PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MICHEL HACQUE

Fonctorialité d'une cohomologie non abélienne

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1993, fascicule 1
« Fonctorialité d'une cohomologie non abélienne », , p. 1-71
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1993___1_A1_0>

FONCTORIALITE D'UNE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE

Michel HACQUE

Institut de Mathématiques et Informatique de l'I.S.M.
Université Claude-Bernard - LYON 1
69622 VILLEURBANNE, FRANCE

INTRODUCTION

Dans les diverses *"cohomologies non abéliennes"* classiques, il est relativement facile de caractériser << un H^0 >> et << un H^1 >>, ayant de bonnes propriétés et de *"bons comportements"*, mais il est quelquefois impossible et souvent délicat de construire << un H^2 >> convenable et d'en dégager des propriétés agréables (voir par exemple [3], [4], [8], [9], [10], [11], [17], [20], [21], [22], [23], [24], [25]).

La COHOMOLOGIE NON ABELIENNE dont il s'agit ici est la cohomologie non abélienne caractérisée par le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\widetilde{H}^2(G, \Gamma)$$

d'un GROUPE G dans un ANNEAU - GROUPE Γ, qui a été défini et étudié dans le DIPTYQUE constitué par les deux articles précédents :

COHOMOLOGIES DES ANNEAUX - GROUPES [12] ;

et

PRODUITS CROISES MIXTES : EXTENSIONS DE GROUPES ET EXTENSIONS D'ANNEAUX [13] ;

dont on conserve la terminologie et les notations.

Comme cela a été annoncé à la fin de [13], le présent travail constitue la PREMIERE ANNEXE à ce DIPTYQUE.

Après un résultat préliminaire relatif au changement de groupe (Proposition 2.2), on explique les motivations de l'introduction de la notion nouvelle de PSEUDO-MODULE (Définition 3-1), dont on donne de très nombreux exemples et qui constitue la généralisation naturelle de la notion classique de G - *module*, dans *un cadre non nécessairement abélien* qui *englobe* à la fois le *"cas des groupes"* et le *"cas des anneaux"*.

Dans ce cadre général, la situation est beaucoup plus compliquée que dans le cas des G - *modules*, de sorte que le *choix* des MORPHISMES n'est pas évident et que leur caractérisation (Définition 4-8) nécessite au préalable une *construction technique* (Lemme 4-7) qui aboutit à l'existence et à la caractérisation de la CATEGORIE $\mathcal{P}$ DES PSEUDO - MODULES (Théorème 4-9).

L'introduction de cette CATEGORIE $\mathcal{P}$ DES PSEUDO - MODULES se trouve justifiée par la possibilité de montrer la "FONCTORIALITE" du SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2(\,.\,)$ (Théorème 5-2) et aussi par la possibilité de montrer la "FONCTORIALITE" de la COHOMOLOGIE CENTRALE $\hat{H}^*(\,.\,)$ (Théorème 6-4), ce qui entraîne ensuite (Théorème 6-6) que le SECOND FONCTEUR DE COHOMOLOGIE CENTRALE $\hat{H}^2(\,.\,)$, à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, opère *librement* et *transitivement* sur le FONCTEUR DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2(\,.\,)$, qui est donc *en fait* à valeurs dans la CATEGORIE DES ENSEMBLES HOMOGENES PRINCIPAUX (à groupe d'opérateurs variable).

Pour illustrer l'intérêt et l'efficacité de ces résultats, on donne d'abord une application aux EXTENSIONS DISTINGUEES (Théorème 7-1) et des applications aux MORPHISMES D'EXTENSIONS (Théorème 8-1, Théorème 8-7 et Corollaire 8-8), ce qui constitue une généralisation, dans *le cadre non nécessairement abélien*, de deux Théorèmes de ARTIN -TATE, relatifs au cas particulier de la *cohomologie abélienne des groupes* [1].

Ensuite, on donne des applications au PROLONGEMENT D'ISOMORPHISMES (Théorème 9-2) et au PROLONGEMENT D'AUTOMORPHISMES (Théorème 9-3, Théorème 9-5 et Corollaire 9-6).

Par exemple, il en résulte une propriété des AUTOMORPHISMES DES EXTENSIONS (Théorème 9-8) qui constitue la généralisation d'un Théorème de C. WELLS, relatif aux automorphismes des extensions de groupes [26].

De même, il convient de noter que les résultats précédents fournissent les *principaux outils* utilisés dans des travaux ultérieurs [14] et [15], qui constituent des ANNEXES au DIPTYQUE formé par [12] et [13], la SECONDE ANNEXE [14] étant consacrée aux EXTENSIONS Q-NORMALES, ce qui généralise la théorie classique des *algèbres* Q - *normales* [7], et la TROISIEME ANNEXE [15] étant consacrée aux SUITES DE HOCHSCHILD-SERRE EN COHOMOLOGIE NON ABELIENNE.

1. PRELIMINAIRES.

On se propose d'étudier le *"comportement fonctoriel"* du SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\widetilde{H}^2(G, \Gamma)$$

d'un *groupe* G dans un *anneau-groupe* Γ.

Cet espace a été introduit et étudié dans les deux articles [12] et [13], dont on conserve la terminologie et les notations, (et auxquels il est conseillé de se reporter pour un exposé détaillé).

On rappelle néanmoins la terminologie et les notations de base, ainsi que l'essentiel des résultats obtenus.

Pour les raisons exposées dans l'Introduction de [12], on a été amené à considérer de nouveaux OBJETS appelés des ANNEAUX - GROUPES, dont on peut se rendre compte de la *présence implicite* dans un grand nombre de questions, comme le montrent d'ailleurs les exemples donnés dans [12] et [13], ainsi que les applications aux EXTENSIONS DE GROUPES et aux EXTENSIONS D'ANNEAUX.

Un *anneau - groupe* Γ est un couple $\Gamma = [V; M]$ constitué par un *anneau* V et un *groupe* M qui est un sous-groupe du groupe multiplicatif V^* des éléments inversibles de l'anneau V.

Pour deux anneaux-groupes $\Gamma = [V; M]$ et $\Gamma' = [V'; M']$, l'ensemble Hom (Γ, Γ') des *morphismes d'anneaux-groupes :*

$$f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$$

est constitué par les *morphismes d'anneaux* :

$$f : V \longrightarrow V'$$

qui vérifient : $f(M) \subset M'$, c'est-à-dire qui *induisent* un *morphisme de groupes*, noté également :

$$f : M \longrightarrow M'$$

Ainsi, un *morphisme d'anneaux-groupes* $f \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \Gamma')$ est *à la fois* un morphisme d'anneaux $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$ et un morphisme de groupes $f \in \mathrm{Mor}[M, M']$, obtenu par *"restriction"*.

Naturellement, ces conditions caractérisent une catégorie $\mathcal{C}$ appelée la CATEGORIE DES ANNEAUX-GROUPES.

En particulier, pour tout anneau-groupe $\Gamma = [V; M]$ le *groupe des automorphismes* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ est caractérisé par la condition :

$$\mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Stab}\,[\mathrm{Aut}(V); M]$$

c'est-à-dire constitué par les *automorphismes d'anneaux* $f \in \mathrm{Aut}(V)$, qui *stabilisent* M, c'est-à-dire qui *induisent* sur M un *automorphisme de groupes* noté également $f \in \mathrm{Aut}(M)$.

Tout anneau-groupe $\Gamma = [V; M]$ détermine *l'anneau sous-jacent* $V = \mathrm{An}(\Gamma)$, le *groupe sous-jacent* $M = \mathrm{Gr}(\Gamma)$ et le *centre-groupe* $X = \mathrm{Zg}(\Gamma)$, qui est le *groupe abélien* caractérisé par la condition:

$$X = \mathrm{Zg}(\Gamma) = \mathrm{Gr}(\Gamma) \cap Z\,[\mathrm{An}(\Gamma)] = M \cap Z(V)$$

La Proposition 2-4 de [12] établit l'existence d'un diagramme commutatif et exact canonique :

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r] & \mathrm{Zg}(\Gamma) \arrow[r, "i"] & \mathrm{Gr}(\Gamma) \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Aut}(\Gamma) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "r"'] & \mathrm{Aut}_e(\Gamma) \arrow[r] \arrow[dl, "\varpi"] & (I) \\ & & & \mathrm{Aut}[\mathrm{Zg}(\Gamma)] & & \end{tikzcd}$$

dans lequel ω est le morphisme de groupes qui, à tout $a \in M = \mathrm{Gr}(\Gamma)$, associe *l'automorphisme intérieur* $\omega(a) = \langle a \rangle$ de l'anneau-groupe Γ constitué par le *couple* d'automorphismes intérieurs :

$$\langle a \rangle_V \in \mathrm{Aut}_i(V) \qquad \text{et} \qquad \langle a \rangle_M \in \mathrm{Aut}_i(M)$$

de la forme : $x \longrightarrow axa^{-1}$, pour tout $x \in V$ ou pour tout $x \in M$, et dont *l'image* constitue le *groupe des automorphismes intérieurs* $\mathrm{Aut}_i(\Gamma)$, de sorte que le Lemme 2-2 de [12] montre l'existence d'une suite exacte canonique :

$$(2) \qquad \{1\} \longrightarrow \mathrm{Aut}_i(\Gamma) \xrightarrow{j} \mathrm{Aut}(\Gamma) \xrightarrow{q} \mathrm{Aut}_e(\Gamma) \longrightarrow \{1\}$$

qui caractérise le *groupe des classes d'automorphismes extérieurs* $\mathrm{Aut}_e(\Gamma)$, appelé également plus simplement le *groupe des automorphismes extérieurs* de l'anneau-groupe Γ.

En adoptant une terminologie qui généralise les notions de *"Kollektivcharakter"* et de *"Charakter"* au sens de R. BAER (p. 377 de [2]), un *groupe* G et un *anneau-groupe* Γ déterminent l'ensemble pointé :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma) = \mathrm{Mor}\,[G, \mathrm{Aut}_e(\Gamma)]$$

des *"caractères collectifs"* du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, et aussi l'ensemble pointé :

$$\mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(\Gamma)]$$

des *"caractères"* du groupe G dans l'anneau-groupe Γ.

Avec la terminologie et les notations de [12] et [13], on rappelle rapidement les propriétés suivantes.

Le Lemme 4-5 de [12] établit que le *groupe* $\hat{C}^1(G, \Gamma)$ des 1 - *cochaînes généralisées* faibles de G dans Γ *opère à gauche* par une *action* $*$ sur *l'ensemble* $\hat{C}^2(G, \Gamma)$ des 2 - *cochaînes généralisées* de G dans Γ et le Théorème 4-8 de [12] montre que les *orbites*, qui constituent les *"classes de cohomologie faible"* du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, sont exactement les *fibres* :

$$\hat{C}^2_\theta(G, \Gamma) = \chi^{-1}(\theta)$$

de *l'application de projection surjective* :

$$\chi : \hat{C}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma)$$

au dessus des *"caractères collectifs"* $\theta \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma)$.

Le Théorème 6-5 de [12] montre que le $\mathcal{M}$ - *ensemble* $\hat{C}^2(G, \Gamma)$ des 2 - *cochaînes généralisées* de G dans Γ, le $\mathcal{M}$ - *groupe* $Z^3(G, \Gamma)$ des 3 - COCYCLES (CENTRAUX) de G dans Γ et le *troisième* $\mathcal{M}$ - *groupe* $\hat{H}^3(G, \Gamma)$ de la COHOMOLOGIE CENTRALE de G dans Γ sont liés par un diagramme commutatif de la forme :

(3)
$$\begin{tikzcd}
\hat{C}^2(G, \Gamma) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\chi"'] \arrow[dr, "\hat{T}"] & Z^3(G, \Gamma) \arrow[d, "(\hat{\ })"] \\
\overline{H}^2(G, M) \simeq \mathcal{M}(G, \Gamma) \arrow[r, "\overline{T}"] & \hat{H}^3(G, \Gamma)
\end{tikzcd}$$

dans lequel $(\hat{\ })$ est le *morphisme surjectif* de $\mathcal{M}$ - *groupes abéliens* canonique et dans lequel les $\mathcal{M}$ - applications T, $\hat{T}$ et $\overline{T}$ sont respectivement l'APPLICATION COCYCLE DE TEICHMÜLLER T, l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER $\hat{T}$ et l'APPLICATION OBSTRUCTION DE TEICHMÜLLER $\overline{T}$.

L'ensemble $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$ des *"caractères collectifs"* REALISABLES du groupe G dans l'anneau-groupe Γ est l'ensemble pointé constitué par le NOYAU de l'APPLICATION OBSTRUCTION DE TEICHMÜLLER :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma) = \mathrm{Ker}\,\overline{T} = \overline{T}^{-1}\,[\hat{H}^3(G, \Gamma)'] = \overline{T}^{-1}\,[\{\hat{1}_\theta \mid \theta \in \mathcal{M}\}]$$

L'espace $\widetilde{Z}^2(G, \Gamma)$ des 2 - COCYCLES (GENERALISES) STRICTS de G dans Γ est constitué par le NOYAU de l'APPLICATION COCYCLE DE TEICHMÜLLER :

$$\widetilde{Z}^2(G, \Gamma) = \mathrm{Ker}\,T = T^{-1}[Z^3(G, \Gamma)'] = T^{-1}\,[\{1_\theta \mid \theta \in \mathcal{M}\}]$$

et le Théorème 7-4 de [12] montre qu'il est muni d'une structure de $\mathfrak{R}$ - *ensemble* caractérisée par une *partition* de la forme :

$$\widetilde{Z}^2(G, \Gamma) = \coprod_{\theta \in \mathfrak{R}} \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) \tag{4}$$

au moyen des espaces $\widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma)$ des θ - COCYCLES STRICTS de G dans Γ.

Le Lemme 8-2 de [12] établit que le groupe $\widetilde{C}^1(G, \Gamma)$ des 1 - COCHAINES (GENERALISEES) STRICTES de G dans Γ opère à gauche par une *action* $\widetilde{*}$ sur l'espace $\widetilde{Z}^2(G, \Gamma)$ des 2 - COCYCLES STRICTS de G dans Γ, ce qui détermine *l'ensemble quotient* :

$$\widetilde{H}^2(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(G, \Gamma) \Big/^{\widetilde{(*)}} \widetilde{C}^1(G, \Gamma) \tag{5}$$

appelé le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE du groupe G dans l'anneaux-groupe Γ, et le Théorème 8-6 de [12] montre qu'il est muni d'une structure de $\mathfrak{R}$ - *ensemble* caractérisée par une *partition* de la forme :

(6) $$\widetilde{H}^2(G,\Gamma) = \coprod_{\theta \in \mathfrak{R}} \widetilde{H}^2_\theta(G,\Gamma)$$

dans laquelle, pour tout *"caractère collectif"* REALISABLE $\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G,\Gamma)$, le SECOND ESPACE DE θ- COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2_\theta(G,\Gamma)$ du groupe G dans l'anneau-groupe Γ est construit comme *l'ensemble quotient* :

(7) $$\widetilde{H}^2_\theta(G,\Gamma) = \widetilde{Z}^2_\theta(G,\Gamma) \Big/ ^{\widetilde{(*)}} \widetilde{C}^1(G,\Gamma)$$

de l'espace $\widetilde{Z}^2_\theta(G,\Gamma) = \mathrm{Ker}\, T_\theta$ des θ - COCYCLES STRICTS de G dans Γ, par *l'action* $\widetilde{*}$ du groupe $\widetilde{C}^1(G,\Gamma)$ des 1 - COCHAINES STRICTES de G dans Γ.

Le Lemme 8-5 de [12] montre que pour tout *"caractère collectif"* REALISABLE $\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G,\Gamma)$, le groupe $Z^2_\theta(G,\Gamma) = Z^2_\theta(G,X)$ des θ - 2 - COCYCLES (CENTRAUX) de G dans Γ *opère à gauche* sur l'espace $\widetilde{Z}^2_\theta(G,\Gamma)$ des θ - COCYCLES STRICTS de G dans Γ par *une action* :

(8) $$Z^2_\theta(G,\Gamma) \times \widetilde{Z}^2_\theta(G,\Gamma) \xrightarrow{\ o\ } \widetilde{Z}^2_\theta(G,\Gamma)$$

caractérisée par la condition :

(8') $$b \circ (\eta, m) = (1, b) * (\eta, m)$$

et que, *par passage aux quotients,* elle détermine une *action* :

(9) $$\hat{H}^2_\theta(G,\Gamma) \times \widetilde{H}^2_\theta(G,\Gamma) \xrightarrow{\ \widetilde{o}\ } \widetilde{H}^2_\theta(G,\Gamma)$$

du *deuxième groupe* $\hat{H}^2_\theta\,(G, \Gamma)$ de la θ - COHOMOLOGIE CENTRALE de G dans Γ sur le SECOND ESPACE DE θ - COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2_\theta\,(G, \Gamma)$ du groupe G dans l'anneau-groupe Γ.

Le Théorème 8-6 de [12] établit alors que pour tout *"caractère collectif"* REALISABLE $\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$, qui détermine le SECOND ESPACE DE θ - COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2_\theta\,(G, \Gamma)$ du groupe G dans l'anneau-groupe Γ et aussi le *deuxième groupe* $\hat{H}^2_\theta\,(G, \Gamma) = H^2_\theta\,(G, X)$ de la θ - COHOMOLOGIE CENTRALE de G dans Γ, *l'action* :

$$\text{(10)} \qquad \hat{H}^2_\theta\,(G, \Gamma) \times \widetilde{H}^2_\theta\,(G, \Gamma) \xrightarrow{\ \tilde{o}\ } \widetilde{H}^2_\theta\,(G, \Gamma)$$

fait opérer le groupe abélien $\hat{H}^2_\theta\,(G, \Gamma)$ *librement* (ou *fidèlement*) et *transitivement* sur l'espace $\widetilde{H}^2_\theta\,(G, \Gamma)$, qui est donc muni d'une structure de $\hat{H}^2_\theta\,(G, \Gamma)$ - *ensemble homogène principal.*

Enfin, en ce qui concerne les PROBLEMES D'EXTENSIONS, la notion d'EXTENSION DISTINGUEE d'anneaux-groupes (Définition 1-2 de [13]) conduit à considérer (Définition 1-5 de [13]) l'ensemble :

$$\mathrm{Ext}\,(G, \Gamma)$$

des CLASSES D'EXTENSIONS DE l'ANNEAU-GROUPE Γ PAR LE GROUPE G.

Le Théorème 4-6 de [13] montre alors que l'espace Ext (G, Γ) est un $\mathfrak{R}$ - *ensemble* caractérisé par la partition :

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{Ext}\,(G, \Gamma) = \coprod_{\theta \in \mathfrak{R}} \mathrm{Ext}_\theta\,(G, \Gamma)$$

dans laquelle $\mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$ est l'espace des CLASSES DE θ - EXTENSIONS de Γ par G, et qu'il existe un *isomorphisme* de $\mathfrak{R}$ - *ensembles* :

(12) $$\xi_{G,\Gamma} : \mathrm{Ext}\,(G, \Gamma) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^2\,(G, \Gamma)$$

déterminé par les *bijections canoniques* :

(13) $$\xi^{\theta}_{G,\,\Gamma} : \mathrm{Ext}_{\theta}\,(G, \Gamma) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^2_{\theta}\,(G, \Gamma)$$

induites par $\xi_{G,\ \Gamma}$, pour tout $\theta \in \mathfrak{R}\ (G, \Gamma)$.

Ces résultats réalisent la CLASSIFICATION des EXTENSIONS de Γ par G.

La terminologie, les notations et les propriétés qui viennent d'être rappelées, seront librement utilisées dans la suite.

2. CHANGEMENT DE GROUPE.

Pour étudier le *"comportement fonctoriel"* du SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\widetilde{H}^2(G, \Gamma)$$

d'un *groupe* G dans un *anneau-groupe* Γ, on commence par *fixer* l'anneau-groupe Γ et par examiner le comportement par rapport au premier argument constitué par le *groupe* G.

Deux groupes G et G' déterminent les espaces :

$$\widetilde{H}^2(G, \Gamma) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{H}^2(G', \Gamma)$$

Il est presque évident que tout morphisme de groupes :

$$\varphi : G' \longrightarrow G$$

détermine une application :

$$\varphi^* : \widetilde{H}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \widetilde{H}^2(G', \Gamma)$$

dont on va donner la *description* et prouver *l'existence*.

