V. KOZYAK

Critères d'irréductibilité et d'équivalence des représentations régulières de Gauss du groupe des matrices triangulaires supérieures finies d'ordre infini

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1992, fascicule 2A
, p. 1-72
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1992___2A_1_0>

CRITERES D'IRREDUCTIBILITE ET D'EQUIVALENCE DES REPRESENTATIONS REGULIERES DE GAUSS DU GROUPE DES MATRICES TRIANGULAIRES SUPERIEURES FINIES D'ORDRE INFINI

V. KOSYAK (Kiev)

Résumé : Dans cette étude, on construit des équivalents des représentations régulières liées à la mesure de Gauss sur le sous-groupe du groupe des matrices finies triangulaires supérieures d'ordre infini et on trouve leur critère d'irréductibilité et d'équivalence.

INTRODUCTION

La représentation régulière joue un rôle important en théorie des représentations des groupes localement compacts. Toutes les représentations irréductibles des groupes finis et des groupes compacts, ainsi que de nombreuses représentations irréductibles de groupes de Lie localement compacts sont contenus dans la décomposition de la représentation régulière en représentations irréductibles. Dans le cas des groupes localement compacts, la représentation régulière elle-même est toujours réductible puisqu'il existe, parallèlement à la représentation régulière droite, une représentation régulière gauche, qui commute avec celle-ci. On sait [1] que le théorème suivant est vrai pour les groupes unimodulaires :

<u>Théorème A</u>. Le commutateur de la représentation régulière droite est engendré par les opérateurs de la représentation régulière gauche, tandis que le commutateur de la représentation régulière gauche est engendré par les opérateurs de la représentation régulière droite.

Il est donc naturel de vouloir construire l'équivalent de la représentation régulière dans le cas de groupes de dimension finie et d'étudier ses propriétés. On entend par équivalent de la représentation régulière (droite et gauche) du groupe de dimension finie G les homomorphismes

$$\mathfrak{T}^R, \mathfrak{T}^L : G \to U\left(\mathfrak{H} = L_2\left(\tilde{G}, G, d\mu\right)\right), f(x) \in \mathfrak{H} \to \left(\mathfrak{T}_t^R f\right)(x) = \left(d\mu(xt)/d\mu(x)\right)^{1/2} \times$$

$$\times f(xt) \in \mathfrak{H}, f(x) \in \mathfrak{H} \to \left(\mathfrak{T}_t^L f\right)(x) = \left(d\mu\left(t^{-1}x\right)/d\mu(x)\right)^{1/2} f\left(t^{-1}x\right) \in \mathfrak{H},$$

où $\tilde{G}$ est un groupe topologique (soit un espace topologique, soit un

G-espace topologique) contenant G comme sous-groupe dense : $G \subset \tilde{G}$, μ est une G-mesure quasi-invariante sur $\tilde{G}$.

Apparemment, l'équivalent de la représentation régulière $\Phi \to \to \mathfrak{U}\left(L_2(\Phi', \Phi, d\mu)\right)$ d'un groupe commutatif de dimension infinie de l'espace nucléaire Φ, où Φ' est l'adjoint de l'espace Φ, a été mentionné pour la première fois dans l'étude [2]. La représentation régulière $R_0^\infty \to U\left(L_2\left(R^\infty, R_0^\infty, d\omega\right)\right)$ du groupe commutatif R_0^∞ des suites finies de nombres réels correspondant aux différentes R_0^∞-mesures quasi-invariantes sur le groupe $R^\infty = R^1 \times R^1 \times \cdots, R_0^\infty \subset R^\infty$, a été étudiée dans la monographie [3]. Les études [4-9] sont consacrées à la représentation E dite représentation énergétique du groupe $C_0(X, G)$ des applications lisses à support compact de la variété riemannienne X dans le groupe de Lie semi-simple G compact.

La représentation E a été introduite dans l'étude [4] pour $G = SU_2$ et le X-domaine dans R^n et elle a été introduite dans le cas général dans [5,6]. L'irréductibilité et la non équivalence réciproque de représentations de ce type pour différentes matrices ont été démontrées pour la première fois dans [4] lorsque $d = \dim X \geq 5$ et que $G = SU_2$. On a démontré [5] l'irréductibilité et la non équivalence lorsque $d \geq 4$ et que G est un groupe de Lie compact semi-simple. On a démontré dans l'étude [8] l'irréductibilité pour $d \geq 3$ et $d = 2$ avec des hypothèses complémentaires. L'irréductibilité pour $d = 1$ a été démontrée dans les études [7] et [8].

On a mentionné le lien avec la représentation régulière lorsque $d=1$ dans les études [6-9]. On montre [6] que lorsque $X = [0, t)$, la représentation énergétique E est unitairement équivalente à la représentation régulière droite $\mathfrak{U}^R : C_0^1([0,t),G) \to$ $\to \mathfrak{U}\left(L_2\left(C([0,t),G), C_0^1([0,t),G), dw\right)\right)$, où $C([0,t),G)$ est l'espace de chemins lisses dans G, w est une mesure de Wiener sur $C([0,t),G)$ définie par un mouvement brownien gauche sur G. On a montré dans l'étude [7] pour le groupe $C_0^\infty((0,1),G)$ qu'à côté de la représentation droite $\mathfrak{U}^R$, équivalente à la représentation énergétique E, il existe une représentation gauche $\mathfrak{U}^L$ et on a prouvé ainsi la réductibilité de la représentation énergétique lorsque d=1. Ce fait a été établi dans l'étude [8] où l'on a également étudié la représentation droite $\mathfrak{U}^R$ et gauche $\mathfrak{U}^L$ des groupes $C_0^\infty(R^1, G)$ et $C_0^\infty(S^1, G)$. On a montré [9] que les représentations $\mathfrak{U}^R$ et $\mathfrak{U}^L$ construites en [8] sont des représentations factorisables et que le théorème A est vrai pour celles-ci et on y trouve la décomposition des représentations $\mathfrak{U}^R$ et $\mathfrak{U}^L$ en intégrale directe de représentations irréductibles.

On construit [10] des représentations régulières, une représentation régulière gauche $\mathfrak{U}^L$ et une représentation régulière droite $\mathfrak{U}^R$, $\mathfrak{U}^L, \mathfrak{U}^R : O(E) \to \mathfrak{U}\left(\mathfrak{H} = L_2\left(\left(E \hat{\otimes} E\right)^*, O(E), d\nu\right)\right)$ du groupe $O(E) = \underrightarrow{\lim}_m O(m)$, où $E \approx R_0^\infty$, $O(m)$ est un groupe orthogonal sur R^m et $\left(E \hat{\otimes} E\right)^* \approx M$ l'espace des matrices réelles d'ordre infini, ν une mesure standard de Gauss bi-invariante sur $O(E)$ et on montre que la représentation $\left(g_1, g_2\right) \in O(E) \times O(E) \to \omega_*\left(g_1, g_2\right) = \mathfrak{U}^L\left(g_1\right)\mathfrak{U}^R \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles. On transpose dans [11] les résultats de l'étude [10] au groupe unitaire $\mathfrak{U}$ où $E = C^\infty(X, R)$ est l'espace des fonctions réelles C^∞ sur la variété riemannienne compacte X, $\mathfrak{U}(E)$ est un groupe d'opérateurs inversibles sur E, qui sont des isométries de l'espace $L_2(X)$. Dans l'étude [12] on construit une représentation gauche régulière $\mathfrak{U}^L : \mathfrak{U}(\infty) \to \mathfrak{U}\left(L_2\left(M_C, \mathfrak{U}(\infty), d\nu_G\right)\right)$ du groupe $\mathfrak{U}(\infty) = \varinjlim_m \mathfrak{U}(m)$, où M_C est l'espace de toutes les matrices complexes d'ordre infini, ν_G est une mesure standard de Gauss sur M_C et on montre que $\mathfrak{U}^L$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles. En [13] on construit une représentation droite régulière $\mathfrak{U}^R : \overline{B}_0^\infty \to$ $\to \mathfrak{U}\left(L_2\left(\overline{B}^\infty, \overline{B}_0^\infty, d\nu\right)\right)$ du groupe $\overline{B}_0^\infty$ des matrices de la forme $X = \exp t + S$, où t est une matrice diagonale avec un nombre fini d'éléments réels non nuls, *S* est une matrice complexe triangulaire supérieure finie, $\overline{B}_0^\infty$ est un groupe de matrices arbitraires de la forme $X = \exp t + S$, ν une mesure de Gauss standard sur $\overline{B}_0^\infty$ et on a démontré l'irréductibilité de $\mathfrak{U}^R$.

Dans l'étude de l'auteur [14] on a démontré l'existence d'une famille de mesures de Gauss μ_b^ρ sur le groupe B^∞ des matrices triangulaires supérieures d'ordre infini avec des unités sur la diagonale principale, qui possèdent la propriété (LR) : <u>une action droite du groupe B_0^∞ est admissible et ergodique tandis que l'action gauche n'est pas admissible</u> et l'on construit la famille des représentations droites régulières $T^{R,b} : B_0^\infty \to U\left(L_2\left(B^\infty, B_0^\infty, d\mu_b^\rho\right)\right)$ du groupe B_0^∞ des matrices triangulaires supérieures finies $B_0^\infty \subset B^\infty$.

R. S. Ismahilov a émis l'hypothèse selon laquelle pour toutes ces représentations, la propriété (LR) est équivalente à une irréductibilité. G. I. Olchansky a conjecturé que des représentations non équivalentes correspondent à des mesures non équivalentes. Ce travail est consacré à la démonstration de ces conjectures pour le groupe B_0^∞ des mesures de Gauss produits (Cf. également [15]).

Il est vraisemblable que ces hypothèses sont justifiées pour tous les autres groupes infinis et pas obligatoirement pour les mesures de Gauss. La question de la décomposition de la représentation régulière irréductible du groupe B_0^∞ est ouverte.

Au § 1, on construit sur le groupe B^∞ une famille de mesures de Gauss μ_b^ρ possédant la propriété (LR) et une famille de représentations régulières droites $T^{R,b}$ du groupe B_0^∞. Au § 2 on démontre que la propriété (LR) est équivalente à l'irréductibilité de $T^{R,b}$. La démonstration de l'irréductibilité de $T^{R,b}$ repose sur la B_0^∞-ergodicité de la mesure μ_b^ρ et sur le fait que l'on peut approximer les opérateurs de multiplication par des variables indépendantes par des générateurs de groupes à un paramètre. Au §3 on démontre que des représentations non équivalentes correspondent à des mesures non équivalentes. La démonstration est fondée sur un calcul utilisant des transformations de Fourier partielles sur le groupe B^∞ des mesures spectrales de la famille des sous-groupes commutatifs $B_0^{-m} \subset B_0^\infty, m \in N$ ainsi que sur la comparaison de ces mesures spectrales à l'aide des intégrales de Helinger. Au § 4 on donne la démonstration de quelques lemmes techniques.

R. S. Ismahilov ne s'est pas contenté d'attirer l'attention de l'auteur sur cette conjecture, il a également accordé son soutien

constant et formulé de nombreuses remarques qui ont simplifié profondément quelques démonstrations. Les discussions avec G. I. Olchansky ont été très utiles à l'auteur.

§ 1. Représentation régulière

Soit B_0^∞ le groupe des matrices triangulaires supérieures finies réelles d'ordre infini avec des unités sur la diagonale principale, B^∞ est le groupe de toutes les matrices triangulaires supérieures avec des unités sur la diagonale principale, b^∞ est son algèbre de Lie, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les matrices triangulaires supérieures strictes. Si l'on désigne par $E_{kn}, k, n \in \mathbf{N}$ les unités matricielles d'ordre infini, alors les matrices $I + X, X = \sum_{k<n} X_{kn} E_{kn}$ où seul un nombre fini d'éléments X_{kn} est distinct de zéro (X_{kn} étant des éléments quelconques) sont des éléments du groupe B_0^∞ (respectivement B^∞). $b^\infty = \left\{ X = \sum_{k<n} X_{kn} E_{kn} \right\}$ Soit $B(m, \mathbf{R})$ le sous-groupe des matrices de B_0^∞ de la forme $B(m, \mathbf{R}) = \left\{ t = I + \sum_{k<n\leq m} X_{kn} E_{kn} \right\}$. Il est évident que $B_0^\infty = \varinjlim_m B(m, \mathbf{R})$. Munissons B_0^∞ de la topologie de limite inductive.

Etant donné que le groupe $G = B_0^\infty$ n'est pas localement compact, alors il n'existe pas de groupe de mesure G-invariante (A. Weil [16]), ni de mesure G-quasi-invariante (Sia-Do-Chin [17]). Par conséquent, on doit construire un équivalent sur le complément $\tilde{G}$ du groupe G. Si l'on choisit pour complément $\tilde{G}$ le groupe B^∞, alors il existe sur le groupe B^∞ de nombreuses mesures différentes B_0^∞ quasi-invariantes (par exemple des mesures de Gauss). Il n'y a aucune raison de préférer l'une d'entre elles ; il est donc raisonnable d'étudier toutes les mesures ou les mesures d'une classe donnée.

Il est plus commode de construire d'abord une mesure sur l'algèbre de Lie correspondante b^{∞}, puis de la transposer au groupe B^{∞} à l'aide de l'application exponentielle.

Pour une matrice de nombres positifs $b = (b_{kn})_{k<n}$ (désignons par $\mathfrak{B}$ l'ensemble de ces nombres), définissons la mesure de Gauss μ_b sur l'espace b^{∞} :

$$d\mu_b(x) = \underset{k<n}{\otimes} \sqrt{\frac{b_{kn}}{\pi}} \exp\left(-b_{kn} X_{kn}^2\right) dX_{kn} = \underset{k<n}{\otimes} d\mu_{b_{kn}}\left(X_{kn}\right)$$

Soit μ_b^{ρ} la mesure sur B^{∞}, image de la mesure μ_b par l'application

$\rho: X \in \mathrm{b}^{\infty} \to \rho(X) = I + X \in \mathrm{B}^{\infty}, \mu_b^{\rho}(\Delta) = \mu_b\left(\rho^{-1}(\Delta)\right),$

En réalité, $X = \sum_{k<n} X_{kn} E_{kn}$ représente les coordonnées de second ordre pour $\rho(X) = I + X$. Posons donc $X_m = \sum_{k=1}^{m} X_{km} E_{km}$. Il est alors évident que $\rho(X) = I + X = \cdots\left(I + X_m\right)\cdots\left(I + X_3\right)\left(I + X_2\right) = \cdots \exp\left(X_m\right)\cdots \exp\left(X_3\right)\exp\left(X_2\right)$. Etudions l'action à droite R_t et l'action à gauche L_t du groupe B_0^{∞} sur $\mathrm{B}^{\infty}: R_t s = st, L_t s = ts, t \in \mathrm{B}_0^{\infty}, s \in \mathrm{B}^{\infty}$. Désignons par $\left(\mu_b^{\rho}\right)^{R_t}, \left(\mu_b^{\rho}\right)^{L_t}$ les images de la mesure μ_b^{ρ} par les applications $R_t, L_t : \mathrm{B}^{\infty} \to \mathrm{B}^{\infty}$. Il s'avère que la mesure μ_b^{ρ} est toujours B_0^{∞}-quasi-invariante droite (lemme 1.1), mais pas toujours B_0^{∞}-quasi-invariante gauche (lemme 1.2). C'est pourquoi on peut construire une famille d'équivalents des représentations régulières droites $T^{R,b}$ et

gauches $T^{L,b}$ (si elles existent) dans l'espace $\mathfrak{H}(b) = L_2\left(B^{\infty}, d\mu_b^{\rho}\right)$:

$$f(x) \in \mathfrak{H}(b) \to \left(T_t^{R,b} f\right)(x) = \left(d\mu_b^{\rho}(xt) / d\mu_b^{\rho}(x)\right)^{1/2} f(xt) \in \mathfrak{H}(b) \qquad (1.1)$$

$$f(x) \in \mathfrak{H}(b) \to \left(T_t^{L,b} f\right)(x) = \left(d\mu_b^{\rho}\left(t^{-1}x\right) / d\mu_b^{\rho}(x)\right)^{1/2} f\left(t^{-1}xt\right) \in \mathfrak{H}(b) \qquad (1.2)$$

<u>Théorème 1.1</u>. La représentation régulière droite $T^{R,b}$ du groupe B_0^{∞} est irréductible seulement et seulement si aucun déplacement gauche $L_t, t \in B_0^{\infty}$ n'est admissible pour la mesure μ_b^{ρ}.

