PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

PHILIPPE DE ROUILHAN

Les tableaux de Beth : syntaxe ou sémantique ?

Philosophia Scientiæ, tome 3, nº 4 (1998-1999), p. 303-322

<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1998-1999__3_4_303_0>

Les tableaux de Beth : syntaxe ou sémantique ?[1]

Philippe de Rouilhan
IHPST, CNRS, Université Paris 1

Abstract. Are Beth's table syntactical, or, as their own inventor qualified them semantical ? Or else, as is commonly claimed, do they have their place "between syntax and semantics" ? Syntax and semantics as sciences relating to formal languages were created by Gödel, Tarski, and Carnap during the thirties. The syntax of a formal language was conceived as the study of expressions of this language through their form, independently of their content ; the semantics, as the study of relations between these expressions and their content. Nowadays, however , "syntax" and "semantics" are distinguished according to which methods are used in the study of formal languages. Thus, a clarification of terms, both historical and theoretical, turns out to be necessary. Consequently, an any historically adequate formulation, Beth's tables are fundamentally syntactical, and do not deserve the commonly – ascribed position "between syntax and semantics".

[1] Je remercie le Prof. G. H. Müller pour ses très précieuses remarques sur une version antérieure de cet article.

Philosophia Scientiae, 3 (4), 1998-1999, 303-322

Résumé. Les tableaux de Beth sont-ils syntaxiques, ou, comme les qualifiait leur inventeur même, sémantiques ? Ou encore, comme on le prétend communément, ont-ils une place « entre syntaxe et sémantique » ? La syntaxe et la sémantique en tant que sciences relatives à des langages formels sont nées de s mains de Gödel, Tarski et Carnap dans les années trente. La syntaxe d'une langage formel était conçue comme l'étude des expressions de ce langage selon leur forme, indépendamment de leur contenu ; la sémantique, comme l 'étude des relations entre ces expressions et leur contenu. Mais aujourd'hui, la distinction entre « syntaxe » et « sémantique » se fait en considération des méthodes utilisées dans l'étude des langages formels et non plus en fonction de la prise en compte éventuelle du contenu des expressions dans cette étude. Une mise au point terminologique, historique et raisonnée s'impose donc. D'où il résulte qu'en quelque sens historiquement attesté qu'on le prenne, les tableaux de Beth sont fondamentalement syntaxiques et non sémantiques, et ne méritent pas non plus la place qu'on leur imagine trop souvent « entre syntaxe et sémantique ».

1

On définit souvent, et à juste titre, la logique comme la science de l'inférence *valide*. La validité est affaire de forme (logique), non de contenu (extra-logique). La logique doit donc d'abord déterminer la forme des prémisses et de la conclusion des inférences dont elle prétend juger de la validité. Cette tâche préalable étant supposée accomplie, il reste encore essentiellement à la logique deux choses à faire.

Premièrement, définir la notion de validité. La notion de définition ici impliquée n'est autre que la notion d'explication au sens de Carnap. Une notion vague, intuitive, préscientifique est remplacée par une notion précise, formelle, scientifique.

Deuxièmement, établir des *critères* de validité au sens précis de la validité précédemment fixé. La notion de critère doit être prise ici en un certain sens difficile à préciser. Un critère de validité sera d'abord une condition suffisante (ou, éventuellement, nécessaire et suffisante) pour qu'une inférence quelconque soit valide; mais le remplissement de ladite condition devra être plus facile à reconnaître que la possession de la propriété de validité telle qu'elle aura d'abord été définie.

C'est en référence à cette deuxième tâche de la logique que je crois devoir comprendre, par exemple, la déclaration suivante de Beth, dans son dernier livre (posthume), *Mathematical Thought*:

> Le principal problème de la logique formelle est d'établir des critères généraux par lesquels la force démonstrative des inférences et des preuves puisse être jugée. [1965, p. 57]

A l'époque moderne de la logique, plus précisément depuis les années trente, la notion de validité est définie en termes de « modèles »; et, dans le cas de la logique classique du premier ordre, auquel je me limiterai par la suite, un critère de validité est fourni par la notion de déductibilité au sens de tel ou tel « système formel » complet à la Frege-Hilbert disponible sur le marché:

CRITERE DE VALIDITE A LA FREGE-HILBERT - Une inférence K/Z est valide ssi Z est déductible de K dans le système considéré.

Dans quelle mesure la déductibilité en ce sens est-elle un critère de validité digne de ce nom? la question est discutable. Il est notoire qu'une déduction au sens de Frege-Hilbert est souvent plus difficile à trouver, à supposer qu'elle existe, qu'une preuve modèle-théorétique de validité. Cela dit, si la déduction en question existe, il existe un moyen infaillible de la trouver, à savoir en passant en revue, une par une, dans l'ordre lexicographique, toutes les déductions possibles jusqu'à ce qu'on tombe sur la bonne. Mais, si cette façon de procéder par élimination a bien le caractère semi-mécanique d'une « procédure de démonstration»[2] (Quine), on regrette qu'elle ne corresponde pas, à un mouvement naturel et, pour ainsi dire, intuitif de la pensée.

C'est ici que prend toute sa valeur la fameuse méthode des « tableaux de Beth », découverte par Beth [1955], en même temps que Hintikka [1955] faisait de son côté, avec sa méthode des « model-sets » (que R. Smullyan baptiserait plus tard « ensembles de Hintikka »), une découverte semblable. Leur inventeur qualifiait les tableaux en question de « sémantiques », mais, comme je souhaite gloser sur cette qualification, je n'en ferai pas usage, et parlerai, pour rester neutre, de « tableaux de Beth ».

Les tableaux de Beth ont de nombreuses vertus, et la première est qu'ils fournissent, comme l'avait déjà fait Gentzen [1934], une notion de déduction beaucoup plus élégante et plus naturelle que celle des systèmes de Frege-Hilbert et un nouveau critère de validité:

---

[2] Et non, bien sûr, le caractère mécanique d'une procédure de décision, dont on sait, par un théorème de Church, qu'il n'en existe pas pour la logique de premier ordre.