Tout d'abord, il existe un morphisme d'ensembles pointés :

$$\varphi^* : \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma) \longrightarrow \mathcal{M}' = \mathcal{M}(G', \Gamma)$$

qui, à tout $\theta \in \mathcal{M}$, associe $\varphi^*(\theta) = \theta' \in \mathcal{M}'$, caractérisé par la condition :

$$\varphi^*(\theta) = \theta' = \theta \circ \varphi$$

Ensuite, il *existe* des applications, notées également :

$$\varphi^* : \hat{C}^1(G, \Gamma) \longrightarrow \hat{C}^1(G', \Gamma)$$

et

$$\varphi^* : \hat{C}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \hat{C}^2(G', \Gamma)$$

qui, à tout :

$$(a, b) = ((a_\alpha),\ (b_{\alpha, \beta})) \in \hat{C}^1(G, \Gamma)$$

et à tout :

$$(\eta, m) = ((\eta_\alpha)), (m_{\alpha, \beta})) \in \hat{C}^2(G, \Gamma)$$

associent respectivement :

$$\varphi^*[(a, b)] = (a', b') = ((a'_{\alpha'}) , (b'_{\alpha',\beta'})) \in \hat{C}^1(G', \Gamma)$$

et

$$\varphi^* [(\eta, m)] = (\eta', m') = ((\eta'_{\alpha'}) , (m'_{\alpha',\beta'})) \in \hat{C}^2(G', \Gamma)$$

caractérisés par :

$$a'_{\alpha'} = a_{\varphi(\alpha')} \quad ; \quad b'_{\alpha',\beta'} = b_{\varphi(\alpha'), \varphi(\beta')}$$

et

$$\eta'_{\alpha'} = \eta_{\varphi(\alpha')} \quad ; \quad m'_{\alpha',\beta'} = m_{\varphi(\alpha'), \varphi(\beta')}$$

pour tout $\alpha' \in G'$ et tout $(\alpha', \beta') \in G'^2$.

En effet, ces conditions entraînent immédiatement *l'existence* des deux applications envisagées.

LEMME 2-1 - *Etant donnés un anneau-groupe* $\Gamma = [V ; M]$ *et deux groupes* G *et* G', *pour tout morphisme des groupes :*

$$\varphi : G' \longrightarrow G$$

les restrictions des trois applications φ^* *précédentes déterminent une application :*

$$\varphi^* : \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma) \longrightarrow \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}(G', \Gamma)$$

et deux applications :

$$\varphi^* : \tilde{C}^1(G, \Gamma) \longrightarrow \tilde{C}^1(G', \Gamma)$$

et

$$\varphi^* : \tilde{Z}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \tilde{Z}^2(G', \Gamma)$$

compatibles *avec les* **actions** $\tilde{*}$ *et* $\tilde{*}'$, *de sorte que, par passage aux quotients, elles déterminent une application :*

$$\varphi^* : \widetilde{H}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \widetilde{H}^2(G', \Gamma)$$

caractérisée par ses restrictions :

$$\varphi^*_\theta : \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \longrightarrow \widetilde{H}^2_{\varphi^*(\theta)}(G', \Gamma)$$

pour tout $\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$.

PREUVE. - Avec des notations évidentes adaptées aux groupes G et G', le Lemme 4-5 de [12] entraîne la relation :

$$\varphi^*[(a, b) * (\eta, m)] = \varphi^*[(a,b)] *' \varphi^*[(\eta, m)]$$

c'est-à-dire la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \hat{C}^1(G, \Gamma) & \times & \hat{C}^2(G, \Gamma) & \xrightarrow{\;*\;} & \hat{C}^2(G, \Gamma) \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* \\ \hat{C}^1(G', \Gamma) & \times & \hat{C}^2(G', \Gamma) & \xrightarrow{\;*'\;} & \hat{C}^2(G', \Gamma) \end{array}$$

qui exprime que les applications φ^* sont *compatibles* avec les *actions* $*$ et $*'$, associées aux groupe G et G'.

En particulier, compte tenu du Théorème 4-8 de [12], il en résulte que l'application :

$$\varphi^* : \hat{C}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \hat{C}^2(G', \Gamma)$$

est caractérisée par ses restrictions notées :

$$\varphi^*_\theta : \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma) \longrightarrow \hat{C}^2_{\varphi^*(\theta)}(G', \Gamma)$$

pour tout $\theta \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma)$.

De même, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, en considérant le complexe des $\mathcal{M}$ - *groupes abéliens* des n - COCHAINES CENTRALES :

$$\underline{C}^n(G, \Gamma) = \coprod_{\theta \in \mathcal{M}} \underline{C}^n_\theta(G, \Gamma) = \coprod_{\theta \in \mathcal{M}} C^n_\theta(G, X)$$

et le complexe des $\mathcal{M}'$- groupes abéliens de n - COCHAINES CENTRALES :

$$\underline{C}^n(G', \Gamma) = \coprod_{\theta' \in \mathcal{M}'} \underline{C}^n_{\theta'}(G', \Gamma) = \coprod_{\theta' \in \mathcal{M}'} C^n_{\theta'}(G', X)$$

il existe des applications notées également :

$$\varphi^* : \underline{C}^n(G, \Gamma) \longrightarrow \underline{C}^n(G', \Gamma)$$

caractérisées par leurs restrictions :

$$\varphi^*_\theta : C^n_\theta(G, X) \longrightarrow C^n_{\varphi^*(\theta)}(G', X)$$

qui peuvent également être définies de la façon habituelle, par le changement de groupe $\varphi : G' \longrightarrow G$, dans la théorie de la *cohomologie abélienne des groupes*.

En particulier, avec ces notations, le Lemme 6-2 de [12] entraîne que les APPLICATIONS COCYCLES DE TEICHMÜILLER constituées par la $\mathcal{M}$ - *application* :

$$T : \hat{C}^2(G, \Gamma) \longrightarrow Z^3(G, \Gamma)$$

et par la $\mathcal{M}'$ - *application* :

$$T' : \hat{C}^2(G', \Gamma) \longrightarrow Z^3(G', \Gamma)$$

vérifient la relation :

$$\varphi^* \circ T = T' \circ \varphi^*$$

En considérant les ensembles pointés de *"caractères collectifs"* REALISABLES :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma) = \operatorname{Ker} T \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}(G', \Gamma) = \operatorname{Ker} T'$$

la relation précédente entraîne que le morphisme d'ensembles pointés :

$$\varphi^* : \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma) \longrightarrow \mathcal{M}' = \mathcal{M}(G', \Gamma)$$

induit un morphisme d'ensembles pointés, noté également :

$$\varphi^* : \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma) \longrightarrow \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}(G', \Gamma)$$

et que l'application :

$$\varphi^* : \hat{C}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \hat{C}^2(G', \Gamma)$$

induit une application, notée également :

$$\varphi^* : \tilde{Z}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \tilde{Z}^2(G', \Gamma)$$

caractérisée par ses restrictions :

$$\varphi_\theta^* : \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) \longrightarrow \widetilde{Z}^2_{\varphi^*(\theta)}(G', \Gamma)$$

pour tout $\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$.

De plus, l'application :

$$\varphi^* : \hat{C}^1(G, \Gamma) \longrightarrow \hat{C}^1(G', \Gamma)$$

induit naturellement une application, notée également :

$$\varphi^* : \widetilde{C}^1(G, \Gamma) \longrightarrow \widetilde{C}^1(G', \Gamma)$$

Compte tenu de ces propriétés, le Lemme 8-2 de [12] montre que la commutativité du diagramme initial implique, *par restriction*, la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{C}^1(G, \Gamma) & \times & \widetilde{Z}^2(G, \Gamma) & \xrightarrow{\widetilde{*}} & \widetilde{Z}^2(G, \Gamma) \\
\varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* \\
\widetilde{C}^1(G', \Gamma) & \times & \widetilde{Z}^2(G', \Gamma) & \xrightarrow{\widetilde{*}'} & \widetilde{Z}^2(G', \Gamma)
\end{array}$$

qui exprime que les nouvelles applications φ^* sont *compatibles* avec les *actions* $\widetilde{*}$ et $\widetilde{*}'$, associées aux groupes G et G'.

Compte tenu des caractérisations :

$$\widetilde{H}^2(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(G, \Gamma) \Big/^{(\widetilde{*})}_{\widetilde{C}^1(G, \Gamma)} \quad \text{et} \quad \widetilde{H}^2(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(G', \Gamma) \Big/^{(\widetilde{*}')}_{\widetilde{C}^1(G', \Gamma)}$$

il en résulte immédiatement *l'existence* d'une application :

$$\varphi^* : \widetilde{H}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \widetilde{H}^2(G', \Gamma)$$

construite par passage aux quotients, et qui est caractérisée par ses restrictions :

$$\varphi_\theta^* : \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \longrightarrow \widetilde{H}^2_{\varphi^*(\theta)}(G', \Gamma)$$

pour tout $\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 2-2 - *Etant donné un anneau-groupe* $\Gamma = [V; M]$, *avec les notations précédentes, tout morphisme de groupes :*

$$\varphi : G' \longrightarrow G$$

détermine une application :

$$\widetilde{H}^2(\varphi, \Gamma) = \varphi^* : \widetilde{H}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \widetilde{H}^2(G', \Gamma)$$

caractérisée par ses restrictions :

$$\widetilde{H}^2_\theta(\varphi, \Gamma) = \varphi^*_\theta : \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \longrightarrow \widetilde{H}^2_{\varphi^*(\theta)}(G', \Gamma)$$

pour tout $\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$, *de telle sorte que :*

$$\widetilde{H}^2(\cdot, \Gamma)$$

caractérise un **foncteur contravariant** *de la catégorie des groupes dans la catégorie des ensembles.*

PREUVE - L'existence de φ^* et des φ^*_θ résulte du Lemme 2-1 et la vérification des conditions qui caractérisent un foncteur contravariant est immédiate, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 2-3 - En fait, tout morphisme de groupes $\varphi \in \mathrm{Mor}[G', G]$ détermine aussi un morphisme d'ensembles pointés :

$$\mathfrak{R}(\varphi, \Gamma) = \varphi^* : \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma) \longrightarrow \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}(G', \Gamma)$$

qui est *compatible* avec l'application $\widetilde{H}^2(\varphi, \Gamma) = \varphi^*$ du $\mathfrak{R}$ - *ensemble* $\widetilde{H}^2(G, \Gamma)$ dans le $\mathfrak{R}'$ - *ensemble* $\widetilde{H}^2(G', \Gamma)$.

Il en résulte en fait que :

$$\widetilde{H}^2(\cdot, \Gamma)$$

caractérise un foncteur contravariant de la catégorie des groupes dans la *"catégorie des ensembles avec bases pointées"*, dont la définition est évidente.

3. MODULES GENERALISES ET PSEUDO - MODULES .

La théorie classique de la *cohomologie abélienne des groupes* concerne les G - *modules* A , c'est-à-dire les triplets :

$$(G, A, \rho)$$

constitués par un groupe G, un *groupe abélien* A et un morphisme de groupes :

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$$

c'est-à-dire un *"caractère"* au sens de R. BAER [2] :

$$\rho \in \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(A)]$$

du groupe G dans le *groupe abélien* A (voir par exemple [5], [6], [7], [16], [18] et le Ch. IV de [19] ou le Ch. VII de [23])

La théorie classique de la *cohomologie non abélienne des groupes,* telle qu'elle est esquissée par J.P. SERRE dans l'ANNEXE pages 131 à 134 de [23] concerne les G - *modules non abéliens* A, c'est-à-dire les triplets :

$$(G, A, \rho)$$

constitués par un groupe G, un groupe A et un morphisme de groupes :

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$$

c'est-à-dire un *"caractère"* au sens de R. BAER [2] :

$$\rho \in \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(A)]$$

du groupe G dans le groupe A *non nécessairement abélien.*

Malgré son très grand intérêt dans un grand nombre de questions, cette théorie classique de la *cohomologie non abélienne des groupes* présente le double inconvénient de ne pas définir de groupes de la forme : $H^2(G, A)$, $H^3(G, A)$, ... , et de ne pas être adaptée aux *problèmes d'extensions de groupes quelconques* (c'est-à-dire à *noyau* non nécessairement abélien).

Pour ce qui concerne ce type de problèmes, la *"bonne cohomologie non abélienne des groupes"* résulte de la *"spécialisation au cas des groupes"* de la *"cohomologie non abélienne"* $\widetilde{H}^2(G, \Gamma)$ d'un groupe G dans un anneau-groupe Γ, telle qu'elle est exposée dans [12] et [13].

En particulier, pour cette *"nouvelle cohomologie non abélienne des groupes"*, qui est *bien adaptée aux problèmes d'extensions* on voit que la notion classique de G - *module* et la notion classique de G - *module non abélien*, qui est inadaptée aux problèmes d'extensions, sont insuffisantes et doivent être remplacées par la notion nouvelle de G - MODULE GENERALISE.

Les G - MODULES GENERALISES sont les triplets :

$$(G, A, \theta)$$

constitués par un groupe G, un groupe A *non nécessairement abélien* et un morphisme de groupes :

$$\theta : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_e(A)$$

c'est-à-dire un *"caractère collectif"* au sens de R. BAER [2] :

$$\theta \in \mathcal{M}(G,\ A) = \mathrm{Mor}\,[G, \mathrm{Aut}_e(A)]$$

du groupe G dans le groupe A *non nécessairement abélien.*

Il convient de noter que ces OBJETS coïncident avec les objets qui constituent un << ABSTRAC KERNEL >> au sens de S. Mac LANE (p. 124 de [19]).

Par exemple, il est immédiat que tout G - *module non abélien* (G, A, ρ) détermine canoniquement un G - MODULE GENERALISE (G, A, θ), dans lequel le *"caractère collectif"* $\theta \in \mathcal{M}(G, A)$ est le composé du *"caractère"*

$\rho \in \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(A)]$ et du morphisme de groupes canonique :

$$\mathrm{Aut}(A) \xrightarrow{q} \mathrm{Aut}_e(A)$$

et que dans le *"cas abélien"*, ces deux notions coïncident avec la notion de G - *module*, puisque q est alors un *isomorphisme.*

Lorqu'on passe du cas particulier des *groupes* A au cas général des *anneaux-groupes* $\Gamma = [V; M]$, les G - MODULES GENERALISES :

$$(G, A, \theta)$$

pourraient être remplacés par les triplets :

$$(G, \Gamma, \theta)$$

constitués par un groupe G, un anneau-groupe Γ et un morphisme de groupes :

$$\theta : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_e(\Gamma)$$

c'est-à-dire un *"caractère collectif"* :

$$\theta \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma) = \mathrm{Mor}\,[G, \mathrm{Aut}_e(\Gamma)$$

du groupe G dans l'anneau-groupe Γ.

Néanmoins, en vue des applications, cette *généralisation* doit être accompagnée d'une *restriction*, obtenue en ne considérant que des *"caractères collectifs"* REALISABLES :

$$\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma) = \mathrm{Ker}\, T$$

du groupe G dans l'anneau-groupe Γ.

Ces observations conduisent à la notion suivante .

DEFINITION 3-1 - *Un PSEUDO-MODULE* P *est un triplet :*

$$P = (G, \Gamma, \theta)$$

constitué par un groupe G, *un anneau-groupe* Γ *et un* **"caractère collectif"** *REALISABLE :*

$$\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$$

du groupe G *dans l'anneau-groupe* Γ.

EXEMPLES 3-2 -

(a) On rappelle [12] qu'un anneau-groupe $\Gamma = [V; M]$ est ABELIEN s'il vérifie la condition :

$$Zg(\Gamma) = X = M = Gr(\Gamma)$$

équivalente à la condition :

$$Gr(\Gamma) = M \subset Z(V) = Z[An(\Gamma)]$$

Sous cette hypothèse, le diagramme commutatif et exact canonique (1) montre que le morphisme q est un *isomorphisme* de groupes , qui permet *l'identification*:

$$Aut(\Gamma) = Aut_e(\Gamma)$$

Il en résulte que dans le CAS ABELIEN, c'est-à-dire lorsque l'anneau-groupe $\Gamma = [V; M]$ est ABELIEN, un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ coïncide avec un G - ANNEAU-GROUPE (G, Γ, θ) constitué par un groupe G, un anneau-groupe *abélien* Γ et un *"caractère"* $\theta \in Mor[G, Aut(\Gamma)]$ du groupe G dans l'anneau-groupe *abélien* Γ, (qui est automatiquement un *"caractère collectif"* REALISABLE).

(b) D'après les Exemples 3-2 de [12] tout *groupe* A peut être canoniquement identifié à *l'anneau-groupe* :

$$\widetilde{A} = I(A) = [\mathbb{Z}(A); A]$$

Dans le CAS DES GROUPES, c'est-à-dire lorsque l'anneau-groupe $\Gamma = [V; M]$ coïncide avec l'image canonique $\widetilde{A}$ d'un *groupe* A, un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ coïncide alors avec un G - MODULE GENERALISE (G, A, θ) constitué par un groupe G, un groupe A et un *"caractère collectif"* $\theta \in \mathcal{M}(G, A) = Mor[G, Aut_e(A)]$ du groupe G dans le groupe A, *auquel on impose la condition supplémentaire* d'être REALISABLE :

$$\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, A)$$

Compte tenu du Lemme 7-3 de [12], on voit que cette *condition supplémentaire* a été imposée pour que le SECOND ESPACE DE θ - COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2_\theta(G, A)$ du groupe G dans le groupe A non *nécessairement abélien, ne soit pas vide.*

Il convient de remarquer que cette *condition supplémentaire n'est pas superflue* puisque la Proposition 5-2 de [13], due essentiellement à S. EILENBERG et S. Mac LANE, montre qu'il existe des groupes G et A, tels que :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, A) \neq \mathcal{M}(G, A) = \mathcal{M}$$

En choisissant $\theta \in \mathcal{M}$ tel que $\theta \notin \mathfrak{R}$, ce résultat exprime également qu'il existe au moins un G - MODULE GENERALISE (G, A, θ), *qui n'est pas* un PSEUDO-MODULE.

(c) D'après les Exemples 3-1 de [12], tout *anneau* B peut être canoniquement identifié à *l'anneau-groupe* :

$$\hat{B} = J(B) = [B; B^*]$$

Dans le CAS DES ANNEAUX, c'est-à-dire lorsque l'anneau-groupe $\Gamma = [V; M]$ coïncide avec l'image canonique $\hat{B}$ d'un *anneau* B, un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ coïncide alors avec un G - ANNEAU-GENERALISE (G, B, θ) constitué par un groupe G, un anneau B et un *"caractère collectif"* $\theta \in \mathcal{M}(G, B) = \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}_e(B)]$ du groupe G dans l'anneau B, *auquel on impose la condition supplémentaire* d'être REALISABLE :

$$\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, B)$$

(d) Dans le CAS DES GROUPES, on a déjà vu que tout G - *module non abélien* (G, A, ρ) détermine canoniquement un G - MODULE GENERALISE (G, A, θ), dans lequel le *"caractère collectif"* $\theta \in \mathcal{M}(G, A)$ est le composé du *"caractère"* $\rho \in \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(A)]$ et du morphisme de groupes canonique :

$$\mathrm{Aut}(A) \xrightarrow{q} \mathrm{Aut}_e(A)$$

Il est facile de vérifier que ce *"caractère collectif"* $\theta \in \mathcal{M}(G, A)$ est *automatiquement* REALISABLE : $\theta \in \mathfrak{R}(G, A)$.

Cette construction entraîne donc que tout G - *module non abélien* (G, A, ρ) détermine canoniquement un PSEUDO-MODULE $P = (G, A, \theta)$.

(e) Dans le CAS DES ANNEAUX, tout G - *anneau* (G, B, ρ) au sens de S. LANG (voir [18] p. 118), constitué par un groupe G, un anneau B et un *"caractère"* $\rho \in \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(B)]$ du groupe G dans l'anneau B, détermine canoniquement un G - ANNEAU-GENERALISE (G, B, θ), dans lequel le *"caractère collectif"* $\theta \in \mathcal{M}(G, B)$ est le composé du *"caractère"* $\rho \in \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(B)]$ et du morphisme de groupes canonique :

$$\mathrm{Aut}(B) \xrightarrow{q} \mathrm{Aut}_e(B)$$

Il est facile de vérifier que ce *"caractère collectif"* $\theta \in \mathcal{M}(G, B)$ est *automatiquement* REALISABLE : $\theta \in \mathfrak{R}(G, B)$.

Cette construction entraîne donc que tout G - *anneau* (G, B, ρ) détermine canoniquement un PSEUDO-MODULE $P = (G, B, \theta)$.

(f) En particulier, dans le CAS DES GROUPES ABELIENS, un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ coïncide avec un G - *module* (G, A, ρ) et dans le CAS DES ANNEAUX COMMUTATIFS, un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ coïncide avec un G - *anneau commutatif* (G, B, ρ).

(g) Pour tout *anneau-groupe* $\Gamma = [V; M]$ dont le *centre-groupe* $X = Zg(\Gamma)$ est le *groupe abélien* caractérisé par la condition :

$$X = Zg(\Gamma) = Gr(\Gamma) \cap Z[An(\Gamma)] = M \cap Z(V)$$

le diagramme commutatif et exact canonique (1) montre que pour tout groupe G, tout *"caractère collectif"* $\theta \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma)$ détermine, par composition avec ϖ, un *"caractère"* $\varpi \circ \theta = \underline{\theta} \in \mathcal{M}(G, X)$ du groupe G dans le groupe abélien X, qui détermine un G - *module* $(G, X, \underline{\theta})$, noté plus simplement (G, X, θ), ou même $X = X_\theta$.

