MICHEL HACQUE

Les suites de Hochschild-Serre en cohomologie non abélienne

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1993, fascicule 3
« Les suites de Hochschild-Serre en cohomologie non abélienne », , p. 1-82
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1993___3_A1_0>

LES SUITES DE HOCHSCHILD-SERRE EN COHOMOLOGIE NON ABELIENNE

Michel HACQUE

Institut de Mathématiques et Informatique de l'I.S.M.
Université Claude Bernard - LYON I
69622 VILLEURBANNE, France

INTRODUCTION

Dans la théorie classique de la *cohomologie abélienne des groupes,* les SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE jouent un rôle fondamental, en raison de leurs nombreuses applications, sous une forme *implicite* ou *explicite,* à des domaines variés, parmi lesquels figurent en particulier la théorie des algèbres simples (voir par exemple [22], [5], [18] et les pages 130 à 132 de [13]), la théorie des corps de nombres algébriques ([12], [10]), la théorie du corps de classe local ([11], [21]), et la théorie des Formations de Classes ([19], [14], [15], [1]).

A la suite des premiers travaux de R.C. LYNDON sur la Cohomologie des extensions de groupes [16], l'existence et la caractérisation des SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE, annoncées dans [18], résultent du Théorème 2 page 129 de [13], dont la démonstration repose sur l'utilisation de la fameuse SUITE SPECTRALE DE HOCHSCHILD-SERRE.

Dans les applications, on utilise en général les SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE sous la forme suivante.

Etant donnés un G-module M et un sous-groupe distingué K de G, alors :

(A) En basse dimension, il existe *toujours* une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow H^1(G/K, M^K) \xrightarrow{l_1} H^1(G, M) \xrightarrow{r_1} H^1(K, M)^G \xrightarrow{t_2} H^2(G/K, M^K) \xrightarrow{l_2} H^2(G, M)$$

dans laquelle r_1 est l'homomorphisme de *restriction,* dans laquelle l_1 et l_2 sont les homomorphismes d'*inflation* et dans laquelle t_2 est un homomorphisme déterminé par la *transgression.*

(B) En dimension *deux,* si $H^1(K, M) = (0)$, il existe une *"suite exacte fondamentale"* de la forme :

$$(0) \longrightarrow H^2(G/K, M^K) \xrightarrow{l_2} H^2(G, M) \xrightarrow{r_2} H^2(K, M)^G \xrightarrow{t_3} H^3(G/K, M^K) \xrightarrow{l_3} H^3(G, M)$$

dans laquelle r_2 est l'homomorphisme de *restriction*, dans laquelle l_2 est l_3 sont les homomorphismes d'*inflation* et dans laquelle t_3 est un homomorphisme déterminé par la *transgression.*

(C) Plus généralement, en dimension $m \geq 1$, en supposant que $H^n(K, M) = (0)$, pour $0 < n < m$, alors le sous-groupe constitué par les éléments transgressifs de $H^m(K, M)$ coïncide avec $H^m(K, M)^G$, l'image $t_{m+1}(H^m(K, M)^G)$ est un sous-groupe de $H^{m+1}(G/K, M^K)$, et il existe une suite exacte de la forme :

$$(0) \longrightarrow H^m(G/K, M^K) \xrightarrow{l_m} H^m(G, M) \xrightarrow{r_m} H^m(K, M)^G \xrightarrow{t_{m+1}} H^{m+1}(G/K, M^K) \xrightarrow{l_{m+1}} H^{m+1}(G, M)$$

dans laquelle r_m est l'homomorphisme de *restriction*, dans laquelle l_m et l_{m+1} sont les homomorphismes d'*inflation* et dans laquelle t_{m+1} est un homomorphisme déterminé par la *transgression.*

Naturellement, la partie (C) exprime l'*intégralité* du Théorème 2 page 129 de [13], dont les parties (A) et (B) ne constituent que des *cas particuliers* , mais qui sont cependant les plus fréquemment utilisés dans les applications.

Par exemple, la richesse de la *cohomologie galoisienne* [19] résulte essentiellement du fait que le THEOREME DE A. SPEISER [20] entraîne l'Hypothèse de la partie (B) et par suite l'*existence* de la *"suite exacte fondamentale"* de la partie (B), dont G. HOCHSCHILD et J.P. SERRE ont donné une *interprétation* [13] dans le cadre de la théorie des *algèbres* Q-*normales* de S. EILENBERG et S. Mac LANE [5].

On se propose d'établir la *généralisation* des SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE et leur *interprétation*, dans un *contexte infiniment plus vaste,* obtenu en remplaçant la *cohomologie abélienne des groupes* (voir par exemple [3], [4], [15], la Troisième partie de [19] ou le Chapitre IV de [17]) par la COHOMOLOGIE NON ABELIENNE DES ANNEAUX-GROUPES, dont la théorie a été présentée dans le DIPTYQUE constitué par les deux articles [6] et [7], c'est-à-dire, plus précisément , en remplaçant la notion classique [19] de G-*module* M par la notion *nouvelle* de PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, introduite et étudiée dans les deux premières ANNEXES [8] et [9] au DIPTYQUE précédent, dont on a donné de très nombreux exemples et dont on a montré qu'elle constitue la *généralisation* de la notion classique de G-*module,* dans *un cadre non nécessairement abélien* qui *englobe* en particulier à la fois le *"cas des groupes"* et le *"cas des anneaux"* .

Le présent travail constitue donc la troisième ANNEXE au DIPTYQUE précédent et en particulier la *"seconde étape"* d'un projet dont la *"première étape"* a été réalisée par l'étude [9] des EXTENSIONS Q-NORMALES, qui généralisent, dans le contexte envisagé, les *algèbres* Q-*normales* classiques.

Comme on a montré dans [8] que tout PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, détermine *"fonctoriellement"* son SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

et ses GROUPES DE COHOMOLOGIE CENTRALE :

$$\hat{H}^n(P) = \hat{H}^n_\theta(G, \Gamma) \qquad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}\text{)},$$

pour des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \ ; \ G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, qui déterminent le PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$ et le GROUPE QUOTIENT $G'' = G/G'$, les *"nouvelles"* SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE EN COHOMOLOGIE NON ABELIENNE sont en fait des *"suites exactes"* qui font intervenir à la fois des GROUPES ABELIENS provenant de la COHOMOLOGIE CENTRALE et des ESPACES MUNIS DE GROUPES D'OPERATEURS provenant de la COHOMOLOGIE NON ABELIENNE.

Par exemple, le Théorème 4-3 établit qu'en basse dimension, il existe *toujours* une *"suite exacte"* de la forme :

$$\{1\} \longrightarrow H^1_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_1} \hat{H}^1_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\hat{r}_1} [\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

$$\xrightarrow{\hat{t}_2} H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) \xrightarrow{\tilde{l}_2} \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

dans laquelle $\hat{l}_1$, $\hat{r}_1$ et $\hat{t}_2$ sont des *morphismes de groupes* qui caractérisent une *suite exacte de groupes abéliens* et dans laquelle l'OPERATEUR D'INFLATION

$\widetilde{l}_2$ fait agir le groupe abélien $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma))$ sur le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\widetilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P)$$

du PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ), de telle sorte que le *groupe d'isotropie* de chacun de ses éléments est le sous-groupe du groupe abélien $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma))$ constitué par l'*image* de l'HOMOMORPHISME DE TRANSGRESSION $\hat{t}_2$.

Ce résultat constitue la généralisation de la Propriété (A).

Pour obtenir la généralisation de la Propriété (B), l'*obstacle majeur* réside dans le *caractère très technique* de l'élaboration de la caractérisation de la *"seconde transgression"* $\widetilde{t}_3$ en COHOMOLOGIE NON ABELIENNE, obtenue dans le Théorème 6-3 et le Corollaire 6-4.

Une fois cet obstacle franchi, le Théorème 7-2 établit que sous la CONDITION DE SPEISER :

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\}$$

il existe une *"suite exacte fondamentale"* de la forme :

$$\{1\} \longrightarrow H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\widetilde{l}_2} \widetilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma) \xrightarrow{r_2} [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

$$\xrightarrow{\widetilde{t}_3} H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_3} \hat{H}^3_{\theta}(G, \Gamma)$$

qui fait intervenir en particulier le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P)$ du PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ) et aussi le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE

$\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P')$ du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$ et le sous-espace d'invariants $[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [\widetilde{H}^2(P')]^G$.

Ce résultat constitue la généralisation de la Propriété (B).

Une *interprétation* du résultat précédent est obtenue dans le Théorème 7-3, qui établit que sous la CONDITION DE SPEISER :

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\}$$

il existe une *"suite exacte fondamentale"* de la forme :

$$\{1\} \longrightarrow H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\widetilde{l}_2} \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\widetilde{r}_2} [\mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

$$\xrightarrow{\widetilde{t}_3} H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_3} \hat{H}^3_\theta(G, \Gamma)$$

qui fait intervenir en particulier l'ESPACE $\mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$ DES CLASSES DE θ-EXTENSIONS de l'anneau-groupe Γ par le groupe G et l'ESPACE $[\mathrm{Ext}_{\theta'}(G' \Gamma)]^G$ des CLASSES D'EXTENSIONS Q-NORMALES, de sorte que l'APPLICATION DE TRANSGRESSION $\widetilde{t}_3$ est *identifiable* à l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER.

Enfin, le Théorème 8-1 établit la généralisation de la Propriété (C) en *"hautes dimensions"*, c'est-à-dire pour les dimensions $m \geq 3$.

En résumé, le Théorème 4-3, le Théorème 7-2 et le Théorème 8-1 établissent, *"en toute dimension"*, les généralisations des SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE, dans le *contexte* de la COHOMOLOGIE NON ABELIENNE DES ANNEAUX-GROUPES, ou encore dans *le cadre non nécessairement abélien* des PSEUDO-MODULES, qui *englobe* en particulier à la fois le *"cas des groupes"* et le *"cas des anneaux"*.

L'existence de la *"suite exacte fondamentale"* du Théorème 7-2 et son *interprétation* par la *"suite exacte fondamentale"* du Théorème 7-3, semblent constituer les résultats les plus intéressants, puisqu'ils généralisent, aux EXTENSIONS Q-NORMALES et à une COHOMOLOGIE NON ABELIENNE, les propriétés classiques relatives aux *algèbres* Q-*normales* et à la *cohomologie galoisienne.*

1. LE CONTEXTE.

On se propose d'établir la *généralisation* des SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE et leur *interprétation*, dans le CONTEXTE obtenu en remplaçant les *"données classiques"* constituées par un G-*module* M et un *sous-groupe distingué* G' du groupe G, par de nouvelles DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ) et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G.

La considération des PSEUDO-MODULES nécessite quelques explications préliminaires.

Dans toute la suite, on utilise la terminologie et les notations introduites dans [6], [7], [8], et [9], (et auxquels il est conseillé de se reporter pour un exposé détaillé).

On rappelle néanmoins la terminologie et les notations de base, ainsi que quelques résultats utiles.

Pour les raisons exposées dans l'Introduction de [6], on a été amené à considérer de nouveaux OBJETS appelés des ANNEAUX-GROUPES.

Un *anneau-groupe* Γ est un couple $\Gamma = [V ; M]$ constitué par un *anneau* V et un *groupe* M qui est un sous-groupe du groupe multiplicatif V^* des éléments inversibles de l'anneau V.

Pour deux anneaux-groupes $\Gamma = [V ; M]$ et $\Gamma' = [V' ; M']$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(\Gamma, \Gamma')$ des *morphismes d'anneaux-groupes :*

$$f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$$

est constitué par les *morphismes d'anneaux* $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$, qui vérifient : $f(M) \subset M'$, c'est-à-dire qui *induisent* un *morphisme de groupes,* noté également $f \in \mathrm{Mor}(M, M')$.

Naturellement, ces conditions caractérisent une catégorie $\mathfrak{C}$ appelée la CATEGORIE DES ANNEAUX-GROUPES.

En particulier, pour tout anneau-groupe $\Gamma = [V ; M]$, le *groupe des automorphismes* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ est caractérisé par la condition :

$$\mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Stab}[\mathrm{Aut}(V) ; M]$$

c'est-à-dire constitué par les *automorphismes d'anneaux* $f \in \mathrm{Aut}(V)$, qui *stabilisent* M, c'est-à-dire qui *induisent* sur M un *automorphisme de groupes* noté également $f \in \mathrm{Aut}(M)$.

Tout anneau-groupe $\Gamma = [V\ ;\ M]$ détermine l'*anneau sous-jacent* $V = \mathrm{An}(\Gamma)$, le *groupe sous-jacent* $M = \mathrm{Gr}(\Gamma)$ et le *centre-groupe* $X = \mathrm{Zg}(\Gamma)$, qui est le *groupe abélien* caractérisé par la condition :

$$X = \mathrm{Zg}(\Gamma) = \mathrm{Gr}(\Gamma) \cap Z[\mathrm{An}(\Gamma)] = M \cap Z(V)$$

dans laquelle $Z(V)$ désigne l'*anneau centre* de l'anneau V.

La Proposition 2-4 de [6] établit l'existence d'un diagramme commutatif et exact canonique :

(1)
$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r] & \mathrm{Zg}(\Gamma) \arrow[r] & \mathrm{Gr}(\Gamma) \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Aut}(\Gamma) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "r"'] & \mathrm{Aut}_e(\Gamma) \arrow[r] \arrow[dl, "\varpi"] & \{1\} \\
 & & & \mathrm{Aut}[\mathrm{Zg}(\Gamma)] & &
\end{tikzcd}$$

dans lequel ω est le morphisme de groupes qui, à tout $a \in M = \mathrm{Gr}(\Gamma)$ associe l'*automorphisme intérieur* $\omega(a) = \langle a \rangle$ de l'anneau-groupe Γ constitué par le *couple* d'automorphismes intérieurs :

$$\langle a \rangle_V \in \mathrm{Aut}_i(V) \qquad \text{et} \qquad \langle a \rangle_M \in \mathrm{Aut}_i(M)$$

de la forme : $x \to axa^{-1}$, pour tout $x \in V$ ou pour tout $x \in M$ et dont l'*image* constitue le *groupe des automorphismes intérieurs* $\mathrm{Aut}_i(\Gamma)$, de sorte que le Lemme 2-2 de [6] montre l'existence d'une suite exacte canonique :

(2)
$$\{1\} \longrightarrow \mathrm{Aut}_i(\Gamma) \xrightarrow{j} \mathrm{Aut}(\Gamma) \xrightarrow{q} \mathrm{Aut}_e(\Gamma) \longrightarrow \{1\}$$

qui caractérise le *groupe des classes d'automorphismes extérieurs* $\mathrm{Aut}_e(\Gamma)$, appelé également plus simplement le *groupe des automorphismes extérieurs* de l'anneau-groupe Γ.

En adoptant une terminologie qui généralise les notions de *"Kollektivcharakter"* et de *"Charakter"* au sens de R. BAER (p. 377 de [2]), un groupe G et un anneau-groupe Γ déterminent l'*ensemble pointé :*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma) = \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}_e(\Gamma)]$$

des *"caractère collectifs"* du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, et aussi l'*ensemble pointé :*

$$\mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(\Gamma)]$$

des *"caractères"* du groupe G dans l'anneau-groupe Γ.

Avec la terminologie et les notations de [6], [7], [8], et [9], on rappelle rapidement les propriété suivantes.

Le Lemme 4-5 de [6] établit que le groupe $\hat{C}^1(G, \Gamma)$ des 1-*cochaînes généralisées faibles* de G dans Γ *opère à gauche* par une *action* $*$ sur l'*ensemble* $\hat{C}^2(G, \Gamma)$ des 2-*cochaînes généralisées* de G dans Γ et le Théorème 4-8 de [6] montre que les *orbites,* qui constituent l'ensemble $\bar{H}^2(G, \Gamma)$ des *"classes de cohomologie faible"* du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, sont exactement les *fibres :*

$$\hat{C}^2_\theta(G, \Gamma) = \chi^{-1}(\theta)$$

de l'application de projection surjective :

$$\chi : \hat{C}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma)$$

au dessus des *"caractères collectifs"* $\theta \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma)$.

Le Théorème 6-5 de [6] montre que le $\mathcal{M}$*-ensemble* $\hat{C}^2(G, \Gamma)$ des 2-*cochaînes généralisées de* G *dans* Γ, le $\mathcal{M}$ *-groupe* $Z^3(G, \Gamma)$ des 3-COCYCLES (CENTRAUX) de G dans Γ et le *troisième* $\mathcal{M}$*-groupe* $\hat{H}^3(G, \Gamma)$ de la COHOMOLOGIE CENTRALE de G dans Γ sont liés par un diagramme commutatif de la forme :

$$(3)\qquad \begin{tikzcd} & \hat{C}^2(G, \Gamma) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\chi"'] \arrow[dr, "\hat{T}"] & Z^3(G, \Gamma) \arrow[d, "(\hat{\ })"] \\ \bar{H}^2(G, \Gamma) \simeq & \mathcal{M}(G, \Gamma) \arrow[r, "\bar{T}"] & \hat{H}^3(G, \Gamma) \end{tikzcd}$$

dans lequel $(\hat{\ })$ est le *morphisme surjectif* de $\mathcal{M}$*-groupes abéliens* canonique et dans lequel les $\mathcal{M}$*-applications* T, $\hat{T}$ et $\bar{T}$ sont respectivement l'APPLICATION COCYCLE DE TEICHMÜLLER T, l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER $\hat{T}$ et l'APPLICATION OBSTRUCTION DE TEICHMÜLLER $\bar{T}$.

Par définition, l'ensemble $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$ des *"caractères collectifs"* REALISABLES du groupe G dans l'anneau-groupe Γ est l'*ensemble pointé* constitué par le NOYAU de l'APPLICATION OBSTRUCTION DE TEICHMÜLLER :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma) = \operatorname{Ker} \bar{T} = \bar{T}^{-1}[\ \hat{H}^3(G, \Gamma)'] = \bar{T}^{-1}[\ \{\hat{1}_\theta ;\quad \theta \in \mathcal{M}\}]$$

De même, l'espace $\widetilde{Z}^2(G, \Gamma)$ des 2-COCYCLES (GENERALISES) STRICTS de G dans Γ est constitué par le NOYAU de l'APPLICATION COCYCLE DE TEICHMÜLLER :

$$\widetilde{Z}^2(G, \Gamma) = \mathrm{Ker}\, T = T^{-1}[\, Z^3(G, \Gamma)'] = T^{-1}\, [\{1_\theta \; ; \quad \theta \in \mathcal{M}\}]$$

et le Théorème 7-4 de [4] montre qu'il est muni d'une structure de $\mathfrak{R}$ - *ensemble* caractérisée par une *partition* de la forme :

(4) $$\widetilde{Z}^2(G, \Gamma) = \coprod_{\theta \in \mathfrak{R}} \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma)$$

au moyen des espaces $\widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma)$ des θ-COCYCLES STRICTS de G dans Γ.

Le Lemme 8-2 de [6] établit que le groupe $\widetilde{C}^1(G, \Gamma)$ des 1-COCHAINES (GENERALISEES) STRICTES de G dans Γ opère à gauche par une *action* $\widetilde{*}$ sur l'espace $\widetilde{Z}^2(G, \Gamma)$ des 2-COCYCLES STRICTS de G dans Γ, ce qui détermine *l'ensemble quotient :*

(5) $$\widetilde{H}^2(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(G, \Gamma) \Big/^{\widetilde{(*)}} \widetilde{C}^1(G, \Gamma)$$

appelé le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE du *groupe* G dans *l'anneau-groupe* Γ, et le Théorème 8-6 de [6] montre qu'il est muni d'une structure de $\mathfrak{R}$ - *ensemble* caractérisée par une *partition* de la forme :

(6) $$\widetilde{H}^2(G, \Gamma) = \coprod_{\theta \in \mathfrak{R}} \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

dans laquelle, pour tout *"caractère collectif"* REALISABLE $\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$, le SECOND ESPACE DE θ-COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$

du groupe G dans l'anneau-groupe Γ est construit comme l'*ensemble quotient :*

(7) $$\widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) \Big/^{\widetilde{(*)}} \widetilde{C}^1(G, \Gamma)$$

de l'espace $\widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma)$ = Ker T_θ des θ-COCYCLES STRICTS de G dans Γ, par

l'action $\widetilde{*}$ du groupe $\widetilde{C}^1(G, \Gamma)$ des 1-COCHAINES STRICTES de G dans Γ.

Pour les raisons exposées dans [8], on a été amené à introduire la *notion nouvelle de* PSEUDO-MODULE, caractérisée par la Définition 3-1 de [8], dont on a donné de nombreux exemples et dont on rappelle la caractérisation.

DEFINITION 1-1 - *Un PSEUDO-MODULE* P *est un triplet :*

$$P = (G, \Gamma, \theta)$$

constitué par un groupe G, *un anneau-groupe* Γ *et un* "caractère collectif" *REALISABLE :*

$$\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$$

du groupe G *dans l'anneau-groupe* Γ.

EXEMPLES 1-2 - Une liste d'Exemples de PSEUDO-MODULES est donnée dans les Exemples 3-2 de [8].

Il en résulte en particulier que la notion de PSEUDO-MODULE généralise la notion classique de G-*module* dans *un cadre non nécessairement abélien* qui *englobe* en particulier à la fois le *"cas des groupes"* et le *"cas des anneaux"*.

NOTATIONS 1-3 -

Etant donné un PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ), dont l'anneau-groupe Γ = [V ; M] détermine l'anneau V = An(Γ), le groupe M = Gr(Γ) et le *centre groupe* X = Zg(Γ) = Gr(Γ) ∩ Z[An(Γ)], qui est un *groupe abélien* auquel est associé le G-*module* (G, X, θ) = X = X_θ constituant le MODULE CENTRAL associé au PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ), alors :

(a) Le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2(P)$ du PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ), *défini* par la condition :

$$\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) \tag{8}$$

coïncide avec le SECOND ESPACE DE θ-COHOMOLOGIE NON ABELIENNE du groupe G dans l'anneau-groupe Γ et d'après le Théorème 4-6 de [7] il est *identifiable* à l'espace $\mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$ des CLASSES DE θ-EXTENSIONS de l'anneau-groupe Γ par le groupe G.

(b) La COHOMOLOGIE CENTRALE $\hat{H}^*(P) = \{\hat{H}^n(P)\}$ du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, *définie* par la condition :

$$\hat{H}^*(P) = \hat{H}^*_\theta(G, X) = \{H^n_\theta(G, X)\} \tag{9}$$

coïncide avec la θ-COHOMOLOGIE CENTRALE du groupe G dans l'anneau-groupe Γ et avec la *cohomologie abélienne* ordinaire du G-MODULE CENTRAL $X = (G, X, \theta) = X_\theta$ associé au PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$.

REMARQUES 1-4 - Le Théorème 4-9 de [8] assure l'*existence* de la CATEGORIE $\mathfrak{P}$ DES PSEUDO-MODULES.

Il en résulte, d'après le Théorème 5-2 et le Théorème 6-4 de [8], que l'espace $\widetilde{H}^2(P)$ et les groupes $\hat{H}^n(P)$ *"dépendent fonctoriellement"* de P.

La terminologie, les notations et les propriétés qui viennent d'être rappelées, seront librement utilisées dans la suite.

2. LES DIVERSES COHOMOLOGIES.

Dans toute la suite, on considère des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \ ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, *arbitraires* mais *fixées.*

Ces DONNEES DE BASE déterminent *automatiquement* les éléments suivants.