CRITERE DE VALIDITE DE BETH

Une inférence K/Z est valide si, et seulement si, il existe un tableau de Beth clos dont les formules initiales de la colonne « Vrai » sont les prémisses (termes de la suite K) et dont la formule initiale de la colonne « Faux » est la conclusion (Z). Plus généralement, un séquent K/L est valide (i.e. tout modèle de la conjonction de K est un modèle de la disjonction de L) si, et seulement si, il existe un tableau de Beth clos dont les formules initiales de la colonne « Vrai » sont les antécédents (termes de la suite K), et les formules initiales de la colonne « Faux », les succédents [3](termes de la suite L).

Un tableau de Beth clos constitue une « déduction ». Non, bien sûr, au sens d'un texte écrit ligne à ligne conformément à certaines règles effectives et dont la dernière ligne serait la formule « déduite ». Si l'on y tient, comme Beth le faisait lui-même remarquer, on peut toujours redisposer un tableau clos relatif à une inférence *K/Z* sous la forme d'un tel texte, constituant une « déduction » au sens ordinaire, plus précisément au sens d'un système de « déduction naturelle » à la Gentzen.[4] Mais il ne faut pas surestimer ce point. L'essentiel de la notion de déduction est manifestement présent dans la méthode des tableaux de Beth. Simplement, l'écriture ligne à ligne d'une déduction au sens ordinaire est remplacée par la construction pas à pas, de façon non moins effectivement réglée, d'un tableau clos.

Mais il n'est pas question, ici, pour trouver un tableau clos établissant la validité d'une inférence, d'énumérer récursivement, dans un ordre du genre lexicographique, tous les tableaux clos possibles jusqu'à ce qu'on tombe sur le bon, à supposer qu'il existe. Il est question de s'engager dans la construction systématique d'un *certain* tableau, lequel finira par se clore et sera *lui-même* le tableau cherché, si ce tableau existe. La situation n'a rien à voir avec la recherche quelque peu stupide, évoquée plus haut, d'une déduction à la Frege-Hilbert.

Cela dit, la méthode de Beth n'a pas toutes les vertus, en particulier elle n'a pas celle de la vitesse. Tandis que l'existence d'un tableau clos prouvant la validité d'une inférence implique l'existence d'une déduction à la Frege-Hilbert

[3] Germanisme de Beth (nous dirions « conséquents »). Gentzen, quant à lui, avait baptisé « Antezedens » (resp. « Sukzedens ») la suite des antécédents (resp. des succédents) au sens de Beth.

[4] On peut aussi, encore plus facilement, mais ce n'est pas ici le point, redisposer tout tableau clos sous la forme d'une déduction au sens d'un calcul des séquents de Gentzen.

de longueur disons comparable établissant cette même validité, l'inverse est loin d'être vrai: à une déduction à la Frege-Hilbert peut ne correspondre de tableau clos de Beth qu'incomparablement plus long. C'est un grief que nous aurions déjà pu formuler à l'encontre de la méthode de recherche par élimination imaginée tout à l'heure, mais il faut dire la méthode de Beth tombe sous le coup de la même critique. Dans un petit article de 1984, le regretté George Boolos donnait l'exemple d'une inférence dont la validité peut être établie en une page et demi dans un certain système de déduction naturelle à la Gentzen[5] (et pourrait donc l'être disons en un nombre raisonnable pages par une déduction à la Frege-Hilbert), et dont la preuve de validité par une méthode analogue à celle de Beth[6] impliquerait un nombre de pas supérieur à la durée de vie de l'univers en nanosecondes selon la théorie du Big Bang!

Retenons quand même qu'avec sa méthode, Beth apportait au « principal problème de la logique formelle », c'est-à-dire au besoin d'« établir des critères généraux par lesquels la force démonstrative des inférences et des preuves puisse être jugée », une réponse très proche de celle de Hintikka, à la fois naturelle comme celle de Gentzen et semi-mécanique, et en cela très supérieure à celle que constituaient les méthode à la Frege-Hilbert.

2

Jusque-là tout semble clair. La seule ombre au tableau, si je puis dire, le seul point à éclaircir, c'est la façon dont Beth qualifie les tableaux de sa méthode, à savoir de « sémantiques ». En quoi les tableaux de Beth sont-ils « sémantiques »?

En termes contemporains, si l'on prouve la validité d'une inférence *K/Z* à l'aide d'un critère à la Frege-Hilbert ou à la Gentzen, on dit qu'on a utilisé une méthode « syntaxique »; si l'on est revenu à la définition même de la notion de validité en termes de modèles, on dit qu'on a utilisé une méthode « sémantique ». De façon plus générale, on oppose, d'un côté, la présentation « syntaxique » de la logique, où il est question d'un système « formel », de déductions et démonstrations « formelles » de théorèmes de ce système, et, de l'autre, sa présentation « sémantique », où il est question de modèles, de réalisabilité et de validité, et de preuves plus ou moins « intuitives » élaborées dans le cadre ensembliste où apparaissent ces notions.

