M. PLANAT

Le continu physique et les résonnances : l'héritage de Henri Poincaré

Philosophia Scientiæ, tome 1, n° 4 (1996), p. 151-167

<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1996__1_4_151_0>

Le continu physique et les résonnances : L'héritage de Henri Poincaré

M.Planat

Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs du CNRS
Associé à l'Université de Franche-Comté - Besançon

Philosophia Scientiæ, 1 (4), 1996, 151-167.

Résumé. On doit à Henri Poincaré d'avoir bouleversé notre approche des systèmes périodiques. Je tente ici de dégager l'unité de son oeuvre dans le traitement des problèmes de résonance, de discontinuité et de bifurcations. J'examine en particulier l'apport de sa pensée et celle de ses contemporains aux problèmes encore ouverts de métrologie des oscillateurs.

Abstract. Due to H. Poincaré our approach of periodic systems has been drastically changed. It is attempted in this paper to establish the unity of his work in problems involving resonance, discontinuity and bifurcations. One goal is to recognize his contribution and the one of his contemporaries in open problems of the metrology of oscillators.

1. Introduction

Des idées novatrices sont aujourd'hui encore nécessaires dans la science des oscillations. L'écheveau a cependant été dressé par H. Poincaré dès les années 1880, période de sa découverte des fonctions automorphes et des groupes discontinus, puis tout au long de ses travaux sur l'analyse qualitative des singularités des équations différentielles, sur la géométrie hyperbolique, sur l'*Analysis Situs* (la topologie), sur le problème des petits diviseurs (les résonances) et sur l'hypothèse ergodique, fondement de la mécanique statistique. Pour beaucoup de chercheurs, ses travaux ont connu une éclipse d'un siècle jusqu'à la redécouverte des bifurcations et de la sensibilité aux conditions initiales dans les systèmes déterministes non linéaires à petit nombre de variables [Seuil (ed.) 1992]. Cela est dû, au moins en partie, à la naissance dans son époque de la physique quantique : la découverte de l'oscillateur de Planck pour rendre compte du rayonnement du corps noir, les relations d'indétermination de Heisenberg sur l'imprédictabilité des trajectoires des particules élémentaires et le développement ultérieur du positivisme dans les sciences de la nature. La résurrection de sa pensée s'opère aujourd'hui sur des questions telles que le chaos quantique, la géométrisation de la physique quantique relativiste et les ensembles discrets à cardinal infini (le paradigme des fractales).

J'examinerai ici principalement un thème, celui des oscillateurs et de leur stabilité, et m'attacherai à démontrer l'influence qu'a eu H. Poincaré sur le développement des méthodes déjà élaborées.

Dans ses *Dernières Pensées*, H. Poincaré a écrit :

> Une hypothèse s'est d'abord présentée à l'esprit de M. Planck, mais tellement étrange qu'on était tenté de chercher tous les moyens de s'en affranchir; ces moyens on les a vainement cherchés jusqu'ici [...]
> La discontinuité va-t'elle régner sur l'univers physique et son triomphe est-il définitif ? ou bien reconnaîtra-t-on que la discontinuité n'est qu'apparente et dissimule une série de processus continus. Le

> premier qui a vu un choc a cru observer un phénomène discontinu, et nous savons aujourd'hui qu'il n'a vu que l'effet de changements de vitesse très rapides mais continus. Chercher dès aujourd'hui, à donner un avis sur ces questions, ce serait perdre son encre. [Poincaré 1913]

A la fin du XIXe siècle l'échelle de temps adoptée par les ingénieurs est celles des Ephémérides, obtenue à partir de la longitude moyenne du soleil et calculée d'après les lois d'attraction universelle de Newton [Granveaud 1986]. H. Poincaré a démontré l'impossibilité d'intégrer les lois du mouvement dès que trois corps sont en présence, ici le soleil, la terre et la lune ; mais il me semble que l'on ne sait pas si l'incertitude observée (de 0.1 s/an) provient de cette non intégrabilité [Seuil (ed.) 1992].

Aujourd'hui, la définition de l'unité de temps est construite à partir d'une transition atomique de l'atome de césium. Le signal utile de l'horloge atomique est constitué grâce à un oscillateur à quartz asservi en fréquence sur la transition. On admet que l'instabilité de fréquence (de l'ordre de 10 ns/jour) provient d'un bruit de grenaille du jet atomique et possède une distribution de Poisson [Vanier et Audoin 1989, 167].

D'une manière générale, la mesure des fluctuations de fréquence d'un oscillateur nécessite un oscillateur étalon plus stable associé à un système de comparaison. La caractérisation théorique utilise soit la densité spectrale de Fourier, soit une variance (dite d'Allan) qui compare le comptage des oscillations dans deux échantillons adjacents de durée τ. Dans l'hypothèse des fluctuations stationnaires on peut passer de l'une à l'autre des deux caractérisations [Vanier et Audoin 1989, 238 ; Masson (ed.) 1991, 89].