Tout d'abord, le SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G détermine le GROUPE QUOTIENT G" = G/G', caractérisé par une suite exacte de la forme :

$$\{1\} \longrightarrow G' \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ p''\ } G'' \longrightarrow \{1\} \tag{10}$$

Ensuite, compte tenu du Lemme 2-1 de [8], la condition :

$$\theta' = i^*(\theta) = \theta \circ i \tag{11}$$

caractérise un *"caractère collectif"* REALISABLE :

$$\theta' \in \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}(G', \Gamma)$$

qui détermine le PSEUDO-MODULE :

$$P' = (G', \Gamma, \theta')$$

obtenu à partir du PSEUDO-MODULE :

$$P = (G, \Gamma, \theta)$$

par la *"restriction"* déterminée par le morphisme de groupes, injectif : $i \in Mor(G', G)$, de la suite exacte canonique (10).

Les PSEUDO-MODULES :

$$P = (G, \Gamma, \theta) \qquad \text{et} \qquad P' = (G', \Gamma, \theta')$$

déterminent donc, d'une part les SECONDS ESPACES DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) \quad \text{et} \quad \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma)$$

et d'autre part, pour chaque entier naturel $n \in \mathbb{N}$, les $n^{\text{ièmes}}$ GROUPES DE COHOMOLOGIE CENTRALE :

$$\hat{H}^n(P) = \hat{H}^n_\theta(G, \Gamma) = H^n_\theta(G, X) \quad \text{et} \quad \hat{H}^n(P') = \hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma) = H^n_{\theta'}(G', X)$$

Le premier phénomène fondamental réside en l'*existence* d'*actions naturelles* du groupe G sur l'*espace* $\widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)$ et sur les *groupes abéliens* $\hat{H}^n(P') = \hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma)$.

On commence d'abord par "relier" les PSEUDO-MODULES P et P'.

LEMME 2-1 - *Les DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \; ; G'\}$$

caractérisent de façon unique un MORPHISME DE PSEUDO-MODULES :

$$\Phi = (i, 1_\Gamma) : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma, \theta')$$

qui détermine alors :

(a) *Une APPLICATION DE RESTRICTION :*

$$\widetilde{r}_2 : \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P')$$

caractérisée par la condition :

(12) $$\widetilde{r}_2 = \widetilde{\Phi} = \widetilde{H}^2(\Phi)$$

(b) *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, un HOMOMORPHISME DE RESTRICTION :

$$\hat{r}_n : \hat{H}^n_\theta(G, \Gamma) = \hat{H}^n(P) \longrightarrow \hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma) = \hat{H}^n(P')$$

qui est un morphisme de groupes abéliens, *caractérisé par la condition :*

(13) $$\hat{r}_n = \hat{\Phi}^n = \hat{H}^n(\Phi)$$

PREUVE - Compte tenu de la Définition 4-8 de [8] qui caractérise les MORPHISMES DE PSEUDO-MODULES, le Lemme 4-1 de [9] donne une description précise du MORPHISME $\Phi : P \to P'$, ce qui prouve la première affirmation et le Lemme 4-2 de [9] achève la démonstration.

LEMME 2-2 - *Les DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

déterminent une application :

$$G \times \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P')$$

qui, à tout couple $(g, z) \in G \times \widetilde{Z}^2(P)$, *constitué par un élément* $g \in G$ *et par un COCYCLE (GENERALISE) STRICT :*

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha)\ ,\ m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, *associe l'AUTOMORPHISME :*

(14) $$\Psi_{g,z} = (\varphi_g, \eta_g) \in \mathrm{Aut}(P')$$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, *dans lequel l'automorphisme :* $\varphi_g \in \mathrm{Aut}(G')$, *est caractérisé par la condition :*

(15) $$\varphi_g(\sigma) = (g, \sigma) = g^{-1}\sigma g \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

PREUVE - Le Lemme 4-3 de [9] décrit la structure des automorphismes du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$ et le Lemme 4-4 de [9] achève la démonstration.

THEOREME 2-3 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $G'' = G/G'$, alors :

(a) *Il existe une* action *du groupe* G *sur le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :*

$$\widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma)$$

du PSEUDO-MODULE P' = (G', Γ, θ'), *caractérisée par le morphisme de groupes :*

$$\widetilde{\theta} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2(P')]$$

noté aussi plus simplement : $\widetilde{\theta} = \theta$, *et qui, à tout élément* $g \in G$, *associe l'automorphisme d'ensembles :*

$$\widetilde{\theta}(g) = \widetilde{g} \in \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2(P')]$$

caractérisé par la condition :

$$\widetilde{\theta}(g) = \widetilde{g} = \widetilde{H}^2(\Psi_{g,z})$$

pour un choix quelconque *du COCYCLE (GENERALISE) STRICT :* $z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2_{\theta}(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$, *ce qui détermine le* G-ensemble :

$$\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = (G, \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma), \theta)$$

(b) *Pour l'*action *du groupe* G, *le sous-espace des invariants :*

$$[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [\widetilde{H}^2(P')]^G$$

*contient l'*image *de l'APPLICATION DE RESTRICTION :*

$$\widetilde{r}_2 : \widetilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P')$$

qui induit *donc également une APPLICATION DE RESTRICTION :*

$$\widetilde{r}_2 : \widetilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [\widetilde{H}^2(P')]^G$$

(c) *Le sous-groupe distingué* G' *du groupe* G opère trivialement *sur le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :*

$$\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P') \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma)$$

du PSEUDO-MODULE P' = (G', Γ, θ'), *et par suite il en résulte une* action *du* groupe quotient G" = G/G', *caractérisée par un morphisme de groupes :*

$$\widetilde{\theta}\,'' : G'' \longrightarrow \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2(P')]$$

noté aussi plus simplement $\widetilde{\theta}\,'' = \theta''$, *ce qui détermine le* G"-ensemble :

$$\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = (G'', \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) , \theta'')$$

PREUVE - La partie (a) résulte de la partie (b) du Théorème 4-7 de [9] et les parties (b) et (c) résultent du Théorème 5-4 de [9], ce qui achève la démonstration.

THEOREME 2-4 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \; ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ) *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* P' = (G', Γ, θ') *et le GROUPE QUOTIENT* G" = G/G', *alors :*

(a) *Pour tout entier naturel* $m \in \mathbb{N}$, *il existe une* action *du groupe* G *sur le* $m^{\text{ième}}$ *GROUPE DE COHOMOLOGIE CENTRALE :*

$$\widehat{H}^m(P') = \widehat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma) = H^m_{\theta'}(G', X) = H^m(G', X_{\theta'})$$

du PSEUDO-MODULE P' = (G', Γ, θ'), *caractérisée par le morphisme de groupes :*

$$\theta_m : G \longrightarrow \mathrm{Aut}[\widehat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\widehat{H}^m(P')]$$

noté aussi plus simplement : $\theta_m = \theta$, *et qui, à tout élément* $g \in G$, *associe l'*automorphisme de groupes :

$$\theta_m(g) = \widehat{g}^m \in \mathrm{Aut}[\widehat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\widehat{H}^m(P')]$$

caractérisé par la condition :

$$\theta_m(g) = \widehat{g}^m = \widehat{H}^m(\Psi_{g,z})$$

pour un choix quelconque *du COCYCLE (GENERALISE) STRICT :* $z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$, *ce qui détermine le* G-module :

$$\hat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma) = (G, \hat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma), \theta)$$

(b) *Pour tout entier naturel* $m \in \mathbb{N}$, *l'action précédente du groupe* G *sur le* m ième *groupe de* cohomologie abélienne *ordinaire* $H^m(G', X_{\theta'})$ *du* G'-*MODULE CENTRAL :* $X' = (G', X, \theta') = X_{\theta'}$, *associé au PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$, coïncide *avec l'*action déterminée de façon classique *par le* sous-groupe distingué G' *du groupe* G *et par le* G-*MODULE CENTRAL :* $X = (G, X, \theta) = X_\theta$, *associé au PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$.

(c) *Pour tout entier naturel* $m \in \mathbb{N}$, *le sous-groupe distingué* G' *du groupe* G opère trivialement *sur le* m ième *GROUPE DE COHOMOLOGIE CENTRALE :*

$$\hat{H}^m(P') = \hat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma) = H^m_{\theta'}(G', X) = H^m(G', X_{\theta'})$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, *et par suite il en résulte une* action *du* groupe quotient $G'' = G/G'$, *caractérisée par un morphisme de groupes :*

$$\theta''_m : G'' \longrightarrow \mathrm{Aut}[\hat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\hat{H}^m(P')]$$

noté aussi plus simplement : $\theta''_m = \theta''$, *ce qui détermine le* G''-module :

$$\hat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma) = (G'', \hat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma), \theta'')$$

PREUVE - La partie (a) résulte de la partie (a) du Théorème 4-7 de [9].

Le Lemme 2-1 assure l'*existence* du MORPHISME DE PSEUDO-MODULES :

$$\Phi = (i, 1_\Gamma) : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma, \theta')$$

Le Théorème 6-2 de [8] assure l'*existence* du FONCTEUR MODULE CENTRAL c( ), dont l'application détermine donc les MODULES CENTRAUX associés :

$$X = (G, X, \theta) = X_\theta \qquad \text{et} \qquad X' = (G', X, \theta') = X_{\theta'}$$

et le *"morphisme de G-modules à groupe variable" :*

$$c(\Phi) = \underline{\Phi} = (i, 1_X) : X = (G, X, \theta) = X_\theta \longrightarrow X' = (G', X, \theta') = X_{\theta'}$$

dont l'*existence* est équivalente à la condition :

$$(16) \qquad X' = i^*(X)$$

qui exprime que le G'-*module* $X' = (G', X, \theta') = X_{\theta'}$ est obtenu à partir du G-*module* $X = (G, X, \theta) = X_\theta$ par *"restriction"* au sous-groupe distingué G' du groupe G.

Le Théorème 6-4 de [8] assure l'*existence* du FONCTEUR COHOMOLOGIE CENTRALE $\hat{H}^*(\ ) = \{\hat{H}^m(\ )\}$ et en considérant le FONCTEUR $H^*(\ ) = \{H^m(\ ,\ )\}$ associé de façon classique à la *cohomologie abélienne des groupes,* la Remarque 6-5 de [8] entraîne la relation :

$$(17) \qquad \hat{H}^*(\ ) = H^*(\ ) \circ c(\ )$$

Le Théorème 6-2 et le Lemme 4-7 de [8] montrent que par l'application du FONCTEUR MODULE CENTRAL c( ), l'AUTOMORPHISME DE PSEUDO-MODULES :

$$\Psi_{g,z} = (\varphi_g, \eta_g) \in \mathrm{Aut}(P')$$

détermine l'*automorphisme de* G'-*module :*

$$c(\Psi_{g,z}) = \underline{\Psi}_{g,z} = (\varphi_g, \theta_g) \in \mathrm{Aut}(X')$$

et la relation (17) entraîne alors les relations :

$$(18) \qquad \theta_m(g) = \hat{g}^m = \hat{H}^m(\Psi_{g,z}) = H^m(\underline{\Psi}_{g,z}) = (\varphi_g, \theta_g)^*_m$$

en utilisant les notations classiques du bas de la page 123 de [19].

La *caractérisation classique* des actions du groupe G sur les groupes $H^m(G', X_{\theta'})$, donnée au bas de la page 117 de [13], entraîne alors immédiatement la partie (b).

Pour tout élément $g = g' \in G'$, la structure du G'-*module* $X' = i^*(X)$ entraîne : $\theta_g = \theta'_{g'} = g'$, et les relations (18) montrent alors que l'*automorphisme :*

$$\theta_m(g') = \hat{g}'^m = H^m(\underline{\Psi}_{g',z}) = (\varphi_{g'}, \theta_{g'})^*_m = (\varphi_{g'}, g')^*_m$$

coïncide avec l'*opposé* de l'analogue des automorphismes σ_t définis à la page 124 de [19].

Comme la Proposition 3 page 124 de [19] entraîne : $\sigma_t = 1$, il en résulte :

$$\theta_m(g') = \hat{g}'^m = 1 \in \mathrm{Aut}[\hat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma)]$$

pour tout $g' \in G'$, ce qui prouve la première affirmation de la partie (c), relative à la trivialité de l'action du sous-groupe distingué G' du groupe G.

Il en résulte immédiatement la partie (c), ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 2-5 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$, *le GROUPE QUOTIENT* $G'' = G/G'$ *et les MODULES CENTRAUX :*

$$X = (G, X, \theta) = X_\theta \quad \textit{et} \quad X' = (G', X, \theta') = X_{\theta'}$$

alors :

(a) *Pour tout couple d'entiers naturels* $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, *il existe un* groupe de $n^{\text{ième}}$ cohomologie abélienne *ordinaire :*

$$H^n_{\theta''}(G'', \hat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma)) = H^n_{\theta''}(G'', H^m_{\theta'}(G', X)) = H^n(G'', H^m(G', X))$$

du G''-module $\hat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma)$, de $m^{\text{ième}}$ *COHOMOLOGIE CENTRALE du PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$.

(b) *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, *il existe un HOMOMORPHISME D'INFLATION :*

$$\hat{l}_n : H^n_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) \longrightarrow \hat{H}^n_\theta(G, \Gamma)$$

qui coïncide *avec l'homomorphisme classique d'INFLATION :*

$$l_n = \mathrm{Inf} : H^n(G/G', X^{G'}) \longrightarrow H^n(G, X)$$

associé au G-module $X = (G, X, \theta) = X_\theta$ *et au* sous-groupe distingué G' *du groupe* G.

PREUVE - Le Théorème 2-4 entraîne immédiatement la partie (a).

La Définition 5-2 de [6] entraîne les relations :

$$(17) \qquad \hat{H}^n_\theta(G, \Gamma) = H^n_\theta(G, X) = H^n(G, X_\theta) = H^n(G, X)$$

et la relation :

$$(18) \qquad \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma) = H^0_{\theta'}(G', X) = H^0(G', X_{\theta'}) = H^0(G', X) = X^{G'}$$

de sorte que le Théorème 2-4 implique les relations :

(19) $$H^n_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = H^n_{\theta''}(G'', H^0(G', X_{\theta'}) = H^n(G/G', X^{G'})$$

L'existence des homomorphismes classiques d'INFLATION :

$$l_n = \mathrm{Inf} : H^n(G/G', X^{G'}) \longrightarrow H^n(G, X)$$

associés au G-*module* X = (G, X, θ) et au *sous-groupe distingué* G' du groupe G, qui sont caractérisés par exemple à la page 124 de [19], entraîne immédiatement la partie (b), ce qui achève la démonstration.

3. LA PREMIERE TRANSGRESSION.

On considère toujours des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ) et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, qui déterminent le PSEUDO-MODULE P' = (G', Γ, θ') et le GROUPE QUOTIENT G" = G/G', caractérisé par la suite exacte :

(10) $$\{1\} \longrightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p''} G'' \longrightarrow \{1\}$$

qui permet d'interpréter le groupe G comme une *extension* du groupe G' par le groupe G".

NOTATIONS 3-1 - Dans toute la suite, pour pouvoir effectuer des *constructions techniques* , on considère une *"représentation"* (R) *fixée* du groupe G comme une *extension* du groupe G' par le groupe G", au moyen des données suivantes.

On choisit une 1-*cochaîne spéciale :*

$$\upsilon = (\upsilon(\lambda)) = (\upsilon_\lambda) \in C^1(G'', G)$$

qui constitue une *section* du morphisme de groupes p".

De façon générale, pour simplifier les notations, on adoptera la CONVENTION selon laquelle, pour tout $\lambda \in G''$, s'il n'y a pas de risque de confusion, l'élément $\upsilon(\lambda) \in G$, figurant par exemple en *indice,* pourra être remplacé par l'*indice* $\lambda \in G''$.

Par exemple, pour les automorphismes de groupes réciproques :

$$\varphi_g \in \mathrm{Aut}(G') \qquad \text{et} \qquad \psi_g \in \mathrm{Aut}(G')$$

caractérisés par les conditions :

(15) $$\varphi_g(\sigma) = (g, \sigma) = g^{-1}\sigma g \qquad \text{pour tout } \sigma \in G' ;$$

(15') $$\psi_g(\sigma) = \langle g, \sigma\rangle = g\,\sigma\,g^{-1} \qquad \text{pour tout } \sigma \in G' ;$$

pour tout $\lambda \in G''$, on utilisera les notations simplifiées :

$$\varphi_\lambda = \varphi_{\upsilon(\lambda)} \in \mathrm{Aut}(G') \qquad \text{et} \qquad \psi_\lambda = \psi_{\upsilon(\lambda)} \in \mathrm{Aut}(G')$$

caractérisées par les conditions :

(20) $(\lambda, \sigma) = \varphi_\lambda(\sigma) = (\upsilon(\lambda), \sigma) = \upsilon(\lambda)^{-1}\,\sigma\upsilon(\lambda)$ pour tout $\sigma \in G'$;

(21) $<\lambda, \sigma> = \psi_\lambda(\sigma) = <\upsilon(\lambda), \sigma> = \upsilon(\lambda)\,\sigma\upsilon(\lambda)^{-1}$ pour tout $\sigma \in G'$.

Il existe alors un *"système de facteurs"* constitué par une 2-*cochaîne spéciale :*

$$(\omega(\lambda, \mu)) = (\omega_{\lambda,\mu}) \in C^2(G", G')$$

qui est un 2-*cocycle,* c'est-à-dire qui vérifie la condition :

(22) $<\lambda, \omega(\mu, \nu)>\, \omega(\lambda, \mu\nu) = \omega(\lambda, \mu)\, \omega(\lambda\mu, \nu)$ pour tout $(\lambda, \mu, \nu) \in G"^3$,

de telle sorte que soient vérifiées les conditions :

(23) $\upsilon(\lambda)\, \upsilon(\mu) = \omega(\lambda, \mu)\, \upsilon(\lambda\mu)$ pour tout $(\lambda, \mu) \in G"^2$

(24) $\upsilon(\lambda)\, \sigma = <\lambda, \sigma>\, \upsilon(\lambda)$ pour tout $(\sigma, \lambda) \in G' \times G"$

Des éléments quelconques $\alpha \in G$ et $\beta \in G$ s'expriment alors de façon unique sous la forme :

(25) $\alpha = \sigma\, \upsilon(\lambda)$; $\beta = \tau\, \upsilon(\mu)$

pour des éléments : $\sigma \in G'$ et $\tau \in G'$, et des éléments :

$$p"(\alpha) = \bar{\alpha} = \lambda \in G" \quad ; \quad p"(\beta) = \bar{\beta} = \mu \in G"$$

de sorte que leur produit $\alpha\beta$ est donné, par la *table de multiplication* constituée par les conditions (23) et (24), sous la forme :

(26) $\alpha\beta = [\sigma\, \upsilon(\lambda)][\tau\, \upsilon(\mu)] = \sigma_1\, \upsilon(\lambda\mu)$, avec : $\sigma_1 = \sigma <\lambda, \tau>\, \omega(\lambda, \mu)$

Ces conditions caractérisent une REPRESENTATION (R) *fixée* du groupe G comme une *extension* du groupe G' par le groupe G".

Pour un COCYCLE (GENERALISE) STRICT ARBITRAIRE :

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, la CONVENTION adoptée détermine pour tout $\lambda \in G"$, l'automorphisme :

(27) $\eta_{\upsilon(\lambda)} = \eta_\lambda \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$

et par suite, le *couple* d'automorphismes :

$$(\eta_\lambda, \psi_\lambda) = (\eta_{\upsilon(\lambda)}, \psi_{\upsilon(\lambda)}) \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G')$$

qui détermine l'AUTOMORPHISME :

$$\Psi_{\lambda,z} = (\varphi_\lambda, \eta_\lambda) = (\varphi_{\upsilon(\lambda)}, \eta_{\upsilon(\lambda)}) = \Psi_{\upsilon(\lambda),z} \in \mathrm{Aut}(P')$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$ et l'*automorphisme :*

$$c(\Psi_{\lambda,z}) = \underline{\Psi}_{\lambda,z} = (\varphi_\lambda, \theta_\lambda) = (\varphi_{\upsilon(\lambda)}, \theta_{\upsilon(\lambda)}) = \underline{\Psi}_{\upsilon(\lambda),z} \in \mathrm{Aut}(X')$$

du G'-*module* $X' = (G', X, \theta') = X_{\theta'}$.

LEMME 3-2 - *Avec les DONNEES DE BASE précédentes, pour toute* classe :

$$\hat{f} \in \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = H^1_{\theta'}(G', X) = H^1(G', X)$$

déterminée par un θ'-1-*COCYCLE CENTRAL :*

$$f = (f_\sigma) \in Z^1_{\theta'}(G', \Gamma) = Z^1_{\theta'}(G', X) = Z^1(G', X)$$

du groupe G *dans l'anneau-groupe* Γ, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *La* classe $\hat{f}$ *est* invariante *par l'*action *du groupe* G, *c'est-à-dire :*

$$\hat{f} \in [\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

(b) *Il existe au moins une* 1-cochaîne spéciale :

$$a = (a_\alpha) \in C^1(G, X)$$

du groupe G *dans le* centre-groupe $X = Zg(\Gamma)$, *qui vérifie la condition :*

(28) $$\theta_\alpha[f_{(\alpha,\sigma)}] = f_\sigma\, \theta_\sigma(a_\alpha)\, a_\alpha^{-1} \quad \textit{pour tout } (\sigma, \alpha) \in G' \times G$$

(c) *Il existe au moins une* 1-cochaîne spéciale :

$$c = (c_\lambda) \in C^1(G'', X)$$

du groupe G" *dans le* centre-groupe $X = Zg(\Gamma)$, *qui vérifie la condition :*

(29) $$\theta_\lambda[f_{(\lambda,\sigma)}] = f_\sigma\, \theta_\sigma(c_\lambda)\, c_\lambda^{-1} \quad \textit{pour tout } (\sigma, \lambda) \in G' \times G''$$

(d) *Le* θ'-1-*COCYCLE CENTRAL :*

$$f = (f_\sigma) \in Z^1_{\theta'}(G', \Gamma) = Z^1_{\theta'}(G', X) = Z^1(G', X)$$

du groupe G' *dans l'anneau-groupe* Γ, *admet au moins un* prolongement *constitué par une* 1-cochaîne spéciale :

$$\bar{f} = (\bar{f}_\alpha) \in C^1(G, X)$$

du groupe G *dans le* centre-groupe $X = Zg(\Gamma)$, *pour laquelle il existe au moins un* θ''-2-*COCYCLE :*

$$h = (h_{\lambda,\mu}) \in Z^2_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

*dont l'*inflation :

$$l_2(h) = h^* = (h^*_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta(G, X^{G'}) \subset Z^2_\theta(G, X)$$

caractérisée par la condition :

(30) $$h^*_{\alpha,\beta} = h_{\lambda=\bar{\alpha},\, \mu=\bar{\beta}} \quad \textit{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

vérifie la condition :

(31) $$\delta^2_\theta(\bar{f}) = h^*$$

De plus, sous ces conditions équivalentes, il existe une classe :

$$\hat{h} \in H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = H^2(G'', X^{G'})$$

déterminée par h *et qui* ne dépend que de la classe $\hat{f}$ *de* f, *ce qui détermine une* application :

$$\hat{t}_2 : [\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G \longrightarrow H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G, \Gamma))$$

qui constitue un morphisme de groupes.

