MANUEL REBUSCHI

Sur le paradoxe dit « de Burali-Forti »

Philosophia Scientiæ, tome 1, nº 1 (1996), p. 111-124
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1996__1_1_111_0>

Sur le paradoxe dit «de Burali-Forti»

Manuel Rebuschi

ACERHP

Philosophia Scientiae, 1 (1), 1996, 111-124

Manuel Rebuschi

Résumé. – L'historiographie des paradoxes ensemblistes attribue classiquement la «découverte» du paradoxe du plus grand ordinal au mathématicien italien Burali-Forti. Un examen attentif de ses démonstration et revirement révèle qu'il n'en est rien. Nous tenterons de dégager l'impact de la publication des *Principles* de Russell sur la constitution de cette version historiographique officielle, avant d'aborder la question de la définition des paradoxes et ce qui peut en motiver une conception restrictive.

Introduction

Le paradoxe dit de Burali-Forti est l'un des trois paradoxes qui ont affecté la théorie cantorienne des ensembles au tournant du siècle, les deux autres étant connus sous les appellations de Paradoxe de Russell et Paradoxe de Cantor.

De façon générale, l'apparition d'un paradoxe au sein d'une théorie, c'est la démonstration, la preuve rigoureuse de la vérité d'un énoncé et de celle de sa propre négation – c'est donc le révélateur d'une contradiction intrinsèque à la théorie, qui exige une remise en question, une correction dans la formulation de présupposés fondamentaux de cette théorie. Cela fut le cas des trois paradoxes mentionnés, dont l'apparition a exigé le rejet de la théorie des ensembles de Cantor.

Celle-ci, en tant que théorie de l'infini, avait déjà été contestée dès sa naissance par nombre de mathématiciens, avant de rencontrer une certaine reconnaissance. Loin d'émerger *ex nihilo*, elle répondait au besoin de l'analyse mathématique développée au cours du dix-neuvième siècle de voir justifiées ses manipulations concrètes opérées sur les nombres réels. Vu son objet, vu les concepts en jeu (notions d'ensemble, d'infini...), la théorie cantorienne apparaissait à juste titre comme la base de l'édifice mathématique.

Cette position particulière de la théorie de Cantor explique le rôle historique majeur joué par les paradoxes ensemblistes : avec l'Axiome du Choix, ils ont été l'origine directe de la célèbre «Crise des Fondements» des mathématiques. Leur émergence a nécessité la formulation d'une nouvelle théorie des ensembles, on ne pouvait pas se contenter de jeter Cantor aux orties.

Chronologie officielle

Il existe une histoire officielle et bien connue des paradoxes ensemblistes ; rappelons ici sommairement les moments-clefs de l'histoire du paradoxe du plus grand ordinal, dit «de Burali-Forti», dans cette version :

env. 1895 : Cantor construit le paradoxe du plus grand ordinal, ne le publie pas.

1897 : Burali-Forti publie ce paradoxe dans son article «Sui numeri transfiniti».

1899 : Cantor communique le paradoxe à Dedekind.

1903 : Russell aborde le paradoxe (et d'autres) dans les *Principles.*

1932 : Zermelo publie la correspondance de Cantor, notamment les Lettres à Dedekind.

Notions préliminaires

Pour bien saisir le paradoxe du plus grand ordinal, on est amené à introduire les notions de nombre ordinal, de type d'ordre, notions que Cantor a développées parallèlement à celle de cardinal.

La notion de cardinal généralise l'idée de nombre d'éléments, en l'étendant aux ensembles infinis : pour un ensemble fini, le cardinal est défini comme étant le nombre d'éléments ; pour les ensembles infinis, la tâche est plus subtile, et Cantor parvient à les hiérarchiser, à distinguer différents cardinaux d'ensembles qu'il qualifie de «transfinis». A la base de cette notion, il y a celle de correspondance biunivoque.