Les lois de la physique statistique appliquées aux oscillateurs (bruit thermique dans un oscillateur à quartz ou un maser, bruit de grenaille dans une horloge à césium) conduisent à une variance en $1/\tau$ ou $1/\tau^2$. Or tout oscillateur laisse aussi apparaître un palier ; ce dernier phénomène correspond à une dépendance en 1/f du spectre de puissance des fluctuations de fréquence et n'a pas jusqu'à aujourd'hui reçu d'explication satisfaisante. Le bruit en 1/f n'est d'ailleurs pas un phénomène particulier aux horloges, on l'a observé aux basses fréquences dans tous les composants de la physique du solide, dans les relevés biologiques, géographiques, économétriques et aussi artistiques. Il semble qu'un principe très universel soit nécessaire pour l'expliquer.

Henri Poincaré ne connaissait pas ce phénomène qui n'a été découvert qu'en 1925 dans les tubes à vide, mais nul doute qu'il eu mis au service de la haute technologie toute sa puissance créatrice.

2. Cycles limites, résonnance et le continu physique

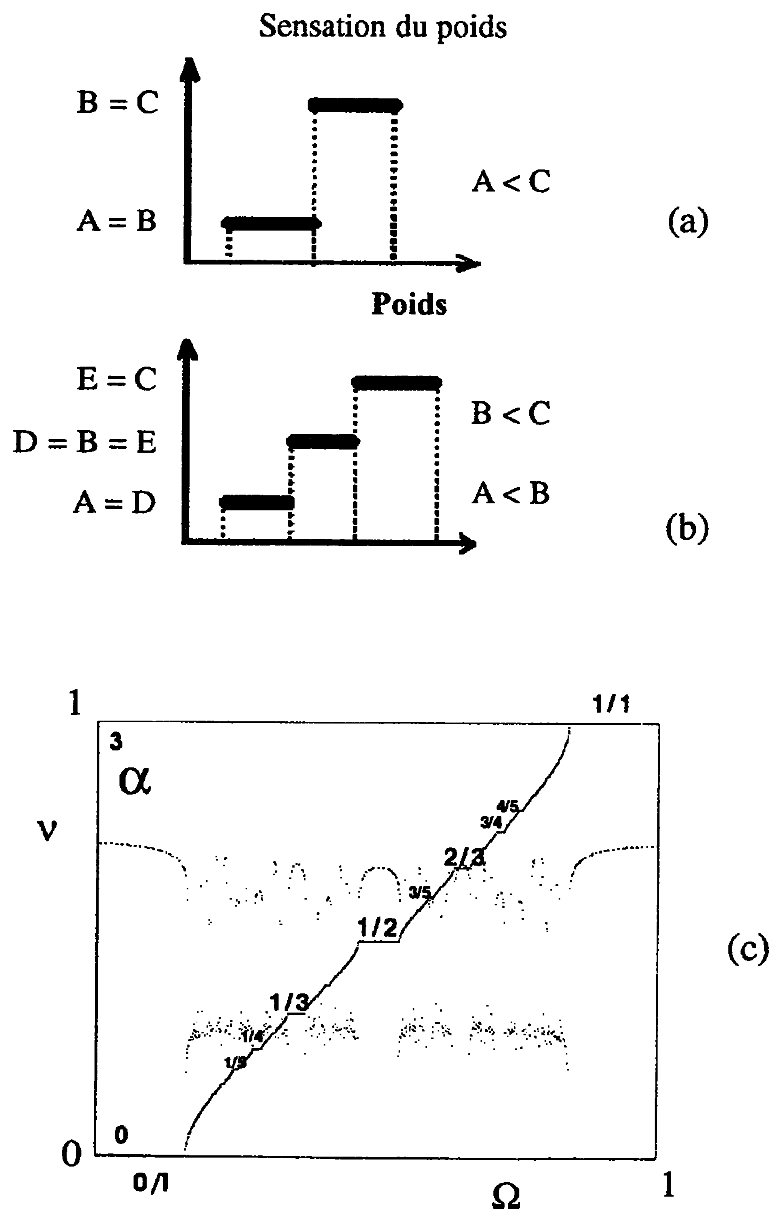

Fig.1 : Le continu physique de Poincaré (a) - (b)
et l'escalier du diable ν (Ω) d'Arnold (c).
Le graphe α (Ω) est une mesure de stabilité.
[Planat et Koch 1993].

Dans la *Science et l'Hypothèse*, H. Poincaré écrit :

> On en vient alors à se demander si la notion du continu mathématique n'est pas tout simplement tirée de l'expérience [...] On a même formulé une loi, connue sous le nom de loi de Fechner, et d'après laquelle la sensation serait proportionnelle au logarithme de l'excitation. Mais si l'on examine de près les expériences par lesquelles on a cherché à établir cette loi, on sera conduit à une conclusion toute contraire. On a observé, par exemple, qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes :
>
> $$A = B \; ; \; B = C \; ; \; A < C \tag{1}$$
>
> qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique. [Poincaré 1902, 34]

Puis dans *La Valeur de la Science* :

> Sans doute si on évaluait les poids avec une bonne balance, au lieu de les apprécier à la main, on distinguerait le poids de 11 grammes de ceux de 10 et 12 grammes et notre formule deviendrait :
>
> $A < B, B < C, A < C$ [...]
>
> Mais on trouverait toujours entre A et B et entre B et C de nouveaux éléments D et E, tels que :
>
> $$A = D \; ; \; D = B \; ; \; A < B \quad \text{et} \quad B = E \; ; \; E = C \; ; \; B < C \tag{2}$$
>
> et la difficulté n'aurait fait que reculer... C'est l'esprit seul qui peut la résoudre et c'est le continu mathématique qui est la nébuleuse résolue en étoile. [Poincaré 1905, 70]

Je ne veux pas disserter sur l'apport historique de H. Poincaré à la notion de fractalité du continu élaborée par les mathématiciens logiciens du XIXe siècle [Payot (ed.) 1992], dont G. Cantor, mais montrer simplement que son intuition peut être transcrite dans un langage ou interviennent des oscillateurs.