PREUVE - Tous les calculs sont effectués dans le *centre-groupe* X = Zg(Γ) de l'anneau-groupe Γ, qui est un *groupe abélien* noté *multiplicativement.*

L'Hypothèse générale :

$$f = (f_\sigma) \in Z^1_{\theta'}(G', \Gamma) = Z^1_{\theta'}(G', X) = Z^1(G', X)$$

se traduit par la condition :

$$\delta^2_{\theta'}(f) = 1$$

c'est-à-dire, compte tenu du fait que : $\theta'_\sigma = \theta_\sigma$ pour tout $\sigma \in G'$, par la condition :

(32) $$f_\sigma\, \theta_\sigma(f_\tau) = f_{\sigma\tau} \qquad \text{pour tout } (\sigma, \tau) \in G'^2$$

Pour tout $\alpha \in G$, le Théorème 2-4 montre que l'*automorphisme* :

$$\theta_1(\alpha) = \hat{\alpha}^1 \in \mathrm{Aut}[\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]$$

est caractérisé par la condition :

$$\hat{\alpha}^1(\hat{f}) = \hat{\underline{f}}$$

dans laquelle le θ'-1-COCYCLE CENTRAL :

$$\underline{f} = (\underline{f}_\sigma) = \underline{\Psi}^*{}_{\alpha,z}[f]$$

est défini par la condition :

(33) $$\underline{f}_\sigma = \theta_\alpha[f_{\alpha^{-1}\sigma\alpha}] = \theta_\alpha[f_{(\alpha,\sigma)}] \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

L'*invariance* de la classe $\hat{f}$ par l'élément $\alpha \in G$ signifie que f et $\underline{f}$ sont *cohomologues,* ce qui s'exprime par l'*existence d'au moins un élément* $a_\alpha \in X$ vérifiant la condition :

(34) $$\theta_\alpha[f_{(\alpha,\sigma)}] = \underline{f}_\sigma = f_\sigma\, \theta_\sigma(a_\alpha)\, a_\alpha^{-1} \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

Comme il est toujours possible de choisir : $a_1 = 1$, il en résulte l'équivalence des conditions (a) et (b).

La condition (32) entraîne la relation :

$$f_\tau\, \theta_\tau[f_{\tau^{-1}\sigma\tau}] = f_{\sigma\tau} = f_\sigma\, \theta_\sigma(f_\tau)$$

et par suite, pour tout $\tau \in G'$, il en résulte la condition :

(35) $$\theta_\tau[f_{(\tau,\sigma)}] = f_\sigma\, \theta_\sigma(f_\tau)\, f_\tau^{-1} \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

Le *"critère d'invariance"* précédent montre alors, en posant :

$a_\tau = f_\tau$, que la classe $\hat{f}$ est *toujours invariante* par *tout* élément du groupe G', et par suite la forme (25) : $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$, montre que la condition (a) est équivalente à l'*invariance* de la classe $\hat{f}$ par les éléments $\upsilon(\lambda) \in G$ pour tout $\lambda \in G''$, ce qui, en posant : $c_\lambda = a_{\upsilon(\lambda)}$, s'exprime par la condition (c).

Il en résulte l'équivalence des conditions (a), (b) et (c).

Sous l'hypothèse que la condition (c) est vérifiée, le θ'-1-COCYCLE CENTRAL $f = (f_\sigma)$ admet alors un *prolongement* constitué par la 1-*cochaîne spéciale :*

$$\overline{f} = (\overline{f}_\alpha) \in C^1(G, X)$$

caractérisée par la condition :

(36) $$\overline{f}_\alpha = f_\sigma\, \theta_\sigma(c_\lambda)$$

pour tout $\alpha \in G$, de la forme (25) : $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$.

D'une part, pour tout $\alpha \in G$ et tout $\tau \in G'$, les conditions (25) et (36) entraînent : $\tau\alpha = (\tau\sigma)\, \upsilon(\lambda)$, et par suite :

$$\overline{f}_{\tau\alpha} = f_{\tau\sigma}\, \theta_{\tau\sigma}(c_\lambda)$$

ce qui, compte tenu des conditions (32) et (36), entraîne successivement :

$$\overline{f}_{\tau\alpha} = f_\tau\, \theta_\tau\, (f_\sigma)\, \theta_{\tau\sigma}\, (c_\lambda)$$

$$= f_\tau\, \theta_\tau[f_\sigma\, \theta_\sigma(c_\lambda)] = f_\tau\, \theta_\tau(\overline{f}_\alpha)$$

c'est-à-dire la condition :

(37) $$\overline{f}_\tau\, \theta_\tau(\overline{f}_\alpha) = \overline{f}_{\tau\alpha} \qquad \text{pour tout } \tau \in G' \text{ et tout } \alpha \in G.$$

D'autre part, pour tout $\alpha \in G$ et tout $\rho \in G'$, en posant :

$\langle\lambda, \rho\rangle = \rho' \in G'$ ou $(\lambda, \rho') = \rho \in G'$, de telle sorte que la condition (29) de l'Hypothèse entraîne la relation :

$$\theta_\lambda(f_\rho) = \theta_\lambda[f_{(\lambda,\, \rho')}] = f_{\rho'}\, \theta_{\rho'}(c_\lambda)\, c_\lambda^{-1}$$

équivalente à la relation :

(38) $$f_{\rho'}\, \theta_{\rho'}\, (c_\lambda) = \theta_\lambda(f_\rho)\, c_\lambda$$

les conditions (25) et (36) entraînent :

$$\alpha\rho = \sigma\upsilon(\lambda)\rho = (\sigma\rho')\, \upsilon(\lambda)$$

et par suite :

$$\bar{f}_{\alpha\rho} = f_{\sigma\rho'}\, \theta_{\sigma\rho'}(c_\lambda)$$

ce qui, dans le *groupe abélien* $X = Zg(\Gamma)$, compte tenu de la condition (32), de la relation (38) et des conditions (25) et (36) entraîne successivement :

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\alpha\rho} &= f_\sigma\, \theta_\sigma\, (f_{\rho'})\, \theta_\sigma\, [\theta_{\rho'}\, (c_\lambda)] = f_\sigma\, \theta_\sigma\, [f_{\rho'}\, \theta_{\rho'}(c_\lambda)] \\ &= f_\sigma\, \theta_\sigma\, [\theta_\lambda(f_\rho)\, c_\lambda] = f_\sigma\, \theta_\alpha(f_\rho)\, \theta_\sigma(c_\lambda) \\ &= f_\sigma\, \theta_\sigma(c_\lambda)\, \theta_\alpha(f_\rho) = \bar{f}_\alpha\, \theta_\alpha(f_\rho) \end{aligned}$$

c'est-à-dire la condition :

(39) $$\bar{f}_\alpha\, \theta_\alpha(\bar{f}_\rho) = \bar{f}_{\alpha\rho} \qquad \text{pour tout } \rho \in G' \text{ et tout } \alpha \in G.$$

La condition :

(40) $$\delta^2_\theta(\bar{f}) = f'$$

définit alors un θ-2-COBORD CENTRAL :

$$f' = (f'_{\alpha,\beta}) \in B^2_\theta(G, \Gamma) = B^2_\theta(G, X) = B^2(G, X)$$

caractérisé par la condition :

(41) $$\bar{f}_\alpha\, \theta_\alpha(\bar{f}_\beta)\, \bar{f}^{-1}_{\alpha\beta} = f'_{\alpha,\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

équivalente à la condition :

(42) $$\bar{f}_\alpha\, \theta_\alpha(\bar{f}_\beta) = \bar{f}_{\alpha\beta}\, f'_{\alpha,\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

dans le *groupe abélien* $X = Zg(\Gamma)$.

Les conditions (37) et (39) entraînent alors les conditions :

(37') $$f'_{\tau,\alpha} = 1 \qquad \text{pour tout } \tau \in G' \text{ et tout } \alpha \in G$$

(39') $$f'_{\alpha,\rho} = 1 \qquad \text{pour tout } \rho \in G' \text{ et tout } \alpha \in G.$$

Ainsi, les conditions (37') et (39') montrent que le θ-2-COBORD CENTRAL :

$$f' = (f'_{\alpha,\beta}) \in B^2_\theta(G, \Gamma) = B^2_\theta(G, X) = B^2(G, X)$$

défini par la condition (40) vérifie la condition :

(43) $$f'_{\alpha,\beta} = 1 \text{ dès que } \alpha \in G' \textit{ ou } \beta \in G'$$

Comme il vérifie naturellement la condition :

(44) $$\theta_\alpha(f'_{\beta,\gamma})\, f'_{\alpha,\beta\gamma} = f'_{\alpha,\beta}\, f'_{\alpha\beta,\gamma} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta, \gamma) \in G^3,$$

en choisissant successivement :

$$\gamma = \rho \in G' \quad ; \quad \beta = \tau \in G' \quad ; \quad \alpha = \sigma \in G'$$

il en résulte les conditions :

(45) $$f'_{\alpha,\beta\rho} = f'_{\alpha,\beta} \qquad \text{pour tout } \rho \in G'$$

(46) $$f'_{\alpha,\tau\gamma} = f'_{\alpha\tau,\gamma} \qquad \text{pour tout } \tau \in G'$$

(47) $$\theta_\sigma(f'_{\beta,\gamma}) = f'_{\sigma\beta,\gamma} \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

Les conditions (45) et (46) montrent que $f'_{\alpha,\beta}$ *ne dépend que des classes* $\bar{\alpha} = \lambda \in G''$ et $\bar{\beta} = \mu \in G''$, ce qui prouve l'*existence d'une 2-cochaîne spéciale :*

$$h = (h_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', X)$$

caractérisée par la condition :

(48) $$f'_{\alpha,\beta} = h^*_{\alpha,\beta} = h_{\lambda=\bar{\alpha}\,,\,\mu=\bar{\beta}} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2.$$

De plus, la condition (47) entraîne alors :

$$\theta_\sigma(h_{\lambda,\mu}) = h_{\lambda,\mu}$$

pour tout $\sigma \in G'$, ce qui implique :

$$h_{\lambda,\mu} \in X^{G'} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

et entraîne en fait l'*existence* d'une 2-*cochaîne spéciale :*

$$h = (h_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', X^{G'})$$

pour laquelle la condition (44) s'exprime alors par la condition :

(49) $$\theta''_\lambda(h_{\mu,\nu})\, h_{\lambda,\mu\nu} = h_{\lambda,\mu}\, h_{\lambda\mu,\nu} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu, \nu) \in G''^3,$$

ce qui prouve enfin l'*existence* du θ''-2-COCYCLE :

$$h = (h_{\lambda,\mu}) \in Z^2_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

dont l'*inflation :*

$$l_2(h) = h^* = (h^*_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta(G, X^{G'}) \subset Z^2_\theta(G, X)$$

caractérisée par la condition (30), équivalente à la condition (48), vérifie donc la relation :

$$\delta^2_\theta(\bar{f}) = f' = h^*$$

c'est-à-dire la condition (31).

Il en résulte que la condition (c) implique la condition (d).

Réciproquement, lorsque la condition (d) est vérifiée, elle assure l'existence d'un prolongement $\bar{f} = (\bar{f}_\alpha)$ de $f = (f_\sigma)$, associé à un θ''-2-COCYCLE $h = (h_{\lambda,\mu})$ vérifiant les conditions (30) et (31).

Pour tout $\lambda \in G''$ et tout $\sigma \in G'$, la *condition de normalisation des* 2-*cochaînes spéciales* implique :

$$h^*_{\sigma,\upsilon(\lambda)} = h_{1,\lambda} = 1 \qquad \text{et} \qquad h^*_{\upsilon(\lambda)\,,\,(\lambda,\sigma)} = h_{\lambda\,,\,1} = 1$$

de sorte que la relation :

$$\alpha = \sigma\upsilon(\lambda) = \upsilon(\lambda)\,(\lambda, \sigma)$$

et la condition (31) entraînent alors les relations :

(50) $$f_\sigma\, \theta_\sigma\, (\overline{f}_{\upsilon(\lambda)}) = \overline{f}_\alpha$$

et

(51) $$\overline{f}_{\upsilon(\lambda)}\, \theta_\lambda[f_{(\lambda,\sigma)}] = \overline{f}_\alpha$$

En considérant la 1-*cochaîne spéciale :*

$$c = c(\lambda) \in C^1(G'', X)$$

définie par la condition :

(52) $$c_\lambda = \overline{f}_{\upsilon(\lambda)} \qquad \text{pour tout } \lambda \in G''$$

les relations (50) et (51) entraînent qu'elle vérifie la condition :

(29) $$\theta_\lambda[f_{(\lambda,\sigma)}] = f_\sigma\, \theta_\sigma(c_\lambda)\, c_\lambda^{-1} \qquad \text{pour tout } (\sigma, \lambda) \in G' \times G''$$

et la relation (50) entraîne *nécessairement* la condition :

(36) $$\overline{f}_\alpha = f_\sigma\, \theta_\sigma(c_\lambda)$$

pour tout $\alpha \in G$, de la forme (25) : $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$.

D'une part, ce résultat montre que la condition (d) implique la condition (c), ce qui achève la preuve de l'équivalence des conditions (a), (b), (c) et (d).

D'autre part, ce résultat montre que des *prolongements :*

$$\overline{f} = (\overline{f}_\alpha) \in C^1(G, X) \qquad \text{et} \qquad \overline{f}' = (\overline{f}'_\alpha) \in C^1(G, X)$$

de deux θ'-1-COCYCLES CENTRAUX :

$$f = (f_\sigma) \in Z^1_{\theta'}(G', \Gamma) \quad \text{et} \quad f' = (f'_\sigma) \in Z^1_{\theta'}(G', \Gamma)$$

vérifiant les conditions équivalentes (a), (b), (c) et (d), sont *nécessairement* caractérisés par les conditions :

(36) $$\overline{f}_\alpha = f_\sigma\, \theta_\sigma(c_\lambda) \qquad \text{et} \qquad (36') \quad \overline{f}'_\alpha = f'_\sigma\, \theta_\sigma(c'_\lambda)$$

pour tout $\alpha \in G$, de la forme (25) : $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$, au moyen de deux 1-*cochaînes spéciales :*

$$c = (c_\lambda) \in C^1(G'', X) \qquad \text{et} \qquad c' = (c'_\lambda) \in C^1(G'', X)$$

vérifiant la condition :

(29) $$\theta_\lambda[f_{(\lambda,\sigma)}] = f_\sigma\, \theta_\sigma(c_\lambda)\, c_\lambda^{-1} \qquad \text{pour tout } (\sigma, \lambda) \in G' \times G''$$

et la condition :

(29') $$\theta_\lambda[f'_{(\lambda,\sigma)}] = f'_\sigma\, \theta_\sigma(c'_\lambda)\, c'^{-1}_\lambda \qquad \text{pour tout } (\sigma, \lambda) \in G' \times G''$$

de sorte que les deux θ''-2-COCYCLES associés :

$$h = (h_{\lambda,\mu}) \in Z^2_{\theta''}(G'', X^{G'}) \quad \text{et} \quad h' = (h'_{\lambda,\mu}) \in Z^2_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

sont caractérisés par les conditions :

(53) $$\overline{f}_\alpha \, \theta_\alpha(\overline{f}_\beta) = \overline{f}_{\alpha\beta} \, h_{\lambda,\mu}$$

(53') $$\overline{f'}_\alpha \, \theta_\alpha(\overline{f'}_\beta) = \overline{f'}_{\alpha\beta} \, h'_{\lambda,\mu}$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$ tel que : $\overline{\alpha} = \lambda \in G''$ et $\overline{\beta} = \mu \in G''$.

On suppose maintenant que les deux θ'-1-COCYCLES CENTRAUX $f = (f_\sigma)$ et $f' = (f'_\sigma)$ déterminent *la même classe invariante :*

$$\hat{f} = \hat{f'} \in [\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

ce qui signifie qu'ils sont *cohomologues*, c'est-à-dire qu'il existe au moins un élément $x \in X = C^0(G', X)$, tel que :

$$f' = f \, . \, \delta^1_{\theta'}(x)$$

ce qui se traduit par la condition :

(54) $$f'_\sigma = f_\sigma \, \theta_\sigma(x) \, x^{-1} \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

Dans le *groupe abélien* $X = Zg(\Gamma)$, les conditions (54), (29) et (29') entraînent facilement la condition :

(55) $$\theta_\sigma[c_\lambda \, \theta_\lambda(x) x^{-1} \, c'^{-1}_\lambda] = c_\lambda \, \theta_\lambda(x) \, x^{-1} \, c'^{-1}_\lambda \quad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

de sorte que, pour tout $\lambda \in G''$, le second membre de cette relation est un élément du sous-groupe d'*invariants* $X^{G'}$, ce qui entraîne l'existence d'une 1-*cochaîne spéciale :*

$$y = (y_\lambda) \in C^1(G'', X^{G'})$$

vérifiant la condition :

(56) $$c'_\lambda = c_\lambda \, \theta_\lambda(x) \, x^{-1} \, y_\lambda \qquad \text{pour tout } \lambda \in G''$$

Dans la *groupe abélien* $X = Zg(\Gamma)$, les conditions (36'), (54), (56), (25) et (36) entraînent successivement :

$$\begin{aligned} \overline{f'}_\alpha &= f'_\sigma \, \theta_\sigma(c'_\lambda) = f_\sigma \, \theta_\sigma(x) \, x^{-1} \, \theta_\sigma[c_\lambda \, \theta_\lambda(x) \, x^{-1} \, y_\lambda] \\ &= f_\sigma \, \theta_\sigma(x) \, x^{-1} \, \theta_\sigma(c_\lambda) \, \theta_\alpha(x) \, \theta_\sigma(x^{-1}) \, \theta_\sigma(y_\lambda) \\ &= f_\sigma \, \theta_\sigma(c_\lambda) \, \theta_\alpha(x) \, x^{-1} \, \theta_\sigma(y_\lambda) \\ &= \overline{f}_\alpha \, \theta_\alpha(x) \, x^{-1} \, \theta_\sigma(y_\lambda) \end{aligned}$$

c'est-à-dire la condition :

(57) $$\overline{f}'_\alpha = \overline{f}_\alpha\, \theta_\alpha(x)\, x^{-1}\, \theta_\sigma(y_\lambda)$$ pour tout $\alpha \in G$, de la forme (25) $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$, et compte tenu du fait que la condition : $y_\lambda \in X^{G'}$, entraîne : $\theta_\sigma(y_\lambda) = y_\lambda$, il en résulte la condition :

(58) $$\overline{f}'_\alpha = \overline{f}_\alpha\, \theta_\alpha(x)\, x^{-1}\, y_\lambda$$ pour tout $\alpha \in G$, tel que : $\overline{\alpha} = \lambda \in G''$.

Dans le *groupe abélien* $X = Zg(\Gamma)$, les conditions (58), (53) et (53') entraînent facilement la condition :

$$h_{\lambda,\mu}\, y_\lambda\, \theta_\alpha(y_\mu) = h'_{\lambda,\mu}\, y_{\lambda\mu}$$

et comme la condition : $y_\mu \in X^{G'}$, entraîne : $\theta_\alpha(y_\mu) = \theta''_\lambda(y_\mu)$, il en résulte la condition :

(59) $$h'_{\lambda,\mu} = h_{\lambda,\mu}\, y_\lambda\, \theta''_\lambda(y_\mu)\, y^{-1}_{\lambda\mu}$$ pour tout $(\lambda, \mu) \in G''^2$

c'est-à-dire la condition :

(60) $$h' = h\, \delta^2_{\theta''}(y)$$

qui entraîne bien :

$$\hat{h} = \hat{h}' \in H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = H^2(G'', X^{G'})$$

ce qui prouve l'*existence* de l'*application :*

$$\hat{t}_2 : [\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G \longrightarrow H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$$

caractérisée, avec les notations précédentes, par la condition :

(61) $$\hat{t}_2[\hat{f}] = \hat{h}$$ pour tout $f \in [Z^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]}$

en considérant l'espace *noté symboliquement :*

$$[Z^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]} = \{f \in Z^1_{\theta'}(G', \Gamma) \mid \hat{f} \in [\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G\}$$

Enfin, les conditions (29), (36) et (53) entraînent facilement que l'*application* $\hat{t}_2$ constitue un *morphisme de groupes,* (notés multiplicativement), ce qui achève la démonstration.

DEFINITION 3-3 - *Pour les DONNEES DE BASE précédentes, la* "première transgression" *est constituée par l'HOMOMORPHISME DE TRANSGRESSION :*

$$\hat{t}_2 : [\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G \longrightarrow H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$$

caractérisé dans le Lemme 3-2.

COROLLAIRE 3-4 - *Pour les DONNEES DE BASE précédentes, il existe toujours une suite exacte de la forme :*

$$\hat{H}^1_{\theta}(G, \Gamma) \xrightarrow{\hat{r}_1} [\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G \xrightarrow{\hat{t}_2} H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_2} \hat{H}^2_{\theta}(G, \Gamma)$$

PREUVE - Le Lemme 3-2 montre que pour des cocycles :

$f = (f_\sigma) \in Z^1_{\theta'}(G', \Gamma) = Z^1(G', X)$ et $h = (h_{\lambda,\mu}) \in Z^2_{\theta''}(G'', X^{G'})$

la condition :

(61) $\hat{t}_2[\hat{f}] = \hat{h}$

équivaut à l'existence d'une 1-*cochaîne spéciale :*

$$\bar{f} \in C^1(G, X)$$

vérifiant les conditions :

(62) $f = r_1(\bar{f})$; (63) $h^* = l_2(h)$ et (64) $\delta^2_\theta(\bar{f}) = h^*$

ce qui entraîne aussi :

(65) $h^* \in B^2_\theta(G, X)$ et (66) $\hat{f} \in [\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$

Tout d'abord, lorsque $\hat{f}$ appartient à l'*image* de $\hat{r}_1$, il est possible de choisir $\bar{f} \in Z^1_\theta(G, X)$, ce qui entraîne : $h^* = 1$, et par suite : $h = 1$.

Il en résulte bien que l'*image* de $\hat{r}_1$ est contenue dans $[\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$ et que le composé $\hat{t}_2 \circ \hat{r}_1$ est le *morphisme neutre.*

De même, les conditions (63) et (65) montrent que le composé $\hat{l}_2 \circ \hat{t}_2$ est le *morphisme neutre.*

Lorsque : $\hat{t}_2[\hat{f}] = \hat{h} = 1$, il existe $y = (y_\lambda) \in C^1(G'', X^{G'})$ tel que : $h\, \delta^2_{\theta''}(y) = 1$, ce qui entraîne : $h^*\, \delta^2_\theta(y^*) = 1$, pour :

$$l_2(y) = y^* = (y^*_\alpha) \in C^1(G, X^{G'}) \subset C^1(G, X)$$

et la condition (64) entraîne alors : $\delta^2_\theta(\overline{f}y^*) = 1$, ce qui détermine :

$$\overline{f}y^* = \underline{f} = (\underline{f}_\alpha) \in Z^2_\theta(G, X)$$

pour lequel la condition de normalisation : $y^*_\sigma = y_1 = 1$ pour tout $\sigma \in G'$, entraîne :

$\underline{f}_\sigma = \overline{f}_\sigma = f_\sigma$ pour tout $\sigma \in G'$, c'est-à-dire : $f = r_1(\underline{f})$, qui entraîne : $\hat{f} = \hat{r}_1(\hat{\underline{f}})$.

Il en résulte que *le début* de la suite est exact.

De même, lorsque : $\hat{l}_2(\hat{h}) = 1$, ce qui se traduit par : $\hat{h}^* = 1$, il existe $\overline{f} = (\overline{f}_\alpha) \in C^1(G, X)$ tel que : $\delta^2_\theta(\overline{f}) = h^*$, ce qui se traduit par la condition (53), et

en posant : $r_1(\overline{f}) = f$ les conditions de normalisation : $h_{1,\mu} = h_{\lambda,1} = h_{1,1} = 1$, montrent immédiatement que $f \in Z^1_{\theta'}(G', X)$, ce qui entraîne : $\hat{h} = \hat{t}_2[\hat{f}]$.