Exemple :						
	0	1	2	3	4	...
	0	1	4	9	16	...

ce qui avait déjà étonné Galilée, il y a autant de carrés que d'entiers ; Cantor affecte le premier cardinal transfini $\aleph_0$ à cette puissance du dénombrable. Il observe que le cardinal de l'ensemble des réels – la puissance du continu – est strictement supérieur à celui des entiers, et développe une véritable arithmétique des nombres cardinaux transfinis.

La notion d'ordinal vise à caractériser, non plus la grandeur d'un ensemble, mais l'agencement de ses éléments – c'est donc une schématisation de l'acte d'énumération des éléments d'un ensemble, alors que le cardinal schématisait l'acte de comptage indépendamment de l'énumération. Pour cela, Cantor s'appuie sur un processus de simple abstraction : en considérant un ensemble, on fait abstraction de la nature des éléments, mais en préservant leur agencement puisque c'est cela qu'il s'agit de caractériser. Cantor appelle type d'ordre les ensembles ainsi abstraits – deux ensembles (énumérés) auront même type d'ordre s'il existe entre eux une correspondance biunivoque qui préserve l'agencement des éléments.

Exemples : donnons différents agencements d'ensembles d'entiers :

– Cas des ensembles finis

1 2 3

3 1 2

e e e [en faisant abstraction de la nature des éléments]

Pour un même nombre fini d'éléments, i.e. un même cardinal fini, il n'y a pas d'agencements fondamentalement distincts, on a le même type d'ordre. Dans le cas fini, le type d'ordre est donc dénoté par le cardinal, i.e. par un nombre entier fini.

– Cas des ensembles infinis (dénombrables)

	ensemble agencé	type d'ordre dénoté par	
ex 1 :	1, 2, 3, 4, ...	ω	[C'est le type d'ordre des entiers agencés suivant leur ordre naturel de grandeur]
ex 2 :	1, 3, 2, 4, ...	ω	
ex 3 :	0, 1, 2, 3, ...	$1 + \omega = \omega$	
ex 4 :	1, 2, 3, ..., e.	$\omega + 1 \neq \omega$	[Pas de correspondance biunivoque avec les entiers dans leur ordre naturel : problème du dernier élément]
ex 5 :	1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ...	$\omega + \omega = \omega.2$	
ex 6 :	..., 3, 2, 1.	$\omega^* \neq \omega$	
ex 7 :	1, 3, 5, ..., ..., 6, 4, 2.	$\omega + \omega^*$	
ex 8 :	..., 6, 4, 2, 1, 3, 5, ...	$\omega^* + \omega$	

Quelques illustrations «concrètes» : – passage à la limite : Achille court après la tortue, il la rattrape en «e» (ex 4) ; – Achille court après deux tortues, il rattrape la première, pas la seconde (ex 5) ; – Avant de parcourir le stade, Achille parcourt la moitié ; avant la moitié, le tiers, etc. ; il parvient tout de même à démarrer et parcourir le stade entier (ex 6).

A chaque agencement de l'ensemble des entiers correspond une relation de succession R : xRy signifiant «x précède y», ou bien «y succède à x». Ainsi, dans ex 1, où les entiers sont classés suivant leurs grandeurs croissantes, on a R = < : xRy ssi x < y, i.e. «x précède y si et seulement si x est strictement inférieur à y».

Tous les agencements et, partant, toutes les relations de succession ne sont pas mathématiquement intéressantes. Certaines de ces relations peuvent avoir des propriétés qui permettent de déboucher sur des théorèmes importants, d'autres pas. Il s'agit donc de sélectionner, parmi les relations, celles dont on s'occupera plus particulièrement. On est ainsi amené à énoncer des critères de sélection, relativement abstraits.

Sur un ensemble E, muni d'une relation binaire R (i.e. une relation qui lie les éléments de E deux par deux), on définit les trois critères suivants :

– $[A]_{ER} =_{Df} (\forall\, x,y)\ x,y \in E \Rightarrow ((x = y) \vee (xRy) \vee (yRx))$: «si x et y sont éléments de E, alors x = y, ou bien x a la relation R avec y, ou bien encore y a la relation R avec x» ; ce critère est connu sous le nom de propriété de "trichotomie".