Admettons que les objets dont nous voulons mesurer le poids soient en fait des horloges et que notre mesure consiste à synchroniser notre horloge interne biologique à ces horloges matérielles. Notre corps humain nous fournit une série de tops instantanés (des phases) Φ_n aux instants discrets n supposés régis par une relation de phase non linéaire de la forme :

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + 2\pi\Omega - c \sin \Phi_n \tag{3}$$

Le poids mesuré ν est alors donné par une moyenne des poids instantanés calculés au cours des tops successifs de l'horloge, soit :

$$\nu = (1/2\pi n) \sum_{k=1}^{k=n} (\Phi_k - \Phi_{k-1}) = (1/2\pi)\,(\Phi_n - \Phi_0)/n \text{ quand } n \to \infty \quad (4)$$

Il est alors tout a fait remarquable que la courbe sensation du poids ν en fonction du poids à mesurer Ω soit un escalier. Ainsi en première approximation la relation (1) de Poincaré est vérifiée puisqu'il existe des marches de mesure en A et C, en seconde approximation la relation (2) est vérifiée et il existe une marche intermédiaire en B et ainsi de suite au fur et à mesure que la précision de la mesure s'accroît.

La relation de récurrence (3) est un objet mathématique tout à fait étonnant créé par le mathématicien russe V. I. Arnold, élève de A. Kolmogorov [Seuil (ed.) 1992]. En fait chaque marche de l'escalier correspond à un nombre rationnel p/q, c'est-à-dire une résonance $\nu = \omega_0/\omega_B = p/q$ entre la fréquence effective ω_B de l'horloge biologique et celle de l'objet ω_0.

Ce phénomène d'accrochage de fréquence correspond à la notion de cycle limite introduit par H. Poincaré. Il a été observé pour la première fois par Huyghens, l'inventeur du pendule à échappement, au XVIIe siècle, puis redécouvert par Lord Rayleigh en 1907 sur des diapasons fixés sur une même table, par Van der Pol en 1927 sur des oscillateurs à triode, par R. Adler en 1946 dans les oscillateurs microondes et est maintenant communément utilisé dans la stabilisation des lasers.

J'ai moi-même utilisé avec succès le modèle d'Arnold pour rendre compte de la quantification de la tension à travers une jonction supraconductrice shuntée par une résistance et excitée par un rayonnement microonde de fréquence f [Planat et Koch 1993]]. Dans ce dernier cas les marches de l'escalier sont observées aux valeurs de la tension $V_{p/q} = (p/q)\,(hf/2e)$.

Le phénomène est utilisé pour réaliser l'étalon universel de tension depuis 1972 et constitue la meilleure mesure du quantum de flux 2e/h = 483 597.9 GHZ/V. L'étendue des marches d'escalier autour des valeurs rationnelles croit avec le coefficient du couplage c. Lorsque c = 1, la carte recurrente $\Phi_{n+1} = f(\Phi_n)$ est inversible, les marches sont ordonnées en arbres de Farey, c'est-à-dire qu'entre 2 marches à p/q et r/s, la plus étendue correspond au rationnel (p + r)/(q + s) obtenu en sommant numérateur et dénominateur. Le cas c = 1 correspond au cas critique de perte d'inversibilité ; les intervalles accrochés occupent tout l'intervalle [0,1], mais il subsiste une infinité non dénombrable de points irrationnels de mesure de Lebesgue nulle qui est un ensemble parfait de Cantor, dont la dimension de Haussdorff est universelle égale à D = 0.87 [Cvitanovic, Jensen, Kadanoff et Procaccia 1985].

Rappelons qu'un ensemble parfait est un ensemble fermé constitué de l'ensemble de ces points limites et qu'un ensemble de Cantor est de plus totalement non connexe. La dimension de Hausdorff D est définie à partir de la mesure du nombre mininal $N(\varepsilon) = \varepsilon^{-D}$ d'intervalles de longueur infiniment petite ε nécessaires pour couvrir l'ensemble [Mandelbrot 1982]. Il est à noter que le premier ensemble parfait a été découvert par Poincaré sur la circonférence du cercle fondamental aux points limites des groupes fuchsiens, bien avant la constitution de la théorie des ensembles.

3. Tores, automorphismes et groupes discontinus

> Le but que je me propose, dans le travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, est de chercher s'il n'existe pas des fonctions analytiques analogues aux fonctions elliptiques et permettant d'intégrer diverses équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. [Poincaré 1881a, 1]

> Votre lettre me prouve que vous aviez aperçu avant moi quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans la théorie des fonctions fuchsiennes. Je m'en suis nullement étonné ; car je sais combien vous êtes versé dans la connaissance de la géométrie non euclidienne qui est la clef véritable du problème qui nous occupe. [Poincaré 1881b, 29]

Comment en sommes-nous arrivés à nous représenter les solutions périodiques des équations différentielles sur des surfaces toriques, à compter les nombres de tours que parcourent les trajectoires sur ces tores, à examiner les valeurs des paramètres pour lesquelles les tores sont préservés, c'est-à-dire à paver l'espace des paramètres et des conditions initiales ?