Les représentations (1.1) et (1.2) ont été construites dans l'étude [14] de l'auteur, mais les questions d'irréductibilité n'y ont pas été étudiées. La représentation $T^{R,1}$ pour la mesure de Gauss standard $1 = \left(b_{kn}\right)_{k<n}, b_{kn} \equiv 1$ a été construite indépendamment par N. I. Nessonov [13] et on a montré son irréductibilité. Cependant, la méthode de Nessonov qui est fondée sur la transformation de Fourier et sur la loi des grands nombres n'englobe pas le cas général $b \in \mathfrak{B}$.

<u>Lemme 1.1</u>. Pour $t \in B_0^{\infty}$, les mesures $\left(\mu_b^{\rho}\right)^{R_t}$ et μ_b^{ρ} sont toujours équivalentes.

<u>Démonstration</u>. Etant donné que pour une transformation $R_t : B^{\infty} \to B^{\infty}$, seul un nombre fini de coordonnées varie :

$$X \in B^{\infty} = I + \sum_{k<n} X_{kn} E_{kn} \to R_t(X) = I + \sum_{p<q} \tilde{X}_{pq} E_{pq} \in B^{\infty}$$

où $\tilde{X}_{pq} = X_{pq} + t_{pq} + \sum_{k=p+1}^{q-1} X_{pk} t_{kq}$ quand $p < q \leq N(t)$ et $\tilde{X}_{pq} = X_{pq}$ quand $q > N(t)$, alors la question se réduit à l'équivalence de deux mesures de Gauss dégénérées dans un espace de dimension finie qui sont visiblement équivalentes, puisque chacune d'entre elles est équivalente à la mesure de Lebesgue.

Lemme 1.2. Soit $t \in B_0^{\infty}$. Les mesures $\left(\mu_b^{\rho}\right)^{L_t}$ et μ_b^{ρ} sont équivalentes si et seulement si

$$S^{L}_{k\,k+1}(b) = \sum_{m=k+2}^{\infty} b_{k\,m}\, b^{-1}_{k+1\,m} < \infty, k \in \mathbf{N} \tag{1.3}$$

Démonstration. Posons $t_{k\,k+1} = I + tE_{k\,k+1}, t \in \mathbf{R}^1$ et montrons que la condition $\left(\mu_b^{\rho}\right)^{L_t} \sim \mu_b^{\rho}$ est équivalente à (1.3). En réalité, puisque

$$L_{t_{k\,k+1}}(x) = \begin{pmatrix} & & & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & t & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & \cdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & X_{k\,k+1} & \cdots & X_{k\,m} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & X_{k+1\,m} & \cdots \\ & & & \cdots & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} & & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & X_{k\,k+1} + t & \cdots & X_{k\,m} + tX_{k+1\,m} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & X_{k+1\,m} & \cdots \\ & & & & \cdots & & \end{pmatrix}$$

alors $\mu_b^{L_{t_{k\,k+1}}}$ est une mesure produit $\mu_b^{L_t} = \left(\left(\mu^{\rho}\right)^{L_t}\right)^{\rho^{-1}}$

$$\mu_b^{L_{t_{k\,k+1}}}(X) = \left(\bigotimes_{\substack{n<m \\ n \neq k,\, k+1}} \mu_{b_{n\,m}}\left(X_{n\,m}\right)\right) \otimes \mu_{b_{k\,k+1}}^{L_{t_{k\,k+1}}}\left(X_{k\,k+1}\right) \otimes$$

$$\otimes \left(\bigotimes_{m=k+2}^{\infty} \left(\mu_{b_{k\,m}} \otimes \mu_{b_{k+1\,m}}\right)^{L_{t_{k\,k+1}}}\left(X_{k\,m}, X_{k+1\,m}\right)\right)$$

de plus les densités de ses facteurs par rapport aux facteurs de la mesure μ_b sont égaux :

$$\left(\frac{d\mu_{b_{k\,k+1}}^{L_{t_{k\,k+1}}}}{d\mu_{b_{k\,k+1}}}\right)\left(X_{k\,k+1}\right) = \exp\left(-b_{k\,k+1}\left(X_{k\,k+1}+t\right)^2 + b_{k\,k+1}X_{k\,k+1}^h\right)$$

$$\frac{d\left(\mu_{b_{k\,m}}\otimes\mu_{b_{k+1\,m}}\right)^{L_{t_{k\,k+1}}}}{d\left(\mu_{b_{k\,m}}\otimes\mu_{b_{k+1\,m}}\right)}\left(X_{k\,m},X_{k+1\,m}\right) = \exp\left(-b_{k\,m}\left(X_{k\,m}+tX_{k+1\,m}\right)^2 + b_{k\,m}X_{k\,m}^2\right)$$

En vertu du critère d'équivalence de la mesure produit [18, § 16, théorème 1], la condition $\mu_b^{L_{t_{k\,k+1}}} \sim \mu_b$ est équivalente à la convergence du produit Π :

$$\Pi = \int_{R^1}\left(\frac{d\mu_{b_{k\,k+1}}^{L_{t_{k\,k+1}}}}{d\mu_{b_{k\,k+1}}}\right)^{1/2}\left(x_{k\,k+1}\right)d\mu_{b_{k\,k+1}}\left(x_{k\,k+1}\right)\times$$

$$\times\prod_{m=k+2}^{\infty}\int_{R^2}\left(\frac{d\left(\mu_{b_{k\,m}}\otimes\mu_{b_{k+1\,m}}\right)^{L_{t_{k\,k+1}}}}{d\left(\mu_{b_{k\,m}}\otimes\mu_{b_{k+1\,m}}\right)}\right)^{1/2}\left(x_{k\,m},x_{k+1\,m}\right)d\left(\mu_{b_{k\,m}}\otimes\mu_{b_{k+1\,m}}\right)\left(x_{k\,m},x_{k+1\,m}\right)$$

$$=\left(\frac{b_{k\,k+1}}{\pi}\right)^{1/2}\int_{R^1}\exp\left(\frac{-b_{k\,k+1}\left(X_{k\,k+1}+t\right)^2+b_{k\,k+1}X_{k\,k+1}^2}{2}\right)\exp\left(-b_{k\,k+1}X_{k\,k+1}^2\right)dX_{k\,k+1}$$

$$\times\prod_{m=k+2}^{\infty}\left(\frac{b_{k\,m}b_{k+1\,m}}{\pi^2}\right)^{1/2}\int_{R^2}\exp\left(\frac{-b_{k\,m}\left(X_{k\,m}+tX_{k+1\,m}\right)^2+b_{k\,m}X_{k\,m}^2}{2}\right)$$

$$\exp\left(-b_{k\,m}X_{k\,m}^2-b_{k+1\,m}X_{k+1m}^2\right)dX_{k\,m}\,dX_{k+1\,m} =$$

$$= \exp\left(-\frac{b_{k\,k+1}t^2}{4}\right)\prod_{m=k+2}^{\infty}\left(\frac{b_{k+1\,m}}{\pi}\right)^{1/2}\int_{R^1}\exp\left(\frac{-b_{k\,m}t^2X^2_{k+1\,m}}{4}\right)\times$$

$$\exp\left(-b_{k+1\,m}X_{k+1\,m}\right)dX_{k+1\,m} = \exp\left(-\frac{b_{k\,k+1}t^2}{4}\right)\prod_{m=k+2}^{\infty}\left(\frac{b_{k+1\,m}}{b_{k+1\,m}+t^2\frac{b_{k\,m}}{4}}\right)^{1/2} =$$

$$= \exp\left(-\frac{b_{k\,k+1}t^2}{4}\right)\prod_{m=k+2}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{4}\frac{b_{k\,m}}{b_{k+1\,m}}\right)^{1/2}$$

Ainsi, la convergence du produit Π est équivalente à la convergence de la série $S^L_{k\,k+1}(b) = \sum_{m=k+2}^{\infty} b_{k\,m}b^{-1}_{k+1\,m}$. Etant donné que les groupes à un paramètre

$$G_{k\,k+1} = \left\{t_{k\,k+1} \in B_0^\infty \middle| t_{k\,k+1} = I + tE_{k\,k+1}, t \in R^1\right\}, k \in \mathbf{N},$$

engendrent le groupe B_0^∞, alors $\mu_b^{L_t} \sim \mu_b, t \in B_0^\infty$ est équivalent à $\mu_b^{L_{t_{k\,k+1}}} \sim \mu_b, k \in \mathbf{N}$, et le théorème est démontré.

<u>Remarque 1.1</u>. On en déduit notamment l'équivalence des conditions $S^L_{k\,k+1}(b) < \infty, k \in \mathbf{N}$ et

$$S^L_{k\,n}(b) = \sum_{m=n+1}^{\infty} b_{k\,m}b^{-1}_{n\,m} < \infty, k, n \in \mathbf{N}, k < n$$

<u>Lemme 1.3</u> La mesure μ_b^ρ définie sur B^∞ est B_0^∞-ergodique par rapport à l'action à droite.

<u>Démonstration</u>. Toute fonction mesurable sur $\mathbf{R}^\infty$ dont la mesure standard de Gauss est invariante lors d'une variation arbitraire d'une coordonnée première quelconque, coïncide presque

partout avec une constante [19, § 3, conséquence 1]. C'est pourquoi la démonstration découle du fait que le sous-groupe $B(n, \mathbf{R})$ du groupe B_0^∞ a une action transitive sur le sous-groupe $B(n, \mathbf{R}) \subset B^\infty$ et, du fait que la mesure μ_b est un produit tensoriel de mesures.

§ 2. Irréductibilité des représentations

La démonstration de l'irréductibilité d'une représentation régulière repose sur l'ergodicité de la mesure μ_b^ρ par rapport aux déplacements droits sur les éléments du groupe B_0^∞ et sur le fait que l'on peut approximer les opérateurs de multiplication par des variables indépendantes par des générateurs de groupes à un paramètre.

<u>Démonstration du théorème</u> 1.1. La condition nécessaire est évidente. Démontrons que la condition est suffisante. Soit $\left(\mu_b^\rho\right)^{L_t} \perp \mu_b^\rho, t \in B_0^\infty$, alors d'après le lemme 1.2 $S_{kn}^L(b) = \infty, k, n \in N, k < n.$

Désignons par $\tilde{W}(b)$ l'ensemble des opérateurs auto-adjoints ou antiauto-adjoints de $\mathfrak{X}(b)$, associés à l'algèbre $W(b) = \left\{T_t^{R,b} \middle| t \in B_0^\infty\right\}''$ et montrons que :

$$\tilde{W}(b) \supset \left\{X_{kn}, \partial_{pq} - b_{pq}X_{pq} \middle| k < n,\ p < q, k, n,\ p, q \in \mathbf{N}\right\}.$$

Désignons par A_{kn} les générateurs du déplacement droit :

$$A_{kn} = \frac{d}{dt}T^{R,b}\left(I + tE_{kn}\right)\Big|_{t=0} \quad k < n, k, k \in \mathbf{N}.$$

Un calcul direct donne

$$A_{kn} = \sum_{m=1}^{k} X_{mk}\left(\partial_{mn} - b_{mn}X_{mn}\right), X_{kk} \equiv 1, k < n, \partial_{mn} = \partial/\partial X_{mn}. \quad (2.1)$$

<u>Lemme 2.1</u>. $\left\{X_{mn}, \partial_{pq} - b_{pq}X_{pq} \middle| m < n,\ p < q, m, n,\ p, q \in \mathbf{N}\right\} \subset \tilde{W}(b)$.

Nous démontrons ce lemme par récurrence.

<u>Etape initiale de la récurrence</u>. Montrons que :

$$\left\{X_{12}, \partial_{1k} - b_{1k} X_{1k\,k}, \partial_{2k+1} - b_{2k+1} X_{2k+1}, k = 2, 3, \ldots\right\} \subset \tilde{W}(b).$$

Effectivement, l'opérateur X_{12} peut être approximé par des combinaisons linéaires des opérateurs $A_{1n}, A_{2n}, n > 2$. Utilisons pour cette démonstration la méthode de calcul proposée par R. S. Ismahilov (lemme 2.3-2.4) (la méthode initiale (Cf. [15]) était plus complexe).

Lemme 2.2. L'opérateur X_{12} peut être approximé par des combinaisons linéaires des opérateurs A_{1n} A_{2n} si et seulement si

$$\sigma_{12}(b) = \sum_{n=3}^{\infty} b_{1n} b_{2n}^{-1} = \infty$$

Démonstration. Calculons la distance de X_{12} **1** par rapport à l'enveloppe linéaire des vecteurs A_{1n} A_{2n} **1**, $N_1 \leq n \leq N_2$. Etant donné que

$$A_{1n} = \partial_{1n} - b_{1n} X_{1n}, A_{2n} = X_{12}\left(\partial_{1n} - b_{1n} X_{1n}\right) + \left(\partial_{2n} - b_{2n} X_{2n}\right) \quad (2.2)$$

(Cf. (2.1)), nous avons

$$A_{1n} A_{2n} \mathbf{1} = X_{12}\left(b_{1n}^2 X_{1n}^2 - b_{1n}\right) + b_{1n} b_{2n} X_{1n} X_{2n} =$$

$$= -\tfrac{1}{2} b_{1n} X_{12} + b_{1n}^2 X_{12} y_{1n} + b_{1n} b_{2n} X_{1n} X_{2n}.$$

En effectuant le changement de variables

$$X_{1n}^2 = \left(X_{1n}^2 - \frac{1}{2b_{1n}}\right) + \frac{1}{2b_{1n}} = y_{1n} + \frac{1}{2b_{1n}}, \text{ alors } \int y_{1n} d\mu_b = 0 \text{ et}$$

$$\int y_{1n}^2 d\mu_b = \int \left(X_{1n}^4 - X_{1n}^2 b_{1n}^{-1} - 4^{-1} b_{1n}^{-2}\right) d\mu_b(X) = 2^{-1} b_{1n}^{-2}.$$

Multiplions les deux membres de (2.2) par $t_n, N_1 \leq n \leq N_2$ de sorte que $\sum_{N_1}^{N_2} b_{1n} t_n = -2$ et faisons la sommation sur n :

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n A_{1n} A_{2n} 1 = X_{12} + \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n b_{1n}^2 X_{12} y_{1n} + \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n b_{1n} b_{2n} X_{1n} X_{2n},$$

Posons

$$\omega = \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n A_{1n} A_{2n} 1 - X_{12} = \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n b_{1n}^2 X_{12} y_{1n} + \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n b_{1n} b_{2n} X_{1n} X_{2n},$$

puisque tous les termes sont non corrélés, alors

$$\|\omega\|^2 = \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2 \left(b_{1n}^4 \frac{1}{2b_{12}} \frac{1}{2b_{1n}^2} + \frac{b_{1n}^2 b_{2n}^2}{2b_{1n} 2b_{2n}} \right) = \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2 \frac{1}{4} \left(\frac{b_{1n}^2}{b_{12}} + b_{1n} b_{2n} \right).$$

Choisissons à présent $\{t_n\}$ de sorte que ω soit minimal. Il est facile de voir que

$$\min\left\{ \sum_{n=1}^{m} t_n^2 a_n \,\middle|\, \sum_{n=1}^{m} t_n = 1 \right\} = \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} \right)^{-1},$$

de plus on obtient un extremum pour $t_n = \frac{1}{a_n} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} \right)^{-1}$; c'est pourquoi

$$\min\left\{ \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2 \gamma_n \,\middle|\, \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n b_{1n} = -2 \right\} = 4 \left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{b_{1n}^2}{\gamma_n} \right)^{-1}, \tag{2.3}$$

de plus l'extremum est atteint pour $t_n = -\frac{2b_{1n}}{\gamma_n} \left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{b_{1n}^2}{\gamma_n} \right)^{-1}$, c'est pourquoi l'on obtient après avoir choisi $\{t_n\}$ de manière optimale :

$$\|\omega\|^2 = 4\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{b_{1n}^2}{\gamma_n}\right)^{-1}.$$

Exigeons que $\sum_n b_{1n}^2 \gamma_n^{-1} = \infty$, c'est-à-dire

$$\sum_n b_{1n}^2 \left(b_{1n}^2 b_{12}^{-1} + b_{1n} b_{2n}\right)^{-1} = \sum_n \left(b_{12}^{-1} + b_{2n} b_{1n}^{-1}\right)^{-1} = \infty \Leftrightarrow \sum_n b_{1n} b_{2n}^{-1} = \infty.$$

Alors, $X_{12} \in \tilde{W}(b)$, $\partial_{1k} - b_{1k} X_{1k} = A_{1k} \in \tilde{W}(b), k \geq 2,$