En particulier, il en résulte que tout PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ détermine canoniquement le G - *module* $(G, X, \theta) = X = X_\theta$, appelé le MODULE CENTRAL associé au PSEUDO-MODULE P.

REMARQUES 3-3 -

(a) Comme dans le CAS DES GROUPES, dans le CAS GENERAL, compte tenu du Lemme 7-3 de [12], on voit que dans la Définition 3-1, la condition supplémentaire imposée au *"caractère collectif"* $\theta \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma)$ d'être REALISABLE : $\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$, a été choisie pour que le SECOND ESPACE DE θ - COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2_\theta(G,\Gamma)$ du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, *ne soit pas vide.*

(b) Tout PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ détermine donc son SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

dont on se propose d'étudier le *"comportement fonctoriel"*.

4. LA CATEGORIE DES PSEUDO-MODULES.

Dans le cas particulier de la théorie classique de la *cohomologie abélienne des groupes*, la *"fonctorialité"* est bien connue puisque le *foncteur cohomologique* $H^*(.,.)$, nul en degrés strictement négatifs, est caractérisé par une suite $\{H^n(.,.)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de foncteurs $H^n(.,.)$, à valeurs dans la catégorie $\mathfrak{A}$ des groupes abéliens et définis sur la CATEGORIE $\mathfrak{M}$ *"des* G - *modules à groupe* G *variable"*.

En effet, dans cette CATEGORIE $\mathfrak{M}$, pour un G - *module* A de la forme (G, A, ρ) et un G' - *module* A' de la forme (G', A', ρ'), un *morphisme* :

$$\Phi : (G, A, \rho) \longrightarrow (G', A', \rho')$$

est un couple :

$$\Phi = (\varphi, f)$$

constitué par un morphisme de groupes :

$$\varphi : G' \longrightarrow G$$

et un morphisme de groupes abéliens :

$$f : A \longrightarrow A'$$

compatibles en ce sens que f est un G' - *homomorphisme* de φ^*A dans A', c'est-à-dire qu'ils vérifient la *condition de compatibilité* :

$$(c_0) \qquad \rho'_{\alpha'} \circ f = f \circ \rho_{\varphi(\alpha')} \qquad \text{pour tout } \alpha' \in G'$$

et on sait (voir par exemple [23] p 123) qu'un tel *morphisme* :

$$\Phi = (\varphi, f) \ : \ (G, A, \rho) \longrightarrow (G', A', \rho')$$

détermine des morphismes de groupes abéliens :

$$\Phi^*_n = (\varphi, f)^*_n \ : \ H^n(G, A) = H^n_\rho(G, A) \longrightarrow H^n(G', A') = H^n_{\rho'}(G', A')$$

de telle sorte qu'il en résulte bien, pour chaque entier naturel $n \in \mathbb{N}$, un foncteur $H^n(.,.)$ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{A}$.

On se propose de généraliser ces propriétés dans le cas où les G - *modules* de la forme (G, A, ρ) sont remplacés par des PSEUDO-MODULES P = (G, Γ, θ), et où on s'intéresse en particulier au SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$.

Dans ce but, il semble utile de construire, de façon adéquate, une CATEGORIE DE PSEUDO-MODULES, destinée à jouer un rôle analogue à celui de la catégorie $\mathfrak{M}$ "*des* G - *modules à groupe* G *variable*".

Comme on dispose déjà des OBJETS constitués par les PSEUDO-MODULES $P = (G, \Gamma, \theta)$, tout revient à choisir une définition adéquate des MORPHISMES, ce qui est beaucoup plus compliqué que dans le cas des G - *modules*.

DEFINITION 4-1 - *Etant donnés deux anneaux-groupes :*

$$\Gamma = [V; M] \quad \text{et} \quad \Gamma' = [V'; M']$$

admettant pour **centres-groupes** respectifs les groupes abéliens :

$$X = Zg(\Gamma) = Gr(\Gamma) \cap Z[An(\Gamma)] \quad \text{et} \quad X' = Zg(\Gamma') = Gr(\Gamma') \cap Z[An(\Gamma')]$$

un morphisme d'anneaux-groupes :

$$f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$$

est un MORPHISME CENTRAL si le morphisme de groupes :

$$f : M = Gr(\Gamma) \longrightarrow M' = Gr(\Gamma')$$

vérifie la condition : $f(X) \subset X'$, *c'est-à-dire s'il induit un morphisme de groupes abéliens, noté également :*

$$f : X = Zg(\Gamma) \longrightarrow X' = Zg(\Gamma')$$

LEMME 4-2 - *Etant donnés deux anneaux-groupes :*

$$\Gamma = [V; M] \quad \text{et} \quad \Gamma' = [V'; M']$$

tout morphisme d'anneaux-groupes :

$$f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$$

qui est "SURJECTIF", c'est-à-dire qui vérifie la condition :

$$f(V) = V'$$

est automatiquement un MORPHISME CENTRAL.

En particulier, tout **isomorphisme** *d'anneaux-groupes et tout* **automorphisme** *d'un anneau-groupe est un MORPHISME CENTRAL.*

PREUVE - Si $x \in X = Zg(\Gamma)$, on a $x \in M = Gr(\Gamma)$, qui entraîne :

$f(x) = x' \in M' = Gr(\Gamma')$, et aussi $xv = vx$ pour tout $v \in V$, qui entraîne : $f(x)\, f(v) = f(v)\, f(x)$, c'est-à-dire : $x'v' = v'x'$ pour tout $v' \in f(V) = V'$, ce qui entraîne donc: $x' \in X' = Zg(\Gamma')$ et achève la démonstration.

NOTATIONS 4-3 -

Etant donné un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, dont l'anneau-groupe $\Gamma = [V; M]$ détermine l'anneau $V = An(\Gamma)$, le groupe $M = Gr(\Gamma)$ et le *centre-groupe* $X = Zg(\Gamma) = Gr(\Gamma) \cap Z[An(\Gamma)]$, qui est un groupe abélien auquel est associé le G - *module* $(G, X, \theta) = X = X_\theta$ constituant le MODULE CENTRAL associé au PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, alors :

(a) Le groupe $\widetilde{C}^1(P)$ des 1 - COCHAINES (GENERALISEES) STRICTES du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est le groupe :

$$\widetilde{C}^1(P) = \widetilde{C}^1(G, \Gamma) = C^1(G, M) \times \{1\}$$

des 1 - COCHAINES (GENERALISEES) STRICTES de G dans Γ.

(b) Le groupe $\hat{C}^1(P)$ des 1 - COCHAINES GENERALISEES FAIBLES du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est le groupe :

$$\hat{C}^1(P) = \hat{C}^1(G, \Gamma) = C^1(G, M) \times C^2(G, X)$$

des 1 - COCHAINES GENERALISEES FAIBLES de G dans Γ.

(c) Le groupe $C^1(P)$ des 1 - COCHAINES du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est le *groupe intermédiaire* :

$$\widetilde{C}^1(P) \subset C^1(P) \subset \hat{C}^1(P)$$

caractérisé par la condition :

$$C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta(G, X)$$

dans laquelle le groupe $Z^2_\theta(G, X)$ est le groupe des θ-2 -COCYCLES CENTRAUX de G dans Γ, appelé également le groupe des 2 - COCYCLES CENTRAUX du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$.

(d) L'espace $\widetilde{Z}^2(P)$ des 2 - COCYCLES STRICTS du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est l'espace :

$$\widetilde{Z}^2(P) = \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma)$$

des θ - COCYCLES STRICTS de G dans Γ.

(e) Le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2(P)$ du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est le SECOND ESPACE DE θ - COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

du groupe G dans l'anneau-groupe Γ.

(f) La COHOMOLOGIE CENTRALE $\hat{H}^*(P)$ du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est la θ- COHOMOLOGIE CENTRALE :

$$\hat{H}^*(P) = \hat{H}^*_\theta(G, \Gamma)$$

du groupe G dans l'anneau-groupe Γ.

LEMME 4-4 - *Etant donné un PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$, *avec les notations précédentes, alors :*

(a) *L'action :*

$$\hat{C}^1(G, \Gamma) \times \hat{C}^2(G, \Gamma) \xrightarrow{*} \hat{C}^2(G, \Gamma)$$

du groupe $\hat{C}^1(G, \Gamma) = \hat{C}^1(P)$ *des 1 -* **cochaînes généralisées faibles** *de* G *dans* Γ *[ou du PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$*], sur l'espace* $\hat{C}^2(G, \Gamma)$ *des 2 -* **cochaînes généralisées** de G dans Γ, *induit une* **action** *notée également :*

$$C^1(P) \times \widetilde{Z}^2(P) \xrightarrow{*} \widetilde{Z}^2(P)$$

du groupe $C^1(P)$ *des 1 - COCHAINES du PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$ *sur l'espace* $\widetilde{Z}^2(P)$ *des 2 - COCYCLES STRICTS du PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$.

De plus, pour cette **action** $*$, *le groupe* $C^1(P)$ *opère* **transitivement** *sur l'espace* $\widetilde{Z}^2(P)$, *de sorte que* $\widetilde{Z}^2(P)$ *est un* $C^1(P)$ - **espace homogène.**

(b) *Compte tenu des relations :*

$$\widetilde{C}^1(P) \subset C^1(P) \quad \text{et} \quad Z^2_\theta(G, X) \simeq \{1\} \times Z^2_\theta(G, X) \subset C^1(P)$$

l'action :

$$C^1(P) \times \widetilde{Z}^2(P) \xrightarrow{\ *\ } \widetilde{Z}^2(P)$$

induit l'action :

$$\widetilde{C}^1(P) \times \widetilde{Z}^2(P) \xrightarrow{\ \widetilde{*}\ } \widetilde{Z}^2(P)$$

et aussi **l'action :**

$$Z^2_\theta(G, X) \times \widetilde{Z}^2(P) \xrightarrow{\ o\ } \widetilde{Z}^2(P)$$

caractérisée par la condition :

$$b \ o \ (\eta, m) = (1, b) * (\eta, m)$$

(c) *Le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE* $\widetilde{H}^2(P)$ *du PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$ *est* **l'ensemble quotient :**

$$\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{Z}^2(P) \Big/ {}^{(\widetilde{*})}_{\widetilde{C}^1(P)}$$

de l'espace $\widetilde{Z}^2(P)$ *des 2 - COCYCLES STRICTS du PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$, *par l'action* $\widetilde{*}$ *du groupe* $\widetilde{C}^1(P)$ *des 1 - COCHAINES (GENERALISEES) STRICTES du PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$.

PREUVE - Tout d'abord, il convient de rappeler que *l'action* $*$, dont *l'existence* est prouvée par le Lemme 4-5 de [12], est *caractérisée* par le fait que pour des éléments :

$(a,b) \in \hat{C}^1(G, \Gamma)$ $\quad$ $(\eta, m) \in \hat{C}^2(G, \Gamma)$ $\quad$ $(\eta', m') \in \hat{C}^2(G, \Gamma)$

constitués par des éléments :

$a = (a_\alpha) \in \hat{C}^1(G, M)$ $\quad$ $b = (b_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, X)$

$\eta = (\eta_\alpha) \in C^1(G, \mathrm{Aut}(\Gamma))$ $\quad$ $m = (m_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, M)$

$\eta' = (\eta'_\alpha) \in C^1(G, \mathrm{Aut}(\Gamma))$ $\quad$ $m' = (m'_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, M)$

la condition :

(14) $$(a, b) * (\eta, m) = (\eta', m')$$

équivaut aux conditions :

$$(15)\begin{cases}(15') & \eta'_\alpha = \langle a_\alpha\rangle \eta_\alpha & \text{pour tout } \alpha \in G \\ (15'') & m'_{\alpha,\beta} = a_\alpha \eta_\alpha(a_\beta)\, m_{\alpha,\beta}\, a^{-1}_{\alpha\beta}\, b_{\alpha,\beta} & \text{pour tout } (\alpha,\beta) \in G^2\end{cases}$$

Etant donné le PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, le Théorème 4-8 de [12] entraîne que *l'action* $*$ induit une *action* notée également :

$$\hat{C}^1(G, \Gamma) \times \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\ *\ } \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

c'est-à-dire une *action* :

$$\hat{C}^1(P) \times \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\ *\ } \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

pour laquelle $\hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$ est un $\hat{C}^1(P)$ - *espace homogène.*

Cela signifie que pour deux θ - COCHAINES quelconques :

$$(\eta, m) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma) \quad \text{et} \quad (\eta', m') \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

il existe au moins une 1 - COCHAINE GENERALISEE FAIBLE :

$$(a, b) \in \hat{C}^1(P) = \hat{C}^1(G, \Gamma) = C^1(G, M) \times C^2(G, X)$$

vérifiant la condition (14).

La Définition 6-3 de [12] caractérise l'APPLICATION COCYCLE DE TEICHMÜLLER :

$$T : \hat{C}^2(G, \Gamma) \longrightarrow Z^3(G, \Gamma)$$

et le Lemme 6-4 de [12] entraîne la relation :

$$T[(\eta', m')] = T[(a, b) * (\eta, m)] = \delta^3_\theta(b).\ T[(\eta, m)]$$

Compte tenu de la Définition 7-2 de [12], sous l'hypothèse :

$$(\eta, m) \in \tilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \tilde{Z}^2(P) = \operatorname{Ker} T_\theta$$

équivalente à la condition :

$$T[(\eta, m)] = T_\theta[(\eta, m)] = 1_\theta$$

la relation précédente montre que pour que $(\eta', m') \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$ vérifie la condition :

$$(\eta', m') \in \tilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \tilde{Z}^2(P) = \operatorname{Ker} T_\theta$$

équivalente à la condition :

$$T[(\eta', m')] = T_\theta[(\eta', m')] = 1_\theta$$

il faut et il suffit que $(a, b) \in \hat{C}^1(P)$ vérifie la condition :

$$\delta^3_\theta (b) = 1$$

équivalente à la condition :

$$b = (b_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta (G, X)$$

c'est-à-dire que $(a, b) \in \hat{C}^1(P)$ vérifie la condition :

$$(a, b) \in C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta (G, X).$$

Cette propriété prouve la partie (a).

Compte tenu du Lemme 8-2 et du Lemme 8-5 de [12], la partie (a) entraîne immédiatement la partie (b).

Compte tenu des Notations 4-3, la partie (c) résulte de la traduction de la précédente relation (7), établie dans le Lemme 8-4 de [12], ce qui achève la démonstration.

DEFINITION 4-5 - *Etant donnés deux PSEUDO-MODULES :*

$$P = (G, \Gamma, \theta) \quad \text{et} \quad P' = (G', \Gamma', \theta')$$

un QUASI-MORPHISME :

$$\Phi : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

est un couple :

$$\Phi = (\varphi, f)$$

constitué par un morphisme de groupes :

$$\varphi : G' \longrightarrow G$$

et par un morphisme d'anneaux-groupes :

$$f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$$

qui est un MORPHISME CENTRAL.

Pour deux QUASI-MORPHISMES :

$$\Phi = (\varphi, f) : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

et

$$\Phi' = (\varphi', f') : P' = (G', \Gamma', \theta') \longrightarrow P'' = (G'', \Gamma'', \theta'')$$

il est immédiat que les conditions :

$$\varphi'' = \varphi \circ \varphi' \qquad \text{et} \qquad f'' = f' \circ f$$

caracterisent un QUASI-MORPHISME :

$$\Phi'' = (\varphi'', f'') : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P'' = (G'', \Gamma'', \theta'')$$

noté :

$$\Phi'' = \Phi' \circ \Phi$$

et appelé le QUASI-MORPHISME *composé* des QUASI-MORPHISMES Φ et Φ'.

DEFINITION 4-6 - *Etant donnés deux PSEUDO-MODULES :*

$$P = (G, \Gamma, \theta) \quad \text{et} \quad P' = (G', \Gamma', \theta')$$

un PRE-MORPHISME :

$$\Phi : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

est un quadruplet :

$$\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu')$$

constitué par un QUASI-MORPHISME **sous-jacent :**

$$\Phi_0 = (\varphi, f) : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

et par un **couple :**

$$(\mu, \mu')$$

formé par des COCYCLES (GENERALISES) STRICTS :

$$\mu = (\rho, n) = (\rho = (\rho_\alpha), n = (n_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

et

$$\mu' = (\rho', n') = (\rho' = (\rho'_{\alpha'}), n' = (n'_{\alpha',\beta'})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma') = \widetilde{Z}^2(P')$$

qui vérifient l'ensemble (c) *des* **"conditions de compatibilité"**, *constitué par les deux conditions suivantes :*

(c1) $\quad \rho'_{\alpha'} \circ f = f \circ \rho_{\varphi(\alpha')} \quad$ pour tout $\alpha' \in G'$

(c2) $\quad n'_{\alpha',\beta'} = f[n_{\varphi(\alpha'), \varphi(\beta')}] \quad$ pour tout $(\alpha', \beta') \in G'^2$

Il convient de remarquer que contrairement à ce qui se passe pour les QUASI-MORPHISMES, pour l'instant, il n'est pas possible de *"composer"* des PRE-MORPHISMES, même si les QUASI-MORPHISMES *sousjacents* sont *"composables"*.

LEMME 4-7 - *Etant donnés deux PSEUDO-MODULES :*

$$P = (G, \Gamma, \theta) \quad \text{et} \quad P' = (G', \Gamma', \theta')$$

pour tout PRE-MORPHISME :

$$\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu') : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

avec les notations précédentes, alors :

(a) *Les PSEUDO-MODULES* $P = (G, \Gamma, \theta)$ et $P' = (G', \Gamma', \theta')$ *déterminent les MODULES CENTRAUX associés :*

$$X = (G, X, \theta) = X_\theta \quad \text{et} \quad X' = (G', X', \theta') = X'_{\theta'}$$

et le PRE-MORPHISME $\Phi : P \longrightarrow P'$, *détermine, dans la catégorie* $\mathfrak{M}$ "**des G - modules à groupe G variable**", *un morphisme :*

$$(\varphi, f) : X = (G, X, \theta) \longrightarrow X' = (G', X', \theta')$$

constitué par $\varphi \in \mathrm{Mor}[G', G]$ *et par* $f \in \mathrm{Hom}(X, X')$ **induit** *par* $f \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \Gamma')$.

(b) *Le PRE-MORPHISME* $\Phi : P \longrightarrow P'$, *détermine un* **morphisme de groupes :**

$$\Phi_o^* : C^1(P) \longrightarrow C^1(P')$$

qui, à toute 1 - COCHAINE :

$$c = (a, b) \in C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta(G, X)$$

associe la 1 - COCHAINE :

$$\Phi_o^* [c] = \Phi_o^*[(a, b)] = c^* = (a^*, b^*) \in C^1(P') = C^1(G', M') \times Z^2_{\theta'}(G', X')$$

caractérisée par les conditions :

(c3) $\quad a^*_{\alpha'} = f\,[a_{\varphi(\alpha')}] \quad$ pour tout $\alpha' \in G'$

(c4) $\quad b^*_{\alpha',\beta'} = f\,[b_{\varphi(\alpha'), \varphi(\beta')}] \quad$ pour tout $(\alpha', \beta') \in G'^2$

(c) *Le PRE-MORPHISME* $\Phi : P \longrightarrow P'$, *détermine une* **application :**

$$\Phi^* : \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \widetilde{Z}^2(P')$$

qui est caractérisée par le fait qu'elle constitue un "**morphisme d'espaces homogènes**", *en ce sens que les* **actions** $*$ et $*'$, associées à P *et à* P', *rendent commutatif le diagramme :*

(16)
$$\begin{tikzcd}
C^1(P') \times \widetilde{Z}^2(P) \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\Phi_o^* \times \Phi^*"'] & \widetilde{Z}^2(P) \arrow[d, "\Phi^*"] \\
C^1(P') \times \widetilde{Z}^2(P') \arrow[r, "*'"] & \widetilde{Z}^2(P')
\end{tikzcd}$$

et qu'elle vérifie la condition :

(17) $$\Phi^* [\mu] = \mu'$$

(d) *De plus, pour* **tout** $z \in \widetilde{Z}^2(P)$, *en posant* $\Phi^*[z] = z^* \in \widetilde{Z}^2(P')$, *le quadruplet :*

$$\Phi_Z = (\varphi, f, z, z^*)$$

détermine un PRE-MORPHISME :

$$\Phi_Z = (\varphi, f, z, z^*) \ : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

qui détermine **la même application :**

$$\Phi_Z^* = \Phi^* : \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \widetilde{Z}^2(P')$$

PREUVE - Dans les Exemples 3-2, la partie (g) montre que tout PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ détermine le MODULE CENTRAL associé :

$$X = (G, X, \theta) = X_\theta$$

dont la définition montre que pour *tout* COCYCLE (GENERALISE) STRICT :

$$z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

sa structure de G - *module* est caractérisée par la condition :

(18) $\qquad \theta_\alpha(x) = \underline{\theta}_\alpha(x) = \eta_\alpha(x) \qquad$ pour tout $x \in X$ et tout $\alpha \in G$

En particulier, étant donnés deux PSEUDO-MODULES $P = (G, \Gamma, \theta)$ et $P' = (G', \Gamma', \theta')$, tout PRE-MORPHISME $\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu')$ détermine un couple:

$$(\varphi, f) : X = (G, X, \theta) \longrightarrow X' = (G', X', \theta')$$

constitué par $\varphi \in Mor[G', G]$ et par $f \in Hom(X, X')$ *induit* par $f \in Hom(\Gamma, \Gamma')$ puisque f est un MORPHISME CENTRAL, et le *couple* (μ, μ') entraîne alors que la structure du G - *module* $X = (G, X, \theta) = X_\theta$ est caractérisée par la condition :

(19) $\qquad \theta_\alpha(x) = \underline{\theta}_\alpha(x) = \rho_\alpha(x) \qquad$ pour tout $x \in X$ et tout $\alpha \in G$

et que la structure du G' - *module* $X' = (G', X', \theta') = X'_{\theta'}$ est caractérisée par la condition :

(19') $\qquad \theta'_{\alpha'}(x') = \underline{\theta}'_{\alpha'}(x') = \rho'_{\alpha'}(x') \quad$ pour tout $x' \in X'$ et tout $\alpha' \in G'$

La condition (c_1) entraîne alors la condition :

(20) $\qquad \theta'_{\alpha'} \circ f(x) = f \circ \theta_{\varphi(\alpha')}(x) \qquad$ pour tout $x \in X$ et tout $\alpha' \in G'$

qui exprime la *condition de compatibilité* (c_0), ce qui montre bien l'existence du *morphisme* :

$$(\varphi, f) \ : \ X = (G, X, \theta) \longrightarrow X' = (G', X', \theta')$$

dans la catégorie $\mathfrak{M}$ *"des* G - *modules à groupe* G *variable"* et achève la preuve de la partie (a).