---

5 Il s'agit précisément de la version de [Mates 1972].

6 Il s'agit de la méthode des arbres [Jeffrey 1967, Smullyan 1968], à laquelle je referai allusion plus bas.

En vérité, la distinction du « formel » et de l'« intuitif », que l'on associe trop souvent à celle du « syntaxique » et du « sémantique », n'a rien à faire avec elle et ne fait qu'obscurcir cette dernière distinction. Une démonstration dite « formelle » et une preuve modèle-théorétique ne sont ni plus ni moins « formelles » ou « intuitives », en droit, l'une que l'autre. Le point est plutôt que, dans la présentation « syntaxique », certaines notions *effectives* au sens technique (formule, déduction, démonstration, etc.) occupent le devant de la scène; tandis que, dans la présentation « sémantique », l'exigence d'effectivité est absente, et les notions en jeu peuvent être hautement *ineffectives*, *transcendantes*. Ce qui n'empêche pas, évidemment, l'exigence d'effectivité de se retrouver à un autre niveau, dans la notion même preuve modèle-théorétique, par exemple, telle qu'elle est définie dans une présentation « syntaxique » de la « sémantique » elle-même. Cette notion de « preuve », en effet, ne serait pas digne de ce nom si les « preuves » qu'elle dénote, tout « modèle-théorétiques » qu'elles soient, n'étaient pas vérifiables de façon mécanique, autrement dit si la notion n'en était pas effective.

Dans la présentation que j'en ai donnée jusqu'ici, la méthode de Beth apparaît donc comme une méthode *syntaxique* parmi d'autres, à côté des méthodes à la Frege-Hilbert ou à la Gentzen, et les tableaux de Beth apparaissent comme des tableaux *syntaxiques*. Et pourtant, Beth lui-même qualifie ses tableaux de « sémantiques ». Si les tableaux de Beth sont « sémantiques », en quoi donc le sont-ils?

La réponse se trouve évidemment dans une particularité de la méthode des tableaux de Beth, non seulement par rapport aux méthodes à la Frege-Hilbert, mais aussi par rapport aux méthodes à la Gentzen, et dont je n'ai encore rien dit. On la retrouve dans la méthode des ensembles de Hintikka et autres méthodes semblables, comme dans la méthode des arbres de R. Smullyan [1966, 1968] et R. Jeffrey [1967].

La méthode des tableaux de Beth se présente comme une tentative de construction systématique d'un contre-exemple pour l'inférence (resp. le séquent) dont on veut tester la validité. « Contre-exemple », c'est-à-dire modèle des prémisses qui falsifie la conclusion de l'inférence (resp. modèle des antécédents qui falsifie les succédents du séquent). Si, au cours de cette tentative de construction, le tableau se « clôt », la tentative est vouée à l'échec, et l'inférence (resp. le séquent) est valide; sinon, si le tableau reste indéfiniment « ouvert », on peut y « lire » le contre-exemple (fini ou infini dénombrable) cherché, et l'inférence (resp. le séquent) n'est pas valide.

Qui dit « modèle » dit « sémantique »: les tableaux de Beth sont « sémantiques » dans la mesure précisément où ils peuvent être interprétés en termes de « modèles », à savoir comme tentatives de construction de (contre-) modèle.

Alors, les tableaux de Beth sont-ils syntaxiques ou sémantiques? Ou sont-ils l'un et l'autre? Ou ni l'un ni l'autre? La même question vaut, évidemment, pour les ensembles de Hintikka, ou pour les arbres de Smullyan et Jeffrey.

Hintikka, au chapitre 2 de l'article de 1955 où il va exposer sa propre méthode, présente celle-ci comme une façon de surmonter le « dualisme de la forme et du contenu », de combler l'« abîme entre formalisme et interprétation », de réconcilier la syntaxe et la sémantique. Beth lui-même n'est pas loin, parfois, quoiqu'avec moins d'éloquence, d'exprimer des idées semblables. Et l'historien de la logique moderne, Jean van Heijenoort, quand il expose les différentes méthodes de développement de la logique, dans son [1979], par exemple, à côté de la méthode syntaxique (« axiomatique ») et de la méthode sémantique (« ensembliste »), mentionne la méthode des arbres, et lui réserve une place à part, « entre les deux méthodes précédentes ».

Les tableaux de Beth, les ensembles de Hintikka, les arbres de Smullyan et Jeffrey constitueraient une *troisième voie*. Il semble que cette opinion soit devenue commune. Mais y a-t-il vraiment place, en logique, pour une troisième voie, entre syntaxe et sémantique?

Ce qui est irritant, dans ce genre d'affaire, c'est qu'elle menace à chaque instant de perdre toute substance et de tourner à la querelle terminologique, faute de savoir exactement de quoi l'on parle. Qu'est-ce que la « syntaxe »? Et qu'est-ce que la « sémantique »? Ou, pour le demander de façon moins essentialiste et plus pragmatique : qu'est-ce qu'il conviendrait d'appeler « syntaxe »? Et qu'est-ce qu'il conviendrait d'appeler « sémantique »?

Dans la suite de cet exposé, je chercherai à savoir, de façon générale, ce qu'on a appellé « syntaxe » et ce qu'on a appelé « sémantique », depuis les années trente, depuis l'époque où Carnap [1934, 1935, 1937] menait une bonne partie de ses recherche au titre de la « Syntaxe », et où Tarski [1933, 1935, 1936a, 1936b] fondait une science nouvelle qu'il baptisait « Sémantique ». La réponse est loin d'être simple.

3

Les premiers résultats de l'enquête sont assez étonnants. Chez Tarski et chez Carnap, dans les années trente, l'usage de ces termes ou de termes apparentés[7] semble relever d'une langue étrangère à la nôtre. Un usage que Church, dont on connaît la conscience aiguë de l'importance des questions terminologiques, reprendra délibérément à son compte encore dans les années cinquante [1956, Introduction, §§ 08-09][8]. Cet usage tombera par la suite en désuétude, il ne sera même pas attesté, ne serait-ce qu'à titre de curiosité historique, dans le *Dictionary* de Feys et Fitch [1973]. L'usage contemporain se sera alors imposé, pratiquement sans partage et de façon durable.

Qu'on me permette de me faire l'avocat du diable, en revenant à une question de principe et en retrouvant, de façon dûment motivée, l'usage des années trente. Cet usage n'a pas réussi à s'imposer, mais son échec historique ne devrait pas influer sur notre jugement.