$\partial_{2k} - b_{2k} X_{2k} = A_{2k} - X_{12}\left(\partial_{1k} - b_{1k} X_{1k}\right) \in \tilde{W}(b), k \geq 3$

Montrons à présent que la convergence $\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n A_{1n} A_{2n} \to X_{12}$ des opérateurs auto-adjoints $A_{N_1,N_2} = \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n A_{1n} A_{2n}$ (le caractère auto-adjoint de l'opérateur A_{N_1,N_2} découle de la relation de commutation $\left[A_{1n}, A_{2q}\right] = 0, n, q \geq 3$, du caractère anti-adjoint de $A_{kn} : A_{kn}^* = -A_{kn}$ et de la nature réelle de t_n) vers l'opérateur auto-adjoint $A = X_{12}$ a lieu au sens de la résolvante de Weil. Il suffit pour cela de montrer [20, théorème VIII.25], que la convergence $A_{N_1,N_2} f \to Af$ est vraie pour tout $f \in \mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est un domaine réel quelconque pour tous les opérateurs A_{N_1,N_2}, A. Soit $\mathcal{D}$ un ensemble dense constitué des combinaisons linéaires finies des monômes libres

$X^{\alpha} = X_{12}^{\alpha_{12}} X_{13}^{\alpha_{13}} X_{23}^{\alpha_{23}} \cdots X_{1k}^{\alpha_{1k}} X_{2k}^{\alpha_{2k}} \cdots$. $\alpha_{ij} = 0, 1, \ldots$, $i < j$ On voit que $\mathcal{J}$ est un domaine réel quelconque pour tous les opérateurs A_{N_1, N_2} et A puisque $\mathcal{J}$ est constitué de vecteurs analytiques pour les opérateurs A_{N_1, N_2} et A. Soit $f \in \mathcal{J}$. Puisque f est cylindrique, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que f ne dépend pas des variables X_{1n}, X_{2n} quand $n > n_0$. Soit $N_1 > n_0$, alors

$$\left\| \left(X_{12} - \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n A_{1n} A_{2n} \right) f \right\|^2 = \left\| \left(X_{12} - \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n \left(X_{12} \left(b_{1n}^2 X_{1n} - b_{1n} \right) + b_{1n} b_{2n} X_{1n} X_{2n} \right) \right) f \right\|^2 =$$

$$= \left\| X_{12} \left(1 - \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n \left(b_{1n}^2 X_{1n}^2 - b_{1n} \right) \right) f \right\|^2 + \left\| \left(\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n b_{1n} b_{2n} X_{1n} X_{2n} \right) f \right\|^2 =$$

$$\left\| X_{12} f \right\|^2 \cdot \left\| \left(1 - \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n \left(b_{1n}^2 X_{1n}^2 - b_{1n} \right) \right) 1 \right\|^2 + \left\| f \right\|^2 \cdot \left\| \left(\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n b_{1n} b_{2n} X_{1n} X_{2n} \right) 1 \right\|^2 \to 0,$$

puisque comme on vient de le démontrer

$$\left\| \left(X_{12} - \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n A_{1n} A_{2n} \right) 1 \right\|^2 = \left\| \left(1 - \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n \left(b_{1n}^2 X_{1n}^2 - b_{1n} \right) \right) 1 \right\|^2 + \left\| \left(\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n b_{1n} b_{2n} X_{1n} X_{2n} \right) 1 \right\|^2$$

est négligeable pour N_1, N_2 convenablement choisis.

<u>Pas de récurrence</u>. L'inclusion suivante est vraie.

$\left\{ X_{mn}, n < m \leq p, \partial_{mn} - b_{mn} X_{mn}, 1 \leq n \leq p, m > n \right\} \subset \tilde{W}(b)$.

Prouvons qu'alors

$\left\{ X_{l\,p+1}, \partial_{p+1\,m} - b_{p+1\,m} X_{p+1\,m}, l < p+1 < m \right\} \subset \tilde{W}(b)$. Nous présentons la démonstration de cette proposition sous la forme de plusieurs lemmes.

Il semblerait que les opérateurs $X_{lk}, l < k$ puissent être approximés par analogie avec X_{12}, par les opérateurs $A_{ln}A_{kn}, n > k$. Cependant, les considérations suivantes montrent que ce n'est pas toujours possible quand $S^{L}_{kn}(b) = \infty, k < n$.

<u>Lemme 2.3</u>. L'opérateur $X_{lk}, l < k$ peut être approximé par les combinaisons d'opérateurs $A_{ln}A_{kn}, n > k$ si et seulement si

$$\tilde{\sigma}_{lk}(b) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{b^2_{ln}}{\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{k} b_{jn} b_{mn}} = \infty,\ l < k$$

<u>Démonstration</u>. D'après la formule (2.1)

$$A_{ln} = \sum_{j=1}^{l} X_{jl}\left(\partial_{jn} - b_{jn}X_{jn}\right),\ A_{kn} = \sum_{m=1}^{k} X_{mn}\left(\partial_{mn} - b_{mn}X_{mn}\right),$$

c'est pourquoi

$$A_{ln}A_{kn}\mathbf{1} = \sum_{j=1}^{l} X_{jl}\left(\partial_{jn} - b_{jn}X_{jn}\right)\sum_{m=1}^{k} X_{mn}\left(\partial_{mn} - b_{mn}X_{mn}\right)\mathbf{1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{l} X_{jl}\left(\partial_{jn} - b_{jn}X_{jn}\right)\sum_{m=1}^{k} X_{mk}\left(-b_{mn}X_{mn}\right)\mathbf{1} = \sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{k} b_{jn}b_{mn}X_{jl}X_{jn}X_{mk}X_{mn} -$$

$$- \sum_{m=1}^{l} b_{mn}X_{ml}X_{mk} = \sum_{j=1}^{l}\sum_{\substack{m=1\\ j\neq m}}^{k} b_{jn}b_{mn}X_{jl}X_{jn}X_{mk}X_{mn} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{l} b^2_{mn}X^2_{mn}X_{ml}X_{mk} - \sum_{m=1}^{l} b_{mn}X_{ml}X_{mk}.$$

(En posant $X^2_{mn} = y_{mn} + \frac{1}{2b_{mn}}, \int y_{mn}\,d\mu_b = 0,$)

$$A_{l\,n} A_{k\,n} 1 = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{m=1 \\ j \neq m}}^{k} b_{j\,n} b_{m\,n} X_{j\,l} X_{j\,n} X_{m\,k} X_{m\,n} + \sum_{m=1}^{l} b^2_{m\,n} y_{m\,n} X_{m\,l} X_{m\,k} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{l} b_{m\,n} X_{m\,l} X_{m\,k} .$$

Multiplions les deux parties de l'égalité par des nombres $\{t_n\}$ tels que

$-\frac{1}{2} \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n b_{l\,n} = 1$. Alors

$$\tilde{\omega}_{l\,k}(b) := \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n A_{l\,n} A_{k\,n} 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n b_{l\,n} X_{l\,k} =$$

$$= \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n \left[\sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{m=1 \\ j \neq m}}^{k} b_{j\,n} b_{m\,n} X_{j\,l} X_{j\,n} X_{m\,k} X_{m\,n} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{l-1} b_{m\,n} X_{m\,l} X_{m\,k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{l-1} b^2_{m\,n} y_{m\,l} X_{m\,l} X_{m\,k} + b^2_{l\,n} y_{l\,n} X_{l\,k} \right],$$

c'est pourquoi

$$\left\| \tilde{\omega}_{l\,k}(b) \right\| = \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2 \left[\sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{m=1 \\ j \neq m}}^{k} \frac{b_{j\,n} b_{m\,n}}{16 b_{j\,l} b_{m\,k}} + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{l-1} \frac{b^2_{m\,n}}{4 b_{m\,l} b_{m\,k}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{l-1} \frac{b^4_{m\,n}}{2 b^2_{m\,n} 4 b_{m\,l} b_{m\,k}} + \frac{b^4_{l\,n}}{2 b^2_{l\,n} 2 b_{l\,k}} \right].$$

En d'autres termes,

$$\left\| \tilde{\omega}_{l\,k}(b) \right\|^2 \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2 \left[\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{k} \sum_{j=1}^{l} b_{j\,n} b_{m\,n} + \sum_{m=1}^{l} b^2_{m\,n} \right] = \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2 \sum_{m=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} b_{j\,n} b_{m\,n}$$

En utilisant (2.3), nous obtenons :

$$\left\|\tilde{\omega}_{l\,k}(\mathrm{b})\right\|^2 \quad \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{\mathrm{b}^2_{l\,n}}{\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{k} \mathrm{b}_{j\,n}\,\mathrm{b}_{m\,n}}$$

<u>Exemple 2.1</u>. Soit le système $\mathrm{b}^{(1)} = \left(\mathrm{b}^{(1)}_{k\,n}\right)_{k<n}$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cdots & \mathrm{b}^{(1)}_{2n} & \mathrm{b}^{(1)}_{2n+1} & \mathrm{b}^{(1)}_{2n+2} & \cdots \\ \cdots & \mathrm{b}^{(1)}_{3n} & \mathrm{b}^{(1)}_{3n+1} & \mathrm{b}^{(1)}_{3n+2} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & n^2 & 1 & (n+2)^2 & \cdots \\ \cdots & 1 & (n+1)^2 & 1 & \cdots \end{pmatrix}, \mathrm{b}^{(1)}_{k} \equiv 1,\ k \neq 2,3$$

Il est évident que $S^{L}_{k\,n}\left(\mathrm{b}^{(1)}\right) = \infty,\ k < n$, mais

$$\tilde{\sigma}_{1\,k}\left(\mathrm{b}^{(1)}\right) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\mathrm{b}^{(1)}_{1\,n}}{\mathrm{b}^{(1)}_{2\,n} + \cdots + \mathrm{b}^{(1)}_{k\,n}} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + k - 2} < \infty,\ k \geq 3.$$

Il découle du lemme 2.3 que pour le système $\mathrm{b}^{(1)}$ on ne peut approximer par les opérateurs $A_{1\,n}A_{k\,n}$ aucun opérateur $f \to X_{1\,k}f,\ k \geq 3$; on peut approximer $X_{1\,2}$. Il vaut mieux approximer les opérateurs $X_{k\,l}$ par des opérateurs du type

$\left(\partial_{l\,n} - \mathrm{b}_{l\,n}X_{l\,n}\right)A_{k\,n},\ k < n.$

<u>Lemme 2.4</u>. Pour que l'on puisse approximer les variables $X_{l\,k},\ 1 < k$ par les opérateurs $\left(\partial_{l\,n} - \mathrm{b}_{l\,n}X_{l\,n}\right)A_{k\,n}$, il faut et il suffit que

$$\sigma_{l\,k}(\mathrm{b}) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\mathrm{b}_{l\,n}}{\sum_{m=1,\,m\neq l}^{k} \mathrm{b}_{m\,n}} = \infty,\ 1 < k$$

<u>Démonstration</u>.

$$\left(\partial_{l\,n} - b_{l\,n}X_{l\,n}\right)A_{k\,n}\mathbf{1} = \left(\partial_{l\,n} - b_{l\,n}X_{l\,n}\right)\sum_{m=1}^{k} X_{m\,k}\left(\partial_{m\,n} - b_{m\,n}X_{m\,n}\right)\mathbf{1} =$$

$$= \left(\partial_{l\,n} - b_{l\,n}X_{l\,n}\right)\sum_{m=1}^{k} X_{m\,k}\left(-b_{m\,n}X_{m\,n}\right)\mathbf{1} = \sum_{m=1}^{k} b_{l\,n}b_{m\,n}X_{m\,k}X_{l\,n}X_{m\,n} - X_{l\,k}b_{l\,n} =$$

$$= \sum_{m=1,\, m\neq l}^{k} b_{l\,n}b_{m\,n}X_{m\,k}X_{l\,n}X_{m\,n} + b_{l\,n}^{2}y_{l\,n}X_{l\,k} - \tfrac{1}{2}X_{l\,k}b_{l\,n},$$

(avec le changement de variables : $X_{l\,n}^{2} = y_{l\,n} + \dfrac{1}{2b_{l\,n}}, \int y_{l\,n}\,d\mu_{b} = 0$).

Multiplions la partie gauche et la partie droite par $t_n, N_1 \leq n \leq N_2$,

après avoir choisi t_n tel que $\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n b_{l\,n} = -2$, alors

$$\omega_{l\,k}(b) := \left(\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(\partial_{l\,n} - b_{l\,n}X_{l\,n}\right)A_{k\,n} - X_{l\,k}\right)\mathbf{1} =$$

$$= \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left[\sum_{m=1,\, m\neq l}^{k} b_{l\,n}b_{m\,n}X_{m\,k}X_{l\,n}X_{m\,n} + b_{l}^{2}\, y_{l\,n}X_{l\,k}\right],$$

$$\left\|\omega_{l\,k}(b)\right\| \quad \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^{2}\left[\sum_{m=1,\, m\neq l}^{k} \frac{b_{l\,n}b_{m\,n}}{b_{m\,k}} + \frac{b_{l\,n}^{2}}{b_{l\,k}}\right] \quad \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^{2}\sum_{m=1}^{k} b_{l\,n}b_{m\,n},$$

Par conséquent, d'après la formule (2.3)

$$\min_{\left\{t_n \,\middle|\, \sum_n b_{l\,n}t_n = -2\right\}} \left\|\omega_{l\,k}(b)\right\|^{2} = 4\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{b_{l\,n}^{2}}{\sum_{m=1}^{k} b_{l\,n}b_{m\,n}}\right)^{-1}.$$

Il faut que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{b_{l n}^{2}}{\sum_{m=1}^{k} b_{l n} b_{m n}} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{b_{l n}}{\sum_{m=1, m \neq l}^{k} b_{m n} + b_{l n}} = \infty,\ l < k,$$

ce qui est équivalent à

$$\sigma_{l k}(b) = \sum_{n=k+1}^{\infty} b_{l n} \left(\sum_{m=1, m \neq l}^{k} b_{m n} \right)^{-1} = \infty,\ l < k.$$

Cependant, l'exemple 2.1 montre que pour tout système $b^{(1)}$, comme précédemment, on ne peut approximer aucun opérateur $f \to X_{1 k} f$, $k \geq 3$ par les opérateurs $\left(\partial_{1 n} - b_{1 n} X_{1 n}\right) A_{k n}$; avec $X_{1 2}$ on le peut.

Il s'avère que pour tout $q = 2, 3, \ldots$ il existe $p < q$ tel l'on peut approximer les variables $X_{p q}$ par les opérateurs $\left(\partial_{p n} - b_{p n} X_{p n}\right) A_{q n}$, $n > q$.

<u>Lemme 2.5</u>. Soit $S^{L}_{k q}(b) = \infty$, $k = 1, 2, \ldots, q-1$, il existe alors p<q tel que $\sigma_{p q}(b) = \infty$.

<u>Démonstration</u>. Nous donnerons une démonstration par récurrence. Soit $q = 3$ et $S^{L}_{1 k}(b) = \sum_{k=4}^{\infty} b_{1 k} b^{-1}_{3 k} = \infty$, $S^{L}_{2 3}(b) = \sum_{k=4}^{\infty} b_{2 k} b^{-1}_{3 k} = \infty$. Supposons au contraire que $\sigma_{1 3}(b) = = \sum_{k=4}^{\infty} b_{1 k} \left(b_{2 3} + b_{3 k}\right)^{-1} < \infty$ et que $\sigma_{2 3}(b) = \sum_{k=4}^{\infty} b_{2 k} \left(b_{1 k} + b_{3 k}\right)^{-1} < \infty$, alors il découle de $\sigma_{1 3}(b) < \infty$ que $b_{1 k} < b_{2 3} + b_{3 k}$, $k \geq k_{0}$, alors

$$\sigma_{2 3}(b) > \sum_{k=k_0}^{\infty} b_{2 k} \left(b_{1 k} + b_{3 k}\right)^{-1} > \sum_{k=k_0}^{\infty} b_{2 k} \left(b_{2 k} + 2b_{3 k}\right)^{-1} = \infty, \quad \text{puisque}$$

$S^L_{2\,3}(b) = \infty$. La contradiction obtenue démontre la propriété pour q=3.