L'histoire débute avec l'étude des oscillations au cours du temps t du pendule simple dans le champ de pesanteur, dont la projection verticale y(t) satisfait à l'équation différentielle :

$$[\, y'(t)]^2 = P(y) \qquad (5)$$

dans laquelle P(y) est un polynôme du 3° degré. L'intégrale t(y) possède deux déterminations et sa valeur dépend donc du chemin suivi dans le plan complexe de la variable y. Les chemins d'intégration pris sur une surface de Riemann, où l'intégrant est univalué, réalisent une application du 1/2 plan supérieur sur un rectangle. La surface solution y(t) est donc topologiquement un tore et son inversion fournit deux périodes indépendantes.

Une fois acquise avec Abel, Gauss et Jacobi dès 1820 la notion de fonction à deux périodes, ou fonction elliptique, comment construire toutes ces fonctions ? En figeant l'évolution temporelle t et en faisant jouer aux périodes le rôle de paramètres. Dans cette théorie des fonctions elliptiques dites modulaires, on considère le réseau construit à partir du rectangle fondamental par multiplication par un élément du groupe des matrices 2 x 2 à coefficients entiers. De plus, pour une trajectoire sur le tore, le nombre important n'est plus la période, mais le nombre de tours que fait la trajectoire à chaque section du tore, c'est-à-dire le rapport des périodes Ω. Celui-ci se transforme comme une substitution linéaire :

$$\Omega \to \Omega' = (a\Omega + b) / (c\Omega + d) \quad a, b, c, d \text{ entiers} \qquad (6)$$

On peut choisir de normaliser et se restreindre au 1/2 plan supérieur de telle manière que la matrice ait un déterminant $ad - bc = 1$. Résumons : le tore devient le support topologique à la notion de fonction elliptique et le groupe normé des substitutions linéaires à coefficients entiers la syntaxe des trajectoires. Comment y générer des structures ? Grâce à la notion, élaborée par R. Dedekind en 1877 et F. Klein l'année suivante, d'équivalence entre des points du 1/2 espace obtenus deux à deux sous l'effet d'une transformation du groupe. Les structures résultent alors de la partition du 1/2 plan en classes d'équivalence disjointes ou orbites. La figure 2 représente ainsi les orbites, c'est-à-dire le pavage du 1/2 plan supérieur, réalisé par le groupe modulaire. Le groupe est discontinu, c'est-à-dire que les transformées d'un même point ne vont pas en s'accumulant dans le voisinage immédiat de l'un quelconque d'entre eux, sauf le long de certaines lignes du plan. Le groupe modulaire est en fait généré par deux éléments : une translation T et une inversion S par rapport au cercle principal. Il y a plus et l'on peut introduire la notion de fonction modulaire $J(\Omega)$ fonction qui reste invariante sous l'effet des susbtitutions du groupe, c'est-à-dire qui est constante sur chaque orbite.

Ainsi donc l'introduction du groupe modulaire et le rôle fondamental joué par le rapport des périodes sur le tore permettait à la théorie de la résonance de faire ses premiers pas. Il appartenait à

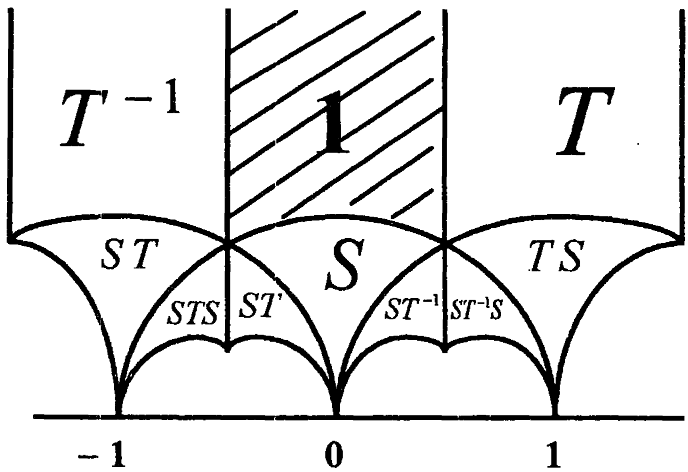

Fig. 2 : Pavage du 1/2 plan supérieur par les opérations du groupe modulaire, le groupe fuchsien associé aux fonctions à deux périodes : les fonctions elliptiques.

Poincaré de généraliser cette notion aux groupes de substitutions à coefficients réels (fonctions fuchsiennes) et à coefficients imaginaires (fonctions kleiniennes) et de donner à la théorie des fonctions automorphes, définies commes les formes invariantes par un groupe de substitutions linéaires, une immense impulsion. Il allait en particulier montrer que ces fonctions servent à intégrer les équations différentielles à coefficients algébriques dont les plus simples du 2° ordre sont de la forme :

$$y''(t) + Q(t, s)\, y = 0 \qquad (7)$$

où Q(t, s) est une fonction rationnelle des 2 variables t et s liées entre elles par une relation algébrique Q(t, s) = 0.

