temps ! Néanmoins, on sait qu'il vaut mieux ne pas trop croire que le progrès se fera automatiquement.

La synthèse promise serait-elle alors peut-être due au résultat d'une déconstruction successive des positions traditionnelles, envisagées dans leurs dernières conséquences ? Le scientisme positiviste d'autrefois occupait, certes, une position extrême en ceci qu'il croyait pouvoir codifier les raisonnements non-démonstratifs dans une logique inductive, comme la logique déductive avait codifié les raisonnements démonstratifs. Quant à l'empirisme logique, on peut, à la rigueur, le considérer comme un équilibre entre les extrêmes du positivisme et de l'irrationalisme, parce que sans abandonner le rationnel il en limite le champ d'application à des critères en vigueur en mathématiques et en physique. Cependant, bien qu'elles ne soient pas dénuées de toute rationalité, la simplicité et la cohérence qui guident le choix des hypothèses physiques ou des postulats mathématiques ne sont pas soumises à des critères objectifs. Mais la mise en cause d'une évidence intuitive par rapport à la géométrie euclidienne ou par rapport à la simultanéité absolue doit impliquer une transformation du concept d'intuition et non un relativisme irrationnel [cf. Beth 1957, 6]. L'équilibre est alors maintenu.

Cette "dialectique" de synthèses multiples rappelle évidemment la méthodologie de Gonseth, à laquelle Beth estime devoir adhérer en 1950 [Beth 1950, 185], bien qu'il n'apprécie guère le terme 'dialectique' [cf. Gonseth 1948b, 120]. Or, depuis 1934, Bernays était "retourné" de Göttingen à Zurich et assurait pour Gonseth la liaison avec la recherche actuelle des fondements des mathématiques qu'il avait lui-même perdu. La relation de Beth avec le Cercle *Dialectica* explique maintenant un deuxième point important : en s'opposant à l'empirisme logique par leur conviction qu'il est impossible de saisir le fait brut par une simple description, Gonseth et Bernays [Bernays 1949, 46, 47] — comme, avant eux, Poincaré — développent une méthode d'interaction entre langage scientifique et expérimentation. Gonseth applique cette interaction à la philosophie où il renonce à l'affirmation d'un principe métaphysique, ontologique ou épistémologique, en faveur d'une stratégie d'engagement ouverte à l'expérience, c'est-à-dire révisable en vue des conséquences à obtenir par rapport à l'activité de définition et de démonstration. Comme l'avait déjà fait Popper, Gonseth et Bernays soulignent que la rationalité n'est pas liée à une évidence absolue. Ils restent au juste milieu entre le programme initial de l'empirisme logique et le tournant, amorcé par Wittgenstein 2, vers une *ordinary philosophy of language.* Ainsi, Beth, dans une discussion à la suite d'une conférence de Gonseth, note en 1947 :

> Je suis complètement d'accord avec MM Gonseth et Weyl qu'il nous faut, comme point de repère pour ainsi dire, le monde vulgaire, le monde du sens commun.[...] Je voudrais ajouter encore que ce monde vulgaire peut bien nous servir comme point de repère mais ne peut pas être pris comme un critère de vérité pour les théories plus développées. [Gonseth 1948a, 56]

En résumé, au lieu de tenir la synthèse envisagée par Beth pour une conséquence de la destruction des extrêmes, on devrait considérer ces derniers également en tant que *rationes cognoscendi* particulièrement insistantes de la complémentarité des solutions, c'est-à-dire d'une solution multidimensionnelle qui se montre en forme d'*horizons de réalités* (Gonseth). En d'autres termes, les différents systèmes historiques ne doivent pas être jugés selon le même critère, car ils poursuivent peut-être des buts différents. Certes, on ne parle pas encore de différentes manières de construire *les mondes*, mais de différentes manières de construire *le* monde. Je cite un passage du célèbre dernier et 232e paragraphe du *The Foundations of Mathematics* :