Il découle de $S^L_{k\,q}(b) = \infty$, $k = 1, 2, \ldots q-1$ que $\sigma_{p\,q}(b) = \infty$ pour un certain p<q. Démontrons cette propriété pour q+1. Supposons au contraire que $\sigma_{r\,q+1}(b) < \infty$, $r = 1, 2, \ldots, q$. Il découle de

$$\sigma_{1\,q+1}(b) = \sum_{n=q+2}^{\infty} b_{1\,n}\left(\sum_{m=2}^{q+1} b_{m\,n}\right)^{-1} < \infty. \text{ que } b_{1\,n} < b_{2\,n} + \cdots + b_{q+1\,n} \quad n \geq n_0$$

Substituons $\sigma_{rq+1}(b) < \infty$, $r = 2, \ldots, q$. Nous avons :

$$\infty > \sigma_{r\,q+1}(b) > \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{b_{r\,n}}{b_{r\,n} + 2\sum\limits_{\substack{m=2\\ m\neq 2}}^{q+1} b_{m\,n}}, \; r = 2, 3, \ldots q.$$

Cette dernière formule est équivalente à

$$\sigma^{(1)}_{r\,q+1}(b) = \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{b_{r\,n}}{\sum\limits_{m=2,\, m\neq r}^{q+1} b_{m\,n}} < \infty, \; 2 \leq r \leq q,$$

où $S^L_{k\,q+1}(b) = \infty$, $2 \leq k \leq q$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence après un changement de notation : $\tilde{b}_{k\,n} = b_{k+1\,n+1}$, $k < n$.

L'exemple suivant montre que pour tout q il existe un p unique tel que p<q et $\sigma_{p\,q}(b) = \infty$.

<u>Exemple 2.2</u>. Soit $b^{(2)}_{k\,n} = n^2$, $k = 1 < n$ et $b^{(2)}_{k\,n} = 1$, $k > 1$, alors $S^L_{k\,q}\left(b^{(2)}\right) = \infty$, $k < q$, $\sigma_{1\,q}\left(b^{(2)}\right) = \infty$, $\sigma_{p\,q}\left(b^{(2)}\right) = \infty$, $1 < p < q$. Il reste à "corriger" un peu les opérateurs $\left(\partial_{l\,n} - b_{l\,n} X_{l\,n}\right) A_{k\,n}$, $n > k$ pour que l'on puisse approximer les variables $X_{l\,k}$, $l < k$ à l'aide de ces opérateurs.

<u>Lemme 2.6</u>. Soit $S^L_{k\,n}(b) = \infty$, $k < n$, alors $X_{l\,k}$, $l < k$ sont approximés par les opérateurs $_{l\,n}A^{(n_1,\dots,n_r)}_{k\,n} = \left(\partial_{l\,n} - b_{l\,n}X_{l\,n}\right)A^{(n_1,\dots,n_r)}_{k\,n}$

$$\text{où } A^{(n_1,\dots,n_r)}_{k\,n} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \notin \{n_1,\dots,n_r\}}}^{k} X_{m\,k}\left(\partial_{m\,n} - b_{m\,n}X_{m\,n}\right), X_{k\,k} \equiv 1$$

pour un choix convenable de $n_i \in \mathbf{N}, 1 \leq n_i < k, n_i \neq n_j, i \neq j$ $1 \leq i, j \leq r$, $r \leq k-2$

La démonstration découle de la démonstration du pas de récurrence. Supposons que l'hypothèse de récurrence $\left\{X_{n\,m},\ n < m \leq p,\ \partial_{n\,m} - b_{n\,m}X_{n\,m},\ 1 \leq n \leq p,\ m > n\right\} \subset \tilde{W}(b)$ soit vérifiée. Démontrons alors que

$$\left\{X_{l\,p+1}, \partial_{p+1\,m} - b_{p+1\,m}X_{p+1\,m}, l < p+1 < m\right\} \subset \tilde{W}(b)$$

Pour approximer $X_{l\,p+1}$ par les opérateurs $\left(\partial_{l\,n} - b_{l\,n}X_{l\,n}\right)A_{p+1\,n}$, il faut et il suffit en vertu du lemme 2.4 que

$$\sigma_{l\,p+1}(b) = \sum_{n=p+2}^{\infty} \frac{b_{l\,n}}{\sum_{m=1,\, m\neq l}^{p+1} b_{m\,n}} = \infty,\ l < p+1$$

En vertu du lemme 2.5 l'une des séries $\sigma_{l\,p+1}(b)$, $l < p+1$ est divergente.

Ainsi, pour un certain $n_1 < p+1$ $\sigma_{n_1\,p+1}(b) = \infty$, c'est-à-dire que nous pouvons approximer $X_{n_1\,p+1}$ par des opérateurs

$\left(\partial_{n_1 n} - b_{n_1 n} X_{n_1 n}\right) A_{p+1\, n}$. En vertu du lemme 2.5 on peut approximer

$X_{r\, p+1}$ par les opérateurs ${}_{r\, n}A^{(n_1)}_{p+1\, n}$ si et seulement si

$$\sigma^{(n_1)}_{r\, p+1}(b) = \sum_{n=p+2}^{\infty} \frac{b_{r\, n}}{\sum\limits_{\substack{m=1 \\ m \neq r, n_1}}^{p+1} b_{m\, n}} = \infty,\ 1 \leq r \leq p,\ r \neq n_1$$

En vertu du lemme 2.5 l'une des séries $\sigma^{(n_1)}_{r\, p+1}(b)$ est divergente. Soit $\sigma^{(n_1)}_{n_2\, p+1}(b) = \infty$. Alors on peut approximer $X_{n_2\, p+1}$, $n_1 \neq n_2$, etc par les opérateurs ${}_{n_2\, n}A^{(n_1)}_{p+1\, n}$. Il en résulte que nous obtenons une suite $\left(n_1, n_2, \ldots, n_p\right)$, une permutation de nombres $(1, 2, \ldots, p)$ telle que les variables $X_{n_k\, p+1}$, $k = 1, 2, \ldots, p$ peuvent être approximées par les opérateurs ${}_{n_k\, n}A^{(n_1, \ldots, n_{k-1})}_{p+1\, n}$. Il découle de $\partial_{p+1\, m} - b_{p+1\, m} X_{p+1\, m} =$

$$= A_{p+1\, m} - \sum_{r=1}^{p} X_{r\, p+1}\left(\partial_{r\, m} - b_{r\, m} X_{r\, m}\right),\ p+1 < m$$

l'inclusion $\partial_{p+1\, m} - b_{p+1\, m} X_{p+1\, m} \in \tilde{W}(b),$, ce qui termine la démonstration du lemme 2.1.

Ainsi, les opérateurs de multiplication par les variables indépendantes $\left\{X_{k\, n} \middle| k, n \in N,\ k < n\right\}$ sont adjoints à l'algèbre de Von Neuman sur $W(b) = \left(T_t^{R,b} \middle| t \in B_0^{\infty}\right)''$; l'algèbre de Von Neuman $W(b)$ contient donc les opérateurs

$\left\{U_{kn}(t) = \exp\left(itX_{kn}\right) \middle| t \in R^1,\ k, n \in N,\ k < n\right\}.$

Soit un opérateur $A \in L\left(L_2\left(B^\infty, d\mu_b^\rho\right)\right)$ commutant avec tous les opérateurs $T_t^{R,b}$, $t \in B_0^\infty$. Montrons qu'il est alors multiple de l'opérateur unité $A = \lambda I$, $\lambda \in C^1$. En réalité, dans ce cas, A commute avec les opérateurs $U_{kn}(t)$; c'est pourquoi A est opérateur de multiplication par la fonction réelle bornée $A = f_A(X)$. En vertu des relations de commutation $\left[f_A(X), T_t^{R,b}\right] = 0$, nous en déduisons que la fonction $f_A(X)$ est invariante par rapport à l'action du groupe B_0^∞, $f_A(X) = f_A(Xt)$ quels que soient $X \in B^\infty$, $t \in B_0^\infty$. En vertu de l'ergodicité de la mesure μ_b^ρ, $f_A(X) = \mathrm{const}$, c'est-à-dire $A = \lambda I$, ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, on a construit une famille d'équivalents des représentations régulières $T_t^{R,b}$, $b \in \blacksquare$ du groupe B_0^∞. Parmi celles-ci les représentations irréductibles sont caractérisées par la condition $b \in \blacksquare^L$:

$$\blacksquare^L = \left\{ b \in \blacksquare \middle| S_{kn}^L(b) = \sum_{m=n+1}^{\infty} b_{km} b_{nm}^{-1} = \infty \right\}.$$

§ 3. Représentations équivalentes

La question se pose naturellement de savoir quelles sont les représentations équivalentes parmi les représentations irréductibles $T^{R,b}, b \in \mathfrak{B}^L$.

<u>Théorème 3.1</u>. Les représentations irréductibles $T^{R,b^{(1)}}$ et $T^{R,b^{(2)}}$ sont unitairement équivalentes si et seulement si les mesures $\mu_{b^{(1)}}$ et $\mu_{b^{(2)}}$ sont équivalentes.

On sait [2, chapitre II] que deux mesures produits $\mu_{b^{(1)}}$ et $\mu_{b^{(2)}}$ sont équivalentes si et seulement si

$$H\left(b^{(1)},b^{(2)}\right)=H\left(\mu_{b^{(1)}},\mu_{b^{(2)}}\right)=\left(\prod_{k<n}\frac{\left(b_{kn}^{(1)}+b_{kn}^{(2)}\right)^2}{4b_{kn}^{(1)}b_{kn}^{(2)}}\right)^{-1}>0. \tag{3.1}$$

Les théorèmes 2.1 et 3.1 donnent une description des représentations régulières $T^{R,b}$, $b \in \mathfrak{B}$ du groupe B_0^{∞}.

<u>Théorème 3.2</u>. Parmi les représentations régulières droites $T^{R,b}$, $b \in \mathfrak{B}$, les représentations irréductibles sont déterminées grâce à la condition $b \in \mathfrak{B}^L$, mais parmi les représentations irréductibles, les représentations équivalentes sont déterminées par la condition $H\left(\mu_{b^{(1)}},\mu_{b^{(2)}}\right)>0$.

La démonstration du théorème 3.1 repose sur le calcul explicite des $\sigma_{(b)}^{-m}$-mesures spectrales des restrictions des représentations $T^{R,b}$ sur les sous-groupes commutatifs de dimension infinie B^{-m} et sur la comparaison de ces mesures spectrales à l'aide des intégrales de Helinger. Le calcul de la mesure spectrale $\sigma^{-m}_{(b)}$ utilise la transformation partielle de Fourier proposée par N. I. Nessonov [13] qui envoie les générateurs des groupes à un paramètre de B^{-m} sur les opérateurs de multiplication par les fonctions.

<u>La condition suffisante</u> est évidente. En réalité, soit $\mu_{b^{(1)}} \sim \mu_{b^{(2)}}$, alors $\mu^{\rho}_{b^{(1)}} \sim \mu^{\rho}_{b^{(2)}}$, et l'opérateur unitaire $U\left(b^{(1)},b^{(2)}\right): \mathcal{H}\left(b^{(1)}\right) \to \mathcal{H}\left(b^{(2)}\right)$ où $\mathcal{H}(B) = L_2\left(B^{\infty}, d\mu^{\rho}_{b}\right)$ de multiplication par la fonction $\left(d\mu^{\rho}_{b^{(1)}} / d\mu^{\rho}_{b^{(2)}}\right)^{1/2}(x)$ permute les représentations $T^{R,b^{(1)}}$ et $T^{R,b^{(2)}}$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\left(b^{(1)}\right) \arrow[r, "T^{R,b^{(1)}}"'] \arrow[d, "U\left(b^{(1)},b^{(2)}\right)"'] & \mathcal{H}\left(b^{(1)}\right) \arrow[d, "U\left(b^{(1)},b^{(2)}\right)"] \\
\mathcal{H}\left(b^{(2)}\right) \arrow[r, "T^{R,b^{(2)}}"'] & \mathcal{H}\left(b^{(2)}\right)
\end{tikzcd}$$

<u>Nécessité</u>. Montrons que $T^{R,b^{(1)}} \sim T^{R,b^{(2)}}$ découle de $\mu_{b^{(1)}} \sim \mu_{b^{(2)}}$.

Désignons par $W(b) = \left(T^{R,b}_{t} \,\middle|\, t \in B^{\infty}_{0}\right)''$ l'algèbre de van Neumann engendrée par les opérateurs $T^{R,b}_{t}$, $t \in B^{\infty}_{0}$, $\tilde{W}(b)$ est l'ensemble des opérateurs auto-adjoints ou anti-auto-adjoints $A = \int \lambda \, dE(\lambda)$, associés à l'algèbre $W(b)$, c'est-à-dire dont les projecteurs spectraux $E_A(\Delta)$ se trouvent dans $W(b)$, $\Delta \in B\left(R^1\right)$ est la σ-algèbre des ensembles boréliens sur l'axe. Soit $W_1(b)$ l'ensemble des opérateurs de multiplication par des variables indépendantes $f \to X_{kn} f$ dans l'espace $\mathcal{H}(b)$, alors $W_1(b) \subset \tilde{W}(b)$ comme on l'avait démontré dans le théorème 2.1. Soit

$\nabla_m = \{(k,n) \mid k < n \le m\}$, $\_{m} = \{(k,n) \mid k \le m < n\}$, $m = 2,3,\ldots,$

$$\mu_b^{\nabla_m} = \bigotimes_{(k,n)\in\nabla_m} \mu_{b_{kn}}, \mu_b^{-m} = \bigotimes_{(k,n)\in_{-m}} \mu_{b_{kn}}.$$

Posons $\mathfrak{H}^{\nabla_m}(b) = L_2\left(B^{\nabla_m}, \left(\mu_b^{\nabla_m}\right)^{\rho}\right), \mathfrak{H}^{-m}(b) = L_2\left(B^{-m}, \left(\mu_b^{-m}\right)^{\rho}\right),$ où

$$B^{\nabla_m} = \left\{I + \sum_{(k,n)\in\nabla_m} X_{kn} E_{kn}\right\},$$

$B^{-m} = \left\{I + \sum_{(k,n)\in_{-m}} X_{kn} E_{kn} \middle| X_{kn} \text{ arbitraires}\right\} \subset B^{\infty}$, remarquons que B^{-m} est un sous-groupe commutatif de B^{∞}. Alors $\tilde{W}(b)^{-m} = \left\{iA_{kn} \middle| (k,n)\in_{-m}\right\}$ est une famille commutative d'opérateurs de l'ensemble $\tilde{W}(b)$. Rappelons que l'on nomme mesure spectrale $\sigma(\mathbf{A})$ de la famille $\mathbf{A} = \left(\mathbf{A_k}\right)_{k\in N}$ des opérateurs auto-adjoints $A_k, k\in\mathbf{N}$ commutant au sens de la partition de l'unité, toute mesure scalaire $\sigma(\mathbf{A},\Delta)$ sur la σ-algèbre $\Delta\in B(\mathbf{R}^{\infty})$ engendrée par les ensembles cylindriques avec des bases boréliennes

$$\coprod(\mathbf{R}^{\infty}) = \left\{\coprod\left(X_1,\ldots,X_n;\Delta_1\times\cdots\times\Delta_n\right) = \left\{X = \left(X_1,X_2,\ldots\right)\in\mathbf{R}^{\infty} \middle| X_{k_1}\in\Delta_1,\ldots,X_{k_n}\in\Delta_n\right\}\right.$$

$\left.\Delta_i\in B\left(\mathbf{R}^1\right), i=1,\ldots,n, k_1,\ldots,k_n\in\mathbf{N}\right\}$, est équivalente à la partition simultanée de l'unité $\mathbf{E_A}$ de la famille des opérateurs $\mathbf{A}$ qui est définie sur les ensembles cylindriques d'après la formule :

$$\mathbf{E_A}\left(\coprod\left(X_1,\ldots,X_n;\Delta_1\times\cdots\times\Delta_n\right)\right) = \mathbf{E}_{\mathbf{A}_{k_1}}\left(\Delta_1\right)\times\cdots\times\mathbf{E}_{\mathbf{A}_{k_n}}\left(\Delta_n\right),$$

Soit $\sigma(b)^{-m} = \sigma\left(\tilde{W}(b)^{-m}\right)$ la mesure spectrale de la famille des opérateurs $iA_{kn}^b = iA_{kn}$, $(k,n)\in_{-m}$ de $\mathfrak{H}(b)$.

Soit $T^{R,b^{(1)}}$ et $T^{R,b^{(2)}}$ des représentations équivalentes, c'est-à-dire telles qu'il existe un opérateur unitaire $\mathfrak{U}:\mathfrak{H}\left(b^{(1)}\right)\to\mathfrak{H}\left(b^{(2)}\right)$ tel que $\mathfrak{U}T_t^{R,b^{(1)}}=T_t^{R,b^{(2)}}\mathfrak{U}$, $t\in B_0^{\infty}$, nous écrirons brièvement $T^{R,b^{(1)}}\overset{\mathfrak{U}}{\sim}T^{R,b^{(2)}}$.