Aux yeux des pionniers, la « syntaxe » et la « sémantique » devaient être des sciences, des sciences particulières. Or, qu'est-ce qui fait l'unité et la particularité d'une science particulière, et, partant, peut justifier l'usage d'une dénomination particulière? On pourra être tenté de répondre hâtivement: c'est son *ontologie* propre, c'est-à-dire, du moins dans une certaine présentation de cette science, les valeurs possibles de ses variables primitives propres. Par exemple, on sera tenté de dire, si l'on tient l'arithmétique, comme le faisait Peano, pour une science particulière: l'arithmétique est la science des entiers naturels. Mais il y a de bonnes raisons pour répondre plutôt: c'est son *idéologie* propre, au sens de Quine, c'est-à-dire le système de ses notions primitives propres. Par exemple, pour l'arithmétique, dans la formulation de Peano, l'idéologie comprend la notion d'*entier naturel*, mais aussi celle de *zéro* et celle de *successeur*. L'idéologie, on le voit bien sur cet exemple, détermine, entre autres choses, l'ontologie, et la seconde réponse est en fait plus précise que la première.

Acceptons cette seconde réponse, même si, en vérité, elle reste sommaire. Précisons tout de même ceci: si nous tentions d'affiner nos critères d'identification, nous pourrions à bon droit exiger que l'identité d'une science particulière reste indépendante de la richesse de sa logique sous-jacente, la

---

[7] Je pense ici au terme de « morphologie », que Tarski utilise au lieu de celui de « syntaxe ». Cette variation terminologique entre Tarski, d'un côté, et Carnap et Church, de l'autre, est sans importance : la « morphologie » de l'un est exactement la « syntaxe » des autres. Ce qui est important, c'est que la ligne de partage entre « syntaxe » (ou « morphologie ») et « sémantique » chez ces logiciens ne passe pas du tout au même endroit où elle passe pour nous aujourd'hui.

[8] Et je ne sache pas qu'il y ait jamais renoncé.

logique dans le cadre de laquelle cette science est développée. Cela n'empêcherait pas d'assortir l'identification *primaire*, pour ainsi dire, de qualifications *secondaires*, dont certaines pourraient être relatives à la richesse en question. Ainsi, par exemple, que sa logique sous-jacente soit du premier ordre ou d'ordre supérieur, l'arithmétique reste à bon droit « l'arithmétique », même si on peut la qualifier à son tour, de façon correspondante, d'« élémentaire » ou de « supérieure », ou encore mettre en usage de nouvelles appellations.

Naturellement, il peut arriver qu'une science tenue jusque-là pour particulière se révèle ne pas l'être. Ainsi de l'arithmétique dans les mains de Frege et de Russell[9]. L'idéologie propre en apparaissait définissable en termes purement logiques, et, corrélativement, les principes propres démontrables à partir de principes purement logiques. La particularité de l'ainsi-nommée « arithmétique » étant perdue, qu'advint-il de son nom? On continua de l'utiliser comme le nom de cette branche de la logique à quoi elle se réduisait désormais. Mais ce nom était tombé, maintenant, au rang d'identification secondaire, la logique imposant le sien pour l'identification primaire. Pour les logicistes, l'arithmétique, c'était d'abord et avant tout de la « logique », rien de plus qu'un chapitre parmi d'autres dans le grand livre de la « logique ». Et ce chapitre avait bien sûr ses propres divisions: « arithmétique ordinale », « arithmétique cardinale », etc.

Plus intéressant pour nous est le cas d'une science particulière qui se réduit, non plus à la science universelle de la logique, mais à une autre science particulière, dont elle était tenue jusque-là pour fondamentalement distincte. Un bon exemple est fourni par l'Analyse (la sciences des réels) au XIXème siècle, à une époque où l'arithmétique était encore considérée comme une science particulière. Or cette Analyse se trouva réduite à de l'arithmétique (« arithmétisation de l'Analyse », « arithmétisation du continu »). Plus précisément, elle se trouva réduite à de l'arithmétique supérieure au sens où j'en ai parlé plus haut. Une fois l'Analyse ainsi réduite, elle garda son nom, mais seulement à titre secondaire, désormais, car, pour les nouveaux analystes, c'était d'abord et avant tout de l'« arithmétique », rien de plus qu'un chapitre parmi d'autres dans le grand livre de l'« arithmétique ». Plus tard, lorsque les

9 Soit dit en faisant l'impasse sur les difficultés qu'ils ont rencontrées, sur lesquelles, d'ailleurs, des recherches relativement récentes, dues notamment à G. Boolos, permettent de porter un jugement plus nuancé qu'autrefois [cf. par ex. [Demopoulos 1995] et [Boolos 1998], 2ème partie].

logicistes entreprendraient la réduction logique de l' « arithmétique », il irait sans dire, pour eux, que l'Analyse en faisait partie.

4

Les considérations qui précèdent ne prétendent nullement en finir avec la problème de l'identification des sciences et celui de leur dénomination, mais elles suffiront à mon dessein: suggérer une justification possible pour des façons de parler aujourd'hui disparues. Appliquons ces considérations, en effet, au cas de la « syntaxe » (ou « morphologie », comme dit Tarski) et de la « sémantique ». D'abord la « syntaxe ».

La « syntaxe » d'un langage est l'étude des expressions de ce langage selon leur forme, indépendamment de leur contenu. Il s'agit ici de forme logique, telle qu'elle est déterminée par les signes logiques et leur disposition au sein de l'expression; et de contenu extra-logique, tel qu'il est ensuite déterminé par la prise en compte du contenu des signes extra-logiques. La « syntaxe » comme science particulière est déterminée par le système des notions primitives à l'aide desquelles elle « saisit », ou « découpe », pour ainsi dire, proprement son objet (avec, notamment, des désignations pour les signes du langage, la répartition de ces signes en différentes catégories, un foncteur de concaténation, etc.).