Il en résulte que *la fin* de la suite est exacte, ce qui achève la démonstration.

THEOREME 3-5 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \,;\, G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $G'' = G/G'$, *avec les notations précédentes, il existe toujours une suite exacte de la forme :*

$$\{1\} \longrightarrow H^1_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_1} \hat{H}^1_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\hat{r}_1} [\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

$$\xrightarrow{\hat{t}_2} H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_2} \hat{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

dans laquelle $\hat{r}_1$ *est l'HOMOMORPHISME DE RESTRICTION, dans laquelle* $\hat{l}_1$ et $\hat{l}_2$ *sont les HOMOMORPHISMES D'INFLATION et dans laquelle* $\hat{t}_2$ *est l'HOMOMORPHISME DE TRANSGRESSION.*

PREUVE - Compte tenu du Lemme 2-1 et du Corollaire 2-5 qui montrent que le *début* de la suite coïncide avec la suite :

$$\{1\} \longrightarrow H^1(G/G', X^{G'}) \xrightarrow{l_1} H^1(G, X) \xrightarrow{r_1} H^1(G', X)$$

dont l'exactitude résulte de la Proposition 4 page 125 de [19], l'application du Corollaire 3-4 achève la démonstration.

REMARQUE 3-6 - Pour établir l'existence de la *suite exacte* du Théorème 3-5, la méthode utilisée donne une démonstration *directe* ou *"à la main"*, sans utilisation de suite spectrale.

4. LA SUITE EXACTE EN BASSE DIMENSION.

On se propose de généraliser la Propriété (A) de l'Introduction.

On considère toujours des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \; ; \; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, qui déterminent le PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$ et le GROUPE QUOTIENT $G" = G/G$.

On utilise également les notations de [6], [7] et [8].

LEMME 4-1 - *Avec les DONNEES DE BASE précédentes, alors :*

(a) *Le groupe* $Z^2_\theta(G, \Gamma) = Z^2_\theta(G, X)$ *des* θ*-2-COCYCLES CENTRAUX de* G *dans* Γ *opère à gauche sur l'espace* $\widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma)$ *des* θ*-COCYCLE STRICTS de* G *dans* Γ, *par l'*action :

$$Z^2_\theta(G, \Gamma) \times \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\ o\ } \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma)$$

caractérisée par la condition :

(67) $$b \circ (\eta, m) = (1, b) * (\eta, m)$$

(b) *Par passage aux quotients :*

$$\hat{H}^2_\theta(G,\Gamma) = Z^2_\theta(G,X)/B^2_\theta(G,X) \quad \text{et} \quad \tilde{H}^2_\theta(G,\Gamma) = \tilde{Z}^2_\theta(G,\Gamma)\Big/ \overset{(\tilde{*})}{\tilde{C}^1(G,\Gamma)}$$

*l'*action o *détermine l'*action :

$$\hat{H}^2_\theta(G,\Gamma) \times \tilde{H}^2_\theta(G,\Gamma) \xrightarrow{\tilde{o}} \tilde{H}^2_\theta(G,\Gamma)$$

qui fait opérer le groupe abélien $\hat{H}^2_\theta(G,\Gamma)$ librement *et* transitivement *sur le*

SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\tilde{H}^2_\theta(G,\Gamma) = \tilde{H}^2(P)$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, *ce qui signifie que l'espace* $\tilde{H}^2_\theta(G,\Gamma) = \tilde{H}^2(P)$ *est un* $\hat{H}^2_\theta(G,\Gamma)$-ensemble homogène principal.

(c) *Par composition avec l'HOMOMORPHISME D'INFLATION* $\hat{l}_2$, *l'*action $\tilde{o}$ *détermine une* action :

$$\tilde{l}_2 = (\tilde{o}) \circ \hat{l}_2 \tag{68}$$

du groupe abélien $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma))$ *sur l'espace* $\tilde{H}^2_\theta(G,\Gamma) = \tilde{H}^2(P)$, *qui est réalisée par un* "opérateur" *désigné également par la notation :*

$$\tilde{l}_2 : H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \longrightarrow \tilde{H}^2_\theta(G,\Gamma)$$

PREUVE - Le Lemme 8-5 de [6] entraîne les parties (a) et (b).

La partie (c) en résulte immédiatement, ce qui achève la démonstration.

DEFINITION 4-2 - *Les DONNEES DE BASE précédentes déterminent l'OPERATEUR D'INFLATION :*

$$\tilde{l}_2 : H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \longrightarrow \tilde{H}^2_\theta(G,\Gamma)$$

*qui réalise l'*action $\tilde{l}_2 = (\tilde{o}) \circ \hat{l}_2$ *caractérisée dans le Lemme 4-1.*

THEOREME 4-3 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta)\ ;\ G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ) *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* P' = (G', Γ, θ') *et le GROUPE QUOTIENT* G" = G/G', *avec les notations précédentes, en basse dimension, il existe* toujours *une* "suite exacte" *de la forme :*

$$\{1\} \longrightarrow H^1_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_1} \hat{H}^1_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\hat{r}_1} [\hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

$$\xrightarrow{\hat{t}_2} H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\tilde{l}_2} \tilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

en ce sens que l'HOMOMORPHISME D'INFLATION $\hat{l}_1$, *l'HOMOMORPHISME DE RESTRICTION* $\hat{r}_1$ *et l'HOMOMORPHISME DE TRANSGRESSION* $\hat{t}_2$ *caractérisent* une suite exacte de groupes abéliens, *et que l'OPERATEUR D'INFLATION* $\tilde{l}_2$ *fait agir le groupe abélien* $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$ *sur le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :*

$$\tilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \tilde{H}^2(P)$$

du PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ), *de telle sorte que le groupe d'isotropie de chacun de ses éléments est le sous-groupe du groupe abélien* $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$ *constitué par l'*image *de l'HOMOMORPHISME DE TRANSGRESSION* $\hat{t}_2$.

PREUVE - Puisque le Lemme 4-1 montre que par l'*action* $\tilde{o}$, le groupe abélien $\hat{H}^2_\theta(G, \Gamma)$ opère *librement* sur l'espace $\tilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$, la Définition 4-2 entraîne que pour l'OPERATEUR D'INFLATION $\widetilde{l}_2$, le *groupe d'isotropie* de chaque élément de l'espace $\widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$ coïncide avec le *noyau* Ker $\hat{l}_2$ de l'HOMOMORPHISME D'INFLATION $\hat{l}_2$.

Il en résulte que l'existence de la *suite exacte de groupes* du Théorème 3-5 achève la démonstration.

5. L'APPLICATION DE RESTRICTION.

Dans la prespective de la généralisation de la Propriété (B) de l'Introduction, on considère toujours des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \; ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ) et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, qui déterminent le PSEUDO-MODULE P' = (G', Γ, θ') et le GROUPE QUOTIENT Q = G" = G/G'.

Le Théorème 2-3 entraîne l'*existence* de l'APPLICATION DE RESTRICTION :

$$\widetilde{r}_2 : \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [\widetilde{H}^2(P')]^G$$

entre les SECONDS ESPACES DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE des PSEUDO-MODULES P = (G, Γ, θ) et P' = (G', Γ', θ').

Il se pose alors la question naturelle de savoir si la *"suite exacte"* du Théorème 4-3 peut *"être prolongée"* par l'*application* $\widetilde{r}_2$.

Des éléments de réponse à cette question sont fournis par les propriétés suivantes.

LEMME 5-1 - *Avec les DONNEES DE BASE précédentes, dans la suite :*

$$H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) \xrightarrow{\widetilde{l}_2} \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\widetilde{r}_2} [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

le "composé" $\widetilde{r}_2 \cdot \widetilde{l}_2$ *de l'APPLICATION DE RESTRICTION* $\widetilde{r}_2$ *et de l'OPERATEUR D'INFLATION* $\widetilde{l}_2$ *est* "neutre", *en ce sens que sur l'espace* $\widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$, *la relation d'équivalence canonique* R_2 *associée à l'*application $\widetilde{r}_2$ *est* moins fine *que la relation d'équivalence* R_1 *dont les classes d'équivalence sont les* orbites *pour l'*action *du groupe* $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma))$ *réalisée par l'*opérateur $\widetilde{l}_2$.

PREUVE - Pour toute *classe* $\xi = \widetilde{z} \in \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$, déterminée par un θ-COCYCLE GENERALISE STRICT :

$$z = (\eta , m) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

et pour toute *classe :*

$$\hat{h} \in H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) = H^2(G'', X^{G'})$$

déterminée par un θ''-2-cocycle :

$$h = (h_{\lambda,\mu}) \in Z^2_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

qui engendre par *inflation* la classe :

$$\hat{l}_2(\hat{h}) = \hat{h}^* \in \hat{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

déterminée par le θ-2-cocycle :

$$l_2(h) = h^* = (h^*_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta(G, X^{G'}) \subset Z^2_\theta(G, X) = Z^2_\theta(G, \Gamma)$$

le Lemme 4-1 montre que la *classe :*

$$\widetilde{l}_2(\hat{h})\,[\xi] = \xi' \in \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

transformée de la *classe* $\xi = \widetilde{z}$ par l'automorphisme $\widetilde{l}_2(\hat{h})$ est la *classe* $\xi' = \widetilde{z}'$ déterminée par le θ-COCYCLE GENERALISE STRICT :

$$z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

caractérisé par la condition :

$$z' = h^* \circ z = (1, h^*) * (\eta, m)$$

Par *restriction,* cette condition entraîne :

$$r_2(z') = r_2(h^*) \circ' r_2(z)$$

et puisque : $r_2(h^*) = r_2[l_2(h)] = 1$, il en résulte la condition :

$$r_2(z') = r_2(z)$$

qui entraîne la relation :

$$\widetilde{r}_2(\xi') = \widetilde{r}_2(\xi)$$

Il en résulte bien que la relation d'équivalence R_2 est *moins fine* que la relation d'équivalence R_1, ce qui achève la démonstration.

REMARQUES 5-2 -

(a) Avec les notations précédentes, il est possible d'exprimer une *condition nécessaire et suffisante* pour que *"la suite"* du Lemme 5-1 soit une *"suite exacte"* en $\widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$, c'est-à-dire pour que les relations d'équivalences R_1 et R_2 *coïncident.*

Malheureusement, cette condition nécessaire et suffisante *n'est pas simple.*

Comme dans le cas classique de la *cohomologie abélienne des groupes,* on se propose de mettre en évidence une CONDITION SUFFISANTE *simple* et *maniable.*

(b) Cette CONDITION SUFFISANTE a été utilisée dans l'étude [9] des EXTENSIONS Q-NORMALES qui généralisent les *algèbres* Q-*normales* de S. EILENBERG et S. Mac LANE.

(c) Comme cette CONDITION SUFFISANTE constitue la généralisation d'une condition qui résulte du THEOREME DE A. SPEISER [20] dans le cas de la *cohomologie galoisienne*, dans la Définition 7-1 de [9] on a proposé la terminologie suivante.

DEFINITION 5-3 - *Pour des DONNES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \ ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $Q = G'' = G/G'$, *la CONDITION DE SPEISER est la condition :*

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \{1\}$$

qui exprime la trivialité *du premier groupe de COHOMOLOGIE CENTRALE :*

$$\hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = H^1_{\theta'}(G', X) = H^1(G', X)$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$.

LEMME 5-4 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \ ; G'\}$$

qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \{1\}$$

il existe une "suite exacte" *de la forme :*

$$\{1\} \longrightarrow H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\tilde{l}_2} \tilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma) \xrightarrow{\tilde{r}_2} [\tilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

en ce sens que :

(a) *Pour l'*action *réalisée par l'OPERATEUR D'INFLATION* $\tilde{l}_2$, *le groupe abélien* $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma))$ opère librement *sur l'espace* $\tilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma)$.

(b) *Sur l'espace* $\tilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma)$ *la relation d'équivalence canonique* R_2 *associée à l'APPLICATION DE RESTRICTION* $\tilde{r}_2$ coïncide *avec la relation d'équivalence* R_1 *dont les classes d'équivalence sont les* orbites *pour l'*action *du groupe* $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma))$ *réalisée par l'OPERATEUR D'INFLATION* $\tilde{l}_2$, *ce qui signifie également que l'*image *de l'*application $\tilde{r}_2$ coïncide *avec l'*ensemble quotient *de l'espace* $\widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$ *par l*'action *du groupe* $H^2_{\theta''}(G'', \quad \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma))$

réalisée par l'opérateur $\widetilde{l}_2$.

PREUVE - Le Théorème 4-3 montre que la CONDITION DE SPEISER :

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\}$$

entraîne l'*exactitude* de la suite :

$$\{1\} \xrightarrow{\hat{t}_2} H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\widetilde{l}_2} \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

ce qui prouve la partie (a).

Compte tenu du Lemme 5-1, pour achever la démonstration, il suffit de montrer que la relation d'équivalence R_2 est *plus fine* que relation d'équivalence R_1.

Le Lemme 4-1 montre que deux *classes* quelconques :

$$\xi = \widetilde{z} \in \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \qquad \text{et} \qquad \xi' = \widetilde{z}' \in \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

peuvent être déterminées par des θ-COCYCLES GENERALISES STRICTS :

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

et

$$z' = (\eta', m') = (\eta' = (\eta'_\alpha), m' = (m'_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

pour lesquels il existe un θ-COCYCLE CENTRAL :

$$b = (b_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta(G, \Gamma) = Z^2_\theta(G, X)$$

caractérisé par la condition :

(69) $\qquad \theta_\alpha(b_{\beta,\gamma})\, b_{\alpha,\beta\gamma} = b_{\alpha,\beta}\, b_{\alpha\beta,\gamma} \qquad$ pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$

et vérifiant la condition :

(70) $\qquad z' = (\eta', m') = (1, b) * (\eta, m) = b \circ (\eta, m) = b \circ z$

qui, d'après le Lemme 4-5 de [6], équivaut à l'*ensemble* des deux conditions :

(70') $\qquad \eta'_\alpha = \eta_\alpha \qquad$ pour tout $\alpha \in G$

(70") $$m'_{\alpha,\beta} = m_{\alpha,\beta}\, b_{\alpha,\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$
ce qui s'exprime également par la condition :

(71) $$\xi' = \hat{b} \,\tilde{\circ}\, \xi$$

On suppose maintenant que ξ et ξ' vérifient l'*Hypothèse :*

(72) $$\xi \equiv \xi' \pmod{R_2}$$
qui s'exprime par la condition :

(73) $$\tilde{r}_2(\xi) = \tilde{r}_2(\xi')$$
ce qui signifie que les θ'-COCYCLES GENERALISES STRICTS :

$$r_2(z) = z_2 = ((\eta_\sigma), (m_{\sigma,\tau})) \in \tilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \tilde{Z}^2(P')$$

et

$$r_2(z') = z'_2 = ((\eta'_\sigma), (m'_{\sigma,\tau})) \in \tilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \tilde{Z}^2(P')$$

sont *"strictement cohomologues"*, c'est-à-dire, d'après la Définition 8-3 de [6], qu'il existe au moins une 1-COCHAINE STRICTE :

$$a' = (a'_\sigma) = (a', 1) \in \tilde{C}^1(G', \Gamma) = C^1(G', M) \times \{1\}$$

vérifiant la condition :

(74) $$z'_2 = a' \,\tilde{*}'\, z_2 = (a', 1) *' z_2$$
qui, compte tenu des conditions (70') et (70"), equivaut à l'*ensemble des deux conditions :*

(74') $$\eta_\sigma = \langle a'_\sigma \rangle\, \eta_\sigma \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

(74") $$m_{\sigma,\tau}\, b_{\sigma,\tau} = a'_\sigma\, \eta_\sigma(a'_\tau)\, m_{\sigma,\tau}\, a'^{-1}_{\sigma\tau} \qquad \text{pour tout } (\sigma, \tau) \in G'^2.$$

Dans le groupe d'automorphismes Aut(Γ), la condition (74') équivaut à la condition : $\langle a'_\sigma \rangle = 1 \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ pour tout $\sigma \in G'$, et compte tenu du diagramme commutatif et exact canonique (1), elle équivaut aussi à la condition : $a'_\sigma \in X = Zg(\Gamma)$ pour tout $\sigma \in G'$, qui exprime que la 1-COCHAINE STRICTE $a' = (a'_\sigma) \in C^1(G', M)$ est en fait une 1-*cochaîne spéciale :*

$$a' = (a'_\sigma) \in C^1(G', X)$$

du groupe G' dans le *groupe abélien* $X = Zg(\Gamma)$ contenu dans le *centre* Z(M) du groupe M.

Ce résultat entraîne que les éléments :

$$a'_\sigma \quad , \quad a'^{-1}_{\sigma\tau} \quad \text{et} \quad \eta_\sigma(a'_\tau) = \theta_\sigma(a'_\tau) = \theta'_\sigma(a'_\tau)$$

appartiennent au *centre* Z(M) du groupe M, de sorte qu'après modification de l'ordre des termes et *simplification* par l'élément $m_{\sigma,\tau}$, dans le *groupe* M, la condition (74") se transforme en la condition :

(75) $$b_{\sigma,\tau} = a'_\sigma \, \theta'_\sigma(a'_\tau) \, a'^{-1}_{\sigma\tau} \qquad \text{pour tout } (\sigma, \tau) \in G'^2$$

équivalente à la condition :

(76) $$r_2(b) = \delta^2_{\theta'}(a')$$

qui exprime donc l'*Hypothèse* (72).

De plus, avec les notations utilisées dans la démonstration du Lemme 5-1, pour achever la démonstration il suffit de montrer que l'*Hypothèse* précédente implique la *Conclusion :*

(77) $$\xi \equiv \xi' \pmod{R_1}$$

qui s'exprime par l'*existence* d'un θ"-2-cocycle :

$$h = (h_{\lambda,\mu}) \in Z^2_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

vérifiant les conditions équivalentes :

(78) $$z' = h^* \circ z = (1, h^*) * (\eta, m)$$

et

(79) $$\xi' = \hat{h}^* \,\tilde{\circ}\, \xi$$

La comparaison des conditions (71) et (79) montre alors que pour achever la démonstration, il *suffit* de montrer que l'*Hypothèse* (72), équivalente aux conditions (75) et (76), entraîne l'*existence* d'un θ"-2-cocycle :

$$h = (h_{\lambda,\mu}) \in Z^2_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

vérifiant la condition :

(80) $$\hat{b} = \hat{h}^*$$

Dans ce but, il est possible d'*adapter* l'un des arguments utilisés par G. HOCHSCHILD dans la démonstration du Théorème 1-2 de [11].

En utilisant les Notations 3-1, on exploite la REPRESENTATION (R) du groupe G comme une *extension* du groupe G' par le groupe G", de sorte que tout élément $\alpha \in G$ s'exprime alors de façon unique sous la forme :

(25') $$\alpha = \upsilon(\lambda)\sigma$$

pour des éléments $\sigma \in G'$ et $p''(\alpha) = \bar{\alpha} = \lambda \in G''$.

De plus, pour simplifier les notations, et pour un élément $\alpha \in G$ de cette forme (25'), on posera :

(81) $$\upsilon(\lambda) = g$$

Avec cette *convention,* la 1-*cochaîne spéciale :*

$$a' = (a'_\sigma) \in C^1(G', X)$$

vérifiant la condition (76), admet alors un *prolongement* constitué par la 1-*cochaîne spéciale :*

$$a = (a_\alpha) \in C^1(G, X)$$

définie par la condition :

(82) $$a_\alpha = \theta_g(a'_\sigma)\, b^{-1}_{g,\sigma}$$

pour tout $\alpha \in G$, de la forme (25').

Il en résulte un θ-COCYCLE CENTRAL :

$$b' = (b'_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta(G, \Gamma) = Z^2_\theta(G, X)$$

défini par la condition :

(83) $$b' = b\, \delta^2_\theta(a^{-1})$$

équivalente à la condition :

(84) $$b'_{\alpha,\beta}\, a_\alpha\, \theta_\alpha(a_\beta) = a_{\alpha\beta}\, b_{\alpha,\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha\,,\, \beta) \in G^2$$

En particulier, la condition (82) entraîne la condition :

(85) $$a_{\alpha\rho} = \theta_g(a'_{\sigma\rho})\, b^{-1}_{g,\sigma\rho} \qquad \text{pour tout } \rho \in G'$$

puisque : $\alpha\rho = \upsilon(\lambda)\,(\sigma\rho) = g(\sigma\rho)$.

Comme la condition (84) entraîne la relation :

$$b'_{\alpha,\rho}\, a_\alpha\, \theta_\alpha(a_\rho) = a_{\alpha\rho}\, b_{\alpha,\rho}$$

les conditions (82) et (85) entraînent la relation :

$$b'_{\alpha,\rho}\, \theta_g(a'_\sigma)\, b^{-1}_{g,\sigma}\, \theta_\alpha(a'_\rho) = \theta_g(a'_{\sigma\rho})\, b^{-1}_{g,\sigma\rho}\, b_{\alpha,\rho}$$

c'est-à-dire la relation :

$$b'_{\alpha,\rho}\, \theta_g[a'_\sigma\, \theta_\sigma(a'_\rho)\, a'^{-1}_{\sigma\rho}] = b_{g,\sigma}\, b_{g\sigma,\rho}\, b^{-1}_{g,\sigma\rho}$$

qui, compte tenu de la condition (75), implique la relation :

$$b'_{\alpha,\rho}\, \theta_g[b_{\sigma,\rho}] = b_{g,\sigma}\, b_{g\sigma,\rho}\, b^{-1}_{g,\sigma\rho}$$

pour laquelle la condition (69), appliquée au triplet (g, σ, ρ), donne :

$$\theta_g[b_{\sigma,\rho}] = b_{g,\sigma}\, b_{g\sigma,\rho}\, b^{-1}_{g,\sigma\rho}$$

ce qui implique la condition :

(86) $$b'_{\alpha,\rho} = 1 \qquad \text{pour tout } \alpha \in G \text{ et tout } \rho \in G'$$

De même, compte tenu de cette condition (86), la condition (69) appliquée au triplet (α, β, ρ), entraîne la condition :

(87) $$b'_{\alpha,\beta\rho} = b'_{\alpha,\beta} \quad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2 \text{ et tout } \rho \in G'$$

ce qui montre que $b'_{\alpha,\beta}$ *ne dépend que* de $\alpha \in G$ et de la *classe* $\overline{\beta} = \mu \in G''$.