La démonstration de la nécessité repose sur deux lemmes.

Lemme 3.1. Soit $\sigma\left(b^{(1)}\right)^{-m}\sim\sigma\left(b^{(2)}\right)^{-m}$, alors $\mu_{b^{(1)}}^{-m}\sim\mu_{b^{(2)}}^{-m}$, $m\in\mathbf{N}$

Lemme 3.2. Soit $T^{R,b^{(1)}}$ et $T^{R,b^{(2)}}$ des représentations unitaires irréductibles équivalentes $T^{R,b^{(1)}}\overset{\mathfrak{U}}{\sim}T^{R,b^{(2)}}$ Alors $W_1\left(b^{(1)}\right)\overset{\mathfrak{U}}{\sim}W_1\left(b^{(2)}\right)$ avec le même opérateur de permutation $\mathfrak{U}:\mathfrak{U}X_{kn}=X_{kn}\mathfrak{U}$.

La nécessité du théorème 3.1 découle alors du lemme 3.2. En réalité, $T^{R,b^{(1)}}\overset{\mathfrak{U}}{\sim}T^{R,b^{(2)}}\Rightarrow W_1\left(b^{(1)}\right)\overset{\mathfrak{U}}{\sim}W_1\left(b^{(2)}\right)\Rightarrow\sigma\left(W_1\left(b^{(1)}\right)\right)\sim\sigma\left(W_1\left(b^{(2)}\right)\right)$. Mais la mesure spectrale $\sigma\left(W_1(b)\right)$ de la famille des opérateurs de multiplication par des variables indépendantes dans l'espace $\mathfrak{H}(b)$ est évidemment équivalente à μ_b^{ρ}, c'est pourquoi nous avons

$$\sigma\left(W_1\left(b^{(1)}\right)\right)\sim\sigma\left(W_1\left(b^{(2)}\right)\right)\Rightarrow\mu_{b^{(1)}}^{\rho}\sim\mu_{b^{(2)}}^{\rho}\Rightarrow\mu_{b^{(1)}}\sim\mu_{b^{(2)}}$$

La démonstration du lemme 3.1 se réduit au calcul explicite des mesures spectrales de $\sigma(b)^{-m}$, $m\in\mathbf{N}$ et au calcul des intégrales de Helinger $H\left(\sigma\left(b^{(1)}\right)^{-m},\sigma\left(b^{(2)}\right)^{-m}\right)$.

Rappelons la définition et les propriétés de l'intégrale de Helinger [22, chapitre 11, § 2].

Soit μ et ν deux mesures probabilistes sur un espace mesurable $(X,\mathfrak{B})$, λ est une mesure probabiliste telle que $\mu<\lambda$, $\nu<\lambda$, par exemple, $\lambda=(\mu+\nu)/2$. L'intégrale de Helinger pour μ et ν est définie comme suit :

$$\mathrm{H}(\mu,\nu)=\int_X\sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}}\sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}}\,d\lambda .$$

Elle ne dépend pas de λ et possède les propriétés suivantes :

(H1) $0\le \mathrm{H}(\mu,\nu)\le 1$ est l'inégalité de Schwartz,

(H2) $\mathrm{H}(\mu,\nu)=1\Leftrightarrow \mu=\nu$,

(H3) $\mathrm{H}(\mu,\nu)=0\Leftrightarrow \mu\perp\nu$,

(H4) $\mu\sim\nu\Rightarrow \mathrm{H}(\mu,\nu)>0$, l'inverse, en règle générale, n'est pas vrai.

Fixons un nombre $m\in\mathbf{N}$ et faisons la transformation de Fourier $\mathfrak{J}_m$ de l'espace $\mathfrak{H}^{\nabla m}(b)\otimes\mathfrak{H}^{-m}(b)$ sur lequel agissent les opérateurs A^b_{kn} de la famille $\tilde{W}(b)^{-m}$.

Désignons par $b^{\nabla m}=\rho^{-1}\left(B^{\nabla m}\right), b^{-m}=\rho^{-1}\left(B^{-m}\right)\subset b^{\infty}$. Soit

$$t=\sum_{k<n\le m}t_{kn}E_{kn}\in b^{\nabla m},\ y=\sum_{k\le m<n}y_{kn}E_{kn},\ x=\sum_{k\le m<n}x_{kn}E_{kn}\in b^{-m}.$$

Il est évident que B^{-m} est un sous-groupe commutatif normal dans B^{∞}. Examinons le produit semi-direct $B^{\nabla m}\rtimes B^{-m}$. Il est évident que $I+t+y=(I+y)(I+t)=\rho(y)\rho(t)\in B^{\nabla m}\rtimes B^{-m}$, les fonctions

$$f(\rho(y)\rho(t))\in\mathfrak{H}^{\nabla m}(b)\otimes\mathfrak{H}^{-m}(b)=L_2\left(B^{\nabla m}\rtimes B^{-m},\left(\mu_b^{\nabla m}\otimes\mu_b^{-m}\right)^{\rho}\right).$$

Calculons la transformation partielle de Fourier-Wiener (Cf. l'équivalent [23] ou [21], chapitre II § 5).

$$(\mathfrak{J}_m f)(\rho(x)\rho(t))=\tilde{f}_m(\rho(x)\rho(t))=\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{(k,n)\in_{-m}}x_{kn}^2 b_{kn}^{-1}\right)$$

$$\int_{B^{-m}}\exp\left(i\sum_{(k,n)\in_{-m}}x_{kn}y_{kn}\right)f(\rho(y)\rho(t))\,d\left(\mu^{-m}_{b/2}\right)^{\rho}(\rho(y))=$$

$$=\exp\left(\tfrac{1}{2}\left(B^{-1}x,x\right)\right)\int_{b^{-m}}\exp(i(x,y))f(\rho(y)\rho(t))\,d\mu^{-m}_{b/2}(y),$$

où $\left(b/2\right)_{kn}=b_{kn}/2,\ k<n,$ B est un opérateur diagonal $(Bx)_{kn}=b_{kn}x_{kn},\ k<n$. $\mathfrak{I}_m$ est un opérateur unitaire de $\mathfrak{H}^{\nabla m}(b)\otimes\mathfrak{H}^{-m}(b)$ dans $\mathfrak{H}^{\nabla m}(b)\otimes\mathfrak{H}^{-m}\left(b^{-1}\right)$, $\left(b^{-1}\right)_{kn}=b^{-1}_{kn},\ k<n$. Soit $z=\sum_{(k,n)\in_{-m}}z_{kn}E_{kn}\in b^{-m}$.

Calculons $\rho(y)\rho(t)\rho(z)$. Nous avons :

$$\rho(y)\rho(t)\rho(z)=\rho(y)\rho(t)\rho(z)\rho(t)^{-1}\rho(t)$$

Etant donné que B^{-m} est un sous-groupe normal dans $B^{\nabla m}\times B^{-m}$, alors $\rho(t)\rho(z)\rho(t)^{-1}=Ad_{\rho(t)}\rho(z)$. C'est pourquoi l'application

$$\varphi_{\rho(t)}=\rho^{-1}Ad_{\rho(t)}\rho$$

agit sur b^{-m}. Le calcul direct donne

$$z^t:=\varphi_{\rho(t)}(z)=\rho(t)z=\sum_{(k,n)\in_{-m}}(\rho(t)z)_{kn}E_{kn}=\sum_{(k,n)\in_{-m}}\left(z_{kn}+\sum_{r=k+1}^{n-1}t_{kr}z_{rn}\right)E_{kn},$$

Puisque pour $x,z\in b^{-m}$ $\rho(x)\rho(z)=\rho(x+z)$, alors

$$\rho(y)\rho(t)\rho(z)=\rho(y)\rho\left(z^t\right)\rho(t)=\rho\left(y+z^t\right)\rho(t).$$

Par transformation de Fourier, les opérateurs $T^{R,b}_{\rho(z)}$, $\rho(z)\in B^{-m}$ prennent la forme :

$$\tilde{f}_m(\rho(x)\rho(t))\to\exp\left(\tfrac{1}{2}\left(B^{-1}x,x\right)\right)\int_{B^{-m}}\exp(i(x,y))f(\rho(y)\rho(t)\rho(z))$$

$$\left(\frac{d\left(\mu_b^{\nabla m}\otimes\mu_b^{-m}\right)^{\rho}(\rho(y)\rho(t)\rho(z))}{d\left(\mu_b^{\nabla m}\otimes\mu_b^{-m}\right)^{\rho}(\rho(y)\rho(t))}\right)^{1/2}d\left(\mu^{-m}_{b/2}\right)(\rho(y))=$$

$$\exp\left(\tfrac{1}{2}\left(B^{-1}x,x\right)\right)\int_{b^{-m}} \exp(i(x,y))f\left(\rho\left(y+z^{t}\right)\rho(t)\right)\left(\frac{d\left(\mu_b^{\nabla m}\otimes\mu_b^{-m}\right)^{\rho}\left(\rho\left(y+z^{t}\right)\rho(t)\right)}{d\left(\mu_b^{\nabla m}\otimes\mu_b^{-m}\right)^{\rho}\left(\rho(y)\rho(t)\right)}\right)^{1/2} d\mu_{b/2}^{-m}(y)=$$

$$=\exp\left(\tfrac{1}{2}\left(B^{-1}x,x\right)\right)\int_{b^{-m}} \exp(i(x,y))f\left(\rho\left(y+z^{t}\right)\rho(t)\right)^{1/2} d\mu_{b/2}^{-m}\left(\rho\left(y+z^{t}\right)\right)=$$

(en posant $w=y+z^{t}$, $y=w-z^{t}$, $\exp(i(x,y))=\exp(i(x,w))\cdot\exp\left(-i\left(x,z^{t}\right)\right)$)

$$=\exp\left(-i\left(x,z^{t}\right)\right)\tilde{f}_m\left(\rho(x)\rho(t)\right).$$

Par conséquent,

$$\left(\mathfrak{J}_m T^{R,b}_{\rho(z)} F_m^{-1} f\right)\left(\rho(x)\rho(t)\right)=\exp\left(-i\left(x,z^{t}\right)\right)\tilde{f}_m\left(\rho(x)\rho(t)\right).$$

De plus, les générateurs iA^{b}_{kn} sont envoyés sur les $i\tilde{A}^{b}_{kn}$ opérateurs de multiplication par les fonctions suivantes :

$$i\tilde{A}^{b}_{kn}=i\frac{d}{dz_{kn}}\exp\left(-i\left(x,z^{t}\right)\right)\Bigg|_{z_{kn}=0}=i\frac{d}{dz_{kn}}\exp\left(-i\sum_{(p,q)}X_{pq}\left(z_{pq}+\sum_{r=p+1}^{q-1}t_{pr}z_{rq}\right)\right)\Bigg|_{z_{kn}=0}=$$

$$=\left(x_{kn}+\sum_{r=1}^{n-1}t_{rk}x_{rn}\right)=\left(\rho\left(t^{T}\right)x\right)_{kn}=\left(L_{\rho\left(t^{T}\right)}x\right)_{kn},\ (k,n)\in{}_{-m}.$$

Etant donné que $\mathfrak{J}_m:\mathfrak{H}^{\nabla m}(b)\otimes\mathfrak{H}^{-m}(b)\to\mathfrak{H}^{\nabla m}(b)\otimes\mathfrak{H}^{-m}\left(b^{-1}\right)$ est un opérateur unitaire [21, chapitre II, théorème 5.1], alors la mesure spectrale de la famille $iA^{b}_{kn},(k,n)\in{}_{-m}$ est équivalente à la mesure spectrale $\sigma(b)^{-m}$ de la famille des opérateurs $i\tilde{A}^{b}_{kn},(k,n)\in{}_{-m}$. Nous désignerons la mesure $\sigma(b)^{-m}$ sur le groupe B^{-m} et son image $\sigma(b)^{-m,\rho^{-1}}(\Delta)=\sigma(b)^{-m}(\rho(\Delta))$ sur l'algèbre b^{-m} par le même symbole $\sigma(b)^{-m}$.

Montrons que la mesure $\sigma(b)^{-m}$ sur l'algèbre b^{-m} a la forme suivante pour $\Delta \in \mathcal{B}\left(b^{-m}\right)$ où $\mathcal{B}\left(b^{-m}\right)$ est une σ-algèbre d'ensembles boréliens sur b^{-m} :

$$\sigma(b)^{-m}(\Delta) = \int_{b^{\nabla_m}} \left(\mu_{b^{-1}}^{-m}\right)^{L}\left[\rho\left(t^T\right)\right](\Delta) d\mu_b^{\nabla_m}(t). \tag{3.3}$$

En effet, selon la définition dans $\sigma(b)^{-m}$ nous avons

$$\sigma(b)^{-m}(\Delta) = \left(d\mu_b^{\nabla_m} \otimes d\mu_{b^{-1}}^{-m}\right)\left(\left\{(t,x) \in b^{\nabla_m} \times b^{-m} \,\middle|\, L_{\left(\rho\left(t^T\right)\right)} x = \rho\left(t^T\right)x \in \Delta\right\}\right)$$

$$= \int_{b^{\nabla_m}} \left(\mu_{b^{-1}}^{-m}\right)^{L^{-1}}\left[\rho\left(t^T\right)\right](\Delta) d\mu_b^{\nabla_m}(t)$$

Etant donné que la mesure $d\mu_b^{\nabla_m} = \underset{(k,n)\in\nabla_m}{\otimes} d\mu_{b_{kn}}$ sur b^{∇_m} est équivalente à la mesure de Gauss standard $d\mu_1^{\nabla_m} = \underset{(p,q)\in\nabla_m}{\otimes} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-t_{pq}^2\right) dt_{pq}$, alors la mesure (3.3) est équivalente [18, § 18, théorème 1) à la mesure suivante :

$$\sigma(b)^{-m}(\Delta) = \int_{b^{\nabla_m}} \left(\mu_{b^{-1}}^{-m}\right)^{L^{-1}}\left[\rho\left(t^T\right)\right](\Delta) d\mu_1^{\nabla_m}(t) \tag{3.4}$$

Pour calculer les intégrales de Helinger $H^m = H\left(\sigma\left(b^{(1)}\right)^{-m}, \sigma\left(b^{(2)}\right)^{-m}\right)$ des mesures $\sigma\left(b^{(1)}\right)^{-m}$ et $\sigma\left(b^{(2)}\right)^{-m}$ sur l'espace b^{-m}, calculons les intégrales de Helinger $H^{m,n} = H\left(\sigma\left(b^{(1)}\right)^{-m,n}, \sigma\left(b^{(2)}\right)^{-m,n}\right)$ des projections des mesures $\sigma(b)^{-m}$ sur les sous-espaces de dimension finie $b^{-m,n}$ de b^{-m} où

$$b^{-m,n} = \left\{ x \in b^{-m} \mid x = \sum_{(r,s)\in_{-m,n}} x_{rs} E_{rs} \right\}, _{-m,n} = \left\{ (r,s) \in_{-m} \mid 1 \le r < m < s \le m+n \right\},$$

et en se servant du fait que $\lim_{n\to\infty} H^{m,n} = H^m$, montrons que pour les mesures orthogonales $\mu^{-m}_{b^{(1)}} \perp \mu^{-m}_{b^{(2)}}$, on a $H^m = \lim_{n\to\infty} H^{m,n} = 0$; par conséquent, d'après la propriété (44) des intégrales de Helinger, $\sigma^{-m}_{b^{(1)}} \perp \sigma^{-m}_{b^{(2)}}$, ce qui démontre le lemme 3.1.