> With respect to the other spheres or zones, each sphere of reality has a considerable degree of autonomy. [...] On the other hand, it must of course be conceded that the different spheres of reality are not entirely disconnected; [...] However, it is not superfluous to utter once more a caution against any premature attempt at a precise statement concerning the connections between the different spheres of reality. It is the task of science to penetrate into the different spheres of reality and to discover their mutual connections. It seems reasonable however tentatively to consider the various spheres of reality as *complementary aspects* of one and the same substratum. [Beth 1965b, 644/645]

Il est douteux que l'effort accompli par Beth en vue de trouver de nouveaux fondements des mathématiques ne mène à un résultat concluant, si on croit qu'il vise à établir un nouveau *système*. Cependant, Beth oppose dans *Mathematical Thought* (1965) deux prises de positions : 1°celle selon laquelle, comme dans le platonisme ou l'empirisme logique, la structure du langage mathématique, fixée indépendamment de l'expérience ou de l'intuition, résulte d'une réduction soit à une forme transcendante soit à la logique. 2°, à l'opposé, celles des théories qui conçoivent les mathématiques et la logique ou bien comme un processus d'abstraction et de construction à partir de données perceptibles, ou bien comme processus de construction de formes subjectives [cf. Beth 1965a, 180-186]. La première voie procède d'une tradition aristotélico-thomiste, la deuxième correspond à la tradition intuitionniste.

Beth favorise les positions de la tradition intuitionniste, qui ont en commun d'expliquer ce qu'on peut connaître par ce que l'on peut faire. Néanmoins, il semble hésiter entre une position intuitionniste, où l'activité mathématique est plutôt un processus fondé sur la connaissance d'entités, et une approche constructiviste, qui tient à l'effectivité de la construction elle-même [cf. Hintikka, 238sq]. Beth oscille, parce qu'il ne veut pas être le créateur d'un nouveau système, mais celui d'une nouvelle méthode [cf. Beth 1957, 8, 9], à savoir celle de la prise en compte de différents horizons de réalités [cf. Beth 1965a, 125] qui restent horizons sans devenir des sphères autonomes. C'est ainsi, par exemple, qu'il approuve la thèse de Carnap-Bernays selon laquelle l'existence mathématique ne peut pas simplement consister dans l'absence de contradiction. En effet, dans la pratique mathématique, l'existence est le plus souvent conditionnée par le cadre langagier choisi en vue d'un objectif arrêté ; elle est donc "interne" (Carnap) ou "*bezogen*" (Bernays) [cf. Beth 1965a, 171 ; Carnap 1950 ; Bernays 1950]. Mais, pour Carnap, le choix du cadre est soumis au principe de tolérance applicable aux formes linguistiques. En 1950, ce choix est exclusivement déterminé par des considérations pratiques selon lesquelles les propositions d'existence externe sont dépourvues de tout contenu cognitif. Beth, au contraire, croit en un libre choix limité par un engagement ontologique ou par l'intuition mathématique [Beth 1963, 499sq.]. On pourrait penser qu'il s'agit ici d'une controverse rappelant celle qui oppose le formaliste et le réaliste face au théorème d'incomplétude de Gödel : le premier met en évidence la transcendance et par conséquent le non-sens des questions sémantiques ; le second considère l'incomplétude comme symptôme de la limitation d'un formalisme [cf. McNaughton 1957, 68] qu'on pourrait élargir, en s'inspirant par exemple de Gentzen. Une telle perspective n'est cependant pas tout à fait celle adoptée par Beth. Pour lui, cette controverse confirme plutôt une interprétation qu'il partage avec Quine et Gonseth : les trois penseurs s'accordent à penser qu'il n'existe pas, en principe, de frontière précise entre l'acceptation d'une structure langagière et l'acceptation d'une assertion formulée dans ce langage [cf. Carnap 1950, 215, note 1 ; Heinzmann 1982, 122, note 38]. Je reprendrai plus loin cette question.