Pour les étudier, il allait créer deux nouveaux types de géométrie hyperbolique, l'une préservant le 1/2 plan supérieur, l'autre de façon conformément équivalente le disque unité, géométries rendues célèbres par l'artiste M. C. Escher.

4. Tores perturbés, analyse diophantienne, bifurcation des résonnances

> Il arrive souvent que, les moyens mouvements étant presque commensurables, certains termes de la fonction perturbatrice acquièrent, malgré leur rang élevé, une importance considérable par suite de la présence de petits diviseurs. [Poincaré 1891]

Comme je l'ai dit au cours de l'introduction, la pratique que nous avons des oscillateurs de haute finesse spectrale ressuscite les difficultés liées aux petits diviseurs. L'instabilité ultime de ces horloges dont la signature expérimentale est le bruit en 1/f nous fait nous remémorer le discours de H. Poincaré à propos de la résonance, la discontinuité et l'ergodicité. L'équation (5) du mouvement pendulaire portait en elles les germes des développements ultérieurs sur les fonctions automorphes. Aujourd'hui les problèmes de résonance se manifestent dès les premiers prototypes tels que les équations :

$$\Phi'(t) + \sin \Phi(t) = a \cos(\Omega t) \qquad (8)$$

$$\text{ou } y''(t) + y\,(1 + \eta \sin(\Omega t)) = 0 \qquad (9)$$

L'équation d'évolution de la phase $\Phi(t)$ est le modèle standard pour l'accrochage de deux fréquences ω_1 et ω_2, résonantes avec le rapport $\Omega = \omega_1/\omega_2$ sur un tore. La fréquence instantanée Φ' devant être constante pour les solutions synchronisées, on se ramène aisément au modèle d'Arnold de l'équation (3). L'équation de Mathieu (9) est le modèle générique des oscillations paramétriques. C'est en particulier la première approximation dans le développement de Hill du mouvement du périgée de la lune [Poincaré, *Oeuvres* VIII, 383]. Les solutions à phase linéaire et amplitude constante entre deux sections successives, c'est-à-dire résonantes avec le rapport Ω, satisfont également au modèle d'Arnold. Nous considérons donc que les difficultés liées aux petits diviseurs se laissent approcher par ce modèle.

La notion de quasi-commensurabilité s'écrit dans l'approximation diophantienne :

$$|\nu - p/q| \leq A / q^2 \qquad (10)$$

où ν est le nombre de rotations exprimé à la relation (4) comme le calcul asymptotique de la fréquence synchronisée, p/q sont des rationnels en nombre infini qui approximent ν et A une constante ne dépendant que de ν. Ces rationnels peuvent être obtenus par exemple à partir des convergents, c'est-à-dire des troncatures du développement en fraction continue. Nous avons effectivement vérifié numériquement que cette approximation convenait pour discriminer les zones d'accrochage de fréquence des zones où les erreurs d'arrondi dominent dans le développement en fraction continue [Planat et Koch 1993].

L'approximation diophantienne (10) qui exprime l'existence des tores résonants fait donc écho à la relation (6) qui définissait le groupe des automorphismes.

Hasard de l'histoire, le mathématicien russe A. A. Markov, de 2 ans le cadet de H. Poincaré rencontrait les petits diviseurs et la discontinuité en théorie des nombres dans ses recherches sur les minima des formes quadratiques binaires. Le théorème de Markov indique en substance qu'on peut construire des suites discrètes d'irrationnels ayant de mauvaises approximations diophantiennes ; on a compris depuis qu'il est possible de se les représenter comme points limites des groupes fuchsiens dans la géométrie hyperbolique ; la notion topologique adéquate est celle de tore ponctué c'est-à-dire de tore perturbé en des embouchures isolées où il perd sa compacité [Series 1985].

Je n'ai pas (encore) détecté les discontinuités de Markov sur les zones résonantes de la carte d'Arnold grâce à l'approximation diophantienne. Des discontinuités cependant existent et correspondent aux lieux des bifurcations de type fourche des écarts de phase $X_n = \Phi_{n+1} - \Phi_n - 2\pi\Omega$; elles se produisent à des valeurs discrètes du paramètre de couplage c. Ce type de bifurcation étudié pour la première fois en 1980 par M. J. Feigenbaum dans une application quadratique est universel et s'accumule en une valeur limite c avec une distribution invariante en arc sinus [Feigenbaum 1980]. Ces bifurcations affectent la convergence du nombre de rotations ν dans la zone résonante. C'est pourquoi j'ai inventé deux manières de relever les lignes de bifurcations. L'une s'appuie sur une loi d'échelle reliant ν en deux points voisins de l'ensemble des paramètres, l'autre est basée sur une loi d'échelle reliant ν en deux échantillons temporels de durée entière τ. En un point de bifurcation de la zone résonante le nombre de rotations et les exposants d'échelle subissent une discontinuité. En d'autres termes la loi d'échelle est une forme de microscope qui agit de manière discontinue et est utilisée pour paver la zone résonante en sous-ensembles connexes possédant la même structure en termes de niveaux de bifurcations.