Pour tout $\beta \in G$, en considérant la 1-*cochaîne spéciale :*

$$\underline{b}_\beta = (b'_{\sigma,\beta}) \in C^1(G', X)$$

compte tenu de la condition (69) appliquée à $b' = (b'_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta(G, X)$ et au triplet $(\sigma, \tau, \beta) \in G'^2 \times G$, ce qui donne :

$$\theta'_\sigma(b'_{\tau,\beta})\ b'^{-1}_{\sigma\tau,\beta} = b'^{-1}_{\sigma,\tau\beta}\ b'_{\sigma,\tau}$$

et compte tenu des relations :

$$\overline{\beta} = \overline{\tau\beta} = \mu \in G'' \qquad \text{et} \qquad \overline{\sigma} = \overline{\tau} = 1 \in G''$$

il en résulte les relations :

$$\begin{aligned} \left[\delta^2_{\theta'}(\underline{b}_\beta)\right] &= b'_{\sigma,\beta}\ \theta'_\sigma(b'_{\tau,\beta})\ b'^{-1}_{\sigma\rho,\beta} \\ &= b'_{\sigma,\beta}\ b'^{-1}_{\sigma,\tau\beta}\ b'_{\sigma,\tau} \\ &= b'_{\sigma,\beta}\ b'^{-1}_{\sigma,\beta}\ b'_{\sigma,\tau} = b'_{\sigma,\tau} = 1 \end{aligned}$$

pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$, c'est-à-dire la condition :

(89) $$\delta^2_{\theta'}(\underline{b}_\beta) = 1 \qquad \text{pour tout } \beta \in G$$

équivalente à la condition :

(89) $$\underline{b}_\beta \in Z^1_{\theta'}(G', X) \qquad \text{pour tout } \beta \in G$$

La CONDITION DE SPEISER :

(S) $$\hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = H^1_{\theta'}(G', X) = \{1\}$$

entraîne alors l'existence d'une 1-*cochaîne spéciale :*

$$c = (c_\beta) \in C^1(G, X)$$

vérifiant la condition :

(90) $$\underline{b}_\beta = \delta^1_{\theta'}(c_\beta) \qquad \text{pour tout } \beta \in G$$

équivalente à la condition :

(91) $$b'_{\sigma,\beta} = \theta'_\sigma(c_\beta)\ c^{-1}_\beta \qquad \text{pour tout } \beta \in G \text{ et tout } \sigma \in G'.$$

De plus, puisque $\underline{b}_\beta$ ne dépend que de la *classe* $\overline{\beta} = \mu \in G''$, il est possible de choisir $c = (c_\beta)$ de telle sorte que c_β *ne dépend que de la classe* $\overline{\beta} = \mu \in G''$.

Il en résulte un θ-COCYCLE CENTRAL :

$$b'' = (b''_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta(G, \Gamma) = Z^2_\theta(G, X)$$

défini par la condition :

(92) $$b'' = b' \, \delta^2_\theta(c^{-1})$$

équivalente à la condition :

(93) $$b''_{\alpha,\beta} \, c_\alpha \, \theta_\alpha(c_\beta) = c_{\alpha\beta} \, b'_{\alpha,\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

Tout d'abord, les propriétés de $b'_{\alpha,\beta}$ et de c_β entraînent que $b''_{\alpha,\beta}$ *ne dépend que* de $\alpha \in G$ et de la *classe* $\bar{\beta} = \mu \in G''$.

Ensuite, pour tout $\rho \in G'$, la condition (93) donne la relation :

$$b''_{\alpha\rho,\beta} \, c_{\alpha\rho} \, \theta_{\alpha\rho}(c_\beta) = c_{\alpha\rho\beta} \, b'_{\alpha\rho,\beta}$$

et puisque les relations : $\overline{\alpha\rho} = \bar{\alpha}$ et $\overline{\alpha\rho\beta} = \overline{\alpha\beta}$, entraînent les relations : $c_{\alpha\rho} = c_\alpha$ et $c_{\alpha\rho\beta} = c_{\alpha\beta}$, il en résulte la relation :

$$b''_{\alpha\rho,\beta} \, c_\alpha \, \theta_\alpha[\theta_\rho(c_\beta)] = c_{\alpha\beta} \, b'_{\alpha\rho,\beta}$$

pour laquelle les conditions (91) et (93) entraînent la relation :

$$b''_{\alpha,\beta} = b''_{\alpha\rho,\beta}\left[b'_{\alpha,\beta} \, \theta_\alpha(b'_{\rho,\beta}) \, b'^{-1}_{\alpha\rho,\beta}\right]$$

et la condition (69) appliquée à $b' = (b'_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta(G, X)$ et au triplet $(\alpha, \rho, \beta) \in G \times G' \times G$, donne :

$$\theta_\alpha(b'_{\rho,\beta}) \, b'^{-1}_{\alpha\rho,\beta} = b'^{-1}_{\alpha,\rho\beta} \, b'_{\alpha,\rho}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} b''_{\alpha,\beta} &= b''_{\alpha\rho,\beta}\left[b'_{\alpha,\beta} \, b'^{-1}_{\alpha,\rho\beta} \, b'_{\alpha,\rho}\right] \\ &= b''_{\alpha\rho,\beta}\left[b'_{\alpha,\beta} \, b'^{-1}_{\alpha,\beta} \, b'_{\alpha,\rho}\right] = b''_{\alpha\rho,\beta} \, b'_{\alpha,\rho} = b''_{\alpha\rho,\beta} \end{aligned}$$

c'est-à-dire la condition :

(94) $$b''_{\alpha,\beta} = b''_{\alpha\rho,\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2 \text{ et tout } \rho \in G'$$

qui entraîne que $b''_{\alpha,\beta}$ *ne dépend que* de la *classe* $\bar{\alpha} = \lambda \in G''$ et de la *classe* $\bar{\beta} = \mu \in G''$.

Enfin, la condition (69) appliquée à $b'' = (b''_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta(G, X)$ et au triplet $(\sigma, \alpha, \beta) \in G' \times G^2$, donne la condition :

(95) $$\theta'_\sigma(b''_{\alpha,\beta}) = b''_{\sigma\alpha,\beta} = b''_{\alpha,\beta} \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

ce qui entraîne :

(96) $$b''_{\alpha,\beta} \in X^{G'} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

et par la suite, il existe en fait un θ-2-cocycle :

$$b'' = (b''_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta(G, X^{G'}) \subset Z^2_\theta(G, X)$$

pour lequel $b''_{\alpha,\beta}$ *ne dépend que* de la *classe* $\bar{\alpha} = \lambda \in G''$ et de la *classe* $\bar{\beta} = \mu \in G''$, de telle sorte qu'il existe un θ"-2-cocycle :

$$h = (h_{\lambda,\mu}) \in Z^2_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

caractérisé par la condition :

(97) $$b''_{\alpha,\beta} = h^*_{\alpha,\beta} = h_{\lambda=\bar{\alpha},\, \mu=\bar{\beta}} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

c'est-à-dire par la condition :

(98) $$l_2(h) = h^* = b''$$

Les conditions (83), (92) et (98) entraînent la relation :

$$\hat{b} = \hat{b'} = \hat{b''} = \hat{h^*}$$

c'est-à-dire la condition (80), ce qui prouve que l'*Hypothèse* (72) entraîne la *Conclusion* (77).

Ainsi, la relation d'équivalence R_2 est *plus fine* que la relation d'équivalence R_1, ce qui termine la preuve de la partie (b) et achève la démonstration.

6. LA SECONDE TRANSGRESSION.

En COHOMOLOGIE NON ABELIENNE, la caractérisation de la *"seconde transgression"* est très délicate.

Cette caractérisation n'est pas immédiate et elle repose sur une étude systématique [9] des EXTENSIONS Q-NORMALES qui généralisent les *algèbres* Q-*normales* classiques de S. EILENBERG et S. Mac LANE [5].

Dans la suite, on utilise principalement la terminologie, les notations et les résultats de [7] et [9] (auxquels il est conseillé de se reporter pour un exposé détaillé).

Etant donnés un *anneau-groupe* $\Gamma = [V ; M]$ et un *groupe* G quelconques, la Définition 1-5 de [7] caractérise l'ensemble :

$$\mathrm{Ext}(G, \Gamma)$$

des CLASSES D'EXTENSIONS DE L'ANNEAU-GROUPE Γ PAR LE GROUPE G.

En considérant l'*ensemble pointé* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$ des *"caractères collectifs"* REALISABLES du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, le Théorème 4-6 de [7] montre alors que l'espace Ext(G, Γ) est un $\mathfrak{R}$*-ensemble* caractérisé par la *partition :*

$$(99) \qquad \mathrm{Ext}(G, \Gamma) = \coprod_{\theta \in \mathfrak{R}} \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$$

dans laquelle $\mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$ est l'espace des CLASSES DE θ-EXTENSIONS DE L'ANNEAU-GROUPE Γ PAR LE GROUPE G, et qu'il existe des *bijections canoniques :*

$$(100) \qquad \xi^\theta_{G,\Gamma} : \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

En particulier, pour tout PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE, *défini* par la condition :

$$(8) \qquad \widetilde{H}^2(P) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$$

coïncide avec le SECOND ESPACE DE θ-COHOMOLOGIE NON ABELIENNE du groupe G dans l'anneau-groupe Γ est il est *identifiable* à l'espace $\mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$ des CLASSES DE θ-EXTENSIONS de l'anneau-groupe Γ par le groupe G.

La Définition 3-2 de [9] introduit les EXTENSIONS Q-NORMALES caractérisées par le Théorème 5-3 de [9], *dont on rappelle l'énoncé :*

THEOREME 6-1 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \,;\, G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $Q = G'' = G/G'$, *pour toute* classe :

$$\xi' \in \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma) = \mathrm{Ext}[P']$$

représentée par un PRODUIT CROISE MIXTE :

$$(\mathrm{I}') \qquad \Delta' = \Delta'_{\xi'} = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z') = [U' \,;\, N']$$

qui détermine l'EXTENSION DISTINGUEE D'ANNEAUX-GROUPES :

$$(\mathrm{II}') \qquad \Gamma \triangleleft \Delta'$$

caractérisée par la SUITE EXACTE MIXTE :

$$(\mathrm{III}') \qquad \{0, 1\} \longrightarrow \Gamma = [V \,;\, M] \longrightarrow \Delta' = [U' \,;\, N'] \xrightarrow{p'} G' \longrightarrow \{1\}$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *La* classe $\xi' \in \widetilde{H}^2(P')$ *est une CLASSE D'EXTENSIONS Q-NORMALES.*

(b) *La* classe $\xi' \in \widetilde{H}^2(P')$ *est* invariante *pour l'*action *du groupe* G *sur l'espace :*

$$\widetilde{H}(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma) = \mathrm{Ext}[P']$$

*En d'autres termes, l'*espace des invariants :

$$[\widetilde{H}^2(P')]^G = [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G \simeq [\mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [\mathrm{Ext}[P']]^G$$

*s'*interprète *comme l'ESPACE DES CLASSES D'EXTENSIONS Q-NORMALES.*

Dans toute la suite, on considère maintenant des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \ ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, qui déterminent le PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$ et le GROUPE QUOTIENT $Q = G'' = G/G'$, et qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\}$$

qui constitue l'*analogue* de l'*Hypothèse* de la Propriété (B) de l'Introduction.

L'énoncé du Théorème 6-1 conduit à considérer l'espace *noté symboliquement :*

$$(101) \qquad [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]} = \{z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P') \mid \widetilde{z}' = \xi' \in [\widetilde{H}^2(P')]^G\}$$

et qui sera librement utilisé dans la suite.

THEOREME 6-2 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \ ; G'\}$$

qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\}$$

avec les notations précédentes, il existe une APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER :

$$\hat{T}_3 : [(\widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]} \longrightarrow H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

caractérisée par la condition suivante.

Pour tout COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') \in [(\widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]} = [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]}$$

pour lequel le PRODUIT CROISE MIXTE :

(I') $$\Delta' = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z') = [U' ; N']$$

détermine l'EXTENSION Q-NORMALE :

(II') $$\Gamma \triangleleft \Delta'$$

à laquelle sont associés le "caractère collectif" :

$$\Theta = \Theta_{z'} \in \mathcal{M}(G'', \Delta') = \mathrm{Mor}[G'', \mathrm{Aut}_e(\Delta')]$$

et l'ESPACE DES Θ-COCHAINES ELEMENTAIRES :

$$\hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta') = \bigcup_{z \in \widetilde{Z}^2(P)} \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$$

*alors, l'*image $\hat{T}_3[z']$ *est, dans le troisième groupe de cohomologie :* $H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$, *la* classe de cohomologie $\hat{t}$ *de l'un*

quelconque des 3-COCYCLES DE TEICHMÜLLER :

$$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in T_3[z'] = T_\Theta[\hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')]$$

qui peut également être identifiée à la classe $T_3[z'] \subset Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$.

PREUVE - Elle résulte immédiatement du Lemme 8-2, des Notations 8-4 et du Théorème 8-9 de [9], ce qui achève la démonstration.

THEOREME 6-3 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :

(S) $$\hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\}$$

avec les notations précédentes, pour tout θ'*-COCYCLE STRICT :*

$$z' = (\eta', m') = (\eta' = (\eta'_\sigma), m' = (m'_{\sigma,\tau})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *Le* θ'-*COCYCLE STRICT* $z' = (\eta', m')$ *vérifie la condition :*

(102) $$z' = (\eta', m') \in [\widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]} = [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]}$$

qui exprime que sa classe $\widetilde{z}' = \xi'$ *est une* classe :

(103) $$\widetilde{z}' = \xi' \in [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

qui est une CLASSE D'EXTENSIONS Q-NORMALES .

(b) *Le* θ'-*COCYCLE STRICT* $z' = (\eta', m')$ *du groupe* G' *dans l'anneau-groupe* Γ, *admet au moins un* prolongement *constitué par une* θ-*COCHAINE GENERALISEE (ou un* θ-*COCYCLE LARGE) :*

$$\bar{z}' = (\eta, n') = (\eta = (\eta_\alpha), n' = (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

du groupe G *dans l'anneau-groupe* Γ, *pour laquelle il existe au moins un* θ"-3-*COCYCLE :*

$$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in Z^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

*dont l'*inflation :

$$l_3(t) = t^* = (t^*_{\alpha,\beta,\gamma}) \in Z^3_\theta(G, \Gamma) = Z^3_\theta(G, X)$$

caractérisée par la condition :

(104) $$t^*_{\alpha,\beta,\gamma} = t_{\lambda=\bar{\alpha},\ \mu=\bar{\beta},\ \nu=\bar{\gamma}} \qquad \textit{pour tout } (\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$$

vérifie les conditions :

(105) $T_\theta[\bar{z}'] = t^*$ *et* (106) $l_3(t) = t^* \in B^3_\theta(G, X)$

De plus, sous ces conditions équivalentes (a) *et* (b), *alors le* θ"-3-*COCYCLE* $t = (t_{\lambda,\mu,\nu})$ *est un 3-COCYCLE DE TEICHMÜLLER :*

$$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in T_3[z'] = T_\Theta[\hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')]$$

qui détermine la CLASSE DE TEICHMÜLLER :

$$\hat{T}_3[z'] = \hat{t} \in H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

du COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') \in [\widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]} = [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]}$$

ou de l'EXTENSION Q-NORMALE :

(II') $\qquad\qquad\qquad \Gamma \lhd \Delta'$

qui lui est associée.

PREUVE - Le Théorème 6-1 justifie les commentaires relatifs à la signification de la condition (102) de la partie (a).

Sous l'hypothèse que la condition (a) est vérifiée, le Théorème 8-8 de [9] montre d'abord qu'il existe au moins un COCYCLE STRICT :

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

qui est AU DESSUS du COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m') \in [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]}$ et qui est ADAPTE à la REPRESENTATION (R) du groupe G, de sorte que, pour le GROUPE QUOTIENT Q = G" = G/G', il existe une application :

$$\underline{(\wedge)} \quad : \qquad \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta') \longrightarrow \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

qui, à toute Θ-COCHAINE ELEMENTAIRE :

$$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$$

admettant un RELEVEMENT canonique :

$$\hat{\Omega} = ((F_\alpha), (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2(G, \Delta')$$

associe la θ-COCHAINE GENERALISEE [ou le θ-COCYCLE LARGE] :

$$\underline{\hat{\Omega}} = ((\eta_\alpha), (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

caractérisée par la condition (173) du Lemme 8-7 de [9].

Pour un tel choix du COCYCLE STRICT $z = (\eta, m)$ et pour un choix arbitraire d'une Θ-COCHAINE ELEMENTAIRE :

$$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$$

et en posant :

(107) $$\bar{z}' = (\eta, n') = \underline{\hat{\Omega}} = (\eta = (\eta_\alpha)\ ,\ n' = (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

les conditions (168) et (175) du Lemme 8-7 de [9] donnent :

$$\eta_\sigma = \eta'_\sigma \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

et

$$n'_{\sigma,\tau} = m'_{\sigma,\tau} \qquad \text{pour tout } (\sigma, \tau) \in G'^2$$

ce qui montre bien que la θ-COCHAINE GENERALISEE [ou le θ-COCYCLE LARGE] :

$$\bar{z}' = (\eta, n') = (\eta = (\eta_\alpha)\ ,\ n' = (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

constitue un *prolongement* du COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m')$.

Enfin, la commutativité du diagramme (X) du Théorème 8-8 de [9] montre que le θ"-3-COCYCLE $t = (t_{\lambda,\mu,\nu})$ *défini* par la condition :

(108) $$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) = T_\Theta[\Omega] \in Z^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

vérifie la condition :

$$T_\theta[\underline{\hat{\Omega}}] = T_\theta[\bar{z}'] = l_3(t) = t^* \in B^3_\theta(G, X)$$

qui entraîne les conditions (105) et (106).

Ainsi, la condition (a) implique la condition (b).

Réciproquement, sous l'hypothèse que la condition (b) est vérifiée, le Lemme 8-6 de [9] entraîne l'existence d'un θ-COCYCLE STRICT :

$$z'' = (\eta'', m'') = (\eta'' = (\eta''_\alpha), m'' = (m''_{\alpha,\beta})) \in \tilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \tilde{Z}^2(P)$$

qui est AU DESSUS du θ'-COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m') \in \tilde{Z}^2(P')$, en ce sens qu'il vérifie la condition :

(109) $$\eta''_\sigma = \eta'_\sigma \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

et qui est ADAPTE à la REPRESENTATION (R) du groupe G, en ce sens qu'il vérifie la condition :

(AR) $$m''_{\sigma,\upsilon(\mu)} = m''_{\sigma,\mu} = 1 \qquad \text{pour tout } (\sigma, \mu) \in G' \times G''$$

Pour la θ-COCHAINE GENERALISEE :

$$\bar{z}' = (\eta, n') = (\eta = (\eta_\alpha), n' = (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

qui constitue un *prolongement* du θ'-COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m')$, c'est-à-dire qui vérifie les conditions :

(110) $\eta_\sigma = \eta'_\sigma$ pour tout $\sigma \in G'$

et

(111) $n'_{\sigma,\tau} = m'_{\sigma,\tau}$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

il existe au moins une 1-*cochaîne spéciale :*

$$a = (a_\alpha) \in C^1(G, M)$$

vérifiant la condition :

(112) $\eta''_\alpha = \langle a_\alpha \rangle \eta_\alpha$ pour tout $\alpha \in G$

et pour laquelle les conditions (109) et (110) permettent d'imposer la condition supplémentaire :

(113) $a_\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in G'$

Il est alors immédiat que la condition :

(114) $\bar{z}'' = (a, 1) * \bar{z}' = a \,\tilde{*}\, \bar{z}'$

caractérise une *nouvelle* θ-COCHAINE GENERALISEE de la forme :

$$\bar{z}'' = (\eta'', n'') = (\eta'' = (\eta''_\alpha), n'' = (n''_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

qui constitue également un *prolongement* du θ'-COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m')$.

De plus, le Lemme 6-4 de [6] entraîne alors la relation :

(115) $T_\theta[\bar{z}''] = T_\theta[(a, 1) * \bar{z}'] = T_\theta[\bar{z}'] = t^*$

Ces considérations montrent que, dans la condition (b), il est possible de remplacer $\bar{z}' = (\eta, n')$ par $\bar{z}'' = (\eta'', n'')$, lié de façon évidente au θ-COCYCLE STRICT $z'' = (\eta'', m'')$ vérifiant les conditions (109) et (AR).

Ce raisonnement montre que sous l'hypothèse que la condition (b) est vérifiée, pour éviter les complications dues à un changement de notations, *il est possible de conserver les notations initiales* et de *supposer* qu'elles ont été *choisies* de façon à ce qu'il *existe* un θ-COCYCLE STRICT de la forme :

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \tilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \tilde{Z}^2(P)$$

qui est AU DESSUS du θ'-COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m') \in \tilde{Z}^2(P')$, en ce sens qu'il vérifie la condition.

(116) $\eta_\sigma = \eta'_\sigma$ pour tout $\sigma \in G'$

et qui est ADAPTE à la REPRESENTATION (R) du groupe G, en ce sens qu'il vérifie la condition :

(AR) $$m_{\sigma,\upsilon(\mu)} = m_{\sigma,\mu} = 1 \qquad \text{pour tout } (\sigma, \mu) \in G' \times G''.$$

D'après le Scholie 4-3 de [6], la θ-COCHAINE GENERALISEE :

$$\bar{z}' = (\eta, n') = (\eta = (\eta_\alpha), n' = (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

vérifie la condition :

(117) $$\eta_\alpha \eta_\beta = \langle n'_{\alpha,\beta}\rangle \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

et d'après le Lemme 6-2 et la Définition 6-3 de [6], la condition (105) s'exprime par la condition :

(105') $$\eta_\alpha(n'_{\beta,\gamma})\, n'_{\alpha,\beta\gamma} = n'_{\alpha,\beta}\, n'_{\alpha\beta,\gamma}\, t^*_{\alpha,\beta,\gamma} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$$

On utilise la REPRESENTATION (R) du groupe G, et pour simplifier les notations, pour un élément : $\lambda \in Q = G''$, *provisoirement fixé*, on pose : $\upsilon(\lambda) = g$, et aussi :

$$(\lambda, \sigma) = (g, \sigma) = g^{-1}\sigma g = \sigma' \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$
$$(\lambda, \tau) = (g, \tau) = g^{-1}\tau g = \tau' \qquad \text{pour tout } \tau \in G'$$

ce qui entraîne alors les relations :

$$\sigma g = g\sigma' \qquad \text{et} \qquad \tau g = g\tau'$$

librement utilisées dans la suite.

Avec ces conventions, la condition :

(118) $$a_{\lambda,\sigma} = n'_{g,\sigma'}\, n'^{-1}_{\sigma,g}$$

définit une 1-*cochaîne spéciale :*

$$a = (a_\lambda) = (a_{\lambda,\sigma}) \in C^1(G'', C^1(G', M))$$

D'une part, la condition (117) entraîne alors les relations :

$$\eta_g\, \eta_{(g,\sigma)} = \langle n'_{g,\sigma'}\rangle\, \eta_{\sigma g}$$

et

$$\eta_\sigma\, \eta_g = \langle n'_{\sigma,g}\rangle\, \eta_{\sigma g}$$

qui impliquent la relation :

$$\eta_g\, \eta_{(g,\sigma)}\, \eta_g^{-1} = \langle a_{\lambda,\sigma}\rangle\, \eta_\sigma$$

et compte tenu des conventions et de la condition (116), il en résulte la condition :

(119) $$\eta_\lambda \circ \eta'_{(\lambda,\sigma)} \circ \eta_\lambda^{-1} = \langle a_{\lambda,\sigma}\rangle\, \eta'_\sigma$$

pour tout $\sigma \in G'$ et pour tout $\lambda \in Q = G''$.