La nouvelle méthode envisagée par Beth veut faire valoir les différents aspects de la réalité à travers le filtre constitué par le climat intellectuel de l'époque, climat caractérisé par une tension entre scientisme et relativisme subjectif. Pour échapper à l'ancien positivisme comme au nouveau dogmatisme d'un relativisme radical il faut préciser la situation des sciences exactes et des sciences naturelles par rapport aux sciences humaines et sociales. Il serait en effet dangereux et réducteur de croire que ces dernières se réduisent dans leur rôle de guides de la personne dans ses engagements moraux et politiques au sens large. Selon la formule lumineuse de Henri Poincaré :

> On croit généralement que [les savants] ont besoin [de la culture littéraire] pour devenir des hommes et non pour devenir des savants ; et c'est là qu'on se trompe." [Poincaré 1911, 25-26]

Les sciences humaines et sociales délimitent le cadre réflexif, sociologique, historique voire littéraire des activités scientifiques. Elles fournissent un cadre conceptuel dont le scientifique fait usage dans ses déductions. C'est ainsi qu'est remise en question la revendication traditionnelle de l'objectivité fondamentale des sciences. D'abord parce que certaines théorisations modernes, telles que la théorie de la relativité ou la physique quantique rendent plus problématiques les relations entre théorie et expérience. Ensuite parce que le rôle des personnalités et des styles individuels est manifeste dans la pratique de la science. A un niveau ontologique, on ne peut donc continuer à raisonner sur les objets supposés éternels des sciences. Les frontières qui séparent traditionnellement sciences exactes et sciences sociales étant perméables, l'autonomie du champ scientifique devient relative, sans nuire pour autant à son identité et à son développement. Je cite le même paragraphe des *Foundations* de Beth :

> We cannot separate the spheres of physical and of subjective reality, so long as we remain inside the circle of our personal experience. A separation of these spheres urges itself upon us soon as we take into account the experiences of other people ; this involves however at the same time the necessity of penetrating into the social sphere of reality. "Pure physics" is for this reason impossible, even *in abstracto*. [...]
>
> The reader [...] will not be inclined, I hope, to interpret these words as a plea for "impure" science. I meant only to state the conviction that the frontiers between the various domains of human knowledge, important and even indispensable though their maintenance may be for the development of science, cannot be vindicated indefinitely. [Beth 1965b, 645/646]

Les problèmes de classification des nouvelles technologies demandent certainement une prise en compte d'un espace frontalier entre nos critères traditionnels et constituent — Beth l'a bien pressenti [Beth 1965a, 166] — une troisième crise des fondements.

Dans les développements qui suivent, je me contente d'aborder la question de savoir, pour quelles raisons une "logique pure" au sens qu'il donne à cette expression est impossible aux yeux de Beth. Je donne deux exemples qui concernent l'engagement ontologique, d'une part par rapport à la position de Carnap dans les années trente et, d'autre part, par rapport aux conséquences à tirer du théorème de Löwenheim-Skolem.

Je reprends d'abord le problème déjà soulevé : l'acceptation et le refus d'un engagement ontologique sont-ils également influencés par certaines considérations intuitives [Beth 1963, 501] ou cet engagement est-il une implication analytique et triviale du cadre linguistique choisi et se réduit du fait à la question de l'acceptabilité pratique de ce cadre. Cette dernière prise de position, selon laquelle les propositions théoriques sont bien séparées des jugements pratiques est soutenue par Carnap [cf. Carnap 1950, 217]. Beth lui répond que l'acceptabilité pratique présuppose elle-même déjà un engagement ontologique. Voici une esquisse de son argumentation fondée sur un langage M utilisé également comme métalangue [cf. Beth 1963, 479-502]:

1° M doit contenir des règles de manipulation des symboles du langage-objet, c'est-à-dire contenir une certaine version M_1 de l'arithmétique élémentaire.

2° Le langage de la syntaxe élémentaire M_1 doit être étendu à un langage de syntaxe théorétique M_2, et celui-ci à son tour à un système d'expression M_3 pour la sémantique correspondante.

3° Pour M_1, Carnap présuppose implicitement un modèle intuitif, en particulier une interprétation univoque de "etc." dans la suite 0, 0', 0", etc.

4° Le passage de M_1 à M_2, c'est-à-dire d'une syntaxe établie par rapport à un modèle intuitif à un langage formel sans modèle de référence, exige ou bien une preuve de l'existence d'un modèle standard ou bien au moins une preuve de non-contradiction. Beth renvoie à un travail de Rosser et Wang pour affirmer qu'il n'est pas du tout assuré que M_2 admet un modèle standard. La preuve de non-contradiction, enfin, en est possible que dans un langage plus riche et donc plus suspect que M_2.