Il importe peu que la « syntaxe » soit développée avec un œil sur les contenus extralogiques, pourvu que leur évocation ne laisse aucune trace dans la théorie « syntaxique » elle-même. Et il importe peu, si cette condition est remplie, que la logique sous-jacente de cette théorie soit élémentaire ou supérieure ou ce qu'on voudra, la « syntaxe » n'en sera pas moins digne de ce nom pour autant.

Avec une telle conception de la « syntaxe », non seulement les notions cruciales de la syntaxe en notre sens à nous, comme la notion de formule et la notion de déduction, apparaissent comme « syntaxiques », mais il en est de même de notions que nous classerions sans hésiter comme « sémantiques », à savoir les notions de vérité *dans une structure*, de satisfaction par une suite d'objets *dans une structure*, de désignation d'un objet *dans une structure*, etc., et les notions qui en dérivent, de modèle, de satisfaisabilité, de validité, de conséquence, etc. Car, par opposition aux notions *absolues*[10] de vérité *tout*

---

[10] Naturellement, quand je parle de notions « absolues », je veux seulement marquer l'absence de relativité à une structure, et les notions en question restent relatives à un langage.

court, de satisfaction par une suite d'objets *tout court*, etc.[11], les notions *relatives* homonymes n'ont rien à voir avec les contenus extra-logiques, et se présentent, d'entrée de jeu, comme des notions « syntaxiques », que ce soit à titre d'*explicanda* ou à titre d'*explicata*.

Quand Tarski [1936a] donne une définition, autrement dit une explication, de la notion de conséquence logique, c'est une définition « syntaxique », ou plus exactement « morphologique » (cf. n. 4), et il n'y a donc pas à s'en étonner: à *explicandum* « morphologique », *explicatum* « morphologique ». La seule question qui reste est celle de savoir si c'est une « bonne » explication, une « bonne » définition. Le cas de Carnap, dans sa *Syntaxe logique du langage*, est plus compliqué, proche, pour une part, de celui de Tarski définissant le concept de conséquence logique, et proche, pour une autre, de celui du même Tarski définissant le concept de vérité tout court [1933, 1935], dont je parlerai dans un instant. Quoi qu'il en soit, une bonne partie de ce livre mérite bien son nom, alors même que nous ne pouvons nous empêcher d'y voir de la sémantique déguisée[12]. Enfin, répétons-le, ce sont ces façons de parler que Church continuera de promouvoir, avec intransigeance, quelque vingt ans après.

5

La « sémantique », maintenant. C'est l'étude des expressions d'un langage selon leur contenu, l'étude des relations entre ces expressions et leur contenu. Les notions fondamentales sont les notions de vérité, de satisfaction, de désignation, etc. *tout court*. Les notions *relatives* (à une structure) apparaissaient d'entrée de jeu comme « syntaxiques »; les notions absolues, elles, apparaissent d'entrée de jeu comme « sémantiques ». « D'entrée de jeu »: je veux dire au niveau intuitif, vague, préscientifique, en tant qu'*explicanda*. Par la suite, les notions « syntaxiques » reçoivent une explication en termes « syntaxiques » plus fondamentaux et supposés disponibles dans la théorie « syntaxique ». Qu'en est-il des notions « sémantiques »? Il pourrait leur arriver une chose analogue, rien ne s'y oppose: recevoir une explication, sous la forme d'une définition explicite, en termes « sémantiques » plus fondamentaux supposés disponibles dans la théorie « sémantique », ou sous la

---

[11] Je simplifie. Ainsi, par exemple, c'est la notion de modèle *attendu*, et non celle de modèle *tout court*, qui serait à compter au nombre des notions absolues.

[12] A noter qu'au début de son livre (p. 9), Carnap critique Chwistek pour son usage du terme « sémantique ». Il faudrait aller voir, mais je devine que l'usage de Chwistek était proche du nôtre aujourd'hui.

forme d'une définition implicite, comme on dit, c'est-à-dire de leur adoption comme notions primitives, assorties d'axiomes pour en gouverner l'usage.

Or, dans le *Wahrheitsbegriff* de Tarski [1933, 1935], il leur arrive autre chose, quelque chose de tout à fait étonnant. Tarski réussit à définir ces notions « sémantiques » en faisant l'économie de toute notion « sémantique » primitive. Dira-t-on, alors, que Tarski a donné une définition « syntaxique », « morphologique », du concept de vérité, par exemple? C'est bien ainsi, en tous cas, que Tarski comprend son travail, c'est précisément en ces termes qu'il en présente le contenu! Il ne se gêne pas, cependant, je dois l'avouer, pour parler, à l'occasion, de « définition sémantique de la vérité », mais il est clair qu'il faut comprendre: « définition syntaxique (morphologique) de la notion sémantique de vérité ». Church, dans sa description du travail de Tarski, ne se permettra pas ces abus de langage et s'en tiendra à des déclarations telles que celle-ci: « Tarski [a trouvé] une propriété purement syntaxique [...] qui coïncide en extension avec la propriété sémantique d'être un énoncé vrai » [1956: 65].

Grâce au travail de Tarski, dans une certaine mesure (qui, du reste, varie entre l'édition originale du *Wahrheitsbegriff* et le post-scriptum de l'édition allemande), la « sémantique », qu'elle soit relative ou absolue, se réduirait à de la « syntaxe ». Notons cependant cette différence. Les notions relatives se définissent dans ce qu'on pourrait appeler la « syntaxe pure », en termes logiques ou proprement syntaxiques; parmi ces derniers figurent les termes de mention des termes extra-logiques du langage-objet. Les notions absolues, en revanche, nécessitent, pour leur définition, non seulement la mention des termes extra-logiques du langage-objet, mais leur usage, ou, plutôt, l'usage de leur traduction en métalangage. La présence de ces traductions dans le métalangage n'empêche pas Tarski de parler de « syntaxe » (de « morphologie »), ni même Church de parler de « syntaxe pure »; le point crucial à leurs yeux pour parler ainsi étant l'absence de termes « sémantiques ».