Nous allons montrer l'intérêt de cette méthodologie pour l'application d'Arnold (3). La loi d'échelle obtenue à partir de 2 échantillons adjacents de durée τ où les nombres de rotation sont $\nu_1(\tau)$ et $\nu_2(\tau)$ s'écrit :

$$\left| \nu_2(\tau) - \nu_1(\tau) \right| = \tau^{-\beta} \tag{11}$$

La figure 3 représente le diagramme de bifurcation de l'exposant β en fonction de la valeur initiale Φ_0 de la phase (en abscisses) et du coefficient du couplage c (en ordonnés). On distingue clairement trois couches dans ce diagramme. La première (I) lorsque $c < 2$ ne présente aucune bifurcation. La seconde (II) lorsque $2 < c < 4.6$ est la région des bifurcations de type fourche étudiée par Feigenbaum ; dans cette région l'approximation diophantienne (10) est encore réalisée ; les lieux des bifurcations pourraient correspondre à des valeurs discrètes du nombre de rotations ν possédant de mauvaises approximations rationnelles "à la Markov" mais des recherches complémentaires sont nécessaires pour étayer cette hypothèse. Dans la troisième région (III), la quasi-commensurabilité est perdue, bien que les écarts de phase demeurent bornés. Pour des valeurs supérieures de c, il est nécessaire de généraliser le modèle d'Arnold [6] : au delà de la zone de transition (III), on parvient à une quatrième couche où les écarts de phase cessent d'être bornés et possèdent une distribution de probabilité de Cauchy.

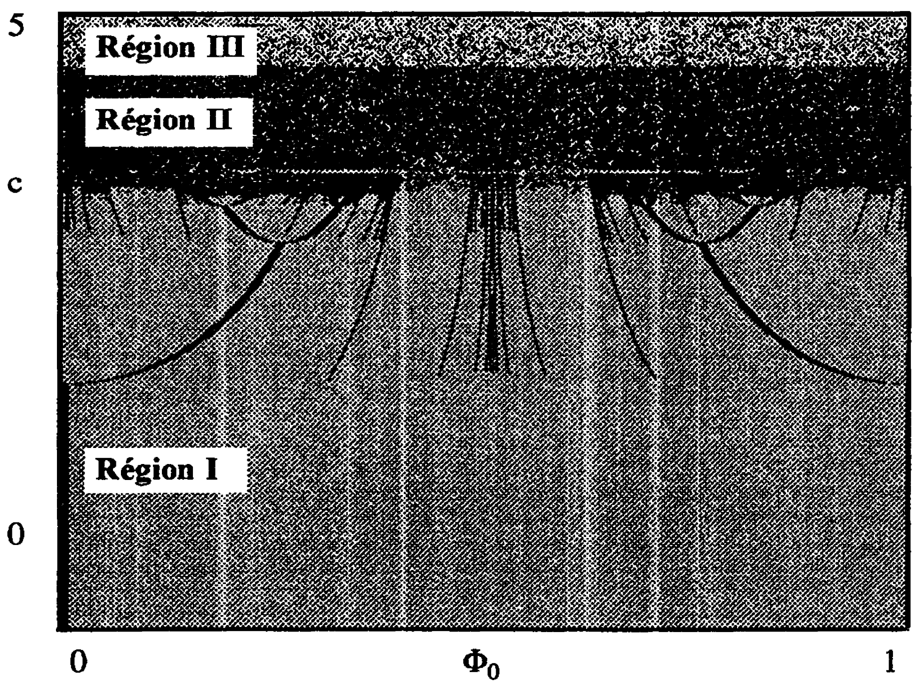

Fig. 3 : Lieu des bifurcations du modèle d'Arnold obtenues à partir du coefficient de stabilité β.

Cette dernière distribution correspond dans l'espace des phases du système dynamique à une remarquable propriété de stabilité structurelle. Tout d'abord il possède une structure dense d'orbites périodiques. D'autre part l'espace devient hyperbolique, c'est-à-dire qu'en tout point, l'espace tangent se décompose en variétés stables et instables transverses et disjointes. Ces propriétés ont été mises à jour par S. Smale en 1967 à l'aide de son fameux exemple du fer à cheval [Smale 1980]. Le mécanisme sous-jacent à cette description abstraite est l'étirement et le repliement de chaque portion de l'espace des phases, en accord avec l'hypothèse ergodique et la conservation des aires.

J'en reviens maintenant aux couches (II) et (III) du modèle d'Arnold. Une caractérisation au sens des probabilités peut être trouvée dans la notion de multifractalité [Mandelbrot 1982]. La distribution associée à (11) s'écrit :