5° M_1 n'est "traduit" en M_2 que si le modèle intuitif de M_1 est garant de la traduction.

Synonyme de celle de "modèle intuitif", l'expression d'"engagement ontologique" traduit mieux l'intention de Beth. Car, à l'opposé de ce que l'expression *modèle intuitif* pourrait facilement laisser entendre, le mode de l' engagement ne peut pas être celui d'une *connaissance* pré-rationnelle dans laquelle une prétention de validité est présupposée d'une manière inconsciente. L'engagement est plutôt celui d'une habitude, d'une immédiateté dans un contexte pragmatique et ne doit pas être d'avantage confondu avec une appréhension pré-expressive. C'est une sorte de récit préalable. En d'autres termes, l'engagement ontologique externe et interne se situent bien à deux niveaux différents de l'usage langagier, des niveaux qui sont néanmoins inséparables. Dans le cadre de cette interprétation, l'affirmation posée par Beth en 1937 — alors qu'il est en bonne compagnie de Poincaré et de Gonseth — est toujours valide :

> la seule possibilité de fonder les mathématiques d'une manière vraiment satisfaisante consiste à appliquer simultanément les méthodes intuitive et formelle de telle façon qu'elle puissent se contrôler et se vérifier mutuellement. [Beth 1937, 165]

Dans sa réplique, Carnap concède que la décision pratique conduisant à l'adoption d'un système langagier puisse être influencée par des considérations théoriques concernant la force d'expression des systèmes en concurrence, mais, curieusement, reproche à Beth l'introduction d'une proposition existentielle externe de caractère flou. Il semble que l'essentiel de l'argumentation bethienne lui a échappé : à savoir qu'il est philosophiquement impossible de réduire la différence entre une syntaxe élémentaire et une syntaxe formelle en tant que variations à l'intérieur même du formalisme.

Dans le dernier paragraphe, déjà cité des *Foundations*, Beth attribue au théorème de Löwenheim-Skolem le rôle d'une clef de voûte de son ouvrage :

> In our discussion of the curious implications of the theorem of Löwenheim-Skolem we have seen that "pure logic" is likewise impossible ; we cannot avoid an appeal to a form of intuitive knowledge [Beth 1965b, 645]

Pour comprendre le propos de Beth, il n'est pas nécessaire de recourir à une formulation technique du théorème de Löwenheim-Skolem, qui connaît, au moins jusqu'en 1970, de nombreuses généralisations dues aux générations allant de Tarski et Henkin jusqu'à Boolos. L'énoncé qui nous intéresse d'abord est celui du théorème "descendant" selon lequel toute théorie exempte de contradiction et axiomatisée "au moyen d'un nombre fini ou dénombrable d'axiomes énoncés dans le calcul des prédicats du premier ordre avec égalité admettra un modèle dénombrable, même si elle a été construite pour admettre un modèle non dénombrable". [Martin 1964, 161] C'est le cas, en particulier, de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel contenant l'appartenance comme prédicat spécifique binaire : il existe donc un modèle R de ZFC (=ZF + axiome du choix), dont l'univers U est dénombrable. Selon une généralisation datant de 1957, due à Tarski et Vaught, nous pouvons même supposer que R est une substructure élémentaire (substructure contenant les mêmes énoncés valides) d'un modèle non-dénombrable tel que le prédicat qui correspond dans R à l'appartenance dénote en fait la relation d'appartenance et non une autre relation non standard [cf. v. Fraasen 1971, 123]. Bref, U est un ensemble dénombrable qui satisfait tous les axiomes de la théorie formalisée des ensembles ZFC et dont tous les éléments sont tout au plus dénombrables.