– $[B]_{ER} =_{Df} (\forall\, x,y,z)\ x,y,z \in E \Rightarrow ((xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz))$: «si x, y et z sont éléments de E, si x a la relation R avec y, et si y a la relation R avec z, alors x a la relation R avec z» ; il s'agit de la transitivité.

– $[C]_{ER}$: tout sous-ensemble F de E a un «premier élément», c'est à dire un élément f tel que fRx pour tout élément x de F ; si R est en particulier une relation de succession, comme dans les exemples, ce critère exige donc que dans tous les sous-ensembles possibles de E, il y ait un élément qui précède tous les autres.

Ces trois critères étant posés, on peut observer, sur n'importe quel cas concret d'un ensemble muni d'une relation binaire, s'ils vérifient l'un, ou l'autre... ou aucun des trois. Selon qu'ils vérifient ou non ces critères, ensembles et relations ont droit à diverses appellations.

Ainsi, Cantor appelle «ordre simple» une relation R qui vérifie [A] et [B] (aujourd'hui, on parle de relation d'ordre total strict) ; on dit également que l'ensemble E est «simplement ordonné (par R)». Tous les exemples cités plus haut vérifient ces deux critères, et ont donc droit à cette appellation. A tout ensemble simplement ordonné, Cantor assigne donc un type d'ordre déterminé, représenté par un symbole.

Parmi les relations d'ordre simple, il en est qui vérifient en outre la propriété [C] : Cantor baptise «bon ordre» de telles relations ; on dit aussi que l'ensemble E est «bien ordonné». Parmi les exemples, seuls les ensembles cités de ex 1 à ex 5 sont bien ordonnés, tandis que les relations de succession impliquées dans ex 6, ex 7 et ex 8 ne vérifient pas le critère [C].

Enfin, Cantor appelle «(nombres) ordinaux» les types d'ordre des ensembles bien ordonnés, ce qui marque nettement la séparation. L'ensemble des nombres ordinaux est donc un sous-ensemble de l'ensemble des types d'ordre, puisque les relations de bon ordre sont définies parmi les relations d'ordre simple, en tant que celles qui vérifient le critère [C].

Schéma récapitulatif

[A] [B]	Ordre simple	type d'ordre
[A] [B] [C]	Bon ordre	(nombre) ordinal

On constate que les ensembles finis sont toujours bien ordonnés. Leurs types d'ordre sont, on l'a vu, des nombres entiers. C'est par analogie que Cantor baptise "nombres" (ordinaux) les types d'ordre des ensembles bien ordonnés, y compris dans le cas d'ensembles infinis. Cantor s'appuie donc sur la notion de bon ordre pour fonder son affirmation de l'identité de statut entre ordinaux transfinis et nombres entiers – donc son affirmation de l'existence de nombres infinis, dits «transfinis».

A partir d'une caractérisation de l'agencement des ensembles, Cantor est donc parvenu à la création de nouveaux nombres.

On considère maintenant la suite des nombres ordinaux, pris dans leur relation de succession naturelle :

$1, 2, 3, ..., \omega, \omega+1, \omega+2, ..., \omega+\omega = \omega.2, \omega.2+1, ..., \omega.3, ..., \omega.\omega = \omega^2, \omega^2+1, ..., \omega^3, ..., \omega^\omega, ...$

Cette relation est un bon ordre.

A tout ensemble de nombres ordinaux, i.e. à tout sous-ensemble de cette suite, on peut donc assigner un nombre ordinal :

Ensemble d'ordinaux	Nombre ordinal associé
$1, 2, 3, ...$	ω
$1, 2, 3, ..., \omega.$	$\omega+1$
$1, 2, 3, ..., \omega, \omega+1.$	$\omega+2$
$1, 2, 3, ..., \omega, \omega+1, ...$	$\omega.2$

On constate aisément que ce nombre ordinal est toujours strictement plus grand que tout élément de l'ensemble considéré.

Enoncé moderne du paradoxe

Soit W l'ensemble de tous les nombres ordinaux.

C'est un ensemble bien ordonné. On lui assigne donc un nombre ordinal, désigné par Ω.