Compte tenu de cette partie (a) et en particulier de la condition (20), il en résulte immédiatement que la condition (c_4) transforme tout θ - 2 - COCYCLE CENTRAL :

$$b = (b_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta\,(G, X)$$

en un θ' - 2 - COCYCLE CENTRAL :

$$b^* = (b^*_{\alpha',\beta'}) \in Z^2_{\theta'}\,(G', X')$$

Après cette remarque, il est facile de vérifier que les conditions (c_3) et (c_4) déterminent un *morphisme de groupes* :

$$\Phi^*_o : C^1(P) \longrightarrow C^1(P')$$

ce qui achève la preuve de la partie (b).

Pour prouver l'existence de *l'application* :

$$\Phi^* : \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \widetilde{Z}^2(P')$$

vérifiant les conditions de la partie (c), on commence par chercher des *conditions nécessaires.*

Etant donné un COCYCLE (GENERALISE) STRICT *arbitraire* :

$$z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

la partie (a) du Lemme 4.4 entraîne l'existence d'au moins *une* 1 - COCHAINE :

$$c = (a, b) \in C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta\,(G, X)$$

vérifiant la condition :

(21) $$z = (\eta, m) = (a, b) * (\rho, n) = c * \mu$$

La commutativité du diagramme (16) *impose* la condition :

$$\Phi^*[z] = \Phi^*_o\,[c] *' \Phi^*\,[\mu]$$

et compte tenu de l'existence de la 1 - COCHAINE :

$$\Phi^*_o\,[c] = \Phi^*_o\,[(a, b)] = c^* = (a^*, b^*) \in C^1(P') = C^1(G', M') \times Z^2_{\theta'}\,(G', X')$$

la condition (17) entraîne *nécessairement* la condition :

(22) $$\Phi^*[z] = c^* *' \mu'$$

Cette condition *ne suffit pas* pour prouver l'existence de *l'application* Φ^*. En effet, dans ce but, il est nécessaire de montrer que le COCYCLE

(GENERALISE) STRICT caractérisé par *le membre de droite* de la condition (22), *ne dépend que de* z, c'est-à-dire *est indépendant du choix de la* 1 - COCHAINE $c \in C^1(P)$ vérifiant la condition (21).

On considère maintenant une 1 - COCHAINE *arbitraire :*

$$c' = (a', b') \in C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta(G, X)$$

à laquelle on souhaite imposer la condition :

(21') $$z = (\eta, m) = (a', b') * (\rho, n) = c' * \mu.$$

Cette 1 - COCHAINE arbitraire peut s'écrire sous la forme :

(23) $$c' = c''c$$

pour une 1 - COCHAINE :

$$c'' = (a'', b'') \in C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta(G, X)$$

caractérisée par la condition :

(23') $$c'' = (a'', b'') = c'c^{-1} = (a'a^{-1}, b'b^{-1})$$

D'après le Lemme 4.5 de [12], les conditions (21) et (23) entraînent :

$$c' * \mu = (c''c) * \mu = c'' * [c * \mu] = c'' * z$$

de sorte que la condition (21') équivaut à la condition :

(24) $$z = (\eta, m) = (a'', b'') * (\eta, m) = c'' * z$$

Compte tenu du fait que la condition (14) équivaut aux conditions (15), la condition (21'), qui est équivalente à la condition (24), se traduit par les conditions:

$$(25)\begin{cases} (25')\ \eta_\alpha = \langle a''_\alpha\rangle\eta_\alpha & \text{pour tout } \alpha \in G \\ (25'')\ m_{\alpha,\beta} = a''_\alpha\eta_\alpha(a''_\beta)\, m_{\alpha,\beta}\, a''^{-1}_{\alpha\beta}\, b''_{\alpha,\beta} & \text{pour tout } (\alpha,\beta) \in G^2 \end{cases}$$

Dans le groupe Aut(Γ), après *"simplification"* par η_α, la condition (25') s'exprime par la condition :

$$\langle a''_\alpha\rangle = 1 \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

et compte tenu du diagramme commutatif et exact canonique (1), elle est équivalente à la condition :

(26) $$a'' = (a''_\alpha) \in C^1(G, X)$$

Compte tenu de la relation : $X \subset Z(M)$, qui montre que dans le groupe M, les éléments $a''_\alpha \in X$ et $\eta_\alpha(a''_\beta) \in X$ commutent entre eux et aussi avec tout élément de M, la condition (25") s'exprime par la condition :

$$m_{\alpha,\beta} = m_{\alpha,\beta}\, a''_\alpha \eta_\alpha (a''_\beta)\, a''^{-1}_{\alpha\beta}\, b''_{\alpha,\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

et après *"simplification"* par $m_{\alpha,\beta}$ dans le groupe M, elle est équivalente à la condition :

$$a''_\alpha\, \eta_\alpha(a''_\beta)\, a''^{-1}_{\alpha\beta}\, b''_{\alpha,\beta} = 1 \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

qui, d'après la condition (18), est équivalente à la condition :

(27) $$\delta^2_\theta (a'') \,.\, b'' = 1$$

Ainsi, pour toute 1 - COCHAINE $c' \in C^1(P)$ de la forme (23), ce qui équivaut à la condition (23'), la condition (21'), qui exprime la condition :
$c * \mu = c' * \mu$, est équivalente à la conjonction des conditions (26) et (27).

Naturellement, il convient de remarquer que par un changement convenable de notations, cette propriété démontrée pour le PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, est également valable pour le PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma', \theta')$.

Compte tenu de la partie (b), qui donne :

$$\Phi^*_o [c] = \Phi^*_o [(a, b)] = c^* = (a^*, b^*)$$

et en posant :

$$\Phi^*_o [c'] = \Phi^*_o [(a', b')] = c'^* = (a'^*, b'^*)$$

et

$$\Phi^*_o [c''] = \Phi^*_o [(a'', b'')] = c''^* = (a''^*, b''^*)$$

l'image, par le *morphisme de groupes* Φ^*_o, de la relation (23) donne la relation :

(23*) $$c'^* = c''^*\, c^*$$

Compte tenu de la partie (a), la condition (26) donne la condition :

(26*) $$a''^* = (a''^*_{\alpha'}) \in C^1(G', X')$$

et la condition (27) entraîne facilement la condition :

(27*) $$\delta^2_{\theta'}(a''^*) \, . \, b''^* = 1$$

La remarque précédente montre alors que pour la 1 - COCHAINE $c'^* \in C^1(P')$ de la forme (23*), la *conjonction* des conditions (26*) et (27*) est équivalente à la condition :

(28) $$c^* *' \mu' = c'^* *' \mu'$$

Il en résulte que la condition (21') entraîne la condition (28), ce qui montre que le COCYCLE (GENERALISE) STRICT caractérisé par le *membre de droite* de la condition (22), est indépendant du choix de la 1 - COCHAINE $c \in C^1(P)$ vérifiant la condition (21), c'est-à-dire ne dépend que de $z \in \widetilde{Z}^2(P)$.

Ainsi, toute application vérifiant les conditions de la partie (c) *coïncide nécessairement* avec *l'application* :

$$\Phi^* : \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \widetilde{Z}^2(P')$$

définie par la condition suivante : pour tout élément $z \in \widetilde{Z}^2(P)$, qui peut s'écrire sous la forme :

(21) $$z = c * \mu$$

pour *au moins* une 1 - COCHAINE :

$$c = (a, b) \in C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta(G, X)$$

alors :

$$\Phi^*[z] = \Phi^*_o[c] *' \Phi^*[\mu]$$

c'est-à-dire :

(22) $$\Phi^*[z] = c^* *' \mu'$$

pour la 1 - COCHAINE :

$$\Phi^*_o[c] = c^* = (a^*, b^*) \in C^1(P')$$

Pour *toute* 1 - COCHAINE :

$$c' = (a', b') \in C^1(P)$$

la condition (21) entraîne :

$$c' * z = c' * [c * \mu] = (c'c) * \mu$$

et par suite :

$$\Phi^*[c' * z] = (c'c)^* *' \mu' = (c'^* c^*) *' \mu' = c'^* *' [c^* *' \mu']$$

c'est-à-dire :

$$\Phi^* [c' * z] = \Phi_o^*[c'] *' \Phi^* [z]$$

ce qui prouve la commutativité du diagramme (16).

Cette application Φ^* vérifie naturellement la condition (17), ce qui achève la preuve de la partie (c).

Etant donné un COCYCLE (GENERALISE) STRICT :

$$z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2_\theta (G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

il existe au moins une 1 - COCHAINE :

$$c = (a, b) \in C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta (G, X)$$

qui vérifie la condition :

(21) $$z = c * \mu$$

et en considérant la 1 - COCHAINE :

$$\Phi_o^*[c] = \Phi_o^*[(a, b)] = c^* = (a^*, b^*) \in C^1(P')$$

caractérisée par les conditions (c_3) et (c_4), le COCYCLE (GENERALISE) STRICT *image* :

$$\Phi^* [z] = z^* = (\eta^*, m^*) \in Z^2_{\theta'}(G', \Gamma') = \widetilde{Z}^2(P')$$

est caractérisé par la condition :

(22) $$z^* = c^* *' \mu'$$

Compte tenu du fait que la condition (14) est équivalente aux conditions (15), avec les notations introduites, la condition (21) se traduit par les conditions :

(I) $\eta_\alpha = < a_\alpha > \rho_\alpha$ pour tout $\alpha \in G$

(I') $m_{\alpha, \beta} = a_\alpha \rho_\alpha (a_\beta) n_{\alpha, \beta} a^{-1}_{\alpha\beta} b_{\alpha, \beta}$ pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$

et de même, la condition (22) se traduit par les conditions :

(I*) $\eta^*_{\alpha'} = < a^*_{\alpha'} > \rho'_{\alpha'}$ pour tout $\alpha' \in G'$

(I'*) $m^*_{\alpha', \beta'} = a^*_{\alpha'} \rho'_{\alpha'}(a^*_{\beta'}) n'_{\alpha',\beta'} a^{*-1}_{\alpha'\beta'} b^*_{\alpha',\beta'}$ pour tout $(\alpha', \beta') \in G'^2$

La condition (I) se traduit par la condition :

$\eta_\alpha(x) = a_\alpha \rho_\alpha(x) a^{-1}_\alpha$ pour tout $x \in V$ et tout $\alpha \in G$

qui entraîne :

$f \circ \eta_\alpha (x) = f(a_\alpha) [f \circ \rho_\alpha(x)] f(a_\alpha)^{-1}$ pour tout $x \in V$

et en choisissant $\alpha = \varphi(\alpha')$, d'après la condition ($c_3$), il en résulte :

$$f \circ \eta_{\varphi(\alpha')}(x) = a^*_{\alpha'} [f \circ \rho_{\varphi(\alpha')}(x)] \, a^{*-1}_{\alpha'} \qquad \text{pour tout } x \in V \text{ et tout } \alpha' \in G'$$

La condition (c_1) entraîne alors :

$$f \circ \eta_{\varphi(\alpha')}(x) = a^*_{\alpha'} [\rho'_{\alpha'} \circ f(x)] \, a^{*-1}_{\alpha'} \qquad \text{pour tout } x \in V \text{ et tout } \alpha' \in G'$$

c'est-à-dire, compte tenu de la condition (I*), la condition :

$$f \circ \eta_{\varphi(\alpha')} = \eta^*_{\alpha'} \circ f \qquad \text{pour tout } \alpha' \in G'$$

qui exprime que le *couple* (z, z^*) vérifie la condition (c_1).

De même la condition (I') entraîne :

$$f(m_{\alpha,\beta}) = f(a_\alpha) [f \circ \rho_\alpha(a_\beta)] \, f(n_{\alpha,\beta}) \, f(a_{\alpha\beta})^{-1} \, f(b_{\alpha,\beta})$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$, et en choisissant : $\alpha = \varphi(\alpha')$ et $\beta = \varphi(\beta')$, d'après les conditions (c_2), (c_3) et (c_4), il en résulte :

$$f[m_{\varphi(\alpha'), \varphi(\beta')}] = a^*_{\alpha'} [f \circ \rho_{\varphi(\alpha')}(a_{\varphi(\beta')})] \, n'_{\alpha',\beta'} \, a^{*-1}_{\alpha'\beta'} \, b^*_{\alpha',\beta'}$$

pour tout $(\alpha', \beta') \in G'^2$.

Or les conditions (c_1) et (c_3) entraînent :

$$f \circ \rho_{\varphi(\alpha')}(a_{\varphi(\beta')}) = \rho'_{\alpha'} \circ f(a_{\varphi(\beta')}) = \rho'_{\alpha'}(a^*_{\beta'})$$

ce qui donne :

$$f[m_{\varphi(\alpha'),\varphi(\beta')}] = a^*_{\alpha'} \, \rho'_{\alpha'}(a^*_{\beta'}) \, n'_{\alpha',\beta'} \, a^{*-1}_{\alpha'\beta'} \, b^*_{\alpha',\beta'}$$

pour tout $(\alpha',\beta') \in G'^2$ et la condition (I'*) entraîne alors la condition :

$$m^*_{\alpha',\beta'} = f[m_{\varphi(\alpha'), \varphi(\beta')}] \qquad \text{pour tout } (\alpha', b') \in G'^2$$

qui exprime que le *couple* (z, z^*) vérifie la condition (c_2).

Ainsi, le *couple* (z, z^*) vérifie les conditions (c_1) et (c_2) de la Définition 4-6, ce qui montre que le quadruplet :

$$\Phi_z = (\varphi, f, z, z^*)$$

détermine un PRE-MORPHISME :

$$\Phi_z = (\varphi, f, z, z^*) \; : \; P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

La partie (c) montre que les PRE-MORPHISMES Φ et Φ_z déterminent des applications :

$$\Phi^* : \ \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \widetilde{Z}^2(P')$$

et

$$\Phi_z^* : \ \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \widetilde{Z}^2(P')$$

qui rendent commutatifs le diagramme (16) et son analogue obtenu en remplaçant Φ^* par Φ_z^* et *en conservant* $\Phi_o^* = (\Phi_z)_o^*$.

Comme la partie (a) du Lemme 4-4 montre que $\widetilde{Z}^2(P)$ est un $C^1(P)$ - *espace homogène,* la propriété précédente, jointe au fait que :

$$\Phi^*[z] = z^* = \Phi_z^*[z]$$

entraîne que les applications Φ^* et Φ_z^* *coïncident,* ce qui complète la preuve de la partie (d) et achève la démonstration.

DEFINITION 4.8 - *Etant donnés deux PSEUDO-MODULES* $P = (G, \Gamma, \theta)$ et $P' = (G', \Gamma', \theta')$, *avec les notations précédentes, alors :*

(a) *Des PRE-MORPHISMES :*

$$\Phi_\mu = (\varphi, f, \mu, \mu') \ : P = (G, \ \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

et

$$\Phi_\lambda = (\varphi, f, \lambda, \lambda') \ : P = (G, \ \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

sont EQUIVALENTS s'ils admettent **le même** *QUASI-MORPHISME* **sous-jacent** $\Phi_o = (\varphi, f)$ *et s'ils déterminent* **la même application :**

$$\Phi^* = \Phi_\mu^* = \Phi_\lambda^* \ : \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \widetilde{Z}^2(P')$$

ce qui se traduit par l'une ou l'autre des conditions **équivalentes :**

$$\lambda' = \Phi_\mu^*[\lambda] \qquad \text{ou} \qquad \mu' = \Phi_\lambda^*[\mu]$$

et on dit alors que les couples (μ, μ') *et* (λ, λ') *sont équivalents.*

(b) *Un MORPHISME :*

$$\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu^*) \ : P = (G, \ \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

est une CLASSE D'EQUIVALENCE :

$$\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu^*)$$

de PRE-MORPHISMES de la forme :

$$\Phi_\mu = (\varphi, f, \mu, \mu') \ : \ P = (G, \ \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

de sorte qu'il est caractérisé par le QUASI-MORPHISME $\Phi_0 = (\varphi, f)$ *et par un* **couple** (μ, μ^*) , *vérifiant :* $\mu^* = \Phi^* [\mu]$ *et* **"défini à une équivalence près "** .

THEOREME 4-9 - *Il existe une catégorie* $\mathfrak{P}$, *appelée la CATEGORIE DES PSEUDO-MODULES et qui est caractérisée par les conditions suivantes :*

(a) *Les* **objets** *de la catégorie* $\mathfrak{P}$ *sont les PSEUDO-MODULES* $P = (G, \Gamma, \theta)$ *caractérisés par la Définition 3-1.*

(b) *Les* **morphismes** *de la catégorie* $\mathfrak{P}$ *sont les MORPHISMES* $\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu^*)$ *caractérisés par la Définition 4.8.*

(c) *La* **composition** *de la catégorie* $\mathfrak{P}$ *est définie de la façon suivante : pour deux MORPHISMES :*

$$\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu^*) \ : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

et

$$\Phi' = (\varphi', f', \lambda', \lambda^*) \ : P' = (G', \Gamma', \theta') \longrightarrow P'' = (G'', \Gamma'', \theta'')$$

le **composé :**

$$\Phi'' = \Phi' \circ \Phi$$

est le MORPHISME :

$$\Phi'' = (\varphi'', f'', \mu, \mu'^*) \ : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P'' = (G'', \Gamma'', \theta'')$$

déterminé par la condition :

(29) $$(\varphi'', f'') = (\varphi', f') \circ (\varphi, f)$$

équivalente aux conditions :

(29') $\varphi'' = \varphi \circ \varphi'$ et (29") $f'' = f' \circ f$

et par la condition :

(30) $$\mu'^* = \Phi'^* [\mu^*]$$

pour laquelle le **couple** (μ, μ'^*) *est* **"défini à une équivalence près"**.

PREUVE - La condition (29) caractérise le *composé* des QUASI-MORPHISMES *sous-jacents*. Comme les couples (μ, μ^*) et (λ, λ^*) vérifient la condition (c), la condition (30) et la partie (d) du Lemme 4-7 entraînent que le couple (μ^*, μ'^*) vérifie aussi la condition (c), et par suite, une vérification immédiate montre que le couple (μ, μ'^*) vérifie aussi la condition (c).

Le Lemme 4-7 entraîne facilement que la composition caractérisée par la condition (30) est *"compatible avec l'équivalence"*, ce qui achève la démonstration.

5. FONCTORIALITE DE LA COHOMOLOGIE NON ABELIENNE.

Dans la suite, la CATEGORIE DES PSEUDO-MODULES est la catégorie $\mathcal{P}$ dont l'existence est assurée par le Théorème 4-9.