Ce fait semble être paradoxal. Car, en ZFC, on prouve évidemment l'existence d'ensembles non-dénombrables : L'axiome de l'infini assure l'existence d'un ensemble infini dénombrable A et l'axiome de la puissance celle d'un ensemble B de tous les sous-ensembles de A tel que qu'il n'existe pas une application bijective de A sur B ; d'où on conclut au caractère non dénombrable de B. Cependant, le paradoxe n'est qu'apparent : dans le modèle R, B n'est pas la classe des sous-ensembles de l'ensemble A, mais seulement la classe des sous-ensembles de A qui appartiennent à U. Puisque A et B sont dénombrables, il existe évidemment une bijection entre A et B, mais cette bijection, c'est-à-dire cette paire d'ensembles ordonnés n'est pas incluse dans U. Ce qui est dénombrable du point de vue de la métalangue, dans laquelle est également formulé le théorème de Löwenheim-Skolem, ne l'est pas du point de vue de la langue-objet [Ladrière 1957, 360]. Par conséquent, dans le modèle R, l'ensemble B possède une plus grande cardinalité que l'ensemble A. Nous devons donc distinguer la cardinalité "extérieure" des ensembles A et B de la cardinalité de ces deux ensembles dans le modèle R : dans le premier cas, les ensembles ont même cardinalité, dans le deuxième cas leur cardinalité est différente. [cf. Rasiowa/Sikorski 1970, 352/353] Ainsi le théorème montre bien que ZFC est irrémédiablement non catégorique, mais seulement par référence à la théorie naïve des ensembles utilisée par le mathématicien dans la métalangue.

Devant cet arrière-plan de résultats techniques écoutons la leçon philosophique que Beth en tire :

> From the paradox of Löwenheim-Skolem and from its analysis it seems to follow that deductive theories cannot, in general, provide an adequate description of mathematical structures; therefore, it seems likely, that our knowledge of such structures has, at least partly, an intuitive, an immediate character. [Beth 1965b, 643]

Le théorème de Löwenheim-Skolem était démontré pour un langage du premier ordre. Si donc Beth affirme à la fois que l'impossibilité d'une logique pure et celle d'une mathématique pure est une conséquence du théorème, il doit implicitement sous-entendre une double présupposition [cf. Moore 1988, 128] :

a) la théorie des ensembles en tant que fondement des mathématiques doit être formulée dans la logique du premier ordre

b) la logique de premier ordre englobe toute la logique.

Je veux d'abord accepter sans discussion le premier point : la théorie ZFC, par exemple, semble constituer un cadre suffisant pour le développement des mathématiques. Elle permet, en particulier, de compenser l'insuffisance d'un langage logique du premier ordre qui apparaît en particulier dans la non-catégoricité de l'arithmétique élémentaire.

La deuxième thèse semble plus critiquable, bien que Quine, par exemple, la fasse sienne : ce dernier ne voit, en effet, dans la logique du deuxième ordre qu'une théorie des ensembles déguisée. Mais, il n'est pas moins vrai que, selon le théorème de Lindström (1969), la logique du premier ordre est la seule qui satisfasse le théorème de Löwenheim-Skolem et le théorème de compacité ou de finitude, ce dernier précisant que, pour qu'un ensemble E de formules closes ait un modèle, il faut et il suffit que tout sous-ensemble fini de E en ait un. Afin de pouvoir mieux analyser les modèles standard, il semble donc qu'on puisse éviter le détour de la théorie des ensembles, et admettre, même au prix de la perte de la compacité, une logique exprimée dans un langage non-élémentaire. Néanmoins, d'une part, un tel langage exige déjà pour l'établissement de sa syntaxe une théorie des ensembles et, d'autre part, la catégoricité, but recherché, ne va pas de soi. En effet, Mostowski, dans son ouvrage *Thirty years of Foundational Studies,* nous explique qu'on perd, certes, assez vite la validité du théorème de compacité et de celui de Löwenheim-Skolem-Tarski ascendant. En revanche, la version descendante de ce théorème résiste beaucoup mieux, même dans un langage strict du second ordre (Mostowski, 134). A ce niveau, Beth avance l'argument décisif : il est clair qu'une preuve de catégoricité implique toujours un isomorphisme entre modèles par rapport au même modèle du cadre ensembliste utilisé ; or, si, pour des raisons que je viens d'évoquer, la théorie des ensembles n'est pas catégorique — et elle ne l'est pas éffectivement si elle possède un modèle — , il semble impossible d'appliquer la distinction entre standard et non standard à ses modèles. La notion même de modèle standard est donc relative, même pour un système d'axiomes formalisé dans une logique non-élémentaire ; ainsi la catégoricité de l'arithmétique est démontrée par rapport à un modèle *relatif* — et non absolu — de la théorie des ensembles. [cf. Beth, 1965b, 515/516]