$$g(\beta) = \log(N(\beta) / \Delta\beta) / (\log(1/\tau)) \qquad (12)$$

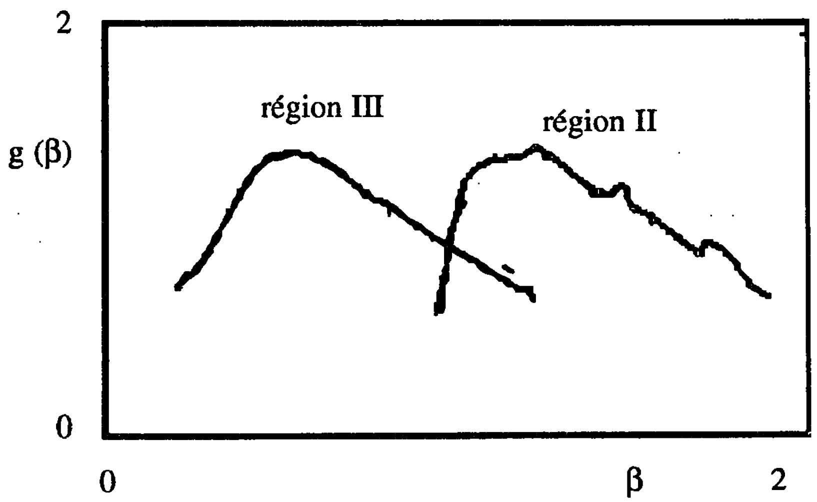

Fig. 4 : Distribution multifractale g(β) associée au coefficient de stabilité β

où N(β) est le nombre de points trouvés dans l'intervalle Δβ. La courbe g(β) représentée à la fig. 4 est par conséquent une normalisation de l'histogramme relativement à l'intervalle de mesure τ du coefficient de stabilité β. Cette courbe possède deux régions, l'une principalement distribuée en $\beta > 1$ correspond à la région de bifurcation II ; l'autre région lorsque $\beta < 1$ correspond à la région de transition III. Il est intéressant de comparer ces résultats aux signatures typiques des oscillateurs mesurés dont il a été question à l'introduction. En termes de variance d'Allan, la région III correspond à un palier, tandis que la région II conduit à une dépendance en $1/\tau^2$ (lorque les bifurcations sont en nombre fini) ou en $1/\tau$ (lorsque les bifurcations sont denses). En termes de puissance spectrale la région III est la région du bruit en 1/f, tandis que la région II correspond à un bruit linéaire en fréquence (bifurcations en nombre fini) ou uniforme en fréquence (bifurcations denses).

Ces conclusions sont elles étayées expérimentalement ? Si l'on admet en suivant la voie du principe ergodique que les moyennes sur les états dans les couches (II) ou (III) sont similaires aux moyennes temporelles détectées expérimentalement, les distributions g(β) expérimentales et théoriques devraient être en accord.

H. Poincaré a écrit dans la *Science et l'Hypothèse* :

> L'expérience est source unique de vérité : elle seule peut nous apprendre quelque chose, elle seule peut nous donner la certitude. [Poincaré 1902, 167]
>
> Le physicien qui vient de renoncer à l'une de ses hypothèses devrait être plein de joie, car il vient de trouver une occasion inespérée de découverte. [ibid., 178]

En conclusion, la lecture de l'oeuvre de H. Poincaré est un merveilleux voyage dans l'histoire de la science contemporaine. Il est un peu tôt pour affirmer de manière certaine que l'hypothèse élaborée tout au long de cet article, grâce aux retombées de sa pensée, est couronnée par l'expérience. En tout état de cause, le chemin suivi est pavé de contrées nouvelles encore non défrichées.

5. Epilogue

J'ai écrit le texte ci-dessus en mai 1994, au moment de la tenue du Congrès International Henri Poincaré à Nancy. Deux ans et demi plus tard, qu'est-il advenu de l'hypothèse ? On trouvera son développements dans les travaux cités en [Planat 1995 ; 1996a ; b ; c] et dans les lignes qui suivent.

Jusqu'à présent nous n'avions pas reconnu de structure dans le bruit de basse fréquence d'un oscillateur. Cela était du à l'impuissance de nos outils : la variance et la densité spectrale.

5.1 Existence de corrélations

En mettant en oeuvre une nouvelle caractérisation empreinte de l'esprit des travaux contemporains sur les multifractales et les ondelettes [*ibid.*], la situation a changé. La procédure est la suivante :

→ Les fréquences mesurées $\nu(\tau)$ pendant le temps τ sont moyennées sur N intervalles, d'où de nouveaux échantillons de durée $N\tau$ auxquels sont associés les fréquences moyennes $\nu(N\tau)$.

→ L'exposant local de stabilité β de l'equ. (11) est cette fois calculé à partir de deux échantillons adjacents pris dans une fenêtre de durée $N\tau$. Puis on fait glisser la fenêtre par pas de durée τ.

→ On détecte ainsi les éventuelles discontinuités du signal et on code en binaire: 0 pour le continu, 1 pour le discontinu.

→ On associe au nombre binaire son ombre projetée judicieusement sur un escalier du diable de nature voisine de celui de la fig. 1 [*ibid.*]. Lorsque l'ombre projetée est située sur les marches cela exprime des corrélations dans la séquence binaire ; au contraire, une séquence aléatoire (sans corrélations) projette son ombre en des points isolés de mesure nulle situées entre les marches principales.

Les séquences binaires associées aux fréquences d'un oscillateur se projettent sur les marches de l'escalier et sont donc corrélées. Le sont-elles à cause de synchronisations sous-jacentes obéissant à des modèles du type de l'equ. d'Arnold (3) ?