LEMME 5-1 - *Etant donnés deux PSEUDO-MODULES :*

$$P = (G, \Gamma, \theta) \quad \text{et} \quad P' = (G', \Gamma', \theta')$$

pour tout MORPHISME :

$$\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu^*) \ : \ P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

avec les notations précédentes, alors :

(a) *Le MORPHISME* $\Phi : P \longrightarrow P'$, *détermine un* **morphisme de groupes :**

$$\Phi_o^* \ : \ C^1(P) \longrightarrow C^1(P')$$

et une **application :**

$$\Phi^* : \ \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \widetilde{Z}^2(P')$$

qui est caractérisée par le fait qu'elle constitue un **"morphisme d'espaces homogènes"**, *en ce sens que les actions* $*$ *et* $*'$, *associées à* P *et à* P', *rendent commutatif le diagramme :*

(31)
$$\begin{tikzcd}
C^1(P) \arrow[d, "\Phi_o^*"'] & \times & \widetilde{Z}^2(P) \arrow[d, "\Phi^*"] \arrow[r, "*"] & \widetilde{Z}^2(P) \arrow[d, "\Phi^*"] \\
C^1(P') & \times & \widetilde{Z}^2(P') \arrow[r, "*'"] & \widetilde{Z}^2(P')
\end{tikzcd}$$

et qu'elle vérifie la condition :

(32)
$$\Phi^* [\mu] = \mu^*$$

(b) *Le MORPHISME* $\Phi : P \longrightarrow P'$, *détermine, par* **restriction**, un **morphisme de groupes** *noté également :*

$$\Phi_o^* : \widetilde{C}^1(P) \longrightarrow \widetilde{C}^1(P')$$

et un diagramme commutatif :

(33)
$$\begin{tikzcd}
\widetilde{C}^1(P') \arrow[d, "\Phi_o^*"'] & \times & \widetilde{Z}^2(P) \arrow[d, "\Phi^*"] \arrow[r, "\widetilde{*}"] & \widetilde{Z}^2(P) \arrow[d, "\Phi^*"] \\
\widetilde{C}^1(P') & \times & \widetilde{Z}^2(P') \arrow[r, "\widetilde{*}'"] & \widetilde{Z}^2(P')
\end{tikzcd}$$

(c) *Le MORPHISME* $\Phi : P \longrightarrow P'$, *détermine, à partir du diagramme commutatif* (33) *et par* **passage aux quotients**, *une* **application :**

$$\widetilde{\Phi} = \widetilde{H}^2(\Phi) : \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow \widetilde{H}^2(P')$$

PREUVE - La partie (a) résulte immédiatement du Lemme 4.7 et du fait que tout MORPHISME $\Phi : P \longrightarrow P'$ détermine de façon unique le *morphisme de groupes* Φ_0^* et *l'application* Φ^*.

La condition (c_4) montre que la condition : $b = (b_{\alpha,\beta}) = 1$, entraîne : $b^* = (b^*_{\alpha',\beta'}) = 1$, ce qui prouve que par *restriction*, il en résulte un *morphisme de groupes :*

$$\Phi_0^* : \widetilde{C}^1(P) = \widetilde{C}^1(G, \Gamma) = C^1(G, M) \longrightarrow \widetilde{C}^1(P') = \widetilde{C}^1(G', \Gamma') = C^1(G', M')$$

et par suite, la partie (a) implique la partie (b).

Comme le Lemme 4-4 donne les caractérisations :

$$\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{Z}^2(P) \Big/ \overset{\widetilde{(*)}}{\widetilde{C}^1(P)} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{Z}^2(P') \Big/ \overset{\widetilde{(*')}}{\widetilde{C}^1(P')}$$

le diagramme commutatif (33) permet le *"passage aux quotients"* pour les *actions* $\widetilde{*}$ et $\widetilde{*}'$.

Il en résulte bien la caractérisation d'une *application* :

$$\widetilde{\Phi} = \widetilde{H}^2(\Phi) : \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow \widetilde{H}^2(P')$$

ce qui donne la preuve de la partie (c) et achève la démonstration.

THEOREME 5-2. - *Il existe un FONCTEUR COHOMOLOGIE NON ABELIENNE covariant :*

$$\widetilde{H}^2(\cdot) : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{E}$$

de la CATEGORIE $\mathfrak{P}$ *DES PSEUDO-MODULES dans la CATEGORIE* $\mathfrak{E}$ *DES ENSEMBLES NON VIDES, qui, à tout PSEUDO-MODULE :*

$$P = (G, \Gamma, \theta)$$

associe son SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{Z}^2(P) \Big/ \overset{\widetilde{(*)}}{\widetilde{C}^1(P)} = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

et qui, à tout MORPHISME :

$$\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu^*) \ : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

associe **l'application :**

$$\widetilde{\Phi} = \widetilde{H}^2(\Phi) \ : \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow \widetilde{H}^2(P')$$

caractérisée dans le Lemme 5-1.

PREUVE - Compte tenu du Lemme 4-4 qui caractérise *l'ensemble non vide* $\widetilde{H}^2(P)$ et du Lemme 5-1 qui caractérise *l'application* $\widetilde{H}^2(\Phi)$, il suffit de vérifier les conditions qui assurent que ces données caractérisent un *"foncteur covariant"*, ce qui résulte facilement du Lemme 5-1 et du Théorème 4-9, et achève la démonstration.

6. FONCTORIALITE DE LA COHOMOLOGIE CENTRALE.

La CATEGORIE $\mathcal{P}$ DES PSEUDO-MODULES, qui a été construite en vue de montrer le *"caractère fonctoriel"* de la COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2(.\,,.)$, permet également de montrer le *"caractère fonctoriel"* de la COHOMOLOGIE CENTRALE $\hat{H}^*(\,\cdot\,)$, dont on se propose de donner la caractérisation et les propriétés.

On utilise toujours la terminologie et les notations de [12].

En particulier, compte tenu de la Définition 5.2. de [12], étant donnés un *anneau-groupe* $\Gamma = [V; M]$ et un *groupe* G, pour tout *"caractère collectif"* $\theta \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma)$, la θ - COHOMOLOGIE CENTRALE $\hat{H}^*_\theta(G, \Gamma)$ du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, est la suite de groupes abéliens :

$$\hat{H}^*_\theta(G, \Gamma) = \{\ \hat{H}^n_\theta(G, \Gamma)\}_{n \in \mathbf{N}}$$

dans laquelle, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, le $n^{\text{ième}}$ groupe $\hat{H}^n_\theta(G, \Gamma)$ de la θ - COHOMOLOGIE CENTRALE du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, est le *groupe abélien* :

$$\hat{H}^n_\theta(G, \Gamma) = H^n_\theta\,(G, X) = H^n(G, X_\theta)$$

constitué par le $n^{ième}$ groupe de *la cohomologie abélienne ordinaire* du G - *module* $X = (G, X, \theta) = X_\theta$.

Confrontée à la notion de PSEUDO-MODULE, cette terminologie suggère la notion suivante.

DEFINITION 6-1. - *Etant donné un PSEUDO-MODULE :*

$$P = (G, \Gamma, \theta)$$

alors :

(a) *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, le $n^{ième}$ *groupe de COHOMOLOGIE CENTRALE* $\hat{H}^n(P)$ *du PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$ *est le* **groupe abélien:**

$$\hat{H}^n(P) = \hat{H}^n_\theta(G, \Gamma) = H^n_\theta\,(G, X) = H^n(G, X_\theta)$$

constitué par le $n^{ième}$ *groupe de* θ *- COHOMOLOGIE CENTRALE du groupe* G *dans l'anneau-groupe* Γ, *c'est-à-dire par le* $n^{ième}$ *groupe de* **cohomologie abélienne ordinaire** *du* G - *module* $X = (G, X, \theta) = X_\theta$, *qui constitue le MODULE CENTRAL associé au PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$.

(b) *La COHOMOLOGIE CENTRALE* $\hat{H}^*(P)$ *du PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$ *est la suite de groupes abéliens :*

$$\hat{H}^*(P) = \{\ \hat{H}^n(P)\ \}_{n \in \mathbb{N}} = \{\ \hat{H}^n_\theta(G, \Gamma)\ \}_{n \in \mathbb{N}}$$

qui caractérise la θ *- COHOMOLOGIE CENTRALE du groupe* G *dans l'anneau-groupe* Γ.

THEOREME 6-2 - *La CATEGORIE* $\mathfrak{P}$ *DES PSEUDO-MODULES et la CATEGORIE* $\mathfrak{M}$ **"des G - modules à groupe G variable"** *possèdent les propriétés suivantes :*

(a) *La catégorie* $\mathfrak{P}$ *est une* **extension** *de la catégorie* $\mathfrak{M}$ *et plus précisément la catégorie* $\mathfrak{M}$ *est une* **sous-catégorie pleine** *de la catégorie* $\mathfrak{P}$.

(b) *Il existe un FONCTEUR MODULE CENTRAL covariant :*

$$C(\ ) : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{M}$$

qui , à tout PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, *associe son MODULE CENTRAL:*

$$C(P) = X = (G, X, \theta) = X_\theta$$

et qui, à tout MORPHISME :

$$\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu^*) \ : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

associe le morphisme :

$$C(\Phi) = (\varphi, f) \ : C(P) = X = (G, X, \theta) \longrightarrow C(P') = X' = (G', X', \theta')$$

constitué par $\varphi \in \mathrm{Mor}[G', G]$ *et par* $f \in \mathrm{Hom}(X, X')$ **induit** *par* $f \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \Gamma')$

PREUVE - D'après la partie (f) des Exemples 3.2, tout objet de la catégorie $\mathfrak{M}$, constitué par un G - *module* $A = (G, A, \rho)$, s'identifie canoniquement à l'objet de la catégorie $\mathfrak{P}$, constitué par le PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ dans lequel :

$$\Gamma = \widetilde{A} \equiv A \ \text{ et } \ \theta \equiv \rho.$$

Les objets de la catégorie $\mathfrak{M}$ coïncident donc avec les objets $P = (G, \Gamma, \theta)$ de la catégorie $\mathfrak{P}$, qui correspondent au CAS DES GROUPES ABELIENS.

Dans ce CAS DES GROUPES ABELIENS, c'est-à-dire pour deux PSEUDO-MODULES $P = (G, \Gamma, \theta)$ et $P' = (G', \Gamma', \theta')$ qui sont les images canoniques d'un G - *module* $A = (G, A, \rho)$ et d'un G' - *module* $A' = (G', A', \rho')$, on considère, dans la catégorie $\mathfrak{P}$, les MORPHISMES :

$$\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu^*) \ : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

dont on va examiner la structure et la caractérisation.

Le *morphisme de groupes* $\varphi \in \mathrm{Mor}[G', G]$ est a priori quelconque et le *morphisme d'anneaux-groupes* $f \in \mathrm{Hom}[\Gamma, \Gamma']$, qui doit être un MORPHISME CENTRAL, est un *morphisme d'anneaux-groupes quelconque,* puisque $Zg(\Gamma) = Gr(\Gamma) = A$ et $Zg(\Gamma') = Gr(\Gamma') = A'$, et que d'après le Corollaire 1-4 de [12], il est l'image canonique d'un morphisme de groupes abéliens unique $f \in \mathrm{Hom}(A, A')$ a priori quelconque.

Dans ce CAS DES GROUPES ABELIENS, avec les notations choisies pour caractériser le G - *module* $A = (G, A, \rho)$ et le G' - *module* $A' = (G', A', \rho')$, le *couple* (μ, μ^*) est *nécessairement* de la forme :

$$\mu = (\rho, n = (n_{\alpha,\beta})\,) \ \text{ et } \ \mu^* = (\rho', n' = (n'_{\alpha',\beta'})\,)$$

La Définition 4-8 d'un MORPHISME montre qu'il est possible de choisir μ de sorte que $n = (n_{\alpha,\beta}) \in Z^2_\theta(G, X) = Z^2_\rho(G, A)$ soit le *cocycle neutre* et par suite la condition (c_2) entraîne *nécessairement* que $n^* = (n^*_{\alpha',\beta'}) \in Z^2_{\theta'}(G', X')$ $= Z^2_{\rho'}(G', A')$ est également le *cocycle neutre.*

Par ce choix, la condition ($\dot{c}_2$) est *automatiquement vérifiée* et par suite, l'ensemble (c) des *"conditions de compatibilité"* se réduit à la condition (c_1), qui *coïncide* alors avec la condition (c_0), qui caractérise les morphismes, dans la catégorie $\mathfrak{M}$, du G - *module* A = (G, A, ρ) dans le G' - module A' = (G', A', ρ').

Ainsi dans ce CAS DES GROUPES ABELIENS les MORPHISMES $\Phi : P \longrightarrow P'$ dans la catégorie $\mathfrak{P}$ coïncident avec les morphismes $\Phi : A \longrightarrow A'$ dans la catégorie $\mathfrak{M}$.

Ce résultat montre bien que la catégorie $\mathfrak{M}$ est une *sous-catégorie pleine* de la catégorie $\mathfrak{P}$, ce qui termine la preuve de la partie (a).

La partie (b) résulte immédiatement de la partie (a) du Lemme 4-7, ce qui achève la démonstration.

LEMME 6.3 - *Etant donnés deux PSEUDO-MODULES :*

$$P = (G, \Gamma, \theta) \quad \text{et} \quad P' = (G', \Gamma', \theta')$$

pour tout MORPHISME :

$$\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu^*) \ : \ P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

avec les notations précédentes, alors :

(a) *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, *le MORPHISME* $\Phi : P \longrightarrow P'$ *détermine un morphisme de groupes abéliens :*

$$\hat{\Phi}^n = \hat{H}^n(\Phi) \ : \ \hat{H}^n(P) \longrightarrow \hat{H}^n(P')$$

caractérisé par la condition :

$$\hat{\Phi}^n = \Phi^*_n = (\varphi, f)^*_n \ : \ H^n_\rho(G, X) \longrightarrow H^n_{\rho'}(G', X')$$

lorsque : $(\varphi, f) = C(\Phi)$.

(b) *Le MORPHISME* $\Phi : P \longrightarrow P'$ *détermine le morphisme de* **"suites de groupes abéliens" :**

$$\hat{\Phi}^* = \hat{H}^*(\Phi) \ : \ \hat{H}^*(P) \longrightarrow \hat{H}^*(P')$$

caractérisé par la condition : $\hat{H}^*(\Phi) = \{ \hat{H}^n(\Phi) \}_{n \in \mathbb{N}}$.

PREUVE - Compte tenu du Théorème 6-2 qui caractérise le morphisme $C(\Phi) = (\varphi, f)$ dans le catégorie $\mathfrak{M}$, il est bien connu que ce morphisme détermine des morphismes :

$$\hat{\Phi}^n = \Phi^*{}_n = (\varphi, f)^*_n$$

en utilisant par exemple le notations utilisées à la page 123 de [23], ce qui prouve la partie (a).

La partie (b) est alors évidente, ce qui achève la démonstration.

THEOREME 6-4 - *Il existe un FONCTEUR COHOMOLOGIE CENTRALE covariant :*

$$\hat{H}^*(\cdot) = \{\hat{H}^n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}} : \mathcal{P} \longrightarrow (\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$$

de la CATEGORIE $\mathcal{P}$ *DES PSEUDO-MODULES dans la CATEGORIE* $(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$ *DES SUITES DE GROUPES ABELIENS, qui à tout PSEUDO-MODULE :*

$$P = (G, \Gamma, \theta)$$

associe sa COHOMOLOGIE CENTRALE :

$$\hat{H}^*(P) = \{\hat{H}^n(P)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

et qui, à tout MORPHISME :

$$\Phi = (\varphi, f, \mu, \mu^*) \ : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

associe le morphisme de **"suites de groupes abéliens"** :

$$\hat{\Phi}^* = \hat{H}^*(\Phi) \ : \ \hat{H}^*(P) \longrightarrow \hat{H}^*(P')$$

caractérisé dans le Lemme 6-3.

PREUVE - Compte tenu de la Définition 6-1, cela résulte immédiatement du Théorème 6-2, du Lemme 6-3 et du *"caractère fonctoriel"* bien connu de la *cohomologie abélienne des groupes*, caractérisée par un "FONCTEUR" :

$$H^*(\ ) = \{H^n(\ )\}_{n \in \mathbb{Z}} : \mathcal{M} \longrightarrow (\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$$

de la CATEGORIE $\mathcal{M}$ *"des* G *-modules à groupe* G *variable"* dans la CATEGORIE $(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$ DES SUITES DE GROUPES ABELIENS, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 6-5 - Avec les notations précédentes, la démonstration du Théorème 6-4 entraîne l'existence du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[d, "C(\ )"'] \arrow[dr, "\hat{H}^*(\ )"] & \\ \mathcal{M} \arrow[r, "H^*(\ )"'] & (\mathcal{A})^{\mathbb{N}} \end{tikzcd} \tag{34}$$

qui montre que le FONCTEUR COHOMOLOGIE CENTRALE $\hat{H}^*(\cdot)$ constitue le *prolongement* à la CATEGORIE $\mathfrak{P}$ DES PSEUDO-MODULES du "FONCTEUR" : $H^*(\cdot) = \{ H^n(\ ) \}_{n \in \mathbb{N}}$ associé de façon classique à la *cohomologie abélienne des groupes.*

Ce prolongement pourrait paraître artificiel, mais en fait il est très naturel et très utile, puisqu'il est relié à la COHOMOLOGIE NON ABELIENNE par les propriétés suivantes.

THEOREME 6-6 - *Le FONCTEUR COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :*

$$\tilde{H}^2(\cdot) : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{E}$$

et le SECOND FONCTEUR DE COHOMOLOGIE CENTRALE :

$$\hat{H}^2(\cdot) : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

possèdent les propriétés suivantes :

(a) *Pour tout PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$, *il existe une* **action** *de groupe :*

$$\hat{H}^2(P) \times \tilde{H}^2(P) \xrightarrow{\tilde{o}(P)} \tilde{H}^2(P)$$

qui fait opérer le groupe abélien $\hat{H}^2(P)$, **librement** *et* **transitivement** *sur l'espace* $\tilde{H}^2(P)$, *qui est donc muni d'une structure de* $\hat{H}^2(P)$ - **ensemble homogène principal .**

(b) *Tout MORPHISME* $\Phi : P \longrightarrow P'$ *détermine un diagramme commutatif :*

(35)
$$\begin{tikzcd}
\hat{H}^2(P) \times \tilde{H}^2(P) \arrow[r, "\tilde{o}(P)"] \arrow[d, "\hat{H}^2(\Phi)"'] \arrow[d, shift left=8ex, "\tilde{H}^2(\Phi)"] & \tilde{H}^2(P) \arrow[d, "\tilde{H}^2(\Phi)"] \\
\hat{H}^2(P') \times \tilde{H}^2(P') \arrow[r, "\tilde{o}(P')"] & \tilde{H}^2(P')
\end{tikzcd}$$

(c) *En bref, il existe un foncteur covariant :*

$$[\hat{H}^2, \tilde{H}^2] : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{H}$$

de la CATEGORIE $\mathcal{P}$ *DES PSEUDO-MODULES dans la CATEGORIE* $\mathcal{H}$ *DES ENSEMBLES HOMOGENES PRINCIPAUX (à groupe d'opérateurs variable).*

PREUVE - La partie (b) du Théorème 8-6 de [12] entraîne la partie (a).

Tout MORPHISME $\Phi : P \longrightarrow P'$ détermine le diagramme commutatif (31) du Lemme 5-1. Le Lemme 8-5 de [12] et le Lemme 5-1 entraînent alors facilement la commutativité du diagramme (35), ce qui prouve la partie (b).

Pour tout PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, le couple :

$$[\hat{H}^2(P), \widetilde{H}^2(P)]$$

caractérise un *espace* $\widetilde{H}^2(P)$ et un *groupe abélien* $\hat{H}^2(P)$ de sorte que $\widetilde{H}^2(P)$ est un $\hat{H}^2(P)$ - *ensemble homogène principal,* qui *"dépend fonctoriellement"* de P d'après la partie (b).

Ces propriétés s'expriment par la partie (c), ce qui achève la démonstration.

7. APPLICATION AUX EXTENSIONS DISTINGUEES.

Tout PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ détermine l'ESPACE :

$$\mathrm{Ext}[P] = \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$$

des CLASSES de θ - EXTENSIONS DE L'ANNEAU-GROUPE Γ PAR LE GROUPE G.