Ainsi, Ω est strictement plus grand que tout élément de W.

Mais comme W est l'ensemble de tous les nombres ordinaux, et comme Ω est un nombre ordinal, Ω appartient à l'ensemble W.

Donc Ω est strictement plus grand que Ω.

Tout s'écroule.

La démonstration de Burali-Forti

Venons-en immédiatement au texte de Burali-Forti qui, dans l'historiographie officielle, est censé être le premier à formuler ce paradoxe ensembliste.

> «§ 10. Conclusion. Si l'on remplace a par Ω dans la proposition 30 et a par $\Omega+1$ dans la proposition 35, on a alors, en vertu des propositions 34, 26, et 29 ,
>
> $$\Omega + 1 \dot{>} \Omega \quad \text{et} \quad \Omega + 1 \leq \Omega ,$$
>
> et ceci, suivant les propositions 21 et 22, s'avère contradictoire.
>
> [On trouve au § 7, p. 108, les définitions des propositions 21 et 22 :
>
> $[21] =_{Df} \neg((a = b) \wedge (a < b))$
>
> $[22] =_{Df} \neg((a < b) \wedge (a > b))$]
>
> Donc, si l'on admet la proposition A, on est conduit à une absurdité, et par conséquent il a été rigoureusement prouvé qu'il existe au moins deux types d'ordre a et b (et il en existe certainement parmi les nombres ordinaux) tels que a n'est pas égal à b, ni plus grand que b, ni plus petit que b.» [Burali-Forti 1897, p. 111][1]

On a prouvé non[A] – i.e. que la trichotomie ne s'applique pas à l'ensemble des «nombres ordinaux», donc *a fortiori* à l'ensemble des types d'ordre. L'ensemble des nombres ordinaux, agencé suivant leurs grandeurs, ne vérifie pas le critère [A] : il n'est donc pas bien ordonné, et de fait même pas simplement ordonné. Il suit immédiatement ce commentaire de Burali-Forti (où «classe» signifie «ensemble») :

> «Par conséquent, il est impossible d'ordonner les types d'ordre, en général, ni même les nombres ordinaux en particulier ; cela signifie que les types d'ordre ne peuvent pas constituer une classe standard pour les classes ordonnées, comme la classe des entiers, ordonnés suivant leur grandeur, en constitue une pour les classes finies et dénombrables, c'est à dire les classes de type d'ordre ω. Il semble ainsi que les types d'ordre échouent sur l'un de leurs objectifs les plus importants.» [Ibid.][2]

On constate que Burali-Forti ne prétend pas que sa démonstration dévoile un paradoxe dans la théorie de Cantor. Et de fait, il n'y en a pas. Cet article n'est que la démonstration rigoureuse de la validité de $\neg$[A] sur l'ensemble des nombres ordinaux, ce qui est d'ailleurs l'objectif annoncé dès le début de l'article :

> «Le principal objet de cette note est de prouver qu'il existe véritablement des nombres transfinis (ou des types d'ordre) a et b tels que a n'est pas égal à b, ni plus petit que b, ni plus grand que b.» [Ibid., p. 105][3]

Après avoir noté T l'ensemble des types d'ordre, Burali-Forti énonce la proposition A :

> «A. a, b ε T . $\supset$: a = b . $\cup$. a < b . $\cup$. a > b ,
>
> c'est-à-dire, que pour deux types arbitraires, il doit toujours y avoir l'un de ces trois cas : a = b, a < b, a > b.» [Ibid., §7, p. 109][4]

Nous noterons cette proposition :

$[A]_T =_{Df} [A]_{T,<} = (\forall\, a, b)\;\; a, b \in T \Rightarrow ((a = b) \vee (a < b) \vee (a > b))$

Burali-Forti écrit ensuite :

> «Supposons que la proposition A est vraie et voyons quelles propositions en découlent logiquement.» [ibid. §9, p. 110][5]

Il s'agit donc d'une démonstration par l'absurde, du type :

[h] est l'hypothèse, supposée vraie ;

par dérivations successives, on établit $[h] \Rightarrow (p \wedge \neg p)$;

on en déduit donc que [h] est fausse, i.e. que $\neg[h]$ est vraie.