Par conséquent, plutôt que celles de la logique du premier ordre le paradoxe de Skolem met en évidence les limites de la théorie des ensembles. De ce fait il serait compatible avec les positions suivantes [cf. Kleene 1980, 426/427 ; Bernays 1961, 11, 12, 19 ; Fraenkel et al. 1984, 303] :

1° On conçoit le concept de sous-ensemble arbitraire et celui de l'ensemble non-dénombrable comme étant des concepts *a priori,* tout en insistant sur le caractère inadéquat de l'axiomatisation dans le langage du premier ordre par rapport à ces concepts. C'est la position du platoniste, rendue d'ailleurs délicate par l'antinomie de Russell.

2° On conçoit la relativité des concepts ensemblistes en tant que symptômes du caractère fictif d'une axiomatisation du 1er ordre et on adopte un point de vue intuitionniste plus fort qu'un constructivisme, car la démonstration du théorème fait appel aux notions non-constructives de validité ou de satisfaisabilité et, en particulier, à l'axiome du choix [Fraenkel et al. 1984, 303 ; Kleene 1987, 328 ; Bell/Slomson 1971, 82].

3° On conçoit la relativité des concepts ensemblistes en tant que symptômes du caractère fictif de l'absolu non-dénombrable [Martin 1964, 163].

4° On accepte la relativité du concept de cardinalité, tout en changeant la signification de l'axiomatisation de la théorie des ensembles : cette axiomatisation, qui n'aurait plus à décrire la structure des ensembles mais se contenterais d'en fixer les conditions minimales, en vue de son rôle de base technique des mathématiques. "De sorte que, finalement, le paradoxe de Skolem manifesterait l'impossibilité de faire entrer l'activité mathématique de force dans un cadre défini à l'avance" [Martin 1964, 164].

On comprend aisément que Beth ne puisse défendre la première position, si l'on prend au sérieux son attachement à la philosophie de Gonseth ; car il refuse évidemment les connaissances *a priori*. De même, il voit bien la difficulté inhérente à une position intuitionniste qui accepte la démonstration du théorème : si, pour échapper à la relativité signalée par le théorème, l'intuitionniste se confine à nouveau dans son intuition d'une activité présymbolique, alors cette position sera purement subjective et "dépourvue de toute objectivité scientifique" [Beth 1950, 179].

Dans les *Foundations*, Beth prend explicitement position en faveur de la position de Skolem lui-même :

> This result [du theorème] is rightly interpreted by Skolem as pointing to a relativisation of the current hierarchy of cardinal numbers; two sets which with regard to a given fundamental domain D [...] have different cardinal numbers, may have the same cardinal number with regard to another fundamental domain D'. [Beth 1965b, 489]

Ainsi formulée, cette position est encore compatible avec les points de vue 2 à 4. A ce stade, il serait intéressant d'en savoir un peu plus sur l'attitude de Skolem. Selon Roger Martin [1964, 163] il faut souligner que celui-ci remarque en 1938 dans son célèbre article *Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem* que

> la véritable portée du thécrème [...] est justement cette critique du non-dénombrable absolu. Bref : cette critique ne réduit pas les infinis supérieurs de la théorie simple des ensembles *ad absurdum*, elle les réduits à des non-objets. [Skolem 1970, 468]

Il semble donc que Skolem défende la position 3°. C'est ce qu'il confirme dans sa conférence tenue en 1958 à l'Institut Henri Poincaré : *Une relativisation des notions mathématiques fondamentales* . Il y loue d'ailleurs "l'explication claire" du théorème que donne Beth dans son livre *Les fondements logiques des mathématiques* [Skolem 1970, 635/36] et conclut son intervention de la manière suivante :

> Mon opinion qu'il n'existe pas des ensembles non dénombrables dans un sens absolu, ou autrement dit que l'introduction de tels ensembles est complètement inutile, est en accord avec les points de vue de H. Poincaré [Skolem 1970, 637].