L'existence des bijections canoniques $\xi^{\theta}_{G,\Gamma}$ de la relation (13), qui résulte du Théorème 4-6 de [13], permet l'identification :

$$\mathrm{Ext}[P] = \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P). \tag{36}$$

THEOREME 7-1 - *Il existe un FONCTEUR "CLASSES D'EXTENSIONS" :*

$$\mathrm{Ext}[\cdot] \quad \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui possède les propriétés suivantes :

(a) *Pour tout PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$, *il existe une* **action** *de groupe abélien :*

$$\hat{H}^2(P) \times \mathrm{Ext}[P] \xrightarrow{\widetilde{o}(P)} \mathrm{Ext}[P]$$

qui fait opérer le groupe abélien $\hat{H}^2(P)$ **librement et transitivement** *sur l'espace* Ext[P], *qui est donc muni d'une structure de* $\hat{H}^2(P)$ - **ensemble homogène principal.**

(b) *Tout MORPHISME* $\Phi : P \longrightarrow P'$ *détermine un diagramme commutatif:*

$$(37) \qquad \begin{array}{ccc} \hat{H}^2(P) \times \mathrm{Ext}[P] & \xrightarrow{\tilde{\sigma}(P)} & \mathrm{Ext}[P] \\ \hat{H}^2(\Phi)\downarrow \quad \downarrow \mathrm{Ext}[\Phi] & & \downarrow \mathrm{Ext}[\Phi] \\ \hat{H}^2(P') \times \mathrm{Ext}[P'] & \xrightarrow{\tilde{\sigma}(P')} & \mathrm{Ext}[P'] \end{array}$$

(c) *En bref, il existe un foncteur covariant :*

$$[\ \hat{H}^2, \mathrm{Ext}\ ] : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{H}$$

de la CATEGORIE $\mathcal{P}$ *DES PSEUDO-MODULES dans la CATEGORIE* $\mathcal{H}$ *DES ENSEMBLES HOMOGENES PRINCIPAUX (à groupe d'opérateurs variable).*

PREUVE - Le Théorème 4-6 de [13] montre que l'*identification* (36) est *"compatible"* avec les actions du groupe $\hat{H}^2(P)$, qui peuvent donc être également *identifiées.*

Il suffit alors d'effectuer la *"traduction"* du Théorème 6-6, ce qui achève la démonstration.

8. APPLICATIONS AUX MORPHISMES D'EXTENSIONS.

On se propose d'étudier les MORPHISMES D'EXTENSIONS, ce qui revient à examiner des problèmes de PROLONGEMENT DE MORPHISMES dans la CATEGORIE $\mathcal{C}$ DES ANNEAUX-GROUPES.

Plus précisément, étant donnés deux anneaux-groupes :

$$\Gamma = [V; M] \text{ et } \Gamma' = [V'; M'] ,$$

et deux EXTENSIONS DISTINGUEES :

$$(\mathrm{I}) \quad \Gamma \triangleleft \Delta \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{I'}) \quad \Gamma' \triangleleft \Delta'$$

on se propose de chercher à quelle condition un *morphisme d'anneaux-groupes*

$f \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \Gamma')$, qui est un MORPHISME CENTRAL, admet au moins un *prolongement* par un morphisme d'anneaux-groupes $F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$, et lorsque cette condition est réalisée, comment peut-on caractériser F et comment peut-on *"classer"* ces prolongements F de f ?

Tout d'abord, le Théorème 3-2 de [13] montre que les EXTENSIONS DISTINGUEES (I) et (I') déterminent des PSEUDO-MODULES :

$$P = (G, \Gamma, \theta) \quad \text{et} \quad P' = (G', \Gamma', \theta')$$

et des SYSTEMES DE FACTEURS MIXTES, c'est-à-dire des COCYCLES STRICTS :

$$z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2(P) = \widetilde{Z}^2_{\theta}(G, \Gamma) \ \text{ et } \ z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P') = \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma')$$

de sorte que Δ et Δ' peuvent être identifiés aux PRODUITS CROISES MIXTES :

$$\Delta = (\Gamma, G, z) \quad \text{et} \quad \Delta' = (\Gamma', G', z')$$

et le Théorème 4-6 de [13] montre que les *classes* :

$$\xi = \xi(\Delta) \in \mathrm{Ext}_{\theta}(G, \Gamma) = \mathrm{Ext}[P] \ \text{ et } \ \xi' = \xi(\Delta') \in \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma') = \mathrm{Ext}[P']$$

des *extensions* Δ et Δ', coïncident avec les *classes de cohomologie stricte :*

$$\xi = \widetilde{z} \in \widetilde{H}^2(P) = \widetilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma) \ \text{ et } \ \xi' = \widetilde{z'} \in \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma')$$

Les notations du Théorème 2-5 de [13] , adaptées de façon évidente aux deux EXTENSIONS DISTINGUEES (I) et (I'), donnent :

$$\Delta = [U ; N] \quad \text{et} \quad \Delta' = [U' ; N']$$

avec :

$$U = \bigoplus_{\alpha \in G} U_{\alpha} = \bigoplus_{\alpha \in G} Vu_{\alpha} \ ; \ N = \coprod_{\alpha \in G} N_{\alpha} = \coprod_{\alpha \in G} Mu_{\alpha}$$

et

$$U' = \bigoplus_{\alpha' \in G'} U'_{\alpha'} = \bigoplus_{\alpha' \in G'} V'u'_{\alpha'} \ ; \ N' = \coprod_{\alpha' \in G'} N'_{\alpha'} = \coprod_{\alpha' \in G'} M'u'_{\alpha'}$$

notations qui seront librement utilisées dans la suite.

THEOREME 8-1 - *Etant données deux EXTENSIONS DISTINGUEES :*

$$\text{(I)} \quad \Gamma \lhd \Delta \qquad \text{et} \qquad \text{(I')} \quad \Gamma' \lhd \Delta'$$

associées à des PSEUDO-MODULES :

$$P = (G, \Gamma, \theta) \quad \text{et} \quad P' = (G', \Gamma', \theta')$$

et caractérisées par leurs classes :

$$\xi \in \mathrm{Ext}[P] = \mathrm{Ext}_\theta (G, \Gamma) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2 (P)$$

et

$$\xi' \in \mathrm{Ext}[P'] = \mathrm{Ext}_{\theta'} (G', \Gamma') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma') = \widetilde{H}^2 (P')$$

avec les notations précédentes, pour tout **morphisme d'anneaux-groupes** $f \in \mathrm{Hom}[\Gamma, \Gamma']$, *qui est un MORPHISME CENTRAL :*

$$f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *Le MORPHISME CENTRAL* $f \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \Gamma')$ *admet au moins un* **prolongement** $F \in \mathrm{Hom}(\Delta , \Delta ')$, *constitué par un* **morphisme d'anneaux-groupes :**

$$F : \Delta = [U; N] \longrightarrow \Delta' = [U'; N']$$

(b) *Il* **existe au moins** *un* **morphisme de groupes :**

$$\psi : G \longrightarrow G'$$

qui détermine le PSEUDO-MODULE :

$$\psi^* P' = Q = (G, \Gamma', \theta'')$$

caractérisé par : $\theta'' = \psi^*(\theta') = \theta' o \psi$, *et le MORPHISME :*

$$\Phi' = (\psi, 1_{\Gamma'}, z', z'^*) \ : \ P' = (G', \Gamma', \theta ') \longrightarrow Q = (G, \Gamma', \theta'')$$

auquel est associée l'application :

$$\widetilde{\Phi}' = \widetilde{H}^2(\Phi') : \widetilde{H}^2(P') \longrightarrow \widetilde{H}^2(Q)$$

et il **existe au moins** *un MORPHISME :*

$$\Phi = (1_G, f, z, z^*) \ : \ P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow Q = (G, \Gamma', \theta'')$$

auquel est associée l'application :

$$\widetilde{\Phi} = \widetilde{H}^2(\Phi) : \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow \widetilde{H}^2(Q)$$

de telle sorte *que les* **classes** ξ et ξ' *vérifient la condition :*

(38) $$\widetilde{\Phi} (\xi) = \widetilde{\Phi}' (\xi')$$

PREUVE - On utilisera librement la caractérisation et les propriétés des PRODUITS CROISES MIXTES établies dans le Théorème 2-5 de [13].

En particulier, tout élément $x \in U = \mathrm{An}(\Delta)$ est de la forme :

(39) $$x = \sum_{\alpha \in G} x_\alpha u_\alpha$$

pour une *famille unique* $(x_\alpha)_{\alpha \in G}$ d'éléments $x_\alpha \in V = An(\Gamma)$, *presque tous nuls*.

Pour tout $f \in Hom(\Gamma, \Gamma')$, tout *prolongement* $F \in Hom(\Delta, \Delta')$ de f, est donc caractérisé par une condition de la forme :

(40) $$F(x) = \sum_{\alpha \in G} f(x_\alpha)\, F(u_\alpha) \qquad \text{pour tout } x \in U$$

pour une certaine famille $\{ F(u_\alpha) \}_{\alpha \in G}$ d'éléments :

(41) $$F(u_\alpha) \in N' = Gr(\Delta')$$

puisque la condition : $F \in Hom(\Delta, \Delta')$, implique : $F(N) \subset N'$.

Tout revient donc à rechercher des conditions *nécessaires* et *suffisantes* pour qu'il existe au moins une famille d'éléments $F(u_\alpha) \in N'$, telle que la condition (40) caractérise un *morphisme d'anneaux-groupes* $F \in Hom(\Delta, \Delta')$.

On commence par la recherche de CONDITIONS NECESSAIRES sous l'hypothèse que la condition (a) est vérifiée.

Tout d'abord, comme la condition : $f \in Hom(\Gamma, \Gamma')$, entraîne : $f(M) \subset M'$, les relations : $u_\alpha \in N_\alpha = Mu_\alpha \subset N$, et :

$$F(N) \subset N' = \coprod_{\alpha' \in G'} N'_\alpha = \coprod_{\alpha' \in G'} M'u'_\alpha$$

montrent qu'il *existe* une *application* $\psi : G \longrightarrow G'$, caractérisée par la condition :

(42) $$F(u_\alpha) \in F(N_\alpha) \subset N'_{\psi(\alpha)} = M'u'_{\psi(\alpha)} \qquad \text{pour tout } \alpha \in G.$$

Pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$, la relation :

$$N_{\alpha\beta} = N_\alpha \,.\, N_\beta$$

entraîne :

$$F(N_{\alpha\beta}) = F(N_\alpha) \,.\, F(N_\beta)$$

et par suite les inclusions :

$$F(N_{\alpha\beta}) \subset N'_{\psi(\alpha\beta)} \;;\; F(N_\alpha) \subset N'_{\psi(\alpha)} \;;\; F(N_\beta) \subset N'_{\psi(\beta)}$$

entraînent la relation :

$$N'_{\psi(\alpha\beta)} = N'_{\psi(\alpha)} \,.\, N'_{\psi(\beta)} = N'_{\psi(\alpha)\psi(\beta)}$$

de sorte que la caractérisation de $\psi(\alpha)$ donnée par la condition (42) implique la condition :

(43) $\psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\,\psi(\beta)$ pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$

Il *existe* donc *nécessairement* un *morphisme de groupes :*

$$\psi : G \longrightarrow G'$$

caractérisé par la condition (42).

Il convient de remarquer qu'un *morphisme de groupes :*

$$\psi \in \mathrm{Mor}[G, G']$$

(qui pourrait a priori être *quelconque*), caractérise un *"changement de groupe"*, qui détermine le PSEUDO-MODULE :

$$\psi^* P' = Q = (G, \Gamma', \theta'')$$

caractérisé par : $\theta'' = \psi^*(\theta') = \theta' o \psi$, et il est immédiat que le θ' - COCYCLE (GENERALISE) STRICT :

$$z' = (\eta', m') = (\eta' = (\eta'_{\alpha'}), m' = (m'_{\alpha',\beta'})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma') = \widetilde{Z}^2(P')$$

détermine le θ'' - COCYCLE (GENERALISE) STRICT :

$$z'^* = (\eta'^*, m'^*) = (\eta'^* = (\eta'^*_{\alpha}), m'^* = (m'^*_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta''}(G, \Gamma') = \widetilde{Z}^2(Q)$$

caractérisé par les conditions :

(c''_1)) $\eta'^*_{\alpha} = \eta'_{\psi(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in G$

(c''_2) $m'^*_{\alpha,\beta} = m'_{\psi(\alpha),\psi(\beta)}$ pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$

qui expriment les conditions (c_1) et (c_2) de la Définition 4-6, dans lesquelles : $f = 1_{\Gamma}$ et $\varphi = \psi$

Cela prouve l'existence du MORPHISME :

$$\Phi' = (\psi, 1_{\Gamma}, z', z'^*) \ : P' = (G', \Gamma', \theta') \longrightarrow Q = (G, \Gamma', \theta'')$$

qui détermine l'application :

$$\Phi'^* \ : \widetilde{Z}^2(P') = \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma') \longrightarrow \widetilde{Z}^2(Q) = \widetilde{Z}^2_{\theta''}(G, \Gamma')$$

vérifiant la condition :

(44) $\Phi'^* [z'] = z'^*$

et par suite *l'application associée* :

$$\widetilde{\Phi}' = \widetilde{H}^2(\Phi') \ : \ \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma') \longrightarrow \widetilde{H}^2(Q) = \widetilde{H}^2_{\theta''}(G, \Gamma')$$

vérifiant la condition :

(45) $\widetilde{\Phi}' (\xi') = \overset{\smile}{z}'^* \in \widetilde{H}^2(Q)$

et pour laquelle il est facile de vérifier qu'elle coïncide avec l'application

$\widetilde{H}^2_{\theta'}(\psi, \Gamma')$ caractérisée dans la Proposition 2-2.

D'après le Lemme 1-3 de [13], pour chaque $\alpha \in G$, l'élément $F(u_\alpha) \in N'$ détermine un automorphisme intérieur $< F(u_\alpha) > \in \mathrm{Aut}_i\,(\Delta')$, qui *induit* sur Γ' un automorphisme :

$$\eta^*_\alpha \in \mathrm{Aut}\,(\Gamma')$$

caractérisé par la condition :

(46) $\eta^*_\alpha(x') = F(u_\alpha)\, x'\, F(u_\alpha)^{-1}$ pour tout $x' \in V'$ et tout $x' \in M'$

ce qui détermine une 1 - cochaîne spéciale :

$$\eta^* = (\eta^*_\alpha) \in C^1\,(G, \mathrm{Aut}\,(\Gamma'))$$

Pour chaque $\alpha \in G$, la condition :

(47) $\eta_\alpha(x) = u_\alpha\, x u_\alpha^{-1}$ pour tout $x \in V$ et tout $x \in M$

entraîne :

$$f \circ \eta_\alpha(x) = F(u_\alpha)\, f(x)\, F(u_\alpha)^{-1} \quad \text{pour tout } x \in V \text{ et tout } x \in M$$

et compte tenu de la condition (46), il en résulte la condition :

(48) $f \circ \eta_\alpha(x) = \eta^*_\alpha \circ f(x)$ pour tout $x \in V$ et tout $x \in M$

c'est-à-dire la condition :

(c'_1) $\eta^*_\alpha \circ f = f \circ \eta_\alpha$ pour tout $\alpha \in G$.

De même, la condition :

(c'_2) $m^*_{\alpha,\beta} = f\,[m_{\alpha,\beta}]$ pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$

caractérise une 2 - cochaîne spéciale :

$$m^* = (m^*_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, M')$$

Pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$, la relation :

(48) $u_\alpha\, u_\beta = m_{\alpha,\beta}\, u_{\alpha\beta}$

entraîne la relation :

(49) $F(u_\alpha)\, F(u_\beta) = f\,[m_{\alpha,\beta}]\, F\,[u_{\alpha\beta}]$

qui implique :

$$<F(u_\alpha)>\, <F(u_\beta)> = <m^*_{\alpha,\beta}>\, <F(u_{\alpha\beta})>$$

et par *restriction* à Γ', il en résulte la condition :

(50) $$\eta^*_\alpha \eta^*_\beta = \langle m^*_{\alpha,\beta} \rangle \eta^*_{\alpha\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

qui prouve l'existence de la 2 - COCHAINE GENERALISEE :

$$z^* = (\eta^*, m^*) \in \hat{C}^2(G, \Gamma')$$

Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$, compte tenu de la condition (46), de la condition (c'_2) et de la relation (49), la traduction de *l'associativité* de la composition des éléments $F(u_\alpha)$, $F(u_\beta)$ et $F(u_\gamma)$ dans le groupe N', entraîne facilement la condition :

(51) $$\eta^*_\alpha (m^*_{\beta,\gamma})\, m^*_{\alpha,\beta\gamma} = m^*_{\alpha,\beta}\, m^*_{\alpha\beta,\gamma} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$$

qui, d'après le Lemme 6-2 de [12] et la Définition 7-2 de [12], montre en fait l'existence d'un 2 - COCYCLE (GENERALISE) STRICT :

$$z^* = (\eta^*, m^*) \in \tilde{Z}^2(G, \Gamma')$$

La condition (42) montre que pour chaque $\alpha \in G$, il existe un élément $c_\alpha \in M'$, vérifiant la condition :

(52) $$F(u_\alpha) = c_\alpha\, u'_{\psi(\alpha)} \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

pour une certaine 1 - cochaîne spéciale :

$$c = (c_\alpha) \in C^1(G, M')$$

Cette condition (52) entraîne :

$$\langle F(u_\alpha) \rangle = \langle c_\alpha \rangle \langle u'_{\psi(\alpha)} \rangle \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

et par *restriction* à Γ', il en résulte la condition :

(53) $$\eta^*_\alpha = \langle c_\alpha \rangle \eta'_{\psi(\alpha)} \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

et par suite, les *classes* dans le groupe $Aut_e(\Gamma')$ vérifient :

$$\bar{\eta}^*_\alpha = \bar{\eta}'_{\psi(\alpha)} = \theta'[\psi(\alpha)] = \theta''(\alpha) \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

ce qui entraîne l'existence du θ'' - COCYCLE (GENERALISE) STRICT :

$$z^* = (\eta^*, m^*) \in \tilde{Z}^2_{\theta''}(G, \Gamma') = \tilde{Z}^2(Q)$$

Pour les COCYCLES (GENERALISES) STRICTS :

$$z = (\eta, m) \in \tilde{Z}^2(P) = \tilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) \quad \text{et} \quad z^* = (\eta^*, m^*) = \tilde{Z}^2(Q) = \tilde{Z}^2_{\theta''}(G, \Gamma')$$

les conditions (c'_1) et (c'_2) expriment les conditions (c_1) et (c_2) de la Définition 4-6, dans lesquelles : $f = f$ et $\varphi = 1_G$.

Cela prouve *l'existence* du MORPHISME :

$$\Phi = (1_G, f, z, z^*) \ : \ P = (G, \ \Gamma, \theta) \longrightarrow Q = (G, \ \Gamma', \theta'')$$

qui détermine l'application :

$$\Phi^* \ : \widetilde{Z}^2(P) = \ \widetilde{Z}^2_\theta(G, \ \Gamma) \longrightarrow \ \widetilde{Z}^2(Q) = \ \widetilde{Z}^2_{\theta''}(G, \Gamma')$$

vérifiant la condition :

(54) $$\Phi^* [z] = z^*$$

et par suite *l'application associée* :

$$\widetilde{\Phi} = \widetilde{H}^2(\Phi) \ : \widetilde{H}^2(P) = \ \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \longrightarrow \ \widetilde{H}^2(Q) = \ \widetilde{H}^2_{\theta''}(G, \Gamma')$$

vérifiant la condition :

(55) $$\widetilde{\Phi}\ (\xi) = \widetilde{z}^* \in \ \widetilde{H}^2(Q)$$

Compte tenu de la condition (c'_2), la relation (49) et la condition (52) entraînent la condition :

(56) $$c_\alpha\, u'_{\psi(\alpha)}\, c_\beta\, u'_{\psi(\beta)} = m^*_{\alpha,\beta}\, c_{\alpha\beta}\, u'_{\psi(\alpha\beta)} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

D'après les conditions :

(57) $\eta'_{\alpha'}\ (x') = u'_{\alpha'}\ x'\ u'^{-1}_{\alpha'}$ pour tout $\alpha' \in G'$ et pour tout $x' \in V'$ et tout $x' \in M'$

(58) $$u'_{\alpha'}\ u'_{\beta'} = m'_{\alpha',\ \beta'}\ u'_{\alpha'\beta'} \qquad \text{pour tout } (\alpha', \beta') \in G'^2$$

la condition (56) entraîne successivement :

$$c_\alpha\, \eta'_{\psi(\alpha)}\ (c\ \beta)\ u'_{\psi(\alpha)}\ u'_{\psi(\beta)} = m^*_{\alpha,\beta}\ c_{\alpha\beta}\ u'_{\psi(\alpha\beta)}$$

et

$$c_\alpha\, \eta'_{\psi(\alpha)}\ (c\ \beta)\ m'_{\psi(\alpha),\ \psi(\beta)}\ u'_{\psi(\alpha\beta)} = m^*_{\alpha,\beta}\ c_{\alpha\beta}\ u'_{\psi(\alpha\beta)}$$

de sorte que dans le groupe N', après *"simplification"* par $u'_{\psi(\alpha\beta)}$, il en résulte la condition :

(59) $$c_\alpha\, \eta'_{\psi(\alpha)}\ (c_\beta)\ m'_{\psi(\alpha),\ \psi(\beta)} = m^*_{\alpha,\beta}\ c_{\alpha\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

Compte tenu des conditions (c''_1) et (c''_2), les conditions (53) et (59) prennent la forme des conditions :

(60) $$\eta^*_\alpha = \langle c_\alpha \rangle\ \eta'^*_\alpha \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

(61) $$m^*_{\alpha,\beta} = c_\alpha\ \eta'^*_\alpha\ (c_\beta)\ m'^*_{\alpha,\beta}\ c^{-1}_{\alpha\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

qui, d'après le Lemme 4-5 de [12], expriment la condition :

(62) $$z^* = (\eta^*, m^*) = (c, 1) *'' (\eta'^*, m'^*) = c \;\widetilde{*}''\; z'^*$$

D'après la Définition 8-3 de [12], l'existence de la 1 - COCHAINE (GENERALISEE) STRICTE :

$$c = (c_\alpha) \in C^1(G, M') = \widetilde{C}^1(G, \Gamma') = \widetilde{C}^1(Q)$$

vérifiant la condition (62) montre que les 2 - COCYCLES STRICTS :

$$z^* = (\eta^*, m^*) \in \widetilde{Z}^2_{\theta''}(G, \Gamma') = \widetilde{Z}^2(Q)$$

et

$$z'^* = (\eta'^*, m'^*) \in \widetilde{Z}^2_{\theta''}(G, \Gamma') = \widetilde{Z}^2(Q)$$

sont *"strictement cohomologues"*, c'est-à-dire déterminent la même *classe de cohomologie stricte :*

(63) $$\widetilde{z}^* = \widetilde{z}'^*$$

Les relations (45), (55) et (63) entraînent alors la relation :

(38) $$\widetilde{\Phi}(\xi) = \widetilde{\Phi}'(\xi')$$

Cela complète la liste des *conditions nécessaires* et montre que la condition (a) implique la condition (b).