En fait, Burali-Forti ne démontre pas la fausseté de $[A]_T$, mais celle d'un cas particulier : l'application de la trichotomie aux seuls nombres ordinaux (No). Sa définition des nombres ordinaux, sur laquelle on reviendra, est telle que tout nombre ordinal est un type d'ordre, donc : $T \supset No$.

On considère alors ce que l'on appelle la restriction de $[A]_T$ à l'ensemble No :

$[A]_{No} =_{Df} (\forall\, a, b)\;\; a, b \in No \Rightarrow ((a = b) \vee (a < b) \vee (a > b))$

On a l'implication suivante :

$$[A]_T \Rightarrow [A]_{No}$$

En passant sur les détails, on dérive deux chaînes de déductions à partir de $[A]_{No}$, ce qui aboutit aux deux résutats suivants :

$$[p] : \Omega + 1 > \Omega \text{ , et } \neg[p] : \Omega + 1 \leq \Omega.$$

On peut donc résumer ainsi l'articulation logique de la démonstration :

$$[A]_T \Rightarrow [A]_{No} \Rightarrow ([p] \wedge \neg[p])$$

Donc il a été établi, par l'absurde, que $\neg[A]No$ et $\neg[A]_T$ sont vraies, et rien de plus. Pour obtenir un paradoxe, il aurait fallu par ailleurs prouver que $[A]_T$, voire seulement $[A]_{No}$, étaient des théorèmes, i.e. étaient également vrais. Mais ce n'est pas le cas.

L'erreur de Burali-Forti

Peu après la publication de son article, Burali-Forti prend connaissance de la démonstration de la validité de la trichotomie appliquée aux nombres ordinaux, démonstration réalisée par Cantor.

Ainsi Burali-Forti aurait montré $\neg[A]_{No}$, Cantor aurait montré $[A]_{No}$, et il y aurait paradoxe ?

En fait, il n'en est rien. Burali-Forti réalise à ce moment qu'il a mal saisi la définition du bon ordre, donc que Cantor et lui-même ne parlent pas du même objet lorsqu'ils traitent des nombres ordinaux. Il publie une nouvelle note, fin 1897, où il corrige sa définition du bon ordre ; et en fait, il n'y a pas de contradiction entre la démonstration de Cantor et celle de Burali-Forti.

Dans la suite du paragraphe, on aborde dans le détail l'erreur de Burali-Forti, son interprétation erronée, et sa correction. Le lecteur que trop de formalisme rebuterait peut immédiatement passer au paragraphe suivant.

Le critère $[C]_{E,R}$ du bon ordre est une formulation moderne, logiquement équivalente à la condition énoncée par Cantor en 1883. La formulation de 1883 est une condition triple, bien moin évidente :

Soit u une classe non vide, h une relation d'ordre simple sur u. u, munie de h, est dite bien ordonnée si :

(a). Il existe un élément de u qui occupe la première place au sens de l'ordre h.

(b). Tout élément de u qui a des successeurs a un successeur immédiat.

(c). Si u_1 est un sous-ensemble de u tel qu'il existe dans u des éléments plus grands que tout élément de u_1, alors il existe un élément a dans u tel qu'il n'existe pas d'élément plus petit que a et plus grand que tous les éléments de u_1.

On a donc : $[C] \Leftrightarrow (a) \wedge (b) \wedge (c)$; on désigne par KwoC les classes bien ordonnées au sens de Cantor.

Or Burali-Forti commet une erreur de compréhension de cette notion : il pense que les conditions (a) et (b) suffisent à définir un bon ordre. Les conditions (a) et (b), sans la condition (c), définissent en fait une nouvelle catégorie de relations d'ordre, ce qu'on appelle «bon ordre au sens de Burali-Forti», et on désigne les classes munies d'une telle relation par KwoBF :

KwoC	KwoBF
a,b,c	a,b

Trouvant la relation de bon ordre trop large, il énonce une condition (c') qui, jointe aux conditions (a) et (b), définit les relations dites "d'ordre parfait". Burali-Forti désigne par Kpo les classes parfaitement ordonnées.