D'autre part, des choix convenables du triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$ montrent que la condition (105') entraîne les relations :

(120) $$\eta_\sigma\,(n'_{g,\tau'})\; n'_{\sigma,g\tau'} = n'_{\sigma,g}\; n'_{g\sigma',\tau'}\; t^*_{\sigma,g,\tau'}$$

(121) $$\eta_\sigma(n'_{\tau,g})\; n'_{\sigma,g\tau'} = n'_{\sigma,\tau}\; n'_{\sigma\tau,g}\; t^*_{\sigma,\tau,g}$$

(122) $$\eta_g(n'_{\sigma',\tau'})\; n'_{g,\sigma'\tau'} = n'_{g,\sigma'}\; n'_{g\sigma',\tau'}\; t^*_{g,\sigma',\tau'}$$

pour lesquelles la condition de *normalisation* de $t = (t_{\lambda,\mu,\nu})$ et la condition (104) entraînent que les termes provenant de $t^* = (t^*_{\alpha,\beta,\gamma})$ qui y figurent, sont l'élément *neutre* du groupe $M = Gr(\Gamma)$, ce qui implique les relations :

(120') $$n'^{-1}_{\sigma,g}\; \eta_\sigma(n'_{g,\tau'}) = n'_{g\sigma',\tau'}\; n'^{-1}_{\sigma,g\tau'}$$

(121') $$\eta_\sigma(n'^{-1}_{\tau,g})\; n'_{\sigma,\tau} = n'_{\sigma,g\tau'}\; n'^{-1}_{\sigma\tau,g}$$

(122') $$\eta_g(n'_{\sigma',\tau'}) = n'_{g,\sigma'}\; n'_{g\sigma',\tau'}\; n'^{-1}_{g,\sigma'\tau'}$$

qui permettent les transformations successives de l'expression :

$$\begin{aligned}
A_0 &= a_{\lambda,\sigma}\; \eta_\sigma(a_{\lambda,\tau})\; n'_{\sigma,\tau}\; a^{-1}_{\lambda,\sigma\tau} \\
&= n'_{g,\sigma'}\; n'^{-1}_{\sigma,g}\; \eta_\sigma\Big[n'_{g,\tau'}\; n'^{-1}_{\tau,g}\Big]\; n'_{\sigma,\tau}\Big[n'_{g,\sigma'\tau'}\; n'^{-1}_{\sigma\tau,g}\Big]^{-1} \\
&= n'_{g,\sigma'}\Big[n'^{-1}_{\sigma,g}\; \eta_\sigma(n'_{g,\tau'})\Big]\Big[\eta_\sigma(n'^{-1}_{\tau,g})n'_{\sigma,\tau}\Big]\; n'_{\sigma\tau,g}\; n'^{-1}_{g,\sigma'\tau'} \\
&= n'_{g,\sigma'}\Big[n'_{g\sigma',\tau'}\; n'^{-1}_{\sigma,g\tau'}\Big]\Big[n'_{\sigma,g\tau'}\; n'^{-1}_{\sigma\tau,g}\Big]\; n'_{\sigma\tau,g}\; n'^{-1}_{g,\sigma\tau'} \\
&= n'_{g,\sigma'}\; n'_{g\sigma',\tau'}\; n'^{-1}_{g,\sigma'\tau} \\
&= \eta_g(n'_{\sigma',\tau'})
\end{aligned}$$

ce qui établit la relation :

$$\eta_g(n'_{\sigma',\tau'}) = a_{\lambda,\sigma}\; \eta_\sigma(a_{\lambda,\tau})\; n'_{\sigma,\tau}\; a^{-1}_{\lambda,\sigma\tau}$$

et compte tenu des conventions et des conditions (110) et (111), il en résulte la condition :

(123) $$\eta_\lambda[m'_{(\lambda,\sigma),(\lambda,\tau)}] = a_{\lambda,\sigma}\; \eta'_\sigma(a_{\lambda,\tau})\; m'_{\sigma,\tau}\; a^{-1}_{\lambda,\sigma\tau}$$

pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$ et pour tout $\lambda \in Q = G''$.

D'après le Théorème 6-2 de [9], l'existence de la 1-*cochaîne spéciale :*

$$a = (a_\lambda) = (a_{\lambda,\sigma}) \in C^1(G'', C^1(G', M))$$

vérifiant l'ensemble des deux conditions (119) et (123), entraîne que la classe $\xi' = \widetilde{z}\,' \in \hat{H}^2(P')$ est une CLASSE D'EXTENSIONS Q-NORMALES.

Ainsi, la condition (b) implique la condition (a), ce qui achève la preuve de l'équivalence des conditions (a) et (b).

De plus, le Théorème 6-2 de [9] montre que sous ces conditions équivalentes (a) et (b), pour tout $\lambda \in Q = G"$, l'ensemble *non* vide $\mathcal{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ des *prolongements* $F \in Aut(\Delta')$ du *couple* $(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ COMPATIBLE, contient en particulier le *prolongement :*

$$F_\lambda \in Aut(\Delta')$$

caractérisé par la condition :

(124) $$F_\lambda[u_{(\lambda,\sigma)}] = a_{\lambda,\sigma}\, u_\sigma \qquad \text{pour tout } (\lambda, \sigma) \in G" \times G'$$

En particulier, sous l'hypothèse que la condition (b) est vérifiée, les conditions (118) et (124) *définissent* une 1-*cochaîne spéciale :*

$$(F_\lambda) \in C^1(G", Aut(\Delta'))$$

qui vérifie de plus la condition :

(125) $$F_\lambda \in \mathcal{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda) \qquad \text{pour tout } \lambda \in Q = G"$$

et avec les notations de la REPRESENTATION (R) du groupe G, en considérant la 2-*cochaîne spéciale :*

$$(c_{\lambda,\mu}) \in C^2(G", M)$$

caractérisée par la condition :

(126) $$c_{\lambda,\mu} = n'_{\upsilon(\lambda),\upsilon(\mu)}\, n'^{-1}_{\omega(\lambda,\mu),\upsilon(\lambda\mu)} = n'_{\lambda,\mu}\, n'^{-1}_{\omega,\lambda\mu}$$

pour tout $(\lambda, \mu) \in G"^2$, la condition :

(127) $$n_{\lambda,\mu} = c_{\lambda,\mu}\, u_{\omega(\lambda,\mu)} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G"^2$$

définit une 2-*cochaîne spéciale :*

$$(n_{\lambda,\mu}) \in C^2(G", Gr(\Delta')) = C^2(G", N')$$

qui vérifie naturellement la condition :

(128) $$n_{\lambda,\mu} \in M\, u_{\omega(\lambda,\mu)} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G"^2.$$

On se propose de montrer que dans le groupe d'automorphismes $Aut(\Delta')$, ces données vérifient la condition :

(129) $$F_\lambda F_\mu = \langle n_{\lambda,\mu} \rangle F_{\lambda\mu} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G"^2$$

On rappelle que le PRODUIT CROISE MIXTE :

$$\Delta' = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z') = [U' ; N']$$

est un *anneau-groupe* $\Delta' = [U' ; N']$, dont l'*anneau* sous-jacent $An(\Delta') = U'$ et le *groupe* sous-jacent $Gr(\Delta') = N'$ sont caractérisés par les conditions :

(130) $$U' = \bigoplus_{\sigma\in G'} V u_\sigma$$ et (131) $$N' = \coprod_{\sigma\in G'} M\, u_\sigma$$

l'*addition* étant celle du groupe abélien U' et la *multiplication* dans l'*anneau* U' et dans le *groupe* $N' \subset U'^*$ étant caractérisée (par distributivité dans U') au moyen des conditions :

(132) $$u_\sigma\, x = \eta'_\sigma(x)\, u_\sigma = \eta_\sigma(x)\, u_\sigma$$

pour tout $\sigma \in G'$ et tout $x \in V$ ou tout $x \in M$, et :

(133) $$u_\sigma\, u_\tau = m'_{\sigma,\tau}\, u_{\sigma\tau} = n'_{\sigma,\tau}\, u_{\sigma\tau}$$

pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$, *compte tenu* des conditions (110) et (111).

Tout d'abord, pour tout $(\lambda, \mu) \in G''^2$, compte tenu de la condition :

(23) $$\upsilon(\lambda)\, \upsilon(\mu) = \omega(\lambda, \mu)\, \upsilon(\lambda\mu) \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

dans le groupe d'automorphismes Aut(Γ), les conditions (117) et (126) entraînent facilement la relation :

(134) $$\eta_\lambda\, \eta_\mu = \langle c_{\lambda,\mu}\rangle\, \eta_{\omega(\lambda,\mu)}\, \eta_{\lambda\mu}$$

et puisque la condition (132) montre que l'automorphisme :

$$\eta_{\omega(\lambda,\mu)} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

est la *restriction* à Γ de l'automorphisme intérieur :

$$\langle u_{\omega(\lambda,\mu)}\rangle \in \mathrm{Aut}_i(\Delta')$$

compte tenu de la condition (127), il en résulte la relation :

(135) $$\eta_\lambda\, \eta_\mu = \eta'_{\lambda,\mu}\, \eta_{\lambda\mu}$$

dans laquelle l'automorphisme :

$$\eta'_{\lambda,\mu} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

est la *restriction* à Γ de l'automorphisme intérieur :

$$\langle n_{\lambda,\mu}\rangle \in \mathrm{Aut}_i(\Delta')$$

de sorte que la condition (125), qui entraîne que l'automorphisme $\eta_\lambda \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ est la *restriction* à Γ de l'automorphisme $F_\lambda \in \mathrm{Aut}(\Delta')$, implique alors la condition :

(136) $$F_\lambda\, F_\mu(x) = \langle n_{\lambda,\mu}\rangle\, F_{\lambda\mu}(x)$$

pour tout $(\lambda, \mu) \in G''^2$ et pour tout $x \in V$ et pour tout $x \in M$.

Ce résultat montre que pour achever la démonstration de la condition (129), il *suffit* de montrer que pour *tout* couple $(\lambda, \mu) \in G''^2$ *fixé*, les données précédentes vérifient la condition :

(137) $$F_\lambda\, F_\mu(u_{\rho'}) = \langle n_{\lambda,\mu}\rangle\, F_{\lambda\mu}(u_{\rho'}) \qquad \text{pour tout } \rho' \in G'$$

équivalente à la condition :

(138) $$F_\lambda F_\mu(u_{\rho'})\, n_{\lambda,\mu} = n_{\lambda,\mu}\, F_{\lambda\mu}(u_{\rho'}) \qquad \text{pour tout } \rho' \in G'$$

Pour un *couple* $(\lambda, \mu) \in G''^2$ *fixé* et en posant pour simplifier les notations :

(139) $$g = \upsilon(\lambda) \quad , \quad g' = \upsilon(\mu) \quad , \quad g'' = \upsilon(\lambda\mu) \quad \text{et} \quad \omega = \omega(\lambda, \mu)$$

dans le groupe G, la condition (23) se met sous la forme :

(23') $$g\, g' = \omega\, g''$$

et entraîne l'existence d'un automorphisme : $\rho \to \rho'$, caractérisé par la double condition :

(140) $$\rho' = (\mu, (\lambda, \rho)) = (\lambda\mu, (\omega, \rho)) \qquad \text{pour tout } \rho \in G'$$

équivalente à la condition :

(141) $$\rho\, gg' = gg'\rho' = \omega g''\, \rho' = \rho\, \omega g'' \qquad \text{pour tout } \rho \in G'.$$

La condition (118) donne alors les relations :

(142) $$a_{\lambda,\rho} = n'_{g,(g,\rho)}\, n'^{-1}_{\rho,g}$$

(143) $$a_{\mu,(\lambda,\rho)} = n'_{g',(g',(g,\rho))}\, n'^{-1}_{(g,\rho),g'} = n'_{g',\rho'}\, n'^{-1}_{(g,\rho),g'}$$

(144) $$a_{\lambda\mu,(\omega,\rho)} = n'_{g'',(g'',(\omega,\rho))}\, n'^{-1}_{(\omega,\rho),g''} = n'_{g'',\rho'}\, n'^{-1}_{(\omega,\rho),g''}$$

Compte tenu des *"règles de calcul"* constituées par les conditions (132) et (133), les conditions (124), (125) et (127) permettent le calcul de l'expression :

$$\begin{aligned} A &= F_\lambda\, F_\mu(u_{\rho'})\, n_{\lambda,\mu} = F_\lambda[F_\mu[u_{(\mu,(\lambda,\rho))}]n_{\lambda,\mu} \\ &= F_\lambda[a_{\mu,(\lambda,\rho)}\, u_{(\lambda,\rho)}]n_{\lambda,\mu} \\ &= \eta_\lambda[a_{\mu,(\lambda,\rho)}]\, F_\lambda[u_{(\lambda,\rho)}]\, n_{\lambda,\mu} \\ &= \eta_\lambda[a_{\mu,(\lambda,\rho)}]\, a_{\lambda,\rho}\, u_\rho\, c_{\lambda,\mu}\, u_\omega \\ &= \eta_\lambda[a_{\mu,(\lambda,\rho)}]\, a_{\lambda,\rho}\, \eta_\rho[c_{\lambda,\mu}]\, n'_{\rho,\omega}\, u_{\rho\omega} \end{aligned}$$

et de l'expression :

$$\begin{aligned} B &= n_{\lambda,\mu}\, F_{\lambda\mu}(u_{\rho'}) = n_{\lambda,\mu}\, F_{\lambda\mu}[u_{(\lambda\mu,(\omega,\rho))}] \\ &= n_{\lambda,\mu}\, a_{\lambda\mu,(\omega,\rho)}\, u_{(\omega,\rho)} \\ &= c_{\lambda,\mu}\, u_\omega\, a_{\lambda\mu,(\omega,\rho)}\, u_{(\omega,\rho)} \\ &= c_{\lambda,\mu}\, \eta_\omega[a_{\lambda\mu,(\omega,\rho)}]\, n'_{\omega,(\omega,\rho)}\, u_{\rho\omega} \end{aligned}$$

qui sont donc de la forme :

$$A = A'\, u_{\rho\omega} \qquad \text{et} \qquad B = B'\, u_{\rho\omega}$$

pour les deux éléments A' et B' du groupe $M = \mathrm{Gr}(\Gamma)$ *définis* par les conditions :

(145) $$A' = A'(\rho) = \eta_\lambda[a_{\mu,(\lambda,\rho)}]\, a_{\lambda,\rho}\, \eta_\rho[c_{\lambda,\mu}]\, n'_{\rho,\omega}$$

et

(146) $$B' = B'(\rho) = c_{\lambda,\mu}\, \eta_\omega[a_{\lambda\mu,(\omega,\rho)}]\, n'_{\omega,(\omega,\rho)}$$

de sorte que la démonstration de la condition (138) se ramène, dans le *groupe* $M = \mathrm{Gr}(\Gamma)$, à la démonstration de la condition :

(147) $$A'(\rho) = B'(\rho) \qquad \text{pour tout } \rho \in G'$$

Compte tenu des notations (139), les conditions (126), (142), (143) et (145) donnent la formule :

(148) $$A' = A'(\rho) = \eta_g[n'_{g',\rho'}]\, \eta_g[n'^{-1}_{(g,\rho),g'}]\, n'_{g,(g,\rho)}$$
$$n'^{-1}_{\rho,g}\, \eta_\rho[n'_{g,g'}]\, \eta_g[n'^{-1}_{\omega,g''}]\, n'_{\rho,\omega}$$

et les conditions (126), (144) et (146) donnent la formule :

(149) $$B' = B'(\rho) = n'_{g,g'}\, n'^{-1}_{\omega,g''}\, \eta_\omega[n'_{g'',\rho'}]\, \eta_\omega[n'^{-1}_{(\omega,\rho),g''}]\, n'_{\omega,(\omega,\rho)}$$

Compte tenu de la condition de *normalisation* du θ"-3-COCYCLE $t = (t_{\lambda,\mu,\nu})$, la condition (104) et la condition (105) qui se traduit par la condition (105') entraînent la condition :

(150) $$\eta_\alpha(n'_{\beta,\gamma})\, n'_{\alpha,\beta\gamma} = n'_{\alpha,\beta}\, n'_{\alpha\beta,\gamma}$$

pour tout triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$, *dont au moins une composante est un élément du groupe* G'.

En particulier, par des choix convenables, il en résulte les relations :

(151) $$\eta_g[n'_{g',\rho'}]\, n'_{g,g'\rho'} = n'_{g,g'}\, n'_{gg',\rho'}$$

(152) $$\eta_g[n'_{(g,\rho),g'}]\, n'_{g,(g,\rho)g'} = n'_{g,(g,\rho)}\, n'_{\rho g,g'}$$

(153) $$\eta_\rho[n'_{g,g'}]\, n'_{\rho,gg'} = n'_{\rho,g}\, n'_{\rho g,g'}$$

(154) $$\eta_\rho[n'_{\omega,g''}]\, n'_{\rho,\omega g''} = n'_{\rho,\omega}\, n'_{\rho\omega,g''}$$

(155) $$\eta_\omega[n'_{g'',\rho'}]\, n'_{\omega,g''\rho'} = n'_{\omega,g''}\, n'_{\omega g'',\rho'}$$

(156) $$\eta_\omega[n'_{(\omega,\rho),g''}]\, n'_{\omega,(\omega,\rho)g''} = n'_{\omega,(\omega,\rho)}\, n'_{\rho\omega,g''}$$

et compte tenu de la condition (23') et de la condition (141) qui implique :

$$(g, \rho)\, g' = g'\rho' \qquad \text{et} \qquad (\omega, \rho)\, g'' = g''\, \rho'$$

il en résulte les relations :

(151') $$\eta_g[n'_{g',\rho'}] = n'_{g,g'}\, n'_{gg',\rho'}\, n'^{1}_{g,\, g'\rho'}$$

(152') $$\eta_g[n'^{-1}_{(g,\rho),g'}]\, n'_{g,(g,\rho)} = n'_{g,\, g'\rho'}\, n'^{-1}_{\rho g,\, g'}$$

(153') $$n'^{-1}_{\rho,g}\, \eta_\rho[n'_{g,g'}] = n'_{\rho g,\, g'}\, n'^{-1}_{\rho,\, gg'}$$

(154') $$\eta_\rho[n'^{-1}_{\omega,g''}]\, n'_{\rho,\omega} = n'_{\rho,\, gg'}\, n'^{-1}_{\rho\omega,\, g''}$$

(155') $$n'^{-1}_{\omega,g''}\, \eta_\omega\, [n'_{g'',\rho'}] = n'_{gg',\rho'}\, n'^{-1}_{\omega,\, g''\rho'}$$

(156') $$\eta_\omega[n'^{-1}_{(\omega,\rho),g''}]\, n'_{\omega,(\omega,\rho)} = n'_{\omega,g''\rho'}\, n'^{-1}_{\rho\omega,\, g''}$$

Dans le *groupe* $M = Gr(\Gamma)$, compte tenu de la formule (148), le produit membre à membre des relations (151'), (152'), (153') et (154'), et les simplifications par les couples de termes consécutifs inverses l'un à l'autre, donnent la formule :

(157) $$A' = A'(\rho) = n'_{g,g'}\, n'_{gg',\rho'}\, n'^{-1}_{\rho\omega,g''}$$

et de même, compte tenu de la formule (149), le produit membre à membre des relations (155') et (156') et la simplification par le couple de termes consécutifs inverses l'un à l'autre, donnent la formule :

(158) $$B' = B'(\rho) = n'_{g,g'}\, n'_{gg',\rho'}\, n'^{-1}_{\rho\omega,g''}$$

Les formules (157) et (158) établissent la condition (147), ce qui achève la preuve de la condition (138) et par suite aussi *la preuve de la condition* (129).

Le Lemme 8-2 de [9] montre que les conditions (125), (128) et (129) assurent l'*existence* d'une Θ-COCHAINE ELEMENTAIRE :

(159) $$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$$

définie par les conditions : (118), (124), (126) et (127).

Comme on a pris la précaution de vérifier la condition (116) et la condition (AR), on se trouve dans le contexte prévu par la partie (a) du Lemme 8-7 de [9] et par suite, la partie (b) du Lemme 8-7 de [9] entraîne que la Θ-COCHAINE ELEMENTAIRE :

$$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$$

détermine un RELEVEMENT canonique, constitué par une 2-*cochaîne généralisée :*

(160) $$\hat{\Omega} = ((F_\alpha), (n''_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2(G, \Delta')$$

vérifiant la *condition de compatibilité :*

(161) $$F_\alpha \in \mathcal{F}(\eta_\alpha, \psi_\alpha) \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

et les *conditions de relèvement :*

(162) $$F_\lambda = F_{\upsilon(\lambda)} \qquad \text{pour tout } \lambda \in G''$$

et

(163) $$n_{\lambda,\mu} = n''_{\upsilon(\lambda),\upsilon(\mu)}\, u_{\omega(\lambda,\mu)} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

et qui est caractérisée par la 1-*cochaîne spéciale :*

$$(F_\alpha) \in C^1(G, \mathrm{Aut}(\Delta'))$$

définie par la condition :

(164) $$F_\alpha = F_\sigma F_\lambda \quad , \quad \text{avec } F_\sigma = \langle u_\sigma \rangle \in \mathrm{Aut}_i(\Delta')$$

pour tout élément $\alpha \in G$, de la forme : $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$, avec $(\sigma, \lambda) \in G' \times G''$, et par la 2-*cochaîne spéciale :*

$$(n''_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, M) \subset C^2(G, \mathrm{Gr}(\Delta'))$$

définie par la condition :

(165) $$n''_{\alpha,\beta} = u_\sigma F_\lambda(u_\tau)\, n_{\lambda,\mu}\, u^{-1}_{\sigma_1}$$

pour des éléments $\alpha \in G$ et $\beta \in G$, de la forme : $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$ et $\beta = \tau\upsilon(\mu)$, avec : $(\sigma, \lambda) \in G' \times G''$ et $(\tau, \mu) \in G' \times G''$, et avec : $\sigma_1 = \sigma \langle\lambda, \tau\rangle\, \omega(\lambda, \mu)$.