Il reste à montrer que réciproquement la condition (b) est composée de CONDITIONS SUFFISANTES pour assurer l'existence d'un prolongement $F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$ de $f \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \Gamma')$.

Sous l'hypothèse que la condition (b) est vérifiée, il *existe* un *morphisme de groupes* $\psi \in$ Mor[G, G'], qui détermine le PSEUDO-MODULE $\psi^*P' = Q$ et le MORPHISME $\Phi' : P' \longrightarrow Q$ caractérisé par les conditions (c''_1) et (c''_2), et il *existe* un MORPHISME $\Phi : P \longrightarrow Q$ caractérisé par les conditions (c'_1) et (c'_2), de telle sorte que la condition (38) soit vérifiée, ce qui équivaut à l'existence d'une 1 - COCHAINE (GENERALISEE) STRICTE :

$$c = (c_\alpha) \in C^1(G, M') = \widetilde{C}^1(G, \Gamma') = \widetilde{C}^1(Q)$$

vérifiant la condition (62) équivalente à la conjonction des conditions (60) et (61).

Pour tout $\alpha \in G$, il est alors possible de *définir* un élément $F(u_\alpha) \in N'$ par la condition :

(52) $$F(u_\alpha) = c_\alpha\, u'_{\psi(\alpha)} \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

de sorte que la condition (40) caractérise une *application additive :*

$$F : V \longrightarrow V'$$

qui prolonge $f \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \Gamma')$ et qui vérifie : $F(M) \subset M'$.

Ainsi, pour montrer que F est un *morphisme d'anneaux-groupes* $F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$, il suffit de montrer que F est une *application multiplicative* et pour cela il suffit de montrer qu'elle vérifie la condition :

(64) $$F(x_\alpha u_\alpha x_\beta u_\beta) = F(x_\alpha u_\alpha) F(x_\beta u_\beta)$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$, tout $x_\alpha \in V$ et tout $x_\beta \in V$.

En tenant compte des conditions (c'_1) (c'_2), (52), (60), (61), (c''_1) et (c''_2), les règles de calcul dans les PRODUITS CROISES MIXTES :

$$\Delta = (\Gamma, G, z) \quad \text{et} \quad \Delta' = (\Gamma', G', z')$$

entraînent successivement les relations :

$$\begin{aligned}
F(x_\alpha u_\alpha x_\beta u_\beta) &= F(x_\alpha \eta_\alpha (x_\beta) m_{\alpha,\beta} u_{\alpha\beta}) \\
&= f(x_\alpha) [f \circ \eta_\alpha(x_\beta)] f [m_{\alpha,\beta}] F(u_{\alpha\beta}) \\
&= f(x_\alpha) [\eta^*_\alpha \circ f(x_\beta)] m^*_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} u'_{\psi(\alpha\beta)} \\
&= f(x_\alpha) [c_\alpha (\eta'^*_\alpha \circ f(x_\beta)) c_\alpha^{-1}] c_\alpha \eta'^*_\alpha (c_\beta) m'^*_{\alpha,\beta} u'_{\psi(\alpha\beta)} \\
&= f(x_\alpha) c_\alpha [\eta'^*_\alpha (f(x_\beta) c_\beta)] m'_{\psi(\alpha), \psi(\beta)} u'_{\psi(\alpha\beta)} \\
&= f(x_\alpha) c_\alpha [\eta'_{\psi(\alpha)} (f(x_\beta) c_\beta)] u'_{\psi(\alpha)} u'_{\psi(\beta)} \\
&= f(x_\alpha) c_\alpha u'_{\psi(\alpha)} f(x_\beta) c_\beta u'_{\psi(\beta)} \\
&= f(x_\alpha) F(u_\alpha) f(x_\beta) F(u_\beta) \\
&= F(x_\alpha u_\alpha) \ . \ F(x_\beta u_\beta)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire la condition (64), qui entraîne bien :

$$F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$$

Ainsi, la condition(b) implique la condition (a), ce qui achève la démonstration.

DEFINITION 8-2 - *Sous les hypothèses du Théorème 8-1, étant donnés un morphisme d'anneaux-groupes CENTRAL* $f \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \Gamma')$ *et un morphisme de groupes* $\psi \in \mathrm{Mor}[G, G']$, *le* **couple** (f, ψ) *est COMPATIBLE s'il existe au moins un MORPHISME D'EXTENSIONS, de la forme* (f, F, ψ), *caractérisé par un diagramme commutatif :*

$$
(65)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
\{0,1\} & \longrightarrow & \Gamma=[V;M] & \longrightarrow & \Delta=[U;N] & \xrightarrow{p} & G & \longrightarrow & \{1\} \\
 & & \downarrow f & & \downarrow F & & \downarrow \psi & & \\
\{0,1\} & \longrightarrow & \Gamma'=[V';M'] & \longrightarrow & \Delta'=[U';N'] & \xrightarrow{p'} & G' & \longrightarrow & \{1\}
\end{array}
$$

dans lequel les **lignes** *sont des SUITES EXACTES MIXTES et dans lequel le morphisme d'anneaux-groupes* $F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$ *constitue un* **prolongement** *du couple* (f, ψ) *COMPATIBLE* .

REMARQUES 8-3 - Avec la terminologie précédente, alors :

(a) Le Théorème 8-1 donne une caractérisation des couples COMPATIBLES. En effet, pour qu'un *couple* (f, ψ) soit COMPATIBLE, il faut et il suffit qu'il existe au moins un MORPHISME $\Phi : P \longrightarrow Q$, tel que : $\widetilde{\Phi}\,(\xi) = \widetilde{\Phi}'\,(\xi')$.

Ce résultat constitue la généralisation d'un Théorème de ARTIN-TATE (voir le Théorème 2 p; 179 de [1], cité également par S. LANG sous la forme du Théorème 2 p. 214 de [18] relatif au cas très particulier de la *cohomologie abélienne des groupes,* qui correspond, avec la terminologie des Exemples 3-2, au CAS DES GROUPES ABELIENS.

(b) Les MORPHISMES D'EXTENSIONS se composent de façon évidente, ce qui détermine une CATEGORIE DES EXTENSIONS (DISTINGUEES !).

COROLLAIRE 8-4 - *Sous les hypothèses du Théorème 8-1 et avec la terminologie précédente, pour tout* **couple** (f, ψ) *COMPATIBLE, l'ensemble* $\mathfrak{F}(f, \psi)$ *des morphisme d'anneaux-groupes* $F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$ *qui constituent un* **prolongement** *du couple* (f, ψ) *COMPATIBLE, est formé par les morphismes :*

$$F_c \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$$

déterminés par une 1 - COCHAINE (GENERALISEE) STRICTE :

$$c = (c_\alpha) \in C^1(G, M') = \widetilde{C}^1(G, \Gamma') = \widetilde{C}^1(Q)$$

vérifiant la condition :

$$(62)\qquad z^* = c \;\widetilde{*}''\; z'^*$$

et déterminés par la condition :

$$(66)\qquad F_c\Big(\sum_{\alpha\in G} x_\alpha u_\alpha\Big) = \sum_{\alpha\in G} f(x_\alpha)\, c_\alpha\, u'_{\psi(\alpha)}$$

PREUVE - Elle résulte immédiatement de la démonstration du Théorème 8-1.

REMARQUE 8-5 - Sous les hypothèses du Théorème 8-1, pour un *couple* (f, ψ) COMPATIBLE, *un prolongement* $F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$ du couple (f, ψ), *n'est pas unique en général.*

En effet, en considérant le *centre-groupe* $X' = Zg(\Gamma')$ de l'anneau-groupe $\Gamma' = [V'; M']$, tout élément $x' \in X'$ détermine des automorphisme intérieurs :

$$<x'> = 1 \in \mathrm{Aut}_i(\Gamma') \quad \text{et} \quad <x'> = \tau_{x'} \in \mathrm{Aut}_i(\Delta')$$

(le second $\tau_{x'}$ n'étant pas neutre en général) de sorte que, en posant : $F' = \tau_{x'} \circ F$, alors F' est encore un *prolongement* $F' \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$ du couple (f, ψ), mais *distinct* de F *en général.*

Comme dans le cas classique des *extensions de groupes à noyaux abéliens,* cette remarque suggère la notion suivante .

DEFINITION 8-6 - *Sous les hypothèses du Théorème 8-1 et avec la terminologie précédente, pour tout* **couple** (f, ψ) *COMPATIBLE, alors :*

(a) *Deux prolongements* $F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$ *et* $F' \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$ du **couple** (f, ψ) *COMPATIBLE sont EQUIVALENTS s'il existe au moins un élément* $x' \in X' = Zg(\Gamma')$, *tel que* : $F' = \tau_{x'} \circ F$.

(b) *L'ensemble* $\mathfrak{F}(f, \psi)$ *des* **prolongements** $F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$ *du* **couple** (f, ψ) *COMPATIBLE, détermine l'ensemble quotient* $\mathfrak{F}[f, \psi]$ *des* **"classes d'équivalence"** $[F]$ *des éléments* $F \in \mathfrak{F}(f, \psi)$.

THEOREME 8-7 - *Sous les hypothèses du Théorème 8-1 et avec la terminologie précédente, pour tout* **couple** (f, ψ) *COMPATIBLE, qui détermine en particulier le PSEUDO-MODULE :*

$$\psi^* P' = Q = (G, \Gamma', \theta'')$$

caractérisé par : $\theta'' = \psi^*(\theta') = \theta' \circ \psi$, *et par suite le premier groupe de COHOMOLOGIE CENTRALE :*

$$\hat{H}^1(Q) = \hat{H}^1_{\theta''}(G, \Gamma') = H^1_{\theta''}(G, X') = H^1(G, X'_{\theta''})$$

ainsi que les ensembles $\mathfrak{F}(f, \psi)$ *et* $\mathfrak{F}[f, \psi]$, *constitués respectivement par les prolongements* F *et les "classes de prolongements"* [F] *du couple* (f, ψ) *COMPATIBLE, alors :*

(a) *Il existe une* **action** *de groupe :*

$$\begin{array}{ccc} Z^1(G, X'_{\theta''}) \times \mathfrak{F}(f, \psi) & \longrightarrow & \mathfrak{F}(f, \psi) \\ (d = (d_\alpha) \quad , \quad F) & \longrightarrow & dF \end{array}$$

caractérisée par la condition :

(67) $\qquad (dF)(u_\alpha) = d_\alpha F(u_\alpha) \qquad$ pour tout $\alpha \in G$

qui fait opérer le groupe abélien de 1 - COCYCLES CENTRAUX $Z^1(G, X'_{\theta''}) = Z^1(Q)$ **librement et transitivement** *sur l'ensemble* $\mathfrak{F}(f, \psi)$, *ce qui détermine sur l'ensemble* $\mathfrak{F}(f, \psi)$ *une structure de* $Z^1(Q)$ - **ensemble homogène principal .**

(b) *Par passage aux quotients, l'action précédente détermine une* **action** *de groupe :*

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^1(Q) \times \mathfrak{F}[f, \psi] & \longrightarrow & \mathfrak{F}[f, \psi] \\ (\hat{d}, [F]) & \longrightarrow & \hat{d}.[F] = [dF] \end{array}$$

qui fait opérer le groupe abélien $\hat{H}^1(Q)$ **librement et transitivement** *sur l'ensemble* $\mathfrak{F}[f, \psi]$, *ce qui détermine sur l'ensemble* $\mathfrak{F}[f, \psi]$ *une structure de* $\hat{H}^1(Q)$ - **ensemble homogène principal .**

PREUVE - Le Corollaire 8-4 montre que les prolongements $F \in \mathfrak{F}(f, \psi)$ sont de la forme $F = F_c$ pour les 1 - COCHAINES STRICTES :

$$c = (c_\alpha) \in C^1(G, M') = \widetilde{C}^1(G, \Gamma') = \widetilde{C}^1(Q)$$

vérifiant la condition (62) équivalente à la conjonction des conditions :

(60) $\qquad \eta^*_\alpha = \langle c_\alpha \rangle \eta'^*_\alpha \qquad$ pour tout $\alpha \in G$

(61) $\qquad m^*_{\alpha,\beta} = c_\alpha \eta'^*_\alpha (c_\beta)\, m'^*_{\alpha,\beta}\, c^{-1}_{\alpha\beta} \qquad$ pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$

Comme le groupe $\widetilde{C}^1(Q)$ est naturellement un $\widetilde{C}^1(Q)$ - *ensemble homogène principal,* tout élément $c' \in \widetilde{C}^1(Q)$ se met *de façon unique* sous la forme c' = dc pour un élément $d \in \widetilde{C}^1(Q)$ et tout revient à caractériser le sous-groupe $D(Q)$ de $\widetilde{C}^1(Q)$ constitué par les éléments d pour lesquels $c' = dc$ vérifie la condition (62).

En utilisant des *"simplifications"* dans le groupe $Aut(\Gamma')$, pour que $c' = dc$ vérifie la condition (60), il faut et il suffit que d vérifie la condition :

(68) $$<d_\alpha> = 1 \in Aut(\Gamma') \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

ce qui, d'après le diagramme commutatif et exact canonique (1), équivaut à la condition :

(69) $$d = (d_\alpha) \in C^1(G, X')$$

Comme les éléments $d_\alpha \in X'$ et $\eta'^*_\alpha(d_\beta) \in X'$ commutent avec tout élément du groupe M', pour que $c' = dc$ vérifie la condition (61), il faut et il suffit (après report de l'expression de $c' = dc$ et des *"simplifications"* dans le groupe M') que d vérifie la condition :

(70) $$d_\alpha\, \eta'^*_\alpha\, (d_\beta)\, d^{-1}_{\alpha\beta} = 1 \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

qui, compte tenu de la condition (18), pour laquelle :

$$z'^* = (\eta'^*, m'^*) \in \widetilde{Z}^2_{\theta''}(G, \Gamma') = \widetilde{Z}^2(Q)$$

est équivalente à la condition :

(71) $$\delta^2_{\theta''}(d) = 1$$

ce qui montre que pour que $c' = dc$ vérifie les conditions (60) et (61) équivalentes à la condition (62), il faut et il suffit que l'élément $d \in \widetilde{C}^1(P)$ vérifie la condition :

(72) $$d = (d_\alpha) \in D(Q) = Z^1(G, X'_{\theta''}) = Z^1(Q)$$

ce qui entraîne immédiatement la partie (a).

Pour deux éléments F_c et $F_{c'}$ de l'ensemble $\mathfrak{F}(f, \psi)$, et pour tout élément $x' \in X' = Zg(\Gamma')$, la condition :

(73) $$F_{c'} = \tau_{x'} \circ F_c$$

se traduit par la condition :

$$F_{c'}(u_\alpha) = x'\, F_c(u_\alpha)\, x'^{-1} \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

équivalente à la condition :

(74) $$x'^{-1}\, c'_\alpha\, u'_{\psi(\alpha)}\, x' = c_\alpha\, u'_{\psi(\alpha)} \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

Les conditions (57) et (c''_1) entraînent la relation :

$$u'_{\psi(\alpha)}\, x' = \eta'_{\psi(\alpha)}(x')\, u'_{\psi(\alpha)} = \eta'^*_\alpha(x')\, u'_{\psi(\alpha)}$$

et compte tenu de la condition (18), pour laquelle :

$$z'^* = (\eta'^*, m'^*) \in \widetilde{Z}^2_{\theta''}(G, \Gamma') = \widetilde{Z}^2(Q),$$

il en résulte la relation :

(75) $$u'_{\psi(\alpha)}\, x' = \theta''_\alpha\,(x')\, u'_{\psi(\alpha)}$$

La condition (74) est donc équivalente à la condition :

(76) $$x'^{-1}\, c'_\alpha\, \theta''_\alpha\,(x')\, u'_{\psi(\alpha)} = c_\alpha\, u'_{\psi(\alpha)} \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

c'est-à-dire la condition :

(77) $$c_\alpha = \theta''_\alpha\,(x')\, x'^{-1}\, c'_\alpha \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

Ainsi, la condition (73) est équivalente à la condition :

(78) $$c = \delta^1_{\theta''}\,(x')\,.\,c'$$

ce qui montre que les *classes* $[F] \in \mathfrak{F}[f, \psi]$ sont les *orbites* des éléments $F \in \mathfrak{F}(f, \psi)$ pour l'action du sous-groupe de 1 - cobords :

$$B^1\,(G, X'_{\theta''}) \subset Z^1(G,\; X'_{\theta''})$$

La partie (a) entraîne alors immédiatement la partie (b), ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 8-8 - *Sous les hypothèses du Théorème 8-1 et avec la terminologie précédente, pour tout* **couple** (f, ψ) *COMPATIBLE, si :*

$$\hat{H}^1(Q) = \{1\}$$

alors l'ensemble $\mathfrak{F}[f, \psi]$ *ne contient qu'une seule classe, ce qui signifie que deux* **prolongements** F *et* F' *du couple* (f, ψ) *COMPATIBLE sont nécessairement EQUIVALENTS.*

PREUVE - Elle résulte immédiatement du Théorème 8-7 .

REMARQUE 8-9 - Le Théorème 8-7 et le Corollaire 8-8 donnent une *"classification"* des MORPHISME D'EXTENSIONS (f, F, ψ) associés au couple (f, ψ) COMPATIBLE.

Ce résultat constitue également la généralisation d'un Théorème de ARTIN-TATE (Voir le Théorème 2 p. 179 de [1], cité également par S. LANG sous la forme du Théorème 3 et du Corollaire p. 216 et 217 de [18] relatif au cas très particulier de la *cohomologie abélienne des groupes.*

9. APPLICATIONS AU PROLONGEMENT D'ISOMORPHISMES.

On se propose d'examiner des problèmes de PROLONGEMENT D'ISOMORPHISMES dans la CATEGORIE $\mathcal{C}$ DES ANNEAUX-GROUPES.

Etant donnés des anneaux-groupes $\Gamma = [V; M]$ et $\Gamma' = [V'; M']$, un isomorphisme d'anneaux-groupes $f \in \mathrm{Iso}(\Gamma, \Gamma')$ est un isomorphisme d'anneaux $f \in \mathrm{Iso}(V', V')$ qui induit un isomorphisme de groupes $f \in \mathrm{Iso}(M, M')$.