Mais non seulement les traductions des termes extra-logiques du langage-objet doivent figurer dans le métalangage et venir en troubler fatalement la pureté « syntaxique », mais ces *traductions* doivent y figurer *en tant que telles*. La notion de vérité telle que Tarski la définit dépend de ces traductions et, à travers elles, du contenu des termes extra-logiques du langage-objet. Si bien qu'en toute rigueur, cette définition n'est pas véritablement « syntaxique », et la « sémantique » n'est pas véritablement réduite à de la « syntaxe » (à de la « morphologie »)[13].

---

[13] Il serait intéressant de croiser ces remarques avec celles de [Field 1972].

On pourrait être tenté de dire que les traductions en question sont le cheval de Troie de la « sémantique » dans la prétendue « syntaxe », et que, finalement, la définition de la vérité de Tarski n'est pas « syntaxique » (« morphologique »), mais bien « sémantique ». Mais l'absence de terme « sémantique » primitif devrait nous retenir. Que faut-il dire, alors? Avec la définition tarskienne de la vérité, peut-être devrions-nous dire, *pour une fois légitimement,* que nous sommes « entre syntaxe et sémantique ».

Quant à Carnap, dans l'article « Ein Gültigkeitskriterium ... » [1935], repris, à quelques changements mineurs près, dans la seconde édition de la *Syntaxe* [1937, §§ 34a-i], il accomplit un exploit analogue pour la vérité en mathématiques classiques (qu'il appelle obstinément « validité »). Il donne une définition, ou explication, « syntaxique » de cette vérité (de cette « validité »). Et, comme il s'agit de vérité exclusivement mathématique, les remarques critiques que je viens de faire à propos de Tarski ne seraient plus pertinentes dans le cas de Carnap. Chez lui, la « syntaxe » reste pure. La seule chose vraiment étonnante, au point où nous en sommes, c'est qu'au lieu de parler de « définition », ou d'« explication », Carnap parle de « critère » (cf. le titre même de l'article). Je voudrais formuler sur ce point une hypothèse dont l'exposé me fournira l'occasion d'un nouvel exercice sur un bon usage possible des termes de « syntaxe » et de « sémantique », croisé, en l'occurrence, avec celui des termes de « critère » et de « définition », ou « explication ».

Pour cela je reviendrai à Tarski, dont la doctrine est plus claire et plus générale. Etant donné un certain langage et la notion « sémantique » intuitive, vague, préscientifique, de vérité pour ce langage, il est évidemment possible, dans un premier temps, d'en donner une explication « sémantique », que ce soit sous la forme d'une définition explicite en termes « sémantiques » plus fondamentaux supposés disponibles dans la théorie « sémantique », ou sous la forme de ce que Tarski appelle une « théorie de la vérité », à savoir en adoptant la notion de vérité elle-même comme primitive, et en en gouvernant l'usage à l'aide d'un système d'axiomes. La vérité en tant qu'*explicandum* « sémantique » est ainsi remplacée par un *explicatum* non moins « sémantique », mais formel, précis, scientifique.

Maintenant, on peut aussi, et dans un second temps, chercher un équivalent, sinon « syntaxique », du moins non « sémantique », de cet *explicatum* « sémantique ». Lorsqu'on l'aura trouvé (et Tarski montre comment il faut procéder pour y arriver), c'est-à-dire quand on aura défini un certain concept non « sémantique » formellement équivalent au concept « sémantique » formel de vérité, on aura peut-être envie de dire que l'on a trouvé un « critère non sémantique de vérité sémantique » pour les énoncés du langage en question. Cet usage du mot « critère » n'est pas tout à fait conforme à la définition que j'ai donnée au début de cet exposé, mais il est relativement courant en mathématiques, et il n'a rien de très choquant.

Pour en revenir à Carnap, mon hypothèse est simplement que, quand il parle de « critère », il présuppose sans mot dire que la première étape, celle de l'explication « sémantique » de la notion de vérité mathématique (la notion de « validité ») a été franchie, et il comprend la seconde, la seule explicite chez lui, comme celle de l'élaboration d'un « critère » (d'un « critère » vraiment « syntaxique», cette fois). (Naturellement, cette explication de texte n'est pas une justification: si elle est exacte, Carnap a tort de n'être pas plus explicite.)

6

On me permettra ici une digression sur un grand philosophe, qui ne fut pas un grand logicien au sens où Tarski, Carnap et Church le furent, mais qui consacra une partie importante de son œuvre à une réflexion approfondie sur la logique, je veux parler de Husserl.

Dans la première partie, intitulée: « Les structures et le champ de la logique formelle objective », de sa *Logique formelle et logique transcendantale* [1929], Husserl distingue la logique « tournée vers les objets », ou « ontologie formelle », et la logique « tournée vers les jugements », ou « apophantique formelle ». Et, dans cette dernière, il distingue encore trois niveaux: 1°) la « morphologie pure du jugement », 2°) la « logique de la conséquence », 3°) la « logique de la vérité ». La morphologie pure du jugement étudie les lois de formation du jugement en tant qu'unité complexe de signification à partir d'unités plus simples; la logique de la conséquence cherche à déterminer les relations de conséquence analytique et autres relations du même genre qui peuvent exister entre jugements; et la logique de la vérité, enfin, comme son nom l'indique, s'intéresse à la vérité du jugement et aux notions apparentées.