En posant, pour simplifier les notations :

(166) $\tau'' = <\lambda,\tau>$, $\tau = (\lambda, \tau'')$ et $\omega = \omega(\lambda, \mu)$

compte tenu des *"règles de calcul"* constituées par les conditions (132) et (135), dans le *groupe* N' = Gr(Δ'), les conditions (165), (124) et (127) entraînent successivement :

$$\begin{aligned} n''_{\alpha,\beta}\, u_{\sigma_1} &= u_\sigma\, F_\lambda(u_\tau)\, n_{\lambda,\mu} \\ &= u_\sigma\, a_{\lambda,\tau''}\, u_{\tau''}\, c_{\lambda,\mu}\, u_\omega \\ &= \eta_\sigma[a_{\lambda,\tau''}]\, n'_{\sigma,\tau''}\, u_{\sigma\tau''}\, c_{\lambda,\mu}\, u_\omega \\ &= \eta_\sigma[a_{\lambda,\tau''}]\, n'_{\sigma,\tau''}\, \eta_{\sigma\tau''}\, [c_{\lambda,\mu}]\, n'_{\sigma\tau'',\omega}\, u_{\sigma_1} \end{aligned}$$

et après *simplification* par u_{σ_1}, il en résulte, dans le *groupe* M = Gr(Γ), la relation :

(167) $$n''_{\alpha,\beta} = \eta_\sigma[a_{\lambda,\tau''}]\, n'_{\sigma,\tau''}\, \eta_{\sigma\tau''}\, [c_{\lambda,\mu}]\, n'_{\sigma\tau'',\omega}$$

En utilisant les notations (139), la condition (142) donne la relation :

$$a_{\lambda,\tau''} = n'_{g,(g,\tau'')}\, n'^{-1}_{\tau'',g} = n'_{g,\tau}\, n'^{-1}_{\tau'',g}$$

de sorte que les relations (126) et (167) donnent la formule :

(168) $$n''_{\alpha,\beta} = \eta_\sigma[n'_{g,\tau}]\, \eta_\sigma[n'^{-1}_{\tau'',g}]\, n'_{\sigma,\tau''}\, \eta_{\sigma\tau''}[n'_{g,g'}]\, \eta_{\sigma\tau''}[n'^{-1}_{\omega,g''}]\, n'_{\sigma\tau'',\omega}$$

Par des choix convenables, la condition (150) donne alors les relations :

(169) $\eta_\sigma[n'_{g,\tau}]\, n'_{\sigma,g\tau} = n'_{\sigma,g}\, n'_{\sigma g,\tau}$

(170) $\eta_\sigma[n'_{\tau'',g}]\, n'_{\sigma,\tau''g} = n'_{\sigma,\tau''}\, n'_{\sigma\tau'',g}$

(171) $\eta_{\sigma\tau''}[n'_{g,g'}]\, n'_{\sigma\tau'',gg'} = n'_{\sigma\tau'',g}\, n'_{\sigma\tau''g,g'}$

(172) $\eta_{\sigma\tau''}[n'_{\omega,g''}]\, n'_{\sigma\tau'',\omega g''} = n'_{\sigma\tau'',\omega}\, n'_{\sigma\tau''\omega,g''}$

(173) $\eta_\alpha[n'_{\tau,g'}]\, n'_{\alpha,\tau g'} = n'_{\alpha,\tau}\, n'_{\alpha\tau,g'}$

et compte tenu du fait que les notations adoptées entraînent les relations :

(174) $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda) = \sigma g$; $\beta = \tau\upsilon(\mu) = \tau g'$; $g\tau = \tau''g$; $\sigma_1 = \sigma\tau''\omega$; $gg' = \omega g''$

il en résulte les relations :

(169') $\eta_\sigma[n'_{g,\tau}] = n'_{\sigma,g}\, n'_{\alpha,\tau}\, n'^{-1}_{\sigma,\, g\tau}$

(170') $\eta_\sigma[n'^{-1}_{\tau'',g}]\, n'_{\sigma,\tau''} = n'_{\sigma,g\tau}\, n'^{-1}_{\sigma\tau'',\, g}$

(171') $\eta_{\sigma\tau''}[n'_{g,g'}] = n'_{\sigma\tau'',g}\, n'_{\alpha\tau,g'}\, n'^{-1}_{\sigma\tau'',\, gg'}$

(172') $\eta_{\sigma\tau''}[n'^{-1}_{\omega,g''}]\, n'_{\sigma\tau'',\omega} = n'_{\sigma\tau'',gg'}\, n'^{-1}_{\sigma_1\, ,\, g''}$

(173') $n'_{\alpha,\tau}\, n'_{\alpha\tau,g'} = \eta_\alpha[n'_{\tau,g'}]\, n'_{\alpha,\beta}$

Dans le *groupe* M = Gr(Γ), compte tenu de la formule (168), le produit membre à membre des relations (169'), (170'), (171') et (172'), et les simplifications par les couples de termes consécutifs inverses l'un de l'autre, donnent la formule :

(175) $$n''_{\alpha,\beta} = n'_{\sigma,g}\, n'_{\alpha,\tau}\, n'_{\alpha\tau,g'}\, n'^{-1}_{\sigma_1,g''}$$

et par suite, la relation (173') entraîne la formule :

(176) $$n''_{\alpha,\beta} = n'_{\sigma,g}\, \eta_\alpha[n'_{\tau,g'}]\, n'_{\alpha,\beta}\, n'^{-1}_{\sigma_1,g''}$$

En revenant aux notations initiales, il en résulte la condition :

(177) $$n''_{\alpha,\beta} = n'_{\sigma,\nu(\lambda)}\, \eta_\alpha[n'_{\tau,\nu(\mu)}]\, n'_{\alpha,\beta}\, n'^{-1}_{\sigma_1,\nu(\lambda\mu)}$$

pour tout couple $(\alpha, \beta) \in G^2$, de la forme : $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$ et $\beta = \tau\upsilon(\mu)$ avec : $(\sigma, \lambda) \in G' \times G''$ et $(\tau, \mu) \in G' \times G''$, pour lesquels $\alpha\beta = \sigma_1\upsilon(\lambda\mu)$ avec : $\sigma_1 = \sigma<\lambda,\tau>\, \omega(\lambda,\mu)$ et $(\sigma_1, \lambda\mu) \in G' \times G''$.

En considérant la 1-*cochaîne spéciale :*

$$a' = (a'_\alpha) \in C^1(G, M)$$

définie par la condition :

(178) $$a'_\alpha = n'_{\sigma,\upsilon(\lambda)} = n'_{\sigma,\lambda}$$

pour tout élément $\alpha \in G$ de la forme : $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$, avec : $(\sigma, \lambda) \in G' \times G''$, la condition (177) se met sous la forme de la condition :

(179) $$n''_{\alpha,\beta} = a'_\alpha\, \eta_\alpha[a'_\beta]\, n'_{\alpha,\beta}\, a'^{-1}_{\alpha\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

Il convient de noter que le Scholie 4-3 de [6] montre que le θ-COCYCLE STRICT :

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha)\, ,\, m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

vérifie la condition :

(180) $$\eta_\alpha\, \eta_\beta = <m_{\alpha,\beta}>\, \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

de sorte que, dans le groupe d'automorphismes Aut(Γ), la condition (117) entraîne la condition :

(181) $$<n'_{\alpha,\beta}> = <m_{\alpha,\beta}> \qquad \text{pour tout } (\alpha,\beta) \in G^2$$

et par suite, la condition :

(AR) $$m_{\sigma,\nu(\mu)} = m_{\sigma,\mu} = 1 \qquad \text{pour tout } (\sigma, \mu) \in G' \times G''$$

et la condition (178) impliquent la condition :

(182) $$<a'_\alpha> = 1 \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

qui entraîne en particulier la condition :

(183) $$\eta_\alpha = <a'_\alpha>\, \eta_\alpha \qquad \text{pour tout } \alpha \in G.$$

En résumé, les constructions précédentes montrent que sous l'hypothèse que la condition (b) est vérifiée, les conditions : (118), (124), (126) et (127), *définissent* une Θ-COCHAINE ELEMENTAIRE :

(159) $$\Omega = ((F_\lambda)\,,\,(n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',z}(G'',\,\Delta')$$

admettant un RELEVEMENT canonique :

(160) $$\hat{\Omega} = ((F_\alpha)\,,\,(n''_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2(G,\,\Delta')$$

qui détermine la θ-COCHAINE [ou le θ-COCYCLE LARGE] :

(184) $$\underline{\hat{\Omega}} = (\eta,\,n'') = (\eta = (\eta_\alpha)\,,\,n'' = (n''_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G,\,\Gamma)$$

définie par les conditions (178) et (179).

De plus, pour la θ-COCHAINE GENERALISEE :

$$\bar{z}' = (\eta,\,n') = (\eta = (\eta_\alpha)\,,\,n' = (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G,\,\Gamma)$$

le Lemme 4-5 de [6] montre que les conditions (183) et (179) s'expriment alors par la condition unique :

(185) $$\underline{\hat{\Omega}} = (\eta,\,n'') = (a',\,1) * (\eta,\,n') = a' \,\tilde{*}\, \bar{z}'$$

de sorte que le Lemme 6-4 de [6] entraîne la relation :

$$T_\theta[\underline{\hat{\Omega}}] = T_\theta[(a',\,1) * (\eta,\,n')] = T_\theta[(\eta,\,n')] = T_\theta[\bar{z}']$$

c'est-à-dire la relation :

(186) $$T_\theta[\underline{\hat{\Omega}}] = T_\theta[\bar{z}']$$

En considérant le 3-COCYCLE DE TEICHMÜLLER :

$$t' = (t'_{\lambda,\mu,\nu}) \in Z^3_{\theta''}(G'',\,\hat{H}^0_{\theta'}(G',\,\Gamma)) = Z^3_{\theta''}(G'',\,X^{G'})$$

défini par la condition :

(186) $$t' = (t'_{\lambda,\mu,\nu}) = T_\Theta[\Omega] \in T_3[z'] = T_\Theta[\hat{C}^2_{z',z}(G'',\,\Delta')]$$

d'après le Théorème 8-9 de [9], la commutativité du diagramme (X) du Théorème 8-8 de [9] donne la relation :

(187) $$T_\theta[\underline{\hat{\Omega}}] = l_3(t') = t'^*$$

Compte tenu des relations (186) et (187), les conditions (105) et (106) entraînent la relation :

$$l_3(t) = t^* = t'^* = l_3(t')$$

qui implique l'égalité :

(188) $$t = t'$$

D'après le Théorème 8-9 de [9], il en résulte bien que le θ''-3-COCYCLE $t = (t_{\lambda,\mu,\nu})$, figurant dans la condition (b), est un 3-COCYCLE DE TEICHMÜLLER :

$$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in T_3[z'] = T_\Theta[\hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')]$$

qui détermine la CLASSE DE TEICHMÜLLER :

$$\hat{T}_3[z'] = \hat{t} \in H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta''}(G', \Gamma)) = H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

du COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') \in [\tilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]} = [\tilde{Z}^2(P')]^{[G]}$$

ou de l'EXTENSION Q-NORMALE :

(II') $\qquad\qquad\qquad\qquad \Gamma \triangleleft \Delta'$

qui lui est associée, ce qui achève enfin la démonstration.

COROLLAIRE 6-4 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \ ; \ G'\}$$

qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\}$$

avec les notations précédentes, il existe une APPLICATION DE TRANSGRESSION :

$$\tilde{t}_3 : [\tilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G \longrightarrow H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$$

caractérisée par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
{[\tilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]}} \arrow[d] \arrow[dr, "\hat{T}_3"] & \\
{[\tilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G} \arrow[r, "\tilde{t}_3"] & H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))
\end{tikzcd}$$

dans lequel l'application "verticale" est l'application "classe de cohomologie" *et dans lequel* $\hat{T}_3$ *est l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER.*

PREUVE - Pour deux θ'-COCYCLES STRICTS :

$$z' = (\eta', m') \in [\widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]}$$

et

$$z'' = (\eta'', m'') \in [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

déterminant la même *"classe de cohomologie stricte" :*

$$\widetilde{z}' = \widetilde{z}'' = \xi' \in [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

la Définition 8-3 de [6] montre qu'il existe au moins une 1-COCHAINE STRICTE $a' = (a', 1) \in \widetilde{C}^1(G', \Gamma)$, telle que :

(189) $$z'' = (\eta'', m'') = (a', 1) *' (\eta', m') = a' \,\widetilde{*}\,' z'$$

pour une certaine 1-*cochaîne spéciale :*

$$a' = (a'_\sigma) \in C^1(G', M)$$

D'après le Théorème 6-3, la CLASSE DE TEICHMÜLLER :

$$\hat{T}_3[z'] = \hat{t} \in H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$$

du COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m')$ peut être caractérisée par l'*existence* d'un *prolongement* constitué par une θ-COCHAINE GENERALISEE :

$$\bar{z}' = (\eta, n') = (\eta = (\eta_\alpha) \, , \, n' = (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

pour laquelle il existe au moins un θ"-3-COCYCLE :

$$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in Z^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

vérifiant la condition :

(190) $$T_\theta[\bar{z}'] = t^* = l_3(t)$$

Il est immédiat que la 1-*cochaîne spéciale* $a' = (a'_\sigma)$ peut se prolonger, de façon arbitraire, en une 1-*cochaîne spéciale :*

$$\underline{a}' = (\underline{a}'_\alpha) \in C^1(G, M)$$

de sorte que la condition :

(191) $$\bar{z}'' = (\underline{a}', 1) * (\eta, n') = \underline{a}' \tilde{*} \bar{z}'$$

caractérise une θ-COCHAINE GENERALISEE :

$$\bar{z}'' \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

pour laquelle la condition (189) montre qu'elle constitue un *prolongement* du COCYCLE STRICT z" = (η", m").

Le Lemme 6-4 de [6] montre que les conditions (191) et (190) entraînent la relation :

(192) $$T_\theta[\bar{z}''] = T_\theta[\bar{z}'] = t^* = l_3(t)$$

de sorte que le Théorème 6-3 entraîne alors la relation :

(193) $$\hat{T}_3[z'] = \hat{t} = \hat{T}_3[z'']$$

Ce résultat montre bien que l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER $\hat{T}_3$ *se factorise* pour déterminer l'application $\tilde{t}_3$, ce qui achève la démonstration.

DEFINITION 6-5 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :

(S) $$\hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\}$$

la "seconde transgression" *est constituée par l'APPLICATION DE TRANSGRESSION :*

$$\tilde{t}_3 : [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G \longrightarrow H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$$

caractérisée dans le Corollaire 6-4.

7. LA SUITE EXACTE FONDAMENTALE.

On se propose de généraliser la Propriété (B) de l'Introduction.

LEMME 7-1 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :

(S) $$\hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\}$$

avec les notations précédentes, il existe une "suite exacte" *de la forme :*

$$\widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\widetilde{r}_2} [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G',\Gamma)]^G \xrightarrow{\widetilde{t}_3} H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_3} \hat{H}^3_\theta(G, \Gamma)$$

en ce sens que :

(a) *L'*image *de l'APPLICATION DE RESTRICTION* $\widetilde{r}_2$, *dans l'ESPACE* $[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$ *des CLASSES D'EXTENSIONS Q-NORMALES,*

coïncide *avec le "NOYAU"* Ker $\widetilde{t}_3$ *de l'APPLICATION DE TRANSGRESSION* $\widetilde{t}_3$, *constitué par l'*image réciproque :

$$\mathrm{Ker}\, \widetilde{t}_3 = (\widetilde{t}_3)^{-1}(1)$$

*par l'*application $\widetilde{t}_3$ *de l'*élément neutre 1 *du groupe abélien* $H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$.

(b) *L'*image *de l'APPLICATION DE TRANSGRESSION* $\widetilde{t}_3$ coïncide *avec le NOYAU* Ker $\hat{l}_3$ *de l'HOMOMORPHISME D'INFLATION* $\hat{l}_3$, *qui est un morphisme de groupes abéliens.*

PREUVE - Le Théorème 2-3 entraîne l'*existence* de l'APPLICATION DE RESTRICTION $\widetilde{r}_2$, le Corollaire 6-4 entraîne l'*existence* et la *caractérisation* de l'APPLICATION DE TRANSGRESSION $\widetilde{t}_3$ et le Corollaire 2-5 entraîne l'*existence* de l'HOMOMORPHISME D'INFLATION $\hat{l}_3$.

Le Théorème 6-1 justifie l'*interprétation* de l'ESPACE $[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$ comme l'ESPACE DES CLASSES D'EXTENSIONS Q-NORMALES.

Etant donnée une *classe de cohomologie stricte* quelconque :

$$\xi' = \widetilde{z}' \in [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

déterminée par un θ'-COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') \in [\widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]}$$

le Théorème 6-3 montre qu'il admet au moins un *prolongement* constitué par une θ-COCHAINE GENERALISEE (ou un θ-COCYCLE LARGE) :

$$\overline{z}' = (\eta, n') = (\eta = (\eta_\alpha), n' = (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, pour laquelle il existe au moins un θ"-3-COCYCLE :

$$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in Z^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

dont l'*inflation :*

$$l_3(t) = t^* = (t^*_{\alpha,\beta,\gamma}) \in Z^3_\theta(G, \Gamma) = Z^3_\theta(G, X)$$

vérifie les conditions :

(105) $T_\theta[\overline{z}'] = t^*$ et (106) $l_3(t) = t^* \in B^3_\theta(G, X)$

et qui détermine alors la CLASSE DE TEICHMÜLLER :

$$\hat{T}_3[z'] = \hat{t} \in H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

du COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m')$.

Le Corollaire 6-4 donne alors la *caractérisation :*

(194) $$\tilde{t}_3[\xi'] = \hat{T}_3[z'] = \hat{t} \in H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$$

La caractérisation de l'HOMOMORPHISME D'INFLATION $\hat{l}_3$, donnée dans le Corollaire 2-5, entraîne alors la relation :

(195) $$\hat{l}_3[\hat{t}] = \widehat{l_3(t)} = \widehat{t^*}$$

et comme la condition (106) s'exprime par la condition : $\hat{t}^* = 1$, d'après la caractérisation (194), il en résulte la relation :

(196) $$\hat{l}_3 \circ \tilde{t}_3[\xi'] = \widehat{l_3(t)} = \hat{t}^* = 1 \in \hat{H}^3_\theta(G, \Gamma) = H^3_\theta(G, X)$$

En particulier, cette relation (196) montre que l'*image* de l'APPLICATION DE TRANSGRESSION $\widetilde{t}_3$ *est contenue* dans le NOYAU Ker $\hat{l}_3$ de l'HOMOMORPHISME D'INFLATION $\hat{l}_3$, qui est un morphisme de groupes abéliens.

Réciproquement, *tout* élément du NOYAU Ker $\hat{l}_3$ du morphisme de groupes $\hat{l}_3$, est de la forme :

$$\hat{t}' \in \mathrm{Ker}\ \hat{l}_3 \subset H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

pour au moins un θ"-3-COCYCLE :

$$t' = (t'_{\lambda,\mu,\nu}) \in Z^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

dont l'*inflation :*

$$l_3(t') = t'^* = (t'^*_{\alpha,\beta,\gamma}) \in Z^3_\theta(G, \Gamma) = Z^3_\theta(G, X)$$

vérifie la condition :

(197) $$\hat{l}_3[\hat{t}'] = \widehat{l_3(t')} = \widehat{t'^*} = 1 \in \hat{H}^3_\theta(G, \Gamma) = H^3_\theta(G, X)$$

équivalente à la condition :

(198) $$l_3(t') = t'^* = (t'^*_{\alpha,\beta,\gamma}) \in B^3_\theta(G, X)$$

qui s'exprime par l'*existence* d'une 2-*cochaîne spéciale :*

$$b = (b_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, X)$$

du groupe G dans le *centre-groupe* X = Zg(Γ) de l'anneau-groupe Γ, vérifiant la condition :

(199) $$\delta^3_\theta(b) = t'^* = (t'^*_{\alpha,\beta,\gamma}) = l_3(t')$$

pour laquelle la condition de *normalisation* du θ"-3-COCYCLE $t' = (t'_{\lambda,\mu,\nu})$ entraîne en particulier la condition :

(200) $$[\delta^3_\theta(b)]_{\sigma,\tau,\rho} = t'^*_{\sigma,\tau,\rho} = t'_{1,1,1} = 1 \qquad \text{pour tout } (\sigma, \tau, \rho) \in G'^3$$

et par *restriction* au sous-groupe distingué G' du groupe G, il en résulte une 2-*cochaîne spéciale :*

(201) $$r_2(b) = b' = (b'_{\sigma,\tau}) = (b_{\sigma,\tau}) \in C^2(G', X)$$

pour laquelle la condition (200) et la relation immédiate :

$$\delta^3_{\theta'}(b') = r_3[\delta^3_\theta(b)]$$

entraînent la condition :

(202) $$\delta^3_{\theta'}(b') = 1$$

qui montre en fait l'*existence* d'un θ'-2-COCYCLE :

(203) $$r_2(b) = b' = (b'_{\sigma,\tau}) = (b_{\sigma,\tau}) \in Z^3_{\theta'}(G', X)$$

En considérant un θ-COCYCLE STRICT *arbitraire :*

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

dont la *restriction :*

(204) $$r_2(z) = z'' = (\eta', m'')$$

constitue un θ'-COCYCLE STRICT :

$$z'' = (\eta', m'') = (\eta' = (\eta'_\sigma), m'' = (m''_{\sigma,\tau})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

compte tenu de la condition (203), le Lemme 4-1 montre que la condition :

(205) $$z' = (\eta', m') = (1, b') *' (\eta', m'') = b' \circ' (\eta', m'') = b' \circ' z''$$

caractérise un *nouveau* θ'-COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') = (\eta' = (\eta'_\sigma), m' = (m'_{\sigma,\tau})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

La condition :

(206) $$\bar{z} = (\eta, n) = (1, b) * (\eta, m) = b \circ (\eta, m) = b \circ z$$

caractérise alors une θ-COCHAINE GENERALISEE :

$$\bar{z} = (\eta, n) = (\eta = (\eta_\alpha), n = (n_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

pour laquelle les conditions (203), (204), (205) et (206) montrent immédiatement qu'elle constitue un *prolongement* du *nouveau* θ'-COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$$

Le Lemme 6-4 de [6] entraîne alors la relation :

(207) $$T_\theta[\bar{z}] = T_\theta[(1, b) * (\eta, m)] = \delta^3_\theta(b) \cdot T_\theta[(\eta, m)] = \delta^3_\theta(b) \cdot T_\theta[z]$$

et comme la Définition 7-2 de [6] montre que la condition :

$$z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma)$$

entraîne la relation :

$$T_\theta[z] = 1$$

il en résulte la relation :

(208) $$T_\theta[\bar{z}] = \delta^3_\theta(b)$$

Ainsi, compte tenu des conditions (198) et (199), le θ'-COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)$ admet pour *prolongement* la θ-COCHAINE GENERALISEE : $\bar{z} = (\eta, n) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$, vérifiant la condition :

(209) $$T_\theta[\bar{z}] = \delta^3_\theta(b) = t'^* = l_3(t') \in B^3_\theta(G, X)$$

de sorte que le Théorème 6-3 montre que le θ'-3-COCYCLE $t' = (t'_{\lambda,\mu,\nu})$ est un 3-COCYCLE DE TEICHMÜLLER qui détermine la CLASSE DE TEICHMÜLLER :

$$\hat{T}_3[z'] = \hat{t}' \in H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

du COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') \in [\widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]}$$

Pour la *classe de cohomologie stricte :*

$$\xi' = \tilde{z}' \in [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

le Corollaire 6-4 entraîne alors la relation :

(210) $$\tilde{t}_3[\xi'] = \hat{T}_3[z'] = \hat{t}' \in \operatorname{Ker} \hat{l}_3 \subset H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$$

En particulier, cette relation (210) montre que le NOYAU $\operatorname{Ker} \hat{l}_3$ de l'HOMOMORPHISME D'INFLATION $\hat{l}_3$ *est contenu* dans l'*image* de l'APPLICATION DE TRANSGRESSION $\tilde{t}_3$.

Les deux *"inclusions"* qui viennent d'être démontrées achèvent la preuve de la partie (b).

Tout élément de l'*image* de l'APPLICATION DE RESTRICTION $\widetilde{r}_2$ est de la forme :

$$\xi' = \widetilde{z}'$$

pour un θ'-COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') = (\eta' = (\eta'_\sigma)\ ,\ m' = (m'_{\sigma,\tau})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

obtenu comme la *"restriction" :*

(211) $$z' = r_2(z)$$

d'un θ-COCYCLE STRICT :

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha)\ ,\ m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

pour lequel la Définition 7-2 de [6] donne la relation :

(212) $$T_\theta[z] = 1$$

et qui constitue naturellement un *prolongement* du θ'-COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m')$.

Comme le θ"-3-COCYCLE *neutre :*

$$t'' = (t''_{\lambda,\mu,\nu}) = 1 \in Z^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

vérifie alors automatiquement les conditions :

(105") $T_\theta[z] = 1 = t''^*$ et (106") $l_3(t'') = t''^* \in B^3_\theta(G, X)$

le Théorème 6-3 montre que le θ"-3-COCYCLE *neutre* $t'' = (t''_{\lambda,\mu,\nu}) = 1$ est un 3-COCYCLE DE TEICHMÜLLER qui détermine la CLASSE DE TEICHMÜLLER *neutre :*

$$\hat{T}_3[z] = \hat{t''} = 1 \in H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

du COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m')$, et par suite le Corollaire 6-4 entraîne la relation :

(213) $$\widetilde{t}_3[\xi'] = \hat{T}_3[z] = \hat{t''} = 1 \in H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$$

En particulier, cette relation (213), montre que l'*image* de l'APPLICATION DE RESTRICTION $\widetilde{r}_2$ *est contenue* dans le "NOYAU" Ker $\widetilde{t}_3$ de l'APPLICATION DE TRANSGRESSION $\widetilde{t}_3$, constitué par l'*image réciproque :*

$$\text{Ker } \widetilde{t}_3 = (\widetilde{t}_3)^{-1}(1)$$

par l'*application* $\widetilde{t}_3$ de l'*élément neutre* 1 du groupe abélien $H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$.