5.2 Existence d'un déterminisme

Pour reconnaître un éventuel déterminisme, nous avons étudié le blocage de fréquences d'une porteuse à 100 MHz issue d'un oscillateur à retard à ondes acoustiques de surface subissant une instabilité non linéaire de modulation de son enveloppe. Un phénomène de résonance porteuse-enveloppe quantifié et stable en fonction de l'amplitude de la porteuse a été reconnu. Des marches aux résonances fondamentales p/1 (p entier) situées sur une caractéristique en forme de cloche ont été trouvées. La caractéristique et les marches s'expliquent à partir d'un modèle du type (3) et on reconnait ainsi une analogie formelle avec la notion de continu physique du §2.

Alors qu'en est-il de la structure fine lorsque s'accroît la précision de la mesure? Reconnait-on une source d'instabilité ? La réponse est oui et elle se trouve en accord avec notre hypothèse du §4.

Plus précisément, nous reconnaissons aux faibles amplitudes, à gauche du sommet de la caractéristique en forme de cloche, une structure fine stable pour la résonance porteuse-enveloppe avec des paliers du type $p/(2p \pm 1)$, p entier. Cela évoque le phénomène physique connu sous le nom d'effet Hall quantique fractionnaire. Il s'agit dans ce cas de la quantification de la résistance électrique.

D'autre part, aux fortes amplitudes, à droite du sommet de la cloche, on obtient une structure fine stable, avec des marches "à la Farey", prédites par le modèle de l'equ. (3), c'est à dire qu'entre 0/1 et 1/1, il y a les résonances sous-harmoniques 1/2, puis 1/3, 2/3, puis 1/4, 2/5, 3/5, 3/4... et plus généralement entre p/q et r/s la résonance $(p + r) / (q + s)$. Dans ces deux cas, nous nous trouvons dans la situation décrite par Henri Poincaré que l'on peut toujours accroître la sensibilité de la mesure et par la-même discerner les objets.

Mais nous reconnaissons aussi une structure fine non stable. Le sommet de la caractéristique est le plus instable. Sa structure est en accord avec les notions de transversalité "à la Cauchy" et "à la Smale" évoqués au §4. Nous pouvons même être plus précis et reconnaître, à certaines amplitudes discrètes de la porteuse, des zones d'instabilité maximum de la résonance porteuse-enveloppe. Elles correspondent aux irrationnels de Markov mentionnés au §4. Elles sous-tendent une arithmétique triadique arborescente dont la topologie est celle d'un tore ponctué [*ibid.*]. Les mauvaises approximations diophantiennes correspondent à certaines trajectoires fermées sur le tore qui perturbent la résonance p/q en son embouchure. Cette source d'instabilité est donc par nature topologique. Nous voilà avec un principe d'incertitude pour la définition de la fréquence issu d'un des plus simples objets de la géométrie non euclidienne : le tore percé.

Et voilà les intuitions fondatrices de Poincaré réunies : celles des bifurcations et du chaos déterministe, de l'instabilité en fer à cheval et celles sur les transformations modulaires, le principe de relativité ,les formes quadratiques et la géométrie non euclidienne.

L'hypothèse va son chemin.

Bibliographie

Cvitanovic, P., Jensen, M. H., Kadanoff, L. P., et Procaccia, I.

1985 *Phys. Rev. Lett.*, 55, 343.

Feigenbaum, M. J.

1980 *Los Alamos Science*, Summer, 4.

Granveaud, M.

1986 *Echelles de temps atomique*, Editions Chiron.

Mandelbrot, B. B.

1982 *The fractal geometry of nature*, W.H. Freeman and Company.

Masson (Edition)

1991 *La mesure de la fréquence des oscillateurs*, Chronos. Collection Technique et Scientifique des Télécommunications.

Planat, M. et al

1995 *Appl. Phys. Lett.*, 21, 3206.

1996 *J.Appl. Phys*, 80, 2509, IEEE Trans. on Son.,Ultrason. and Freq. Cont.43, 326 (1996) and Annals of Telecommunications (France), n° 7-8 (1996).

Planat, M. et Koch, P.

1993 *Fractals*, 1, 727.

Poincaré, H.

1881a *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 14 février 1881 ; repris dans *Œuvres*, II, 1.

1881b *Lettre à F. Klein, 15 juin 1881* ; repris dans : *Œuvres,* XI, 29.

1891 Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 112, 269-273,Paris, 2 février 189 ; repris dans : *Œuvres,* VIII, 1-3.

1902 *La Science et l'Hypothèse*, Paris : Flammarion.

1905 *La Valeur de la Science*, Paris : Flammarion.

1913 *Dernières Pensées*, Paris : Flammarion.

1952 *Œuvres*, Paris : Gauthier-Villars.

Rivenc, F. et Rouilhan (de), P. (Eds.)

1992 *Logique et Fondements des Mathématiques. Anthologie (1850-1914),* Institut d'Histoire et Philosophie des Sciences et Techniques, Paris : Payot.

Series, C.

1985 The geometry of Markoff numbers, *The mathematical Intelligencer*, 7, 21.

Seuil (Edition)

1992 *Chaos et déterminisme*, Collectif sous la direction de A. Dahan Dalmedico, J.-L. Chabert et K. Chemla, Paris : Seuil.

Smale, S.

1980 The mathematics of time, New-York : Springer Verlag.

Vanier, J et Audoin, C.

1989 *The quantum physics of atomic frequency standards* (Vol 1 et 2), Bristol/Philadelphia : Adam Hilger.