Cependant, en excluant ainsi le non-dénombrable, il s'expose à la critique de Tarski. Dans la discussion qui suit la conférence, ce dernier remarque à juste titre que la version ascendante qu'il donnait, dès 1928, du théorème [cf. Skolem 1970, 366] met l'argumentation de Skolem en péril. En effet, si tout système formel possédant un modèle infini possède également un modèle dont la puissance est un cardinal transfini quelconque,

> on pourrait aussi bien tirer de là un argument pour exclure la considération des modèles dénombrables au profit de modèles infinis non dénombrables. [Skolem 1970, 637]

La position de Skolem ne serait concluante que si, d'un point de vue "fondationnel", le théorème permettait de réduire l'ontologie des mathématiques à celle des nombres naturels. Or, comme Quine l'a bien montré en 1964, la visée pythagoricienne est hors de portée du théorème de Löwenheim-Skolem : certes, il établit bel et bien l'existence d'une réinterprétation de chaque vérité en une vérité sur les nombres naturels. Mais, en général, il n'existe pas de réinterprétation en termes arithmétiques, c'est-à-dire exprimable en termes de somme, produit et égalité dans le langage élémentaire à l'intérieur du modèle [cf. Quine 1976, 215/216]. Il faut donc espérer que la référence de Beth à Skolem est plutôt une révérence de complaisance qu'un jugement historique précis, et ceci d'autant plus que Skolem souligne explicitement que le concept de "fini" est également relatif sans qu'il ait l'idée de l'exclure [cf. Skolem 1970, 468].

Et en effet, la position 4 semble être à la fois plus compatible avec la pensée de Beth et plus cohérente en elle-même. Plus compatible du fait qu'elle n'en conclut nullement l'abandon pur et simple des parties de nos connaissances immédiates dont les théories déductives ne peuvent donner une description adéquate. Ainsi Beth poursuit le passage cité plus haut de la manière suivante :

> It does not follow of course that [...] the deductive theories of modern mathematics should be judged exclusively by their conformity to our mathematical intuition. It seems wiser to suppose, with Bernays, that mathematics results from our rational remodelling those fundamental insights which originate from our mathematical intuition. In this respect mathematics might be reasonably compared to physics. [Beth 1965b, 643]

La position 4 est plus cohérente, parce qu'elle met en évidence un aspect que Gonseth appelle "physique". Et en effet, dans la dernière phrase de la citation ci-dessus, Beth a trouvé la bonne interprétation du terme gonsethien lorsque celui-ci parle de la "logique en tant que physique de l'objet quelconque", titre de l'ouvrage que Beth cite explicitement dans ce contexte [cf. Beth 1965b, 645]. La nature du lien de la logique et des mathématiques à nos articulations immédiates et intuitives est la même que celle qu'on constate en physique : un niveau intuitif, c'est-à-dire un niveau où le langage est utilisé d'une manière non-réflexive, constitue le point de départ d'une schématisation formalisante ; il est pour ainsi dire son engagement extérieur. Mais, au fur à mesure que le cadre théorique se développe, de nouvelles synthèses intuitives s'installent de telle sorte que l'engagement ontologique extérieur ne s'effectue que par rapport à la nouvelle synthèse. Par contre, une comparaison avec les habitudes intuitives initiales apparaîtrait à ce stade comme pré-rationnelle, c'est-à-dire située au delà des habitudes actuelles. Ainsi, le recours à l'intuition visé par Beth n'a rien à voir avec un recours à une dernière base fondatrice, mais signifie seulement que l'exigence de validité exige elle-même une pratique pour laquelle la question de la validité ne se pose plus.

Remerciement — Je remercie M. Louis Vax d'avoir bien voulu revoir le manuscrit de ce texte.

Références

Bell, J.L. et Somson, A. B.

1971 *Models and Ultraproducts: An Introduction*, London/New York : North-Holland.Elsevier.