Réciproquement, on considère une *classe de cohomologie stricte :*

$$\xi' = \widetilde{z}' \in [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

déterminée par un θ'-COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') \in [\widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]}$$

et vérifiant la condition :

(214) $$\xi' \in \text{Ker } \widetilde{t}_3$$

Compte tenu de la *caractérisation* (194), qui montre que la condition :

$$\widetilde{t}_3[\xi'] = \hat{T}_3[z'] = \hat{t} = 1 \in H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

équivaut à la condition :

$$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in B^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

qui *entraîne automatiquement* la condition (106), le Théorème 6-3 montre que la condition (214) s'exprime par le fait que le θ'-COCYCLE STRICT z' = (η', m') admet au moins un *prolongement* constitué par une θ-COCHAINE GENERALISEE (ou un θ-COCYCLE STRICT) :

$$\overline{z}' = (\eta, n') = (\eta = (\eta_\alpha)\, ,\, n' = (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, pour laquelle il existe au moins un θ"-3-COBORD :

(215) $$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in B^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma)) = B^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

dont l'*inflation :*

$$l_3(t) = t^* = (t^*_{\alpha,\beta,\gamma}) \in B^3_\theta(G, \Gamma) = B^3_\theta(G, X)$$

vérifie la condition :

(105) $$T_\theta[\overline{z}'] = t^*$$

La condition (215) s'exprime par l'*existence* d'une 2-*cochaîne spéciale :*

$$c = (c_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', X^{G'})$$

vérifiant la condition :

(216) $$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) = \delta^3_{\theta''}(c^{-1})$$

et par *inflation,* il en résulte la 2-*cochaîne spéciale :*

(217) $$l_2(c) = c^* = (c^*_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, X^{G'})$$

pour laquelle la condition de *normalisation* de la 2-*cochaîne spéciale* $c = (c_{\lambda,\mu})$, montre que par *restriction,* la 2-*cochaîne spéciale :*

(218) $$r_2(c^*) = c' = (c'_{\sigma,\tau}) = (c^*_{\sigma,\tau}) \in C^2(G', X^{G'})$$

est la 2-*cochaîne spéciale neutre,* qui vérifie la condition :

(219) $$c'_{\sigma,\tau} = c^*_{\sigma,\tau} = 1 \qquad \text{pour tout } (\sigma, \tau) \in G'^2$$

Par *inflation,* la condition (216) donne la condition :

$$t^* = (t^*_{\alpha,\beta,\gamma}) = \delta^3_\theta(c^{*-1})$$

c'est-à-dire la relation :

(220) $$\delta^3_\theta(c^*) \,.\, t^* = 1 \in C^3(G, X^{G'}) \subset C^3(G, X)$$

La condition :

(221) $$z = (\eta, m) = (1, c^*) * (\eta, n') = (1, c^*) * \overline{z}'$$

caractérise une θ-COCHAINE GENERALISEE :

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha)\,,\, m = (m(\alpha,\beta)) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

pour laquelle le Lemme 6-4 de [6] entraîne alors la relation :

$$T_\theta[z] = T_\theta[(1, c^*) * (\eta, n')] = \delta^3_\theta(c^*) \,.\, T_\theta[\overline{z}']$$

c'est-à-dire, compte tenu de la condition (105) et de la relation (220), la relation :

(222) $$T_\theta[z] = 1 \in Z^3_\theta(G, X) \subset C^3(G, X)$$

qui, compte tenu de la Définition 7-2 de [6], assure l'*existence* du θ-COCYCLE STRICT :

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha)\,,\, m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

qui détermine la *classe de cohomologie stricte :*

$$\xi = \widetilde{z} \in \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

Puisque la θ-COCHAINE GENERALISEE $\bar{z}' = (\eta, n')$ est un *prolongement* du θ'-COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m')$, les conditions (219) et (221) entraînent immédiatement que le θ-COCYCLE STRICT $z = (\eta, m)$ est également un *prolongement* du θ'-COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m')$, ce qui donne, par *"restriction"*, la relation :

$$z' = r_2(z)$$

et par suite la relation :

$$\xi' = \widetilde{z}' = \widetilde{r}_2[\widetilde{z}] = \widetilde{r}_2[\xi] \tag{223}$$

En particulier, cette relation (223) montre que le "NOYAU" Ker $\widetilde{t}_3$ de l'APPLICATION DE TRANSGRESSION $\widetilde{t}_3$ *est contenu* dans l'*image* de l'APPLICATION DE RESTRICTION $\widetilde{r}_2$.

Les deux dernières *"inclusions"* qui viennent d'être démontrées achèvent la preuve de la partie (a), ce qui termine la démonstration.

THEOREME 7-2 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \,;\, G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = \{G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $Q = G'' = G/G'$, *et qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :*

$$\hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\} \tag{S}$$

avec les notations précédentes, il existe une "suite exacte fondamentale" *de la forme :*

$$\{1\} \longrightarrow H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\widetilde{l}_2} \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\widetilde{r}_2} [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

$$\xrightarrow{\widetilde{t}_3} H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_3} \hat{H}^3_\theta(G, \Gamma)$$

en ce sens que :

(a) *Pour l'*action *réalisée par l'OPERATEUR D'INFLATION* $\widetilde{l}_2$, *le groupe abélien* $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$ opère librement sur l'espace $\widetilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma)$.

(b) *Sur le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :*

$$\widetilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P)$$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, la relation d'équivalence canonique associée à l'APPLICATION DE RESTRICTION $\widetilde{r}_2$ coïncide *avec la relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les* orbites *pour l'*action *du groupe* $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$ *réalisée par l'OPERATEUR D'INFLATION* $\widetilde{l}_2$,

*[ce qui signifie également que l'*image *de l'application* $\widetilde{r}_2$ coïncide *avec l'*ensemble quotient *de l'espace* $\widetilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma)$ *par l'*action *du groupe* $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$ *réalisée par l'*opérateur $\widetilde{l}_2$ *].*

(c) *L'*image *de l'APPLICATION DE RESTRICTION* $\widetilde{r}_2$, *dans l'ESPACE :*

$$[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma]^G$$

des CLASSES D'EXTENSIONS Q-NORMALES, coïncide *avec le "NOYAU"* Ker $\widetilde{t}_3$ *de l'APPLICATION DE TRANSGRESSION* $\widetilde{t}_3$, *constitué par l'*image réciproque : Ker $\widetilde{t}_3 = (\widetilde{t}_3)^{-1}(1)$ *par l'*application $\widetilde{t}_3$ *de l'*élément neutre 1 *du groupe abélien* $H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$.

(d) *L'*image *de l'APPLICATION DE TRANSGRESSION* $\widetilde{t}_3$ coïncide *avec le NOYAU* Ker $\hat{l}_3$ *de l'HOMOMORPHISME D'INFLATION* $\hat{l}_3$, *qui est un morphisme de groupes abéliens.*

PREUVE - La conjonction du Lemme 5-4 et du Lemme 7-1 entraîne immédiatement la démonstration.

THEOREME 7-3 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \; ; \; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE P = (G, Γ, θ) *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* P' = (G', Γ, θ') *et le GROUPE QUOTIENT* Q = G" = G/G', *et qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :*

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\}$$

avec les notations précédentes, il existe une "suite exacte fondamentale" *de la forme :*

$$\{1\} \longrightarrow H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\tilde{l}_2} \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\tilde{r}_2} [\mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

$$\xrightarrow{\tilde{t}_3} H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_3} \hat{H}^3_\theta(G, \Gamma)$$

en ce sens que :

(a) *Pour l'*action *réalisée par l'OPERATEUR D'INFLATION* $\tilde{l}_2$, *le groupe abélien* $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$ opère librement *sur l'espace* $\mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$.

(b) *Sur l'ESPACE DES CLASSES DE θ-EXTENSIONS :*

$$\mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$$

de l'anneau-groupe Γ *par le groupe* G, *la relation d'équivalence canonique associée à l'APPLICATION DE RESTRICTION* $\tilde{r}_2$ coïncide *avec la relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les* orbites *pour* l'action *du groupe* $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$ *réalisée par l'OPERATEUR D'INFLATION* $\tilde{l}_2$,

*[ce qui signifie également que l'*image *de l'application* $\tilde{r}_2$ coïncide *avec*

l'ensemble quotient *de l'espace* $Ext_\theta(G, \Gamma)$ *par l*'action *du groupe* $H^2_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$ *réalisée par l*'opérateur $\widetilde{l}_2$*].*

(c) *L*'image *de l'APPLICATION DE RESTRICTION* $\widetilde{r}_2$*, dans l'ESPACE :*

$$[Ext_\theta(G', \Gamma)]^G$$

des CLASSES D'EXTENSIONS Q-NORMALES, coïncide *avec le "NOYAU"* $\mathrm{Ker}\,\widetilde{t}_3$ *de l'APPLICATION DE TRANSGRESSION* $\widetilde{t}_3$ identifiée *à l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER, constitué par l*'image réciproque : $\mathrm{Ker}\,\widetilde{t}_3 = (\widetilde{t}_3)^{-1}(1)$ *par l*'application $\widetilde{t}_3$ *de l*'élément neutre 1 *du groupe abélien* $H^3_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G', \Gamma))$.

(d) *L*'image *de l'APPLICATION DE TRANSGRESSION* $\widetilde{t}_3$ *identifiée à l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER,* coïncide *avec le NOYAU* $\mathrm{Ker}\,\hat{l}_3$ *de l'HOMOMORPHISME D'INFLATION* $\hat{l}_3$*, qui est un morphisme de groupes abéliens.*

PREUVE - Compte tenu de la condition (8) qui résulte du Théorème 4-6 de [7], l'*interprétation* du Théorème 7-2 achève la démonstration.

REMARQUE 7-4 - Pour établir l'existence de la *"suite exacte fondamentale"* du Théorème 7-2 ou du Théorème 7-3, la méthode utilisée donne une démonstration *directe* ou *"à la main"*, sans utilisation de suite spectrale.

8. LES SUITES EXACTES EN HAUTES DIMENSIONS.

On se propose de généraliser la Propriété (C) de l'Introduction, dans le cas des *"hautes dimensions"*, c'est-à-dire pour les dimensions $m \geq 3$.

THEOREME 8-1 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G *qui déterminent le PSEUDO-MODULE*

$P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $Q = G'' = G/G'$, *et pour un entier* $m \geq 3$, *vérifiant la condition :*

$$\hat{H}^n(P') = \hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma) = \{1\} \quad \textit{pour}\ 0 < n < m$$

il existe une suite exacte *de la forme :*

$$\{1\} \longrightarrow H^m_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_m} \hat{H}^m_{\theta}(G, \Gamma) \xrightarrow{\hat{r}_m} [\hat{H}^m_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

$$\xrightarrow{\hat{t}_{m+1}} H^{m+1}_{\theta''}(G'', \hat{H}^0_{\theta'}(G',\Gamma)) \xrightarrow{\hat{l}_{m+1}} \hat{H}^{m+1}_{\theta}(G, \Gamma)$$

dans laquelle $\hat{r}_m$ *est l'HOMOMORPHISME DE RESTRICTION, dans laquelle* $\hat{l}_m$ *et* $\hat{l}_{m+1}$ *sont les HOMOMORPHISMES D'INFLATION et dans laquelle* $\hat{t}_{m+1}$ *est un HOMOMORPHISME déterminé par la TRANSGRESSION en cohomologie abélienne.*

PREUVE - Le Théorème 2-4 montre qu'il suffit d'appliquer la Propriété (C) de l'Introduction, c'est-à-dire le Théorème 2 page 129 de [13], au G-MODULE CENTRAL $X = (G, X, \theta) = X_\theta$ associé au PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ et au G'-MODULE CENTRAL $X' = (G', X, \theta') = X_{\theta'}$ associé au PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, ou déduit du G-*module* X par restriction au sous-groupe distingué G' du groupe G, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 8-2 - Contrairement aux démonstrations *directes* ou *"à la main"* de l'existence de la *"suite exacte"* en basse dimension et de la *"suite exacte fondamentale"* en dimension *deux*, en *"hautes dimensions"* c'est-à-dire en dimensions $m \geq 3$, la démonstration de l'existence de la *suite exacte* du Théorème 8-1 repose sur le Théorème 2 page 129 de [13], dont la démonstration utilise *explicitement* la fameuse SUITE SPECTRALE DE HOCHSCHILD-SERRE.

9. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

La très grande variété des *exemples potentiels,* résulte de la possibilité d'appliquer chacun des Théorèmes précédents à la multiplicité des *choix possibles* des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \; ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *arbitraire* et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' *quelconque* du groupe G.

En effet, pour avoir une première idée de cette très grande variété des *exemples potentiels,* il suffit d'examiner les *énoncés* et les *interprétations* de chacun des Théorèmes *obtenus* en choisissant un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ de l'*un des types* de la liste des exemples de PSEUDO-MODULES donnée dans les Exemples 3-2 de [8], ce qui est laissé aux soins du lecteur.

Il convient néanmoins de préciser quelques particularités.

Le *"cas classique des* G-*modules"* correspond au cas dans lequel le PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *représente canoniquement* un G-*module* M, ce qui est obtenu en identifiant canoniquement le *groupe abélien* M à l'*anneau-groupe :*

$$\Gamma = [V \; ; M] = \widetilde{M} = I(M) = [\mathbb{Z}[M] \; ; M]$$

et la *structure* du G-*module* M déterminée par le morphisme de groupes $\theta \in \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(M)]$ au *"caractère collectif"* REALISABLE $\theta \in \mathfrak{R}(G, \Gamma) = \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}_e(\Gamma)]$ du groupe G dans l'anneau-groupe $\Gamma = \widetilde{M}$.

Dans ce cas, les Exemples (b) du paragraphe 9 de [6] montrent que la θ-COHOMOLOGIE CENTRALE $\hat{H}^*_\theta(G, M)$ du groupe G dans l'anneau-groupe $\widetilde{M}$, identifié au *groupe abélien* M, est caractérisée par la *cohomologie abélienne* ordinaire :

$$\hat{H}^*_\theta(G, M) = H^*_\theta(G, M) = H^*(G, M)$$

du G-*module* $M = M_\theta$ et que la θ-COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2_\theta(G, M)$ du groupe G dans l'anneau-groupe $\widetilde{M}$, identifié au *groupe abélien* M, est déterminée par une *identification canonique :*

$$\widetilde{H}^2_\theta(G, M) = \hat{H}^2_\theta(G, M) = H^2_\theta(G, M) = H^2(G, M)$$

Ainsi, dans le *"cas classique des G-modules"*, toutes les "SUITES EXACTES" des Théorèmes précédents deviennent alors de *véritables* SUITES EXACTES DE GROUPES ABELIENS.

En particulier, le Théorème 3-5, le Théorème 4-3, le Théorème 7-2 et le Théorème 8-1 donnent alors les SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE *classiques* pour les G-*modules.*

D'une part, ces résultats montrent bien que la théorie précédente des SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE EN COHOMOLOGIE NON ABELIENNE constitue une *généralisation complète* de la théorie classique des SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE, relative au *"cas particulier des* G-*modules".*

D'autre part, l'*interprétation* de la *"suite exacte fondamentale"* du Théorème 7-3, à l'aide de l'ESPACE $Ext_\theta(G, \Gamma)$, DES CLASSES DE θ-EXTENSIONS de l'anneau-groupe Γ par le groupe G et de l'ESPACE $[Ext_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$ des CLASSES D'EXTENSIONS Q-NORMALES, donne de *nouveaux résultats,* même en se limitant au *"cas particulier classique des* G-*modules".*

Plus généralement les Exemples (b) du paragraphe 9 de [6] montrent que dans le "CAS ABELIEN", c'est-à-dire dans le cas où l'anneau-groupe $\Gamma = [V ; M]$ est ABELIEN, ce qui signifie qu'il vérifie la condition :

$$Zg(\Gamma) = X = M = Gr(\Gamma)$$

équivalente à la condition :

$$Gr(\Gamma) = M \subset Z(V) = Z[An(\Gamma)]$$

alors, *il n'y a pas d'obstruction* et tout PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est déterminé simplement par un *"caractère"* quelconque $\theta \in Mor[G, Aut(\Gamma)]$ du groupe G dans l'anneau-groupe ABELIEN $\Gamma = [V ; M]$, de sorte qu'il existe également une *identification canonique :*

$$\widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \hat{H}^2_\theta(G, \Gamma) = H^2_\theta(G, X) = H^2(G, X)$$

Ainsi, dans le "CAS ABELIEN", toutes les "SUITES EXACTES" des Théorèmes précédents deviennent alors de *véritables* SUITES EXACTES DE GROUPES ABELIENS.

Après ces deux *classes d'exemples* constituées par le *"cas particulier classique des* G-*modules"* et par le "CAS ABELIEN", il convient de mentionner l'existence de deux autres vastes *classes d'exemples* désignées respectivement par le "CAS DES GROUPES" et par le "CAS DES ANNEAUX".

Compte tenu des Exemples 3-2 de [6], le "CAS DES GROUPES" est obtenu lorsque le PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est choisi de façon à ce que l'anneau-groupe $\Gamma = [V ; M]$ *coïncide* avec l'anneau-groupe :

$$\widetilde{M} = I(M) = [\mathbf{Z}[M] ; M]$$

canoniquement associé à un *groupe* M *quelconque.*

Compte tenu des Exemples 3-1 de [6], le "CAS DES ANNEAUX" est obtenu lorsque le PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est choisi de façon à ce que l'anneau-groupe $\Gamma = [V ; M]$ coïncide avec l'anneau-groupe :

$$\hat{V} = \mathfrak{J}(V) = [V ; V^*]$$

canoniquement associé à un *anneau* V *quelconque.*

Naturellement, ces quatre vastes *classes d'exemples* n'épuisent pas la totalité des *choix possibles* d'*exemples potentiels.*

En effet, le "CAS GENERAL" correspond évidemment au cas obtenu lorsque l'anneau-groupe $\Gamma = [V ; M]$ est *quelconque,* ce qui laisse une *grande liberté* dans le choix d'un *anneau* V *tout à fait arbitraire* et ensuite dans le choix du *"paramètre"* constitué par le *groupe* M, assujetti à la seule condition d'être un *sous-groupe intermédiaire :* $\{1\} \subset M \subset V^*$.

Cette *grande liberté* permet, par des choix convenables, de se placer dans de nombreux cas particuliers classiques ou non [tels que ceux des Exemples 3-4 de [6] relatifs aux groupes d'automorphismes de certains anneaux], dont l'examen est laissé aux soins du lecteur.

Par exemple, le *"cas extrême"* obtenu en choisissant : $M = V^*$, correspond naturellement au "CAS DES ANNEAUX" déjà rencontré, mais l'autre *"cas extrême"* obtenu en choisissant : $M = \{1\}$, correspond au "CAS DES ACTIONS DE GROUPES" dans lequel le PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est déterminé par un groupe G, un anneau-groupe $\Gamma = [V ; \{1\}]$ uniquement déterminé par l'anneau V et un *"caractère collectif"* automatiquent REALISABLE :

$$\theta \in \mathcal{M}(G, \Gamma) = \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}_e(\Gamma)] = \mathrm{Mor}[(G, \mathrm{Aut}(\Gamma)] = \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(V)]$$

du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, qui *coïncide* simplement avec un morphisme de groupes : $\theta \in \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(V)]$, du groupe G dans le groupe des automorphismes de l'anneau V, qui caractérise bien une *"action du groupe* G *sur l'anneau* V *quelconque".*

Il pourrait être intéressant d'examiner la *traduction* et l'*interprétation* des Théorèmes généraux précédents dans les divers cas particuliers qui viennent d'être évoqués.

Dans le *cadre non nécessairement abélien* des PSEUDO-MODULES, qui généralise le *"cas classique des* G-*modules"* et qui *englobe* en particulier à la fois le "CAS DES GROUPES" et le "CAS DES ANNEAUX", l'existence de la *"suite exacte fondamentale"* du Théorème 7-2 et son *interpétation* par la *"suite exacte fondamentale"* du Théorème 7-3, semblent constituer les résultats les plus intéressants, puisqu'ils généralisent, aux EXTENSIONS Q-NORMALES et à une COHOMOLOGIE NON ABELIENNE, les propriétés classiques relatives aux *algèbres* Q-*normales* et à la *cohomologie galoisienne.*

REFERENCES

[1] E. ARTIN and J. TATE, *Class Field Theory,* W.A. Benjamin, Inc. New York. Amsterdam, (1967).

[2] R. BAER, *Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen*, Math. Zeit., 38, (1934), 375-416.

[3] S.EILENBERG and S. Mac LANE, *Cohomology theory in abstract groups*, Ann. of Math., 48, (1947), 51-78.

[4] S. EILENBERG and S. Mac LANE, *Cohomology theory in abstract groups.* II, *Group Extensions with a non-Abelien Kernel,* Ann. of Math., 48, (1947), 326-341.

[5] S. EILENBERG and S. Mac LANE, *Cohomology and Galois Theory.* I *Normality of Algebras and Teichmüller's Cocycle,* Trans. Amer. Math.Soc., 64, (1948), 1-20.

[6] M. HACQUE, *Cohomologies des anneaux-groupes,* Comm. in Algebra., 18, (1990), 3933-3997.

[7] M.HACQUE, *Produits croisés mixtes : extensions de groupes et extensions d'anneaux,* Comm. in Algebra., 19, (1991), 1993-2049.

[8] M. HACQUE, *Fonctorialité d'une cohomologie non abélienne,* Publ. du Dép. de Math., Université Claude Bernard LYON I, Nouvelle série (à paraître).

[9] M.HACQUE, *Extensions Q-normales,* Publ. du Dép. de Math., Université Claude Bernard LYON I, Nouvelle série (à paraître).

[10] A. HATTORI, *On fundamental exact sequences,* J. Math. Soc. Japan., 12, (1960), 65-80.

[11] G. HOCHSCHILD, *Local Class Field Theory*, Ann. of Math., 51, (1950), 331-347.

[12] G. HOCHSCHILD and T. NAKAYAMA, *Cohomology in Class Field Theory*, Ann. of Math., 55, (1952), 348-366.

[13] G. HOCHSCHILD and J.P. SERRE, *Cohomology of group extensions*, Trans. Amer. Math. Soc., 74, (1953), 110-134.

[14] Y. KAWADA, *Cohomology of group extensions*, Jour. Fac. Sci. Tokyo., 9, (1963), 417-431.

[15] S. LANG, *Rapport sur la Cohomologie des Groupes*, W.A. Benjamin, Inc. New York. Amsterdam, (1966).

[16] R.C. LYNDON, *The Cohomology Theory of Group Extensions*, Duke. Math. J., 15, (1948), 271-292.

[17] S. Mac LANE, *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 114, Springer-Verlag, Berlin, (1967).

[18] J.P. SERRE, *Cohomologie des extensions de groupes*, C.R.A.S. Paris., 231, (1950), 643-646.

[19] J.P. SERRE, *Corps locaux*, Herman, Paris, (1962).

[20] A. SPEISER, *Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie*, Math. Zeit., 5, (1919), 1-6.

[21] J. TATE, *The higher dimensional cohomology groups of class field theory*, Ann. of Math., 56, (1952), 294-297.

[22] O. TEICHMÜLLER, *Über die sogenannte nichtkommutative Galoissche Theorie und die Relation ...*
Deutsche Mathematik., 5, (1940), 138-149.