La condition : $(f)(\sigma) = \sigma' = f \circ \sigma \circ f^{-1}$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ caractérise alors un isomorphisme de groupes :

$$(f) \in \mathrm{Iso}\,(\mathrm{Aut}(\Gamma)\,,\, \mathrm{Aut}(\Gamma'))$$

qui, par passage aux quotients, détermine un isomorphisme de groupes, noté :

$$f_e \in \mathrm{Iso}\,(\mathrm{Aut}_e(\Gamma), \mathrm{Aut}_e(\Gamma'))$$

LEMME 9-1 - *Etant donnés deux PSEUDO-MODULES :*

$$P = (G, \Gamma, \theta) \quad \text{et} \quad P' = (G', \Gamma', \theta')$$

pour tout MORPHISME :

$$\Psi = (\varphi, f, z, z'') \;:\; P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *Le MORPHISME Ψ est un ISOMORPHISME*

(b) *Le morphisme d'anneaux-groupes* $f \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \Gamma')$ *est un* **isomorphisme d'anneaux-groupes** $f \in \mathrm{Iso}(\Gamma, \Gamma')$ *et il existe un* **isomorphisme de groupes** $\psi \in \mathrm{Iso}(G, G')$ *rendant commutatif le diagramme :*

(79)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Aut}_e(\Gamma) \arrow[r, "f_e"] & \mathrm{Aut}_e(\Gamma') \\ G \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "\psi"] & G' \arrow[u, "\theta'"'] \end{tikzcd}$$

et tel que :

(80)
$$\varphi = \psi^{-1}$$

De plus, sous ces conditions équivalentes les COCYCLES STRICTS :

$$z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P) \text{ et } z'' = (\eta'', m'') \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma') = \widetilde{Z}^2(P')$$

sont reliés par les conditions :

(c'''$_1$) $\quad \eta''_{\psi(\alpha)} = f \circ \eta_\alpha \circ f^{-1} \quad$ pour tout $\alpha \in G$

(c'''$_2$) $\quad m''_{\psi(\alpha),\psi(\beta)} = f\,[m_{\alpha,\beta}] \quad$ pour tout $(\alpha, \beta) \in G$

PREUVE - Le Théorème 4-9 montre que la condition (a) entraîne :

$$f \in \mathrm{Iso}(\Gamma, \Gamma') \quad \text{et} \quad \varphi \in \mathrm{Iso}(G', G)$$

et en posant : $\varphi^{-1} = \psi \in \mathrm{Iso}(G, G')$, les conditions ($c_1$) et ($c_2$) s'expriment alors sous la forme des conditions (c'''_1) et (c'''_2). En particulier, la condition (c'''_1) entraîne la relation :

$$\theta'[\psi(\alpha)] = \overline{\eta}''_{\psi(\alpha)} = f_e[\overline{\eta}_\alpha] = f_e\,[\theta(\alpha)] \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

ce qui prouve la commutativité du diagramme (79).

Ainsi, la condition (a) implique la condition (b) et les conditions (c'''_1) et (c'''_2).

Réciproquement, il est immédiat que la condition (b) détermine un MORPHISME Ψ et implique la condition (a), ce qui achève la démonstration.

THEOREME 9-2 - *Etant données deux EXTENSIONS DISTINGUEES :*

$$(\mathrm{I})\ \Gamma \lhd \Delta \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{I'})\ \Gamma' \lhd \Delta'$$

associées à des PSEUDO-MODULES :

$$P = (G, \Gamma, \theta) \qquad \text{et} \qquad P' = (G', \Gamma', \theta')$$

et caractérisées par leurs **classes** :

$$\xi \in \mathrm{Ext}[P] = \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P)$$

et

$$\xi' \in \mathrm{Ext}[P'] = \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma') = \widetilde{H}^2(P')$$

avec les notations précédentes, pour tout **isomorphisme d'anneaux-groupes :**

$$f \in \mathrm{Iso}(\Gamma, \Gamma')$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *L'isomorphisme d'anneaux-groupes* $f \in \mathrm{Iso}(\Gamma, \Gamma')$ *admet au moins un* **prolongement** $F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$, *qui est un* **isomorphisme d'anneaux-groupes** $F \in \mathrm{Iso}(\Delta, \Delta')$.

(b) *Il existe au moins un* **isomorphisme de groupes :**

$$\psi \in \mathrm{Iso}(G, G')$$

rendant commutatif le diagramme :

(81)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Aut}_e(\Gamma) \arrow[r, "f_e"] & \mathrm{Aut}_e(\Gamma') \\ G \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "\theta''"] \arrow[r, "\psi"] & G' \arrow[u, "\theta'"'] \end{tikzcd}$$

et qui détermine l'ISOMORPHISME DE PSEUDO-MODULES :

$$\Psi = (\psi^{-1}, f, z, z'') \; : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

auquel est associée la **bijection** *:*

$$\widetilde{\Psi} = \widetilde{H}^2(\Psi) : \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow \widetilde{H}^2(P')$$

de telle sorte *que les* **classes** ξ et ξ' *vérifient la condition :*

(82) $$\widetilde{\Psi}\,(\xi) = \xi'$$

PREUVE - Tout d'abord, le Lemme 4-2 montre que tout isomorphisme d'anneaux-groupes $f \in \mathrm{Iso}(\Gamma, \Gamma')$ est automatiquement un MORPHISME CENTRAL.

Sous l'hypothèse que la condition (a) est vérifiée, le Théorème 8-1 peut alors être appliqué à f et à f^{-1}, ce qui entraîne que ψ est nécessairement un isomorphisme de groupes $\psi \in \mathrm{Iso}(G, G')$.

La condition (c'_1) peut s'écrire sous la forme :

$$\eta^*_\alpha = f \circ \eta_\alpha \circ f^{-1} \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

et l'existence du COCYCLE STRICT :

$$z^* = (\eta^*, m^*) \in \widetilde{Z}^2_{\theta''}(G, \Gamma') = \widetilde{Z}^2(Q)$$

entraîne alors la relation :

$$\theta''(\alpha) = \overline{\eta}^*_\alpha = f_e[\overline{\eta}_\alpha] = f_e[\theta(\alpha)] \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

ce qui prouve la commutativité du diagramme (81).

Le Lemme 9-1 entraîne l'existence de l'ISOMORPHISME DE PSEUDO-MODULES :

$$\Psi = (\psi^{-1}, f, z, z'') \; : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma', \theta')$$

caractérisé par les conditions (c'''_1) et (c'''_2).

De même, de Lemme 9-1 entraîne que dans la condition (b) du Théorème 8-1 appliqué à $f \in \mathrm{Iso}(\Gamma, \Gamma')$, les MORPHISMES :

$$\Phi : P \longrightarrow Q \qquad \text{et} \qquad \Phi' : P' \longrightarrow Q$$

sont des ISOMORPHISMES et le Théorème 4.9 entraîne la relation :

(83) $$\Psi = \Phi'^{-1} \circ \Phi$$

Le Théorème 5-2 entraîne alors la relation :

(84) $$\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Phi}'^{-1} \circ \widetilde{\Phi}$$

qui montre que la condition (38) entraîne la condition :

(82) $$\widetilde{\Psi}(\xi) = \xi'$$

Ainsi la condition (a) implique la condition (b).

Réciproquement, sous l'hypothèse que la condition (b) est vérifiée, le Lemme 9-1 entraîne l'existence des ISOMORPHISMES :

$$\Psi : P \longrightarrow P' \ ; \ \Phi : P \longrightarrow Q \ ; \ \Phi' : P' \longrightarrow Q$$

pour lesquels le Théorème 4-9 et le Théorème 5-2 entraînent les relations (83) et (84), de sorte que la condition (82) implique la condition (38).

Le Théorème 8-1 entraîne l'existence d'un *prolongement* $F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$ dont la caractérisation donnée dans le Corollaire 8-4 entraîne : $F \in \mathrm{Iso}(\Delta, \Delta')$.

Ainsi, la condition (b) implique la condition (a),ce qui achève la démonstration.

THEOREME 9-3 - *Etant donnée une EXTENSION DISTINGUEE :*

$$\text{(I)} \qquad \Gamma \lhd \Delta$$

associée à un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et caractérisée par sa* **classe** *:*

$$\xi \in \mathrm{Ext}\,[P] = \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P)$$

avec les notations précédentes, pour tout **automorphisme d'anneaux-groupes :**

$$f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *L'automorphisme d'anneaux-groupes* $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *admet au moins un* **prolongement** $F \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta)$ *qui est un* **automorphisme d'anneaux-groupes** $F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

(b) *Il existe au moins un* **automorphisme de groupes :**

$$\psi \in \mathrm{Aut}(G)$$

rendant commutatif le diagramme :

(83)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}_e(\Gamma) & \xrightarrow{f_e} & \mathrm{Aut}_e(\Gamma) \\ \theta \uparrow & & \uparrow \theta \\ G & \xrightarrow{\psi} & G \end{array}$$

et qui détermine l'AUTOMORPHISME DE PSEUDO-MODULES :

$$\Psi = (\psi^{-1}, f, z, z'') \ : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P = (G, \Gamma, \theta)$$

tel que :

$$\Psi \in \mathrm{Aut}(P)$$

auquel est associée la **bijection** *:*

$$\widetilde{\Psi} = \widetilde{H}^2(\Psi) \ : \ \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow \widetilde{H}^2(P)$$

de telle sorte *que la* **classe** ξ *vérifie la condition :*

(84)
$$\widetilde{\Psi}(\xi) = \xi$$

ce qui signifie que la **classe** $\xi \in \widetilde{H}^2(P)$ *est* **invariante** *par l'automorphisme* $\Psi \in \mathrm{Aut}(P)$, *pour* **l'action naturelle** $\widetilde{H}^2(\ )$ *du groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(P)$ *sur l'espace* $\widetilde{H}^2(P)$.

PREUVE - Le Théorème 9-2 et le Théorème 5-2 entraînent immédiatement la démonstration.

REMARQUES 9-4 - Sous les hypothèses du Théorème 9-3, alors :

(a) L'adaptation de la Définition 8-2 conduit à considérer les *couples* :

$$(f, \psi) \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G)$$

et le *couple* (f, ψ) est COMPATIBLE s'il existe au moins un ISOMORPHISME D'EXTENSIONS, de la forme (f, F, ψ), caractérisé par un diagramme commutatif du type du diagramme (65) dans lequel $F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

(b) Le Théorème 9-3 donne une caractérisation des couples COMPATIBLES.

THEOREME 9-5 - *Sous les hypothèses du Théorème 9-3 et avec la terminologie précédente, pour tout* **couple** (f, ψ) *COMPATIBLE, qui détermine les ensembles* $\mathcal{F}(f, \psi)$ *et* $\mathcal{F}[f,\psi]$, *constitués respectivement par les* **prolongements** $F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ *et les* **"classes de prolongements"** $[F]$ *du couple* (f, ψ) *COMPATIBLE, alors :*

(a) *Il existe une* **action** *de groupe :*

$$Z^1(G, X_\theta) \times \mathcal{F}(f, \psi) \xrightarrow{\ \cdot\ } \mathcal{F}(f, \psi)$$
$$(a = (a_\alpha) \ , \ F) \longrightarrow a \cdot F$$

caractérisée par la condition :

(85) $$(a \cdot F)(u_\alpha) = f(a_\alpha) F(u_\alpha) = F(a_\alpha u_\alpha) \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

qui fait opérer le groupe abélien de 1 - COCYCLES CENTRAUX $Z^1(G, X_\theta) = Z^1(P)$ **librement** *et* **transitivement** *sur l'ensemble* $\mathcal{F}(f, \psi)$, *ce qui détermine sur l'ensemble* $\mathcal{F}(f, \psi)$ *une structure de* $Z^1(P)$ - **ensemble homogène principal.**

(b) *Par passage aux quotients, l'action précédente détermine une* **action** *de groupe :*

$$\hat{H}^1(P) \times \mathcal{F}[f, \psi] \longrightarrow \mathcal{F}[f, \psi]$$
$$(\hat{a} \ , \ [F]) \longrightarrow \hat{a} \,.\, [F] = [a \,.F]$$

qui fait opérer le groupe abélien $\hat{H}^1(P)$ **librement** *et* **transitivement** *sur l'ensemble* $\mathcal{F}[f, \Psi]$, *ce qui détermine sur l'ensemble* $\mathcal{F}[f, \psi]$ *une structure de* $\hat{H}^1(P)$ - **ensemble homogène principal.**

PREUVE - Compte tenu du diagramme commutatif (81) dans lequel $\Gamma = \Gamma'$ et $G = G'$, il est immédiat que l'automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ détermine, par composition avec f, un isomorphisme de $Z^1(G, X_\theta) = Z^1(P)$ sur $Z^1(G, X'_{\theta''}) = Z^1(Q)$, et par suite un isomorphisme de $H^1(G, X_\theta) = \hat{H}^1(P)$ sur $H^1(G, X'_{\theta''}) = \hat{H}^1(Q)$.

L'énoncé du Théorème 9-5 résulte alors de la traduction de l'énoncé du Théorème 8-7, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 9-6 - *Sous les hypothèses du Théorème 9-3 et avec la terminologie précédente, pour tout* **couple** (f, ψ) *COMPATIBLE, si :*

$$\hat{H}^1(P) = \{1\}$$

alors l'ensemble $\mathcal{F}[f, \psi]$ *ne contient qu'***une seule classe** *, ce qui signifie que deux prolongements* $F \in Aut(\Delta)$ *et* $F' \in Aut(\Delta)$ *du couple* (f, ψ) *COMPATIBLE sont nécessairement EQUIVALENTS, c'est-à-dire, différent d'un automorphisme intérieur* τ_x *déterminé par un élément* x *du* **centre-groupe** $X = Zg(\Gamma)$.

PREUVE - Elle résulte immédiatement du Théorème 9-5.

NOTATIONS 9-7 - Sous les hypothèses du Théorème 9-3, on considère le groupe :

$$Aut(\Delta; \Gamma) = Stab\,[Aut(\Delta)\,;\,\Gamma]$$

constitué par les automorphismes $F \in Aut(\Delta)$, qui *stabilisent* Γ, c'est-à-dire qui *induisent* sur Γ un automorphisme $f \in Aut(\Gamma)$, ce qui revient à dire que $F \in Aut(\Delta)$ est un *prolongement* de $f \in Aut(\Gamma)$.

Le Théorème 9-3 montre que les automorphismes $F \in Aut(\Delta; \Gamma)$ peuvent être identifiés aux triplets $F = (f, F, \psi)$ dans lesquels $(f, \psi) \in Aut(\Gamma) \times Aut(G)$ est un *couple* COMPATIBLE et $F \in \mathcal{F}(f, \psi)$, la composition étant évidente.

Compte tenu du Théorème 5-2, le Lemme 9-1 et le Théorème 9-3 entraînent l'existence d'un *morphisme de groupes* :

$$s\ : Aut(\Delta; \Gamma) \longrightarrow Aut(P)$$

qui, à tout automorphisme $(f, F, \psi) = F \in Aut(\Delta; \Gamma)$, associe l'automorphisme $s(F) = \Psi \in Aut(P)$, caractérisé par la condition : $\Psi = (\psi^{-1}, f, z, z'')$, du Théorème 9-3.

Le Théorème 9-5 montre que le groupe abélien $Z^1(P) = Z^1(G, X_\theta)$ opère *librement* et *transitivement* sur chaque ensemble $\mathcal{F}(f, \psi)$ associé à un *couple* (f, ψ) COMPATIBLE.

Il en résulte une *action* de groupe :

$$Z^1(P) \times Aut(\Delta; \Gamma) \xrightarrow{\ \cdot\ } Aut(\Delta; \Gamma)$$

$$(a\ \ ,\ \ F) \longrightarrow a \cdot F$$

caractérisée par la condition (85).

En particulier, il existe un *morphisme de groupes* injectif :

$$r : Z^1(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta; \Gamma)$$

caractérisé par la condition :

(86) $r(a) = r_a = a \cdot 1_\Delta$ pour tout $a \in Z^1(P)$

dont l'*image* est la *classe neutre* $\mathcal{F}(1_\Gamma, 1_G)$, et pour lequel il est facile de vérifier que l'*action* $\cdot$ peut être caractérisée par la condition:

(87) $a \cdot F = F \circ r_a$

pour tout $a \in Z^1(P)$ et tout $F \in \mathrm{Aut}(\Delta; \Gamma)$.

Le théorème 5-2 entraîne que tout automorphisme $\Psi \in \mathrm{Aut}(P)$ détermine une *bijection* :

$$\widetilde{\Psi} : \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow \widetilde{H}^2(P)$$

qui transforme la *classe* $\xi \in H^2(P)$ en une *classe* $\Psi(\xi) \in H^2(P)$.

Le Théorème 6-6 entraîne l'existence d'un élément *unique* $h \in \hat{H}^2(P)$ vérifiant la condition :

(88) $\widetilde{\Psi}(\xi) = h \mathbin{\widetilde{\circ}} \xi$

Il en résulte l'existence d'une *application* :

$$t : \mathrm{Aut}(P) \longrightarrow \hat{H}^2(P)$$

qui, à tout automorphisme $\Psi \in \mathrm{Aut}(P)$, associe l'*élément unique* $t(\Psi) = h \in \hat{H}^2(P)$ caractérisé par la condition (88), ce qui donne la condition :

(89) $\widetilde{\Psi}(\xi) = t(\Psi) \mathbin{\widetilde{\circ}} \xi$ pour tout $\Psi \in \mathrm{Aut}(P)$.

THEOREME 9-8 - *Sous les hypothèses du Théorème 9-3 et avec les notations précédentes, il existe une* **<<suite exacte>>** *de la forme :*

(90) $\{1\} \longrightarrow Z^1(P) = Z^1(G, X_\theta) \xrightarrow{r} \mathrm{Aut}(\Delta; \Gamma) \xrightarrow{s} \mathrm{Aut}(P) \xrightarrow{t} \hat{H}^2(P)$

dans laquelle r *et* s *sont des* **morphismes de groupes** *et dans laquelle* t *est seulement une* **application** , *dont le* **<<noyau>>** *constitué par l'image réciproque par* t *de l'élément neutre du groupe abélien* $\hat{H}^2(P)$, *constitue* **l'image** *du morphisme de groupes* s *et aussi le* **"groupe d'isotropie"** *de la* **classe** $\xi \in \widetilde{H}^2(P)$ *pour l'***action naturelle** $\widetilde{H}^2(\ )$ *du groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(P)$ *sur l'espace* $\widetilde{H}^2(P)$.

PREUVE - Les propriétés des notations introduites montrent que le "début" de la suite (90) est une suite exacte de groupes. Les propriétés de l'*application* t résultent du Théorème 9-3 et du Théorème 6-6 qui entraîne l'équivalence de la condition (84) et de la condition : $t(\Psi) = h = 1$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUES 9-9 -

(a) Le Théorème 9-3 et le Théorème 9-8 utilisent de façon évidente la FONCTORIALITE de la COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2(\ )$.

(b) Le Théorème 9-8 constitue la généralisation d'un Théorème de C. WELLS relatif aux automorphismes des extensions de groupes [26].

(c) Les résultats précédents fournissent les *principaux outils* utilisés dans les travaux ultérieurs [14] et [15], qui constituent des ANNEXES au DIPTYQUE formé par [12] et [13], la SECONDE ANNEXE [14] étant consacrée aux EXTENSIONS Q-NORMALES, ce qui généralise la théorie classique [7] des *algèbres Q-normales*, et la TROISIEME ANNEXE [15] étant consacrée aux SUITES DE HOCHSCHILD-SERRE EN COHOMOLOGIE NON ABELIENNE.

REFERENCES

[1] E. ARTIN and J. TATE, *Class field theory*, W. A. Benjamin, Inc, New York Amsterdam (1967).

[2] R. BAER, *Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen*, Math. Zeit., 38, (1934), 375-416.

[3] P. DEDECKER, *Sur la Cohomologie non abélienne* I *(dimension deux)*, Canad. J. Math., 12, (1960), 231-251.
Sur la Cohomologie non abélienne, II, Canad. J. Math., 15, (1963), 84-93.

[4] P. DEDECKER et E.M. LUKS, *Sur la non-fonctorialité du* H^2 *en cohomologi non abélienne*, C.R. Acad. Sc. Paris, t 282, (1976), 139-141 et 183-185.

[5] S. EILENBERG and S. Mac LANE, *Cohomology theory in abstract groups*.I, Ann. of Math., 48, (1947), 51-78.

[6] S. EILENBERG and S. Mac LANE, *Cohomology theory in abstract groups*.II *Group Extensions with a non-Abelian Kernel,* Ann. of Math., 48, (1947), 326-341.

[7] S. EILENBERG and S. Mac LANE, *Cohomology and Galois Theory* . I *Normality of Algebras and Teichmüller's Cocycle*, Trans. Amer. Math. Soc., 64, (1948), 1-20.

[8] J. FRENKEL, *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés*, Bull. Soc. Math. France, 85, (1957), 135-220.

[9] J. GIRAUD, *Cohomologie non abélienne,* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 179, Springer-Verlag, Berlin, (1971).

[10] A. GROTHENDIECK, *A General Theory of Fibre Space With Structure Sheaf*, University of Kansas, Report n° 4, Second Edition (1958).

[11] D. GUIN, *Cohomologie et Homologie non abéliennes des groupes,* J. Pure. Appl. Algebra., 50, (1988), 109-137.

[12] M. HACQUE, *Cohomologies des anneaux-groupes*, Comm. in Algebra 18, (1990), 3933-3997.

[13] M. HACQUE, *Produits croisés mixtes : extensions de groupes et extensions d'anneaux,* Comm. in Algebra , 19, (1991), 1993-2049.

[14] M. HACQUE, *Extensions Q-normales*, (en préparation).

[15] M. HACQUE, *Les suites de Hochschild-Serre en cohomologie non abélienne* (en préparation).

[16] G. HOCHSCHILD and J. P. SERRE, *Cohomology of group extensions,* Trans. Amer. Math. Soc., 74, (1953), 110-134.

[17] R. T. HOOBLER, *Non abelien sheaf cohomology by derived functors, Category theory, homology theory and their applications* III. Lecture Notes in Mathematics., 99, Springer-Verlag, (1969).