Depuis 1897, des recherches menées sur l'erreur de Burali-Forti ont permi d'établir les successions d'inclusions et d'implications suivantes :

Conditions	[A][B] [A][B] [A][B] [A][B]
	a, b, c a, b, c' a, b
Classes de classes	$Ko \supset KwoBF \supset Kpo \supset KwoC$
Classes de types ordinaux	$T \supset NoBF \supset No \supset NoC$
	$[A]_T \Rightarrow [A]_{NoBF} \Rightarrow [A]_{No} \Rightarrow [A]_{NoC}$
	$\neg[A]_{NoC} \Rightarrow \neg[A]_{No} \Rightarrow \neg[A]_{NoBF} \Rightarrow \neg[A]_T$

La démonstration de Burali-Forti a donc consisté à établir $\neg[A]_{No}$ et par là $\neg[A]_T$. Que signifie son incompréhension de la notion cantorienne de bon ordre ?

1. Burali-Forti n'a pas conscience du couple KwoC/NoC ;

2. KwoC est assimilé à KwoBF, NoC à NoBF, i.e. les raisonnements de Cantor autour des notions de bon ordre et de nombre ordinal, raisonnements qui portent sur KwoC/NoC, sont lus et interprétés par Burali-Forti en termes de KwoBF/NoBF.

Après la publication de son article, Burali-Forti découvre la démonstration par Cantor de $[A]_{NoC}$. Si Burali-Forti avait conservé sa conception initiale (erronnée) du bon ordre, il aurait interprété $[A]_{NoC}$ comme $[A]_{NoBF}$ et aurait établi un pseudo-paradoxe. En fait, c'est à ce moment qu'il réalise son erreur et la corrige : il découvre KwoC/NoC et la chaîne d'inclusions.

Il n'y a de fait pas de contradiction entre Cantor et Burali-Forti : celui-ci a prouvé $\neg[A]_{No}$, celui-là a prouvé $[A]_{NoC}$, et les deux résultats sont compatibles.

Critique de l'historiographie classique

L'analyse du texte mathématique révèle que Burali-Forti n'a pas construit le paradoxe du plus grand ordinal que l'histoire officielle lui attribue. C'est à Russell que revient le mérite d'avoir été le premier à publier ce paradoxe :

> «Il y a une difficulté concernant le type [d'ordre] de la suite des nombres ordinaux [...]. Il ne peut pas y avoir un plus grand nombre ordinal, parce que tout [nombre] ordinal peut être augmenté par l'addition de 1. *De cette contradiction, M. Burali-Forti, qui l'a découverte*, infère que de deux différents ordinaux, comme de deux cardinaux, il n'est pas nécessaire que l'un soit plus grand et l'autre moins. Par là, quoi qu'il en soit, *il contredit consciemment un théorème de Cantor* qui affirme l'opposé. J'ai examiné ce théorème avec le plus grand soin, et ne suis pas parvenu à déceler de faiblesse dans sa preuve. Mais il y a une autre prémisse dans l'argument de Burali-Forti, qui me semble plus susceptible d'être rejetée, et qui est que la suite des nombres ordinaux est bien ordonnée. Cela ne découle pas du fait que tous ses segments sont bien ordonnés, et doit, je pense, être rejeté, puisque, autant que je sache, on est incapable de le prouver. En ce sens, il semblerait que la contradiction en question puisse être évitée.» [Je souligne] [Russell 1903, §301, p. 323][6]

On peut constater que Russell n'a pas fait la correction de Burali-Forti : il estime que celui-ci contredit Cantor, et le critique ailleurs, où il n'y a d'ailleurs pas lieu de le faire. Ces propos de Russell concernant Burali-Forti ont très certainement contribué à forger, en la faussant, l'historiographie classique des paradoxes.