Calcul des intégrales $H^{m,n}$. Désignons par $dl^{m,n}(x)$ la mesure de Lebesgue sur $b^{-m,n}$ et calculons la densité $d\sigma(b)^{-m,n}(x)/dl^{m,n}(x)$. Alors, par définition, l'intégrale de Helinger $H^{m,n}$ sera égale à

$$H^{m,n} = \int_{b^{-m,n}} \left(\frac{d\sigma\left(b^{(1)}\right)^{-m,n}(x)}{dl^{m,n}(x)} \frac{d\sigma\left(b^{(2)}\right)^{-m,n}(x)}{dl^{m,n}(x)} \right)^{1/2} dl^{m,n}(x) \tag{3.5}$$

Soit f une application mesurable bijective $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, dx est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, $d\mu(x)$ une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue : $\mu(\Delta) = \int_\Delta g(x)dx, d\mu(x)/dx = g(x)$, alors

$\mu^f(\Delta) = \mu\left(f^{-1}(\Delta)\right) = \int_{f(\Delta)} g(x)dx =$ (en faisant la substitution $y = f(x), x = f^{-1}(y)$)

$$= \int_\Delta g\left(f^{-1}(y)\right)\left(df^{-1}(y)/dy\right)dy \tag{3.6}$$

Etant donné que pour tout $t \in b^{\nabla m}$, $L_{\rho(t^T)}$ est un automorphisme de l'espace $b^{-m,n}$ pour tout $m, n \in \mathbf{N}$, alors pour $\Delta \in \mathcal{B}(b^{-m,n})$ d'après la formule (3.6) nous avons avec $f(x) = L^{-1}_{(\rho(t^T))} x$:

$$\sigma(b)^{-m}(\Delta) = \int_{b^{\nabla m}} \left(\mu^{-m}_{b^{-1}}\right)^{L^{-1}(\rho(t^T))}(\Delta)\, d\mu_1^{\nabla m}(t) =$$

$$= \int_{b^{\nabla m}} \int_{\Delta} \left(\frac{d\mu^{-m}_{b^{-1}}}{dl^{m,n}}\right)\left(L_{\rho(t^T)} x\right) \frac{dl^{m,n}\left(L_{\rho(t^T)} x\right)}{dl^{m,n}(x)} dl^{m,n}(x)\, d\mu_1^{\nabla m}(t) \tag{3.7}$$

Il découle de (3.2) que le Jacobien de l'application $z \to L_{\rho(t^T)} z$ est égal à 1 pour tout $t \in b^{\nabla m}$, c'est pourquoi la formule suivante pour la densité $\dfrac{d\sigma(b)^{-m}}{dl^{m,n}}$ découle de (3.7)

$$\left(\frac{d\sigma(b)^{-m}}{dl^{m,n}}\right)(x) = \int_{b^{\nabla m}} \left(\frac{d\mu^{-m}_{b^{-1}}}{dl^{m,n}}\right)\left(L_{\rho(t^T)} x\right) d\mu_1^{\nabla m}(t) =$$

$$\int_{b^{\nabla m}} \left(\left(\prod_{(r,s)\in_{-m,n}} \sqrt{\frac{b^{-1}_{rs}}{\pi}}\right) \exp\left(-\sum_{(r,s)\in_{-m,n}} b^{-1}_{rs}\left(x_{rs} + \sum_{i=1}^{r-1} t_{ir} x_{is}\right)^2\right)\right) \times$$

$$\times \bigotimes_{(p,q)\in\nabla_m} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-t^2_{pq}\right) dt_{pq}\right) = \prod_{r=1}^{m} \varphi^{r,n}\left(b^{-1}, x^{r,n}\right). \tag{3.8}$$

$x^{r,n} \in \mathrm{Mat}(r \times n)$,

$$\varphi^{r,n}\left(b^{-1}, x^{r,n}\right) = \prod_{r=1}^{m} \left(\frac{b^{-1}_{rk}}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\mathbf{R}^{r-1}} \exp\left(-\sum_{k=m+1}^{m+n} b^{-1}_{rk}\left(x_{rk} + \sum_{i=1}^{r-1} t_{ir} x_{ir}\right)^2\right) \otimes$$

$$\bigotimes_{i=1} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-t^2_{ir}\right) dt_{ir}\right) \tag{3.9}$$

Examinons la $m\times n$ matrice $x^{m,n} \in Mat(m,n)$ et les vecteurs $t_1, x_1, \dots, x_n \in R^n$

$$X^{m,n} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ & & \cdots & \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix}, \quad t_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdots \\ t_m \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \cdots \\ x_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \quad x_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \cdots \\ x_{mn} \end{pmatrix}$$

Alors, on peut écrire (3.9) sous une forme plus commode :

$$\varphi^{m+1,n}\left(b^{-1}, x^{m+1,n}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{b^{-1}_{m+1\,k}}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left(-\sum_{k=m+2}^{m+n+1} b^{-1}_{m+1\,k}\left(x_{m+1\,k} + \left(x_{k,t}\right)\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\exp(-(t,t))dt$$

Conformément à (3.8)

$$\left(\frac{d\sigma(b)^{-m,n}}{dl^{m+1,n}}\right)(x) = \varphi^{m+1,n}\left(b^{-1}, x^{m+1,n}\right)\left(\frac{d\sigma(b)^{-m,n}}{dl^{m,n}}\right)\left(x^{m,n}\right) \qquad (3.10)$$

c'est pourquoi, après avoir posé $a = \left(a_1, \dots, a_n\right)$, $b = \left(b_1, \dots, b_n\right)$,

$a_k = \left(b^{(1)}_{m+1,m+1+k}\right)^{-1}$, $b_k = \left(b^{(2)}_{m+1,m+1+k}\right)^{-1}$, $k = 1,2,\dots,n$, nous obtenons :

$$H^{m+1,n} = \int_{b^{-m+1,n}} \left(\varphi^{m+1,n}\left(a, x^{m+1,n}\right)\left(\frac{d\sigma\left(a^{-1}\right)^{-m,n}}{dl^{m,n}}\right)\left(x^{m,n}\right) \times\right.$$

$$\left. \times\varphi^{m+1,n}\left(b, x^{m+1,n}\right)\left(\frac{d\sigma\left(b^{-1}\right)^{-m,n}}{dl^{m,n}}\right)\left(x^{m,n}\right)\right)^{1/2}\left(dl^{m,n}\left(x^{m,n}\right)\otimes\left(\bigotimes_{k=1}^{n} dx_{m+1,k}\right)\right) \qquad (3.11)$$

Posons

$$G^{m,n}\left(a,b,X^{m,n}\right) = \int_{R^n}\left(\varphi^{m+1,n}\left(a,X^{m,n}\right)\varphi^{m+1,n}\left(b,X^{m,n}\right)\right)^{1/2} \bigotimes_{k=1}^{n} dX_{m+1,k} =$$

$$= \int_{R^n}\left(\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{a_k}{\pi}} \int_{R^m} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} a_k\left(X_{m+1,k} + (X_n,t)\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{\pi^m}}\exp(-(t,t))\,dt\right.$$

$$\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{b_n}{\pi}}\int_{R^m}\exp\left(-\sum_{k=1}^{N}b_k\left(X_{m+1,k}+(X_k,t)\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{\pi^m}}\exp(-(t,t))dt\Bigg)^{1/2}\bigotimes_{k=1}^{n}dX_{m+1,k}. \qquad (3.12)$$

L'objectif des calculs suivants est de trouver une expression explicite pour la fonction $G^{m,n}(a,b,X)$.

Lemme 3.3. Pour tout $m, n \in \mathbf{N}$, soient $a=(a_1,\ldots,a_n)$, $b=(b_1,\ldots,b_n)$ des suites de nombres positifs et une matrice

$$X^{m,n}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ & & \cdots & \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix},$$ la représentation suivante

$$G^{m,n}(a,b,X)=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{4a_kb_k}{(a_k+b_k)^2}\frac{\xi^{m,n}(a,x)\xi^{m,n}(b,x)}{\left(\xi^{m,n}\left(\frac{2ab}{a+b},x\right)\right)^2}\right\}^{1/4}, \qquad (3.13)$$

est vérifiée

$$\xi^{m,n}(a,x)=1+\sum_{r=1}^{m}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n}\prod_{t=1}^{r}a_{k_i}\left[X_{k_1},\cdots,X_{k_r}\right], \qquad (3.14)$$

où $a[x_1,x_2\ldots,x_r]=\det\left\|(x_i,x_j)_{i,j=1}^{r}\right\|$ est le déterminant de Gram des vecteurs $x_1,x_2\ldots,x_r$, $\frac{2ab}{a+b}$ est la suite $\left(\frac{2ab}{a+b}\right)_k=\frac{2a_kb_k}{a_k+b_k}$.

Formulons encore deux lemmes nécessaires à la démonstration du lemme 3.1.

Lemme 3.4. L'égalité suivante est vraie :

$$\frac{\xi^{m,n}(a,x)\xi^{m,n}(b,x)}{\left(\xi^{m,n}\left(\frac{2ab}{a+b},x\right)\right)^2}=2^{2m-1}\,\Pi^{2m,n}(a,b) \tag{3.15}$$

$$\text{où } \Pi^{2m,n}(a,b)=\max\left\{\prod_{i=1}^{2m}\frac{\left(a_{k_i}+b_{k_i}\right)^2}{4a_{k_i}b_{k_i}}\,\middle|\,1\le k_1<k_2<\cdots<k_{2m}\le n\right\}.$$

Lemme 3.5. Si le produit des nombres positifs $\Pi=\prod_{k=1}^{\infty}m_k, m_k\ge 1$ diverge, $\Pi=\infty$, alors pour tout $p\in\mathbf{N}$, $\lim_{n\to\infty}\Pi^{p,n}/\Pi^{n,m}=0$ où $\Pi^{p,n}=\max\left\{\prod_{i=1}^{p}m_{k_i}\,\middle|\,1\le k_1<k_2<\cdots<k_p\le n\right\}$, $\Pi^{n,n}=\prod_{k=1}^{n}m_k$, $p\le n$

Si l'on suppose que les lemmes 3.3. à 3.5 sont vérifiés, le lemme 3.1 en découle.

Démonstration du lemme 3.1. Nous ferons la démonstration à partir du contraposé, c'est-à-dire que la condition

$$\mu^{\bar{\ }m+1}_{b^{(1)}}\perp\mu^{\bar{\ }m+1}_{b^{(2)}} \tag{3.16}$$

implique $H^{m+1}=\lim_{n\to\infty}H^{m+1,n}=0, m=0,1,\ldots$. La condition (3.16) est équivalente (Cf. (3.1)) à

$$\prod_{(k,n)\in\bar{\ }_{m+1}}\frac{\left(b^{(1)}_{kn}+b^{(2)}_{kn}\right)^2}{4b^{(1)}_{kn}b^{(2)}_{kn}}=\infty \tag{3.17}$$

Soit $m=0$, et $\mu_{b^{(1)}}^{-1} \perp \mu_{b^{(2)}}^{-1}$ c'est-à-dire $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\left(b_{1n}^{(1)}+b_{1n}^{(2)}\right)^2}{4b_{1n}^{(1)}b_{1n}^{(2)}} = \infty$; montrons qu'alors $\sigma\left(b^{(1)}\right)^{-1} \perp \sigma\left(b^{(2)}\right)^{-1}$. En effet,

$$\sigma(b)^{-1} = \sigma\left\{iA_{1n}^{b} = i\left(\partial_{1n} - b_{1n}x_{1n}\right) \mid 1 < n\right\}_{\mathfrak{F}_1^{-1}(b)} \sim \sigma\left\{x_{1n} \mid 1 < n\right\}_{\mathfrak{F}_1^{-1}\left(b^{-1}\right)} \sim \mu_{b^{-1}}^{-1},$$

puisque la transformation partielle de Fourier $\mathfrak{F}_1$ transforme $i\left(\partial_{1n} - b_{1n}x_{1n}\right)$ en opérateurs de multiplication par x_{1n} (Cf. (3.2)). Par conséquent,

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\left(b_{1n}^{(1)}+b_{1n}^{(2)}\right)^2}{4b_{1n}^{(1)}b_{1n}^{(2)}} = \infty \Leftrightarrow \mu_{b^{(1)}}^{-1} \perp \mu_{b^{(2)}}^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\left(b_{1n}^{(1)}\right)^{-1}+\left(b_{1n}^{(2)}\right)^{-1}\right)^2}{4\left(b_{1n}^{(1)}\right)^{-1}\left(b_{1n}^{(2)}\right)^{-1}} = \infty \Leftrightarrow \mu_{\left(b^{(1)}\right)^{-1}}^{-1} \perp \mu_{\left(b^{(2)}\right)^{-1}}^{-1} \Leftrightarrow \sigma\left(b^{(1)}\right)^{-1} \perp \sigma\left(b^{(2)}\right)^{-1}$$

Supposons que (3.17) soit vrai. Posons

$$p = \max_{1 \le k \le m+1} \left\{k : \prod_{n=m+2}^{\infty} \frac{\left(b_{kn}^{(1)}+b_{kn}^{(2)}\right)^2}{4b_{kn}^{(1)}b_{kn}^{(2)}} = \infty\right\}, \qquad a^k = \left(b_{kr}^{(1)}\right)_{r=m+2}^{m+n+1}, b^k = \left(b_{kr}^{(2)}\right)_{r=m+2}^{m+n+1} \in \mathbf{R}^n$$

alors en vertu des lemmes 3.3., 3.4 et des formules (3.11), (3.12), nous obtenons :

$$H^{m+1,n} \le \left\{\left(\Pi^{n,n}\left(a^{m+1},b^{m+1}\right)\right)^{-1} 2^{2m-1}\, \Pi^{2m,n}\left(a^{m+1},b^{m+1}\right)\right\}^{1/4} H^{m,n}$$

Après avoir appliqué cette inégalité un nombre suffisant de fois, nous obtenons :

$$H^{m+1,n} \le \left\{ \prod_{k=p}^{m+1} 2^{2k-3} \frac{\Pi^{2(k-1)n}\left(a^k, b^k\right)}{\Pi^{n,n}\left(a^k, b^k\right)} \right\}^{1/4} H^{p-1,n} \tag{3.18}$$

Puisque $\lim_{n \to \infty} \Pi^{n,n}\left(a^k, b^k\right) < \infty$ pour $k = p+1, \ldots, m+1$ et $\lim_{n \to \infty} \Pi^{n,n}\left(a^p, b^p\right) = \infty$, alors en vertu du lemme 3.5 $\lim_{n \to \infty} \Pi^{2(k-1)n}\left(a^k, b^k\right) / \Pi^{n,n}\left(a^k, b^k\right) < \infty$ et $\lim_{n \to \infty} \Pi^{2p-2,n}\left(a^p, b^p\right) / \Pi^{n,n}\left(a^p, b^p\right) = 0$. D'après la propriété (H1) des intégrales de Helinger $0 \le H^p = \lim_{n \to \infty} H^{p,n} \le 1$, c'est pourquoi nous obtenons à partir de (3.18) $\lim_{n \to \infty} H^{m+1,n} = 0$.

§ 4. Démonstration des lemmes 3.2 à 3.5

Démonstration du lemme 3.5. Si tous les $m_k \leq c$, alors $\Pi^{p,n} \leq c^p$, c'est pourquoi $\Pi^{p,n}/\Pi^{n,n} \leq c^p/\Pi^{n,n} \to 0$, lorsque $n \to \infty$. Dans le cas contraire, il existe une suite infinie $(k(n))_{n=1}^{\infty}$, $k(1)=1$,

$k(2)=\min\left\{k \middle| m_k > m_1\right\}, \ldots, k(n+1)=\min\left\{k \middle| m_k > m_{k(n)}\right\}$, pour laquelle la propriété

$\lim_{n\to\infty} m_{k(n)} = \infty$, $m_{k(n)} < m_{k(n+1)}$, $n \in \mathbf{N}$ est vérifiée.