Beth, Evert William

1937 L'Évidence intuitive dans les mathématiques modernes, in : *Congrès Descartes*, ASI, Paris : Hermann, 161-165.

1950 *Les Fondements logiques des mathématiques*, Paris/Louvain : Gauthier-Villars/Nauwelaerts.

1957 *La* Beth 1957 *de la raison et la logique*, Paris/Louvain : Gauthier-Villars/Nauwelaerts.

1963 Carnap's View's on the Advantages of Constructed Systems Over Natural Languages in the Philosophy of Science, in : *The Philsophy of Rudolf Carnap* (ed. P.A.Schilpp), La Salle : Opencourt, 469-502.

1965a Mathematical Thought,. *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Dordrecht : Reidel.

1965b *The Foundations of Mathematics* ([1]1959), Amsterdam: North-Holland.

Beth, Evert William/ Piaget, Jean

1961 *Epistémologie mathématique et psychologie, essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle*. Etudes d'épistémologie génétique, vol. 14, Paris : P. U. F.

Bernays, Paul

1949 Die Erneuerung der rationalen Aufgabe, in : *Proceedings of the Int. Congress of Philosophy*, Vol. 1, Amsterdam, 42-50.

1950 Mathematische Existenz und Widerspruchsfreiheit, in : P. B., *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft : Darmstadt 1976, 92-106.

1961 Die hohen Unendlichkeiten und die Axiomatik der Mengenlehre, in : *Infinitistic Methods*, Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw 1959, Oxford/London/ Warszawa : Pergamon/Panstwowe, 11-20.

Carnap, Rudolf

1950 Empiricism, Semantics, and Ontology, in : R.C., *Meaning and Necessity*, Chicago/London, Univ. of Chicago Press, 1958, 205-221.

Fraasen van, Bas C.

1971 Formal Semantics and Logic, New York/London : Macmillan.

Fraenkel et al.

1984 *Foundations of Set Theory*, Amsterdam : North-Holland.

Gonseth, Ferdinand

1948a Les Conceptions mathématiques et le réel, in : *Les sciences et le réel*, ASI 1061, Paris : Hermann, 31-60.

1948b A propos des Exposés de MM. Ph. Devaux et E.W. Beth, *Dialectica* 2, 120-125.

Heinzmann, Gerhard

1982 *Schematisierte Strukturen. Eine Untersuchung über den Idoneismus Ferdinand GONSETHs auf dem Hintergrund eines konstruktivistischen Ansatzes*, Bern: Haupt.

Hintikka, Jaakko

1996 *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge : University Press.

Kleene, Stephen Cole

1980 *Introduction to Metamathematics* ([1]1952), Amsterdam/Groningen: North-Holland.

1987 Logique Mathématique, Paris : Gabay.

Ladrière, Jean

1957 *Les Limitations internes des formalismes*, Paris/Louvain : Gauthier-Villars/Nauwelaerts.

Martin, Roger

1964 *Logique contemporaine et formalisation*, Paris : PUF.

Moore, Gregory H.

1988 The Emergence of First-Order Logic, in : *History and Philosophy of Modern Mathematics* (ed. W. Aspray/ Ph. Kitcher), Minneapolis : Univ. of Minnesota Press, 95-135.

Mostowski, Andrzej

1966 *Thirty Years of Foundational Studies*, Oxford : Basil Blackwell.

McNaughton, Robert

1957 Conceptual Schemes in Set Theory, *The Philosophical Review* 61, 66-80.

Poincaré, Henri

1911 *Les Sciences et les humanités*, Paris : A. Fayard.

Quine, Willard Van Orman

1976 Ontological Reduction and the World of Numbers, in : *The Ways of Paradox and other essays*, Cambridge (Mass) : Harvard Univ. Press, 212-220.

Rasiowa, Helena/Sikorski, Roman

1970 *The Mathematics of Metamathematics*, Warsawa : Polish Scientific Publishers.

Skolem, Thoralf

1970 *Selected Works in Logic* (ed. J.E. Fenstad), Oslo/Bergen/Tromsö : Universitetsforlaget.