Après Russell, son analyse des paradoxes et de leur impact sur l'édifice mathématique, il se crée un contexte intellectuel nouveau, où les paradoxes sont reconnus en tant que tels, i.e. comme des révélateurs d'inconsistance des théories. Mais avant 1903, on a affaire à un autre contexte. Et l'idée est très certainement fausse selon laquelle on aurait cherché des paradoxes dans la théorie de Cantor, avant même qu'un premier paradoxe ait été construit et reconnu comme tel. C'est pourtant ce que présuppose l'interprétation officielle, qui pourrait se résumer ainsi : Burali-Forti, hostile aux idées cantoriennes, cherche et trouve un paradoxe qu'il publie en 1897.

Contre cette interprétation, on avancera donc les arguments suivants :

– Burali-Forti n'a pas "trouvé" de paradoxe, il a construit une démonstration relativement proche, mais tout de même à côté.

– Il n'a d'autre part vraisemblablement pas cherché à construire un paradoxe – affirmer cela, ce serait implicitement étendre le contexte intellectuel d'après Russell à l'avant Russell.

– Burali-Forti n'était sans doute pas hostile à Cantor ; cette position est défendue et argumentée par Garciadiego, chercheur mexicain, très documenté sur ces aspects.

– Le revirement de Burali-Forti dans sa conception du bon ordre, semble confirmer ses idées cantoriennes : ayant pris connaissance de la démonstration de Cantor, il n'a pas pu ne pas voir le pseudo-paradoxe dont on a parlé plus haut. Plutôt que de crier au paradoxe et à la faillite de Cantor, Burali-Forti s'empresse d'approfondir sa conception du bon ordre, ce qui lui permet de voir son erreur et de corriger le tir. Ainsi ce revirement, sans prouver l'adhésion de Burali-Forti aux idées de Cantor, corrobore tout de même cette hypothèse.

Critique de la définition des paradoxes

A la définition classique des hypothèses paradoxales h :

$$\text{h semble vraie, et h} \Rightarrow (p \wedge \neg p)$$

j'ai opposé celle-ci :

$$\text{h est vraie (i.e. h est un théorème), et h} \Rightarrow (p \wedge \neg p)$$

Cette définition est plus stricte, mais elle permet de distinguer clairement, en tant que paradoxes, les constructions mathématiques qui constituent de véritables blocages formels, puisque révélatrices d'inconsistance. C'est en s'appuyant sur cette définition que l'on a donc pu prouver que Burali-Forti n'avait pas construit le paradoxe du plus grand ordinal.

On pourra rétorquer qu'une définition plus large des paradoxes permettrait de trouver un paradoxe dans la démonstration de Burali-Forti. Envisageons l'hypothèse h : «on construit les types d'ordre de telle sorte que leur agencement naturel soit un bon ordre», qui est en fait une intention. La formalisation débouche sur un résultat qui contredit cette intention, et c'est bien le sens du commentaire de Burali-Forti. Appelons «paradoxe de l'intention» un tel cas de figure.

On perçoit ici très clairement les implications du choix de telle ou telle définition des paradoxes : selon ce choix, Burali-Forti a ou n'a pas construit de paradoxe. Ajoutons toutefois que le paradoxe de l'intention présent chez Burali-Forti n'est pas le paradoxe du plus grand ordinal, que la tradition lui attribue.

L'avantage de la définition restreinte, en mettant l'accent sur le blocage formel, est qu'elle permet de repérer où, dans l'histoire des mathématiques, il y a nécessité objective d'une solution ; autrement dit, cette définition permet de marquer les contraintes imposées au devenir mathématique. A l'opposé, les paradoxes de l'intention n'exigent pas de révision des théories ; ils ne sont pas dénués d'intérêt, philosophique en particulier, mais constituent une appréciation trop externe vis à vis de l'édifice mathématique pour avoir un impact sur l'histoire qui soit aussi puissant que celui des paradoxes au sens restreint.

Disons que le paradoxe de l'intention n'interdit pas la marche normale des mathématiques – alors que l'apparition d'un blocage formel exige la révision de la théorie où il émerge, un paradoxe de l'intention peut y subsister ; c'est d'ailleurs un fait que de tels paradoxes sont présents au coeur de l'édifice mathématique.