Je me suis longtemps étonné de cette division. Pour une logique, non plus tournée vers le *jugement*, comme le voulait Husserl, ou vers le contenu du jugement, autrement dit vers la *proposition*, mais tournée vers l'*énoncé* (la *phrase*) et, plus généralement, vers le *langage*, comme elle l'est dans la vulgate contemporaine, une division analogue donnerait lieu à: 1°) une étude des règles de formation des expressions bien formées, 2°) une étude des notions de vérité d'une formule *dans une structure*, de satisfaction d'une formule *dans une structure* par une suite d'objets, de modèle d'une formule, de validité d'une formule, de réalisabilité d'une formule, de relation de conséquence logique entre formules, etc., 3°) une étude des notions de vérité *tout court*, de satisfaction *tout court* d'une formule par une suite d'objet, de désignation *tout court* d'un objet par un terme, etc.

Ce qu'il y a d'étonnant, dans cette division, ce n'est pas que le premier niveau, qui appartient à ce qu'aujourd'hui nous appellerions la « syntaxe », laisse en dehors de lui les notions, qui ne sont ni plus ni moins « syntaxiques » en notre sens, de déduction formelle, démonstration formelle, etc., qui sont ici rejetées au second niveau. Ce tracé de frontière entre les deux premiers niveaux n'est pas moins raisonnable que celui auquel nous sommes habitués aujourd'hui entre « syntaxe » et « sémantique ». Non, ce qui est étonnant, c'est que le second niveau, qui appartient à ce que nous appellerions aujourd'hui la « sémantique », laisse en dehors de lui les notions, qui ne sont ni plus ni moins « sémantiques » en notre sens, de vérité *tout court*, de satisfaction *tout court*, etc., qui sont ici rejetées dans un troisième niveau.

Les considérations des paragraphes précédents permettent de résoudre ce petit mystère, et la façon même dont je l'ai présenté contient une partie de la solution. Dans l'ancienne terminologie de la « syntaxe » et de la « sémantique », les notions du deuxième niveau sont des notions d'entrée de jeu « syntaxiques », celles du troisième ne le sont pas, elles sont d'entrée de jeu « sémantiques ». Ce qui n'empêche pas, *a priori*, que les notions de troisième niveau soient éventuellement « réductibles » à des notions de deuxième niveau. Une différence substantielle demeure entre les deuxième et troisième niveaux, que Husserl reconnaissait à sa façon, comme Tarski, Carnap et Church le feraient à la leur.

7

Tarski, dans le *Wahrheitsbegriff*, Carnap, dans la *Syntaxe*, et Church après eux, dans son *Introduction*, utilisent les termes de « syntaxe » (ou « morphologie ») et de « sémantique » comme j'ai dit. Mais c'est un fait que nous les utilisons différemment aujourd'hui: nous n'accepterions plus de dire que la notion de conséquence, ou, *a fortiori*, la notion de vérité définie à la Tarski, par exemple, sont des notions « syntaxiques » (ou « morphologiques »). Nous disons sans hésiter que ce sont des notions « sémantiques ». La description historique du glissement sémantique qui a conduit à l'usage contemporain serait certainement une entreprise coûteuse, et je ne m'y risquerai pas. Mais je ne peux m'empêcher d'imaginer la possible reconstruction rationnelle suivante. Pour simplifier, je ferai exclusivement référence à Tarski.

(1) Au départ, la terminologie en usage est la terminologie primaire. La « syntaxe » (« morphologie ») et la « sémantique » sont des sciences particulières dont la particularité est déterminée par l'idéologie (l'ensemble des

notions extra-logiques primitives), et qui sont dénommées en fonction de leur particularité.

Tarski montre qu'il est possible, sous certaines conditions, de donner une définition qu'il qualifie de « syntaxique » (« morphologique ») de la notion « sémantique » de vérité. Plus généralement, Tarski croit pouvoir affirmer qu'en un certain sens et sous certaines conditions, la « sémantique » se réduit à de la « syntaxe » (à de la « morphologie »). L'article « Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik » [1936b], où la nouvelle science reçoit son nom de baptème, est sans équivoque sur ce point.

(2) Dans tout cela, la considération de la richesse de la logique sous-jacente aux langages utilisés ou mentionnés n'est pas absente, bien au contraire. Et cette considération justifie des qualifications secondaires. L'un des résultats du mémoire, par exemple, peut s'énoncer de la façon suivante: la « sémantique » d'un langage *du premier ordre* se réduit à la « syntaxe » (« morphologie ») *d'ordre supérieur* de ce langage. Cette phrase n'est pas de Tarski, mais elle est essentiellement fidèle à la manière de parler de l'auteur du *Wahrheitsbegriff*.

Un autre exemple de qualification secondaire est fourni par le terme « structural ». La notion de formule d'un système formel à la Frege-Hilbert, par exemple, est « structurale »; de même la notion de « démonstration », et de même celle de « théorème ». Au contraire, la notion de validité, par exemple, en général, ne l'est pas. Pas plus, sauf exception, que la notion de vérité *telle que Tarski la définit*, quand c'est possible. Toutes les notions prises à l'instant à titre d'exemples sont « syntaxiques » (« morphologiques »), certaines sont structurales, d'autres ne le sont pas. On pourrait dire, tout en restant essentiellement fidèle à la façon de parler de Tarski, que les unes appartiennent à la « syntaxe (morphologie) *structurale* », les autres à la « syntaxe (morphologie) *non structurale* ». Dans un complément de note ajouté à la version anglaise (p. 254 dans l'édition de Woodger), Tarski distinguera de façon précise entre « critère structural » et « définition structurale » à l'aide des notions de récursivité générale et d'énumérabilité récursive.