Pour $r,n \in \mathbf{N}, r \leq p$, désignons par $k(r,n) \in \mathbf{N}$ des nombres tels que $k(p,n) < k(p-1,n) < \cdots < k(1,n)$, $\prod_{r=1}^{p} m_{k(r,n)} = \Pi^{p,n}$. Soit $n \in [k(r),k(r+1)] \cap \mathbf{N}$, alors $k(1,n) \geq k(r)$, $k(2,r) \geq k(r-1)$, $k(p,n) \geq k(r-p+1)$, c'est pourquoi

$$\Pi^{p,n}/\Pi^{n,n} = m_{k(1,n)} \cdot m_{k(2,n)} \cdot \ldots \cdot m_{k(p,n)} \Big/ \prod_{k=1}^{n} m_k \leq$$

$$\leq \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq k(1,n) \ldots k(p,n)}}^{n} m_k\right)^{-1} \leq \left(\prod_{k=1}^{k(r-p+1)-1} m_k\right)^{-1} \to 0, n \to \infty$$

Démonstration du lemme 3.4. Nous réécrirons l'inégalité (3.15) sous la forme suivante :

$$\left(1+\sum_{r=1}^{m} \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n} \prod_{i=1}^{r} a_{k_i} \left[x_{k_1}, \cdots, x_{k_r}\right]\right)\left(1+\sum_{s=1}^{m} \sum_{1 \leq q_1 < \cdots < q_s \leq n} b_{q_i} \left[x_{q_1}, \cdots, x_{q_s}\right]\right) \leq$$

$$\leq c\left(1+\sum_{t=1}^{m} \sum_{1 \leq p_1 < \cdots < p_t \leq n} \prod_{i=1}^{t} \frac{2a_{p_i} b_{p_i}}{a_{p_i} + b_{p_i}} \left[x_{k_1}, \cdots, x_{p_t}\right]\right)^2 \qquad (3.19)$$

Alors l'inégalité (3.19) découle du système d'inégalités suivant que l'on obtient en comparant les coefficients de $\left[x_{k_1},\cdots,x_{k_r}\right]$, $\left[x_{k_1},\cdots,x_{k_r}\right]\times\left[x_{q_1},\cdots,x_{q_s}\right]$, $1\le r,s\le n$, dans le membre gauche et le membre droit de (3.19).

$$\left[x_{k_1},\cdots,x_{k_r}\right]:\prod_{i=1}^{r}a_{k_i}+\prod_{i=1}^{r}b_{k_i}\le c2\prod_{i=1}^{r}\frac{2a_{k_i}b_{k_i}}{a_{k_i}+b_{k_i}},1\le r\le n;$$

$$\left[x_{k_1},\cdots,x_{k_r}\right]\times\left[x_{q_1},\cdots,x_{q_s}\right]:\prod_{i=1}^{r}a_{k_i}\prod_{t=1}^{s}b_{q_t}+\prod_{t=1}^{s}a_{q_t}\prod_{i=1}^{r}b_{k_i}\le$$

$$\le c2\prod_{i=1}^{r}\frac{2a_{k_i}b_{k_i}}{a_{k_i}+b_{k_i}}\prod_{t=1}^{s}\frac{2a_{q_t}b_{q_t}}{a_{q_t}+b_{q_t}},1\le r,s\le n \tag{3.20}$$

Affaiblissons les inégalités (3.20) :

$$\prod_{i=1}^{r}a_{k_i}+\prod_{i=1}^{r}b_{k_i}\le\prod_{i=1}^{r}\left(a_{k_i}+b_{k_i}\right)\le c2\prod_{i=1}^{r}\frac{2a_{k_i}b_{k_i}}{a_{k_i}+b_{k_i}},1\le r\le n$$

$$\prod_{i=1}^{r}a_{k_i}\prod_{t=1}^{s}b_{q_t}+\prod_{t=1}^{s}a_{q_t}\prod_{i=1}^{r}b_{k_i}\le\prod_{i=1}^{r}\left(a_{k_i}+b_{k_i}\right)\prod_{t=1}^{s}\left(a_{q_t}+b_{q_t}\right)\le$$

$$\le c2\prod_{i=1}^{r}\frac{2a_{k_i}b_{k_i}}{a_{k_i}+b_{k_i}}\prod_{t=1}^{s}\frac{2a_{q_t}b_{q_t}}{a_{q_t}+b_{q_t}},1\le r,s\le n \tag{3.21}$$

Nous obtenons à partir de (3.21) :

$$c=\max\left\{2^{r-1}\prod_{i=1}^{r}\frac{\left(a_{k_i}+b_{k_i}\right)^2}{4a_{k_i}b_{k_i}},2^{r+s-1}\prod_{i=1}^{r}\frac{\left(a_{k_i}+b_{k_i}\right)^2}{4a_{k_i}b_{k_i}}\prod_{t=1}^{s}\frac{\left(a_{q_t}+b_{q_t}\right)^2}{4a_{q_t}b_{q_t}}\middle|1\le r,s\le n\right\}$$

$$= 2^{2m-1}\max\left\{ \prod_{i=1}^{2m} \frac{\left(a_{k_i}+b_{k_i}\right)^2}{4a_{k_i}b_{k_i}} \;\middle|\; 1 \le k_1 < \cdots < k_{2m} \le n \right\},$$

ce qui démontre le lemme 3.4.

<u>Démonstration du lemme 3.2.</u> Soit $T^{R,b^{(1)}}$ et $T^{R,b^{(2)}}$ des représentations unitaires irréductibles équivalentes, $\mathbf{I}: \mathbf{H}\left(b^{(1)}\right) \to \mathbf{H}\left(b^{(2)}\right)$ est leur opérateur d'entrelaçage : $\mathbf{I}T_t^{R,b^{(1)}} = T_t^{R,b^{(2)}}\mathbf{I}$, $t \in B_0^{\infty}$. Montrons qu'alors

$$\mathbf{I}x_{kn} = x_{kn}\mathbf{I}. \tag{3.22}$$

En effet, d'après le lemme 3.1, on a pour tout $m \in N$, $\mu_{b^{(1)}}^{-m} \sim \mu_{b^{(2)}}^{-m}$, c'est-à-dire

$$\prod_{(k,n)\in{}_{-m}} \frac{\left(b_{kn}^{(1)}+b_{kn}^{(2)}\right)^2}{4b_{kn}^{(1)}b_{kn}^{(2)}} < \infty. \tag{3.23}$$

La démonstration du lemme 2.2 nous a montré que

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right) A_{1n}^{b^{(1)}} A_{2n}^{b^{(1)}} \to x_{12} \quad \text{dans } \mathbf{H}\left(b^{(1)}\right) \text{ avec } \gamma_n = b_{1n}^2 + b_{1n}b_{2n} \text{ et}$$

$$t_n = -2\frac{b_{1n}}{\gamma_n}\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{b_{1n}^2}{\gamma_n}\right)^{-1} = -\frac{2}{b_{1n}+b_{2n}}\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{b_{1n}}{b_{1n}+b_{2n}}\right)^{-1}, \tag{3.24}$$

$$\left\|\omega_{12}\left(b^{(1)}\right)\right\|^2_{\mathbf{H}\left(b^{(1)}\right)} = \left\|\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)A_{1n}^{b^{(1)}}A_{2n}^{b^{(1)}} + \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)\frac{1}{2}b_{1n}^{(1)}x_{12}\right)\mathbf{1}\right\|^2_{\mathbf{H}\left(b^{(1)}\right)} =$$

$$= \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2\left(b^{(1)}\right)\frac{1}{4}\left[\frac{\left(b_{1n}^{(1)}\right)^2}{b_{12}^{(1)}} + b_{1n}^{(1)} b_{2n}^{(1)}\right] \times \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2\left(b^{(1)}\right)\left[\left(b_{1n}^{(1)}\right)^2 + b_{1n}^{(1)} b_{1n}^{(2)}\right] =$$

$$= 4\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{b_{1n}^{(1)}}{b_{1n}^{(1)} + b_{2n}^{(2)}}\right)^{-1}, \tag{3.25}$$

Montrons que $\mathbf{I}\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right) A_{1n}^{b^{(1)}} A_{2n}^{b^{(1)}}\right) \to x_{12}$ dans $\mathcal{F}\left(b^{(2)}\right)$. Il suffit pour cela, comme lors de la démonstration du théorème 2.1, de montrer la convergence de ces opérateurs sur un vecteur unique $\mathbf{1} \in \mathcal{F}\left(b^{(2)}\right)$. Nous avons :

$$\left\|\hat{\omega}_{12}\left(b^{(1)}\right)\right\|^2_{\mathcal{F}\left(b^{(2)}\right)} = \left\|\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right) A_{1n}^{b^{(2)}} A_{2n}^{b^{(2)}} + \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)\frac{1}{2} b_{1n}^{(2)} x_{12}\right)\mathbf{1}\right\|^2_{\mathcal{F}\left(b^{(2)}\right)} =$$

$$= \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2\left(b^{(1)}\right)\left[\frac{\left(b_{1n}^{(2)}\right)^2}{b_{12}^{(2)}} + b_{1n}^{(2)} b_{2n}^{(2)}\right] \times \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2\left(b^{(1)}\right)\left[\left(b_{1n}^{(2)}\right)^2 + b_{1n}^{(2)} b_{1n}^{(2)}\right] =$$

$$= 4\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{b_{1n}^{(2)}}{b_{1n}^{(2)} + b_{2n}^{(2)}}\right)^{-2} \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{b_{1n}^{(1)}}{b_{1n}^{(1)} + b_{2n}^{(1)}} \frac{b_{1n}^{(2)}}{b_{1n}^{(1)}} \frac{b_{1n}^{(2)} + b_{2n}^{(2)}}{b_{1n}^{(1)} + b_{2n}^{(1)}}, \tag{3.26}$$

Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{1n}^{(2)}}{b_{1n}^{(1)}} \frac{b_{1n}^{(2)} + b_{2n}^{(2)}}{b_{1n}^{(1)} + b_{2n}^{(1)}} = 1$. En effet, la condition (3.23) est équivalente à la convergence de la série

$$\sum_{(k,n)\in \Pi_m} \frac{\left(b^{(1)}_{kn} - b^{(2)}_{kn}\right)^2}{b^{(1)}_{kn}\, b^{(2)}_{kn}} < \infty$$

ce qui est équivalent à la convergence de la série :

$$\sum_{(k,n)\in \Pi_m} \left(\frac{b^{(2)}_{kn}}{b^{(1)}_{kn}} - 1\right)^2 < \infty,$$

il en découle que pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\left|\frac{b^{(2)}_{kn}}{b^{(1)}_{kn}} - 1\right| < \varepsilon$;

$k = 1,2,\ldots,m$, $n \geq n_0$, pour cette raison

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^{m} b^{(2)}_{kn}}{\sum_{k=1}^{m} b^{(1)}_{kn}} - 1\right| \leq \frac{\sum_{k=1}^{m}\left|b^{(2)}_{kn} - b^{(1)}_{kn}\right|}{\sum_{k=1}^{m} b^{(1)}_{kn}} \leq \frac{m\,\varepsilon \sum_{k=1}^{m} b^{(1)}_{kn}}{\sum_{k=1}^{m} b^{(1)}_{kn}} = m\,\varepsilon$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{m} b^{(2)}_{kn}}{\sum_{k=1}^{m} b^{(1)}_{kn}} = 1,\ m \in \mathbf{N}, \tag{3.27}$$

Il découle de (3.27) l'inégalité suivante pour le membre droit de (3.26)

$$\left\|\hat{\omega}_{12}\left(b^{(1)}\right)\right\|^2_{\Gamma\left(b^{(2)}\right)} \leq c\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{b^{(1)}_{1n}}{b^{(1)}_{1n} + b^{(1)}_{2n}}\right)^{-1},$$

qui est négligeable pour un choix approprié de N_1 et N_2 , compte tenu du

fait que $S^{L}_{12}\left(b^{(1)}\right) = \sum_{n=3}^{\infty} b^{(1)}_{1n} \big/ b^{(1)}_{2n} = \infty$ (Cf. (1.3)).

Nous écrirons $\lim_{p\to\infty}\sum_{n=N_1(p)}^{N_2(p)} \frac{b_{1n}^{(1)}}{b_{1n}^{(1)}+b_{2n}^{(1)}} = \infty$ si $(N_1, N_2) = (N_1(p), N_2(p)) \to \infty$.

La partie gauche de (3.26) contient l'expression $\frac{1}{2}\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)b_{1n}^{(2)}x_{12}$.

Montrons que

$$\lim_{(N_1,N_2)\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)b_{1n}^{(2)} = -1.$$ En effet,

$$\lim_{(N_1,N_2)\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)b_{1n}^{(2)} = -\lim_{(N_1,N_2)\to\infty}\left(\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{b_{1n}^{(1)}}{b_{1n}^{(1)}+b_{2n}^{(1)}}\right)^{-1}\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{b_{1n}^{(1)}}{b_{1n}^{(1)}+b_{2n}^{(1)}}\cdot\frac{b_{1n}^{(2)}}{b_{1n}^{(1)}} = -1$$

étant donné que

$$\left|\frac{\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n b_n}{\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n} - 1\right| \le \frac{\left|\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n (b_n - 1)\right|}{\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n} \le \max_{N_1\le n\le N_2}\left|b_n - 1\right| \to 0$$

Nous avons posé $a_n = \frac{b_{1n}^{(1)}}{b_{1n}^{(1)}+b_{2n}^{(1)}}$ $b_n = \frac{b_{1n}^{(2)}}{b_{1n}^{(1)}}$ et nous avons utilisé le fait que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{1n}^{(2)}}{b_{1n}^{(1)}} = 1$$

Ainsi, dans la partie gauche de (3.26) $\frac{1}{2}\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)b_{1n}^{(2)}x_{12} \to -x_{12}$, par conséquent $\overline{\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)A_{1n}^{b^{(1)}}A_{2n}^{b^{(1)}}\right)} = \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)A_{1n}^{b^{(2)}}A_{2n}^{b^{(2)}} \to x_{12}$, dans $\mathcal{L}\left(b^{(2)}\right)$, c'est pourquoi $\overline{x_{12}} = x_{12}$.

On montre par analogie que $\overline{x_{lk}} = x_{lk}$. En effet, d'après le lemme 2.4 , x_{lk} est approximé par les opérateurs $\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)\left(\partial_{ln} - b_{ln}^{(1)}x_{ln}\right)A_{kn}^{b^{(1)}}$

$$\left\|\omega_{lk}\left(b^{(1)}\right)\right\|^2_{\mathcal{L}\left(b^{(1)}\right)} = \left\|\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)\left(\partial_{ln} - b_{ln}^{(1)}x_{ln}\right)A_{kn}^{b^{(1)}} - x_{lk}\right)\mathbf{1}\right\|^2_{\mathcal{L}\left(b^{(1)}\right)} \le$$

$$\le \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2\left(b^{(1)}\right)\sum_{m=1}^{l} b_{ln}^{(1)}b_{mn}^{(1)} = 4\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} b_{ln}^{(1)}\left(\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(1)}\right)^{-1}\right)^{-1} \to 0,$$

où

$$t_n\left(b^{(1)}\right) = -\frac{2b_{ln}^{(1)}}{\sum_{m=1}^{k} b_{ln}^{(1)}b_{mn}^{(1)}}\left(\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{b_{ln}^{(1)^2}}{\sum_{m=1}^{k} b_{ln}^{(1)}b_{mn}^{(1)}}\right)^{-1} = -\frac{2}{\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(1)}}\left(\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{b_{ln}^{(1)}}{\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(1)}}\right)^{-1}$$

Montrons que $\overline{\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)\left(\partial_{ln} - b_{ln}^{(1)}x_{ln}\right)A_{kn}^{b^{(1)}}\right)} \to x_{lk}$ dans $\mathcal{L}\left(b^{(2)}\right)$

En effet,

$$\left\|\hat{\omega}_{lk}\left(b^{(1)}\right)\right\|^2_{\mathcal{L}\left(b^{(2)}\right)} = \left\|\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)\left(\partial_{ln} - b_{ln}^{(2)}x_{ln}\right)A_{kn}^{b^{(2)}} + \frac{1}{2}\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)b_{ln}^{(2)}x_{ln}\right)\mathbf{1}\right\|^2 \le$$

$$\times \sum_{n=N_1}^{N_2} t_n^2\left(b^{(1)}\right)\sum_{m=1}^{l} b_{ln}^{(2)} b_{mn}^{(2)}$$

$$=4\left(\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{b_{ln}^{(1)}}{\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(1)}}\right)^{-2}\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{b_{ln}^{(2)}\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(2)}}{\left(\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(1)}\right)^{2}}=$$

$$=4\left(\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{b_{ln}^{(1)}}{\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(1)}}\right)^{-2}\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{b_{ln}^{(1)}}{\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(1)}}\,\frac{b_{ln}^{(2)}}{b_{ln}^{(1)}}\,\frac{\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(2)}}{\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(1)}}.$$

Compte tenu de (3.27), nous obtenons l'inégalité :

$$\left\|\hat{\omega}_{lk}\left(b^{(1)}\right)\right\|^{2}_{\mathbf{r}\left(b^{(2)}\right)}\le c\left(\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{b_{ln}^{(1)}}{\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(1)}}\right)^{-1},$$

qui est négligeable pour un choix approprié de N_1 et N_2 (Cf. démonstration du lemme 2.4). On conclut la démonstration du lemme 3.2 par l'égalité

$$\lim_{(N_1,N_2)\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=N_1}^{N_2} t_n\left(b^{(1)}\right)b_{ln}^{(2)}=-\lim_{(N_1,N_2)\to\infty}\left(\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{b_{ln}^{(1)}}{\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(1)}}\right)^{-1}\sum_{n=N_1}^{N_2}\frac{b_{ln}^{(1)}}{\sum_{m=1}^{k} b_{mn}^{(1)}}\,\frac{b_{ln}^{(2)}}{b_{ln}^{(1)}}=-1$$

<u>Démonstration du lemme 3.3</u>. Notons que la fonction $G^{m,n}\left(a,b,x^{m,n}\right)$, $x^{m,n}\in \mathrm{Mat}(m\times n)$ est invariante par rapport à $O(m)$, groupe orthogonal de l'espace $\mathbf{R}^m$. En effet,

$$G^{m,n}\left(a,b,Ox^{m,n}\right)=G^{m,n}\left(a,b,Ox_1,\dots,Ox_n\right)=\int_{\mathbf{R}^n}\left(\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{a_k}{\pi}}\int_{\mathbf{R}^m}\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}a_k\left(x_{m+1\,k}+\left(Ox_k,t\right)\right)^2\right)\right.$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi^m}}\exp(-(t,t))\,dt\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{b_k}{\pi}}\int_{\mathbf{R}^m}\exp\left(-\sum_{k=1}^{m}b_k\left(x_{m+1\,k}+(Ox_k,t)\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{\pi^m}}\exp(-(t,t))\,dt\right)^{1/2}\otimes$$

$$\bigotimes_{k=1}^{n}dx_{m+1\,k}=G^{m,n}(a,b,x_1,\dots,x_n)=G^{m,n}(a,b,x^{m,n}). \qquad (3.28)$$

Il suffit de démontrer l'égalité (3.13) pour $G^{n,n+1}$, $n\in\mathbf{N}$.