Ainsi, la définition moderne du continu admet la divisibilité infinie et l'existence d'indivisibles, ce qui constitue un paradoxe de l'intention : c'est à ce prix que sont évités les paradoxes (au sens restreint) de Zénon d'Elée.

Autre exemple : la définition des ensembles après Cantor, telle qu'elle est envisagée par l'axiomatique de Zermelo (qui résout les paradoxes de Cantor et Russell). Suivant cette définition, l'ensemble de tous les ordinaux, de même que l'ensemble de tous les cardinaux, ces ensembles n'existent pas ; i.e. leurs totalités respectives ne vérifient pas les critères exigés pour avoir droit au statut d'ensembles. On a donc : existence des nombres ordinaux et non-existence de leur ensemble – il y a donc ici un paradoxe de l'intention, et la consistance de la théorie des ensembles est à ce prix.

Evidemment, l'intérêt de la notion de paradoxe de l'intention est loin d'être négligeable. La question soulevée est l'origine du fait que la notion intuitive d'ensemble se perde au cours pu processus de formalisation. Car la théorie de Cantor, en intégrant cette notion intuitive telle quelle, s'est finalement révélée inconsistante – et c'est pourquoi, rétrospectivement, les historiens l'ont qualifiée de «naïve».

Références bibliographiques

Burali-Forti, C.

1897 Una questione sui numeri transfiniti, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 11, 154-164 ; Traduction anglaise de J. van Heijenoort 1967, A Question on Transfinite Numbers, in Heijenoort (éd.) 1967, 105-111.

Garciadiego, A. R.

1992 *Bertrand Russell and the Origins of the Set-theoretic «Paradoxes»* (Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser).

Heijenoort, J. van (éd.),

1967 *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic,* 1879-1931 (Cambridge, Mass. : Harvard University Press).

Russell, B.

1903 *The Principles of Mathematics* (Cambridge : Cambridge University Press) ; édition 1992 (London : Routledge).

Notes

1 «§ 10. Conclusion . If we write Ω for a in proposition 30 and Ω+1 for a in proposition 35, we have, by virtue of propositions 34, 26, and 29 ,

$$\Omega + 1 > \Omega \quad \text{and} \quad \Omega + 1 \leq \Omega ,$$

and these, by propositions 21 and 22, turn out to be contradictory.
Hence, if we assume proposition A, we are led to an absurdity, and therefore it has been rigorously proved that there exist at least two order types a and b (and there certainly exist some among the ordinal numbers) such that a is not equal to b, is not larger than b, and is not smaller than b.»

2 «It is therefore impossible to order the order types in general, or even the ordinal numbers in particular ; that is to say, the order types cannot provide a *standard* class for the ordered classes, as the class of integers, ordered according to magnitude, does for the finite classes and the denumerable class, that is, the class of order type ω. It seems that the order types thus necessarily fall short of one of their most important objectives.»

3 «The principal object of this note is to prove that there actually exist transfinite numbers (or order types) a and b such that a is not equal to b, not smaller than b, and not larger than b.»

4 «[...] that is, that for two arbitrary types one of the three cases a = b, a < b, a > b must always occur.»

5 «Let us assume that proposition A is true and see what propositions logically follow from it.»

6 «§301. There is a difficulty as regards the type of the whole series of ordinal numbers [...]. There cannot be a greatest ordinal number, because every ordinal is increased by the addition of 1. From this contradiction, M. Burali-Forti, who discovered it, infers that of two different ordinals, as of two different cardinals, it is not necessary that one should be greater and the other less. In this, however, he consciously contradicts a theorem of Cantor's which affirms the opposite. I have examined this theorem with all possible care, and have failed to find any flaw in the proof. But there is another premiss in M. Burali-Forti's argument, which appears to me more capable of denial, and that is, that the series of all ordinal numbers is well-ordered. This does not follow from the fact that all its segments are well-ordered, and must, I think, be rejected, since, so far as I know, it is incapable of proof. In this way, it would seem, the contradiction in question can be avoided.»