(3) La distinction entre la « syntaxe structurale » et la « syntaxe non structurale » se révèle être de la plus haute importance. Et, toute question terminologique mise à part, c'est la « syntaxe structurale » qui focalise l'attention des logiciens. Par une figure inverse de la synecdoque, et qui a en l'occurrence la vertu d'une abréviation, on laisse bientôt tomber la qualification secondaire, et l'on désigne la partie par le tout. L'ancienne « syntaxe structurale » devient la « syntaxe ». Le reste devient la « sémantique ». En

somme, la distinction naguère secondaire « structural »/« non structural » l'emporte maintenant en importance sur l'ancienne distinction primaire « syntaxe »/« sémantique », et les termes de celle-ci sont maintenant appliqués à celle-là.[14]

8

Pour finir, je reviendrai aux tableaux de Beth et à la question-titre de cet exposé: « syntaxe ou sémantique? ». Il y a au moins deux usages de ces termes qui sont dignes d'intérêt, que résume le tableau suivant:

terminologie ancienne	terminologie nouvelle
syntaxe (structurale)	syntaxe
syntaxe (non structurale)	sémantique
sémantique	sémantique

Selon l'ancienne terminologie, la notion même de conséquence pour laquelle Beth cherche un critère est « syntaxique »; le critère qu'il propose l'est aussi, évidemment: les tableaux de Beth sont trivialement « syntaxiques ». Selon la nouvelle terminologie, la notion de conséquence est « sémantique », mais le critère est à nouveau « syntaxique », et c'est là une de ses vertus essentielles: à nouveau, les tableaux de Beth sont « syntaxiques ». En quelque sens qu'on oppose « syntaxe » et « sémantique », les tableaux de Beth ne sont pas « sémantiques », ils sont « syntaxiques ».

Ne pourrait-on pas, pour rappeler leur originalité par rapport à d'autres objets syntaxiques, les qualifier de « sémantiques »? Certes. Lorsque la méthode des tableaux *échoue* en tant que méthode de preuve de validité, elle *réussit* en tant que méthode de construction de (contre-)modèle. La méthode des tableaux apparaît alors comme « sémantique » par le sous-produit de son échec. Elle n'en reste pas moins *fondamentalement* « syntaxique » et ne saurait

---

14 Peut-être faut-il ajouter que l'abandon du point de vue universaliste par Tarski dans le post-scriptum au *Wahrheitsbegriff* [cf. Rouilhan 1998] fait que *toute* « sémantique », sans exception, devient réductible, pour Tarski, à de la « syntaxe » (de la « morphologie »), et que, du coup, le couple « syntaxe »/« sémantique » n'a plus grand intérêt dans son ancien usage, et devient disponible pour un nouvel usage.

mériter, pas plus que la méthode des ensembles de Hintikka ou celle des arbres de Smullyan et Jeffrey, la place exorbitante qu'on lui imagine trop souvent, dans une typologie *fondamentale* des méthodes de développement de la logique, « entre syntaxe et sémantique ».

Références

Beth, Evert W.

1955 « Semantical Entailment and Formal Derivability », *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afd. Letterkunde* 18, n°13 (1955): 309-342.

1965 *Mathematical Thought. An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Dordrecht-Holland: D. Reidel, 1965.

Boolos, George

1984 « Don't Eliminate Cut », *The Journal of Philosophical Logic* 13 (1984): 373-378 (réimp. in *Boolos 1998*).

1998 *Logic, Logic, and Logic*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1998.

Carnap, Rudolph

1934 *Logische Syntax der Sprache*, Vienne: 1934.

1935 « Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik », *Monatshefte für Mathematik und Physik* 42 (1935): 163-190.

1937 *The Logical Syntax of Language*, Londres: Routledge and Kegan Paul, 1937.

Church, Alonzo

1956 *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1956.

Demopoulos, William (ed.)

1995 *Frege's Philosophy of Mathematics*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1995.

Feys, Robert et Fitch, Frederic B.

1973 *Dictionary of Symbols of Mathematical Logic*, Amsterdam: North-Holland, 1973.

Field, Hartry

1972 « Tarski's Theory of Truth », *The Journal of Philosophy* 49 (1972): 347-375.

Gentzen, Gerhard

1934 « Untersuchungen über das logische Schliessen », *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934): 176-210, 405-431.

Heijenoort, Jean van

1979 *Introduction à la sémantique des logiques non-classiques*, Collection de l'Ecole Normale Supérieure de Jeunes Filles - 48, bd Jourdan - 75690 Paris Cedex 14.

Hintikka, Jaakko

1955 « Form and Content in Quantification Theory », *Acta Philosophica Fennica* 23 (1955): 7-55.

Husserl, Edmund

1929 *Formale und Transzendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernunft*, Halle: Niemeyer, 1929.

Jeffrey, Richard

1967 *Formal Logic. Its Scope and Limits*, New York: McGraw-Hill, 1967 (3d ed. 1991).

Rouilhan, Philippe de

1998 « Tarski et l'universalité de la logique. Remarques sur le post-scriptum au '*Wahrheitsbegriff*'», in *Le formalisme en question. Le tournant des années 30* (sous la dir. de F. Nef et D. Vernant), Paris: Vrin, 1998, pp. 85-102.

Smullyan, Raymond M.

1966 « Trees and Nest Structures », *The Journal of Symbolic Logic* 31 (1966): 303-321.

1968 *First-order Logic*, New York: Springer Verlag, 1968 (2d ed. New York: Dover, 1995).

Tarski, Alfred

1933 Projecie prawdy w jezykach nauk dedukcyjnych (Le concept de vérité dans les langages des sciences déductives), Varsovie, 1933 (version all. Tarski 1935).

1935 « Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen », *Studia Philosophica* 1 (1936): 261-405 (tirés à part datés de 1935).

1936a « O pojciu wynikania logicznego », *Przeglad Filozoficzny* 39 (1936), repris en allemand sous le titre « Über den Begriff der logischen Folgerung », *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, vol. 7 (Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 390), Paris: Hermann, 1936, pp. 1-11.

1936b « Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik », *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, vol. 3 (Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 390), Paris: Hermann, 1936, pp. 1-8.

1956 « The Concept of Truth in Formalized Languages », in *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938* (ed. and trans. by J. H. Woodger), Oxford: At the Clarendon Press, pp. 152-278.