En effet, quand $m<n$ l'égalité (3.13) pour $G^{m,n}$ est un cas particulier de l'égalité pour $G^{n-1,n}$, puisque pour $x_1,\dots,x_n\in\mathbf{R}^m\subset\mathbf{R}^n$

$$\left[x_{k_1},\dots,x_{k_r}\right]=\det\left\|\left(x_{k_i},x_{k_j}\right)_{i,j=1}^{r}\right\|=0\ ,\ r>m.$$

Indiquons quelques formules qui nous sont nécessaires. On sait que pour $A\in\mathrm{End}(\mathbf{R}^k)$, $A>0$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi^k}}\int_{\mathbf{R}^k}\exp(-(Az,z))=\frac{1}{\sqrt{\det A}} \qquad (3.29)$$

Soit $m,n\in\mathbf{N}$, $c_1,\dots,c_n\in\mathbf{R}^m$, $d\in\mathbf{R}^m$, $c_k=\left(c_{pk}\right)_{p=1}^{m}$, $k=1,\dots,n$, $\tilde c_1,\dots,\tilde c_m\in\mathbf{R}^n$, $\tilde c_p=\left(c_{pk}\right)_{k=1}^{n}$, alors

$$\psi(c_1,\dots,c_n,d)=\frac{1}{\sqrt{\pi^m}}\int_{\mathbf{R}^m}\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}(c_k,t)^2-(d,t)\right)\exp(-(t,t))\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\det(I+A(c))}}\exp\left(\tfrac{1}{4}\left((I+A(c))^{-1}d,d\right)\right), \qquad (3.30)$$

où $A(c)=\left(A_{ij}(c)\right)_{i,j=1}^{m}$, $A_{ij}(c)=\left(\tilde c_i,\tilde c_j\right)_{\mathbf{R}^n}$.

En effet, substituons dans la partie gauche (3.30) $t=T+T_0$, $T,T_0\in\mathbf{R}^m$ de sorte que les termes soient linéaires en T. Etant donné que

$$\sum_{k=1}^{n}\left({}_{k},t\right)^{2} + (t,t) = \left((I + A(c))t,t\right),$$ alors

$$\sum_{k=1}^{n}\left(c_{k},T + T_{0}\right)^{2} + \left(d,T + T_{0}\right) + \left(T + T_{0},T + T_{0}\right) = \left((I + A(c))(T + T_{0}),T + T_{0}\right) +$$

$$+\left(d,T + T_{0}\right) = \left((I + A(c))T,T\right) + 2\left((I + A(c))T_{0},T\right) + (d,T) + \left((I + A(c))T_{0},T_{0}\right) + \left(d,T_{0}\right).$$

Choisissons T_0 tel que $\left(2(I + A(c))T_{0} + d,T\right) = 0 \Leftrightarrow T_{0} = -(I + A(c))^{-1}\frac{d}{2}$, alors

$$\left((I + A(c))T_{0},T_{0}\right) + \left(d,T_{0}\right) = \left((I + A(c))T_{0} + \frac{d}{2},T_{0}\right) + \left(\frac{d}{2},T_{0}\right) = \left(\frac{d}{2},T_{0}\right) =$$

$= -\frac{1}{4}\left((I + A(c))^{-1}d,d\right)$, pour cette raison

$$\psi\left(c_{1},\ldots,c_{n},d\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{m}}}\int_{\mathbf{R}^{m}} \exp\left(-\left((I + A(c))T,T\right)\right)dT \cdot \exp\tfrac{1}{4}\left((I + A(c))^{-1}d,d\right),$$

nous en déduisons (3.30) d'après la formule (3.29). Utilisons la formule (3.30) pour la transformation $G^{m,n}$

$$G^{m,n}(a,b,x) = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} a_{k}b_{k}\right)^{1/4}}{\sqrt{\pi^{n}}}\int_{\mathbf{R}^{n}}\left(\int_{\mathbf{R}^{m}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} a_{k}\left(x_{m+1\,k} + \left(x_{k},t\right)\right)^{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi^{m}}}\times\right.$$

$$\left.\times\exp(-(t,t))\,dt \cdot \int_{\mathbf{R}^{m}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} b_{k}\left(x_{m+1\,k} + \left(x_{k},t\right)\right)^{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi^{m}}}\exp(-(t,t))\,dt\right)^{1/2} \bigotimes_{k=1}^{n} dx_{m+1\,k} =$$

$$= \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} a_{k}b_{k}\right)^{1/4}}{\sqrt{\pi^{n}}}\int_{\mathbf{R}^{n}}\left(\int_{\mathbf{R}^{m}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} a_{k}\left(x_{k},t\right)^{2} - 2\sum_{k=1}^{n} a_{k}x_{m+1\,k}\left(x_{k},t\right)\right)\frac{1}{\sqrt{\pi^{m}}}\exp(-(t,t))\,dt\right.$$

$$\left.\times\int_{\mathbf{R}^{m}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} b_{k}\left(x_{k},t\right)^{2} - 2\sum_{k=1}^{n} b_{k}x_{m+1\,k}\left(x_{k},t\right)\right)\frac{1}{\sqrt{\pi^{m}}}\exp(-(t,t))\,dt\right)^{1/2}$$

$$\bigotimes_{k=1}^{n} \exp\left(-\frac{a_{k} + b_{k}}{2}X_{m+1\,k}^{2}\right)dx_{m+1\,k} =$$

(En posant $\frac{a_k+b_k}{2}X^2_{m+1\,k}=z_k^2$, $x_{m+1\,k}=\frac{\sqrt{2}z_k}{\sqrt{a_k+b_k}}$, $x_k(a)=x_k\sqrt{a_k}$, $x_k(b)=x_k\sqrt{b_k}$,

$$d(a)=\left(d_p(a)\right)_{p=1}^m,\ d_p(a)=\sum_{k=1}^n\frac{2\sqrt{2}a_kx_{pk}z_k}{\sqrt{a_k+b_k}}=\left(\hat{x}_p(a),z\right),\ \hat{x}_p(a)=\left(\hat{x}_{pk}(a)\right)_{k=1}^n,$$

$$\hat{x}_{pk}(a)=\frac{2\sqrt{2}a_kx_{pk}}{\sqrt{a_k+b_k}},\ d(b)=\left(d_p(b)\right)_{p=1}^m,\ d_p(b)=\sum_{k=1}^n\frac{2\sqrt{2}b_kx_{pk}z_k}{\sqrt{a_k+b_k}}=\left(\hat{x}_p(b),z\right),$$

$$\hat{x}_p(b)=\left(\hat{x}_{pk}(b)\right)_{k=1}^n,\ \hat{x}_{pk}(b)=\frac{2\sqrt{2}b_kx_{pk}}{\sqrt{a_k+b_k}})$$

$$=\left\{\prod_{k=1}^n\frac{4a_kb_k}{\left(a_k+b_k\right)^2}\right\}^{1/4}\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^m}\exp\left(-\sum_{p=1}^n\left(x_p(a),t\right)^2-(d(a),t)\right)\frac{1}{\sqrt{\pi^m}}\exp(-(t,t))\,dt\right.$$

$$\left.\times\int_{\mathbf{R}^m}\exp\left(-\sum_{k=1}^n\left(x_k(a),t\right)^2-\left(d(b),t\right)\right)\frac{1}{\sqrt{\pi^m}}\exp(-(t,t))\,dt\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\exp(-(z,z))\,dz$$

$$=\left\{\prod_{k=1}^n\frac{4a_kb_k}{\left(a_k+b_k\right)^2}\frac{1}{\det(I+A(x(a)))\det(I+A(x(b)))}\right\}^{1/4}\times$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\exp\frac{1}{8}\left\{\left(\left(I+A(x(a))\right)^{-1}d(a),d(a)\right)+\left(\left(I+A(x(b))\right)^{-1}d(b),d(b)\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\exp(-(z,z))\,dz.$$

(3.31)

Désignons respectivement par $R_{pq}(a)$, $A_{pq}(a)$, $1\le p,q\le m$ les éléments de la matrice $(I+A(x(a)))^{-1}$ et ses cofacteurs, alors

$$R_{pq}(a)=\frac{A_{pq}(a)}{\det(I+A(x(a)))}$$

pour cette raison

$$\left((I+A(x(a)))^{-1}d(a),d(a)\right)+\left((I+A(x(b)))^{-1}d(b),d(b)\right)=$$

$$=\sum_{p,q=1}^{m}\left(R_{pq}(a)\left(\hat{x}_p(a),z\right)\left(\hat{x}_q(a),z\right)+R_{pq}(b)\left(\hat{x}_p(b),z\right)\left(\hat{x}_q(b),z\right)\right)=$$

$$=\sum_{p,q=1}^{m}\left(R_{pq}\sum_{i,j=1}^{n}\hat{x}_{pi}(a)z_i\,\hat{x}_{qj}(a)z_j+R_{pq}\sum_{i,j=1}^{n}\hat{x}_{pi}(b)z_i\,\hat{x}_{qj}(b)z_j\right)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{p,q=1}^{m}R_{pq}(a)\,\hat{x}_{pi}(a)\,\hat{x}_{qj}(a)+\sum_{p,q=1}^{m}R_{pq}(b)\,\hat{x}_{pi}(b)\,\hat{x}_{qj}(b)\right)z_iz_j=\sum_{i,j=1}^{n}R_{ij}(a,b,x)z_iz_j,$$

$$R_{ij}(a,b,x)=\sum_{p,q=1}^{m}\left(R_{pq}(a)\,\hat{x}_{pi}(a)\,\hat{x}_{qj}(a)+R_{pq}(b)\,\hat{x}_{pi}(b)\,\hat{x}_{qj}(b)\right)=$$

$$=\sum_{p,q=1}^{m}\left(\frac{A_{pq}(a)}{\det(I+A(x(a)))}\hat{x}_{pi}(a)\hat{x}_{qj}(a)+\frac{A_{pq}(b)}{\det(I+A(x(b)))}\hat{x}_{pi}(b)\hat{x}_{qj}(b)\right)=$$

$$=\frac{1}{\det(I+A(x(a)))\det(I+A(x(b)))}\sum_{p,q=1}^{m}\Big(\det(I+A(x(b)))A_{pq}(a)\hat{x}_{pi}(a)\hat{x}_{qj}(a)+$$

$$+\det(I+A(x(a)))A_{pq}(b)\hat{x}_{pi}(b)\hat{x}_{qj}(b)\Big)=\frac{r_{ij}(a,b,x)}{\det(I+A(x(a)))\det(I+A(x(b)))}.$$

Par conséquent,

$$\left((I+A(x(a)))^{-1}d(a),d(a)\right)+\left((I+A(x(b)))^{-1}d(b),d(b)\right)=$$

$$=\left(\det(I+A(x(a)))\det(I+A(x(b)))\right)^{-1}\sum_{i,j=1}^{n}r_{i,j}(a,b,x)z_iz_j.$$

En reportant dans (3.13) nous obtenons

$$G^{m,n}(a,b,x)=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{4a_kb_k}{\left(a_k+b_k\right)^2}\frac{1}{\det(I+A(x(a)))\det(I+A(x(b)))}\right\}^{1/4}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left\{\frac{(r(a,b,x)z,z)}{8\det(I+A(x(a)))\det(I+A(x(b)))}\right\}\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\exp(-(z,z))\,dz=$$

$$=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{4a_k b_k}{\left(a_k+b_k\right)^2}\left(\det(I+A(x(a)))\det\left(I+A(x(b))\right)\right)\right.$$

$$\left.\det^2\left(1-\frac{r(a,b,x)}{8\det(I+A(x(a)))\det\left(I+A(x(b))\right)}\right)\right)^{-1}\right\}^{1/4}$$

$$=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{4a_k b_k}{\left(a_k+b_k\right)^2}\frac{\det(I+A(x(a)))\det\left(I+A(x(b))\right)}{\det^2\left(8\det(I+A(x(a)))\det\left(I+A(x(b))\right)-r(a,b,x)\right)}\right\}^{1/4}$$

Etant donné que $A_{pq}(a)$, $A_{pq}(a)$, $\det(I+A(x(a)))$, $\det\left(I+A(x(b))\right)$ sont des polynômes en X_{ij}, $1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n$, $r_{ij}(a,b,x)$ $\det\left(8\det(I+A(x(a)))\det\left(I+A(x(b))\right)-r(a,b,x)\right)$ sont également des polynômes en X_{ij}.

Soit $x_1(a),\ldots,x_n(a)\in\mathbf{R}^m$, $x_k(a)=\left(x_{pk}\sqrt{a_k}\right)_{p=1}^{m}$, $k=1,\ldots,n$, $\tilde{x}_1(a),\ldots,\tilde{x}_m(a)\in\mathbf{R}^n$, $\tilde{x}_p(a)=\left(x_{pk}\sqrt{a_k}\right)_{k=1}^{n}$.

Posons $A(x(a))=\left(A_{ij}(x(a))\right)_{i,j=1}^{n}$, $A_{ij}(x(a))=\left(\tilde{x}_i(a),\tilde{x}_j(a)\right)$, $\tilde{A}(x(a))=\left(\tilde{A}_{pq}(x(a))\right)_{p,q=1}^{m}$, $\tilde{A}_{pq}(x(a))=\left(x_p(a),x_q(a)\right)$, $x=\left(x_{pk}\right)$, $x(a)=\left(x_{pk}\sqrt{a_k}\right)1\leq p\leq m, 1\leq k\leq n$. Alors l'égalité

$$\det(I+A(x(a)))=\det\left(I+\tilde{A}(x(a))\right)=\xi^{m,n}(a,k) \qquad (3.34)$$

est vérifiée. En effet, pour les vecteurs $x_{k_1},\dots,x_{k_r} \in \mathbf{R}^m$, l'égalité

$$\left[x_{k_1},\dots,x_{k_r}\right] = \det\left\|\left(x_{k_i},x_{k_j}\right)_{i,j=1}^{r}\right\| = \sum_{1\le p_1<\cdots<p_r\le m}\left|M_{k_1,\dots,k_r}^{p_1,\dots,p_r}(x)\right|^2, \tag{3.35}$$

où $M_{k_1,\dots,k_r}^{p_1,\dots,p_r}(x)$ sont les mineurs de la matrice X est vérifié, car

$$\det(I+A(x(a))) = \det\begin{Vmatrix} 1+\left(\tilde{x}_1(a),\tilde{x}_1(a)\right) & \left(\tilde{x}_1(a),\tilde{x}_2(a)\right) & \cdots & \left(\tilde{x}_1(a),\tilde{x}_m(a)\right) \\ \left(\tilde{x}_2(a),\tilde{x}_1(a)\right) & 1+\left(\tilde{x}_2(a),\tilde{x}_2(a)\right) & \cdots & \left(\tilde{x}_2(a),\tilde{x}_m(a)\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\tilde{x}_m(a),\tilde{x}_1(a)\right) & \left(\tilde{x}_m(a),\tilde{x}_2(a)\right) & \cdots & 1+\left(\tilde{x}_m(a),\tilde{x}_m(a)\right) \end{Vmatrix} =$$

$$=1+\sum_{s=1}^{m}\sum_{1\le p_1<\cdots<p_s\le n}\left[\tilde{x}_{p_1}(a),\dots,\tilde{x}_{p_s}(a)\right] = 1+\sum_{s=1}^{m}\sum_{\substack{1\le p_1<\cdots<p_s\le m\\ 1\le k_1<\cdots<k_s\le n}}\left|M_{k_1,\dots,k_s}^{p_1,\dots,p_s}(x(a))\right|^2$$

$$=1+\sum_{s=1}^{m}\sum_{1\le k_1<\cdots<k_s\le n}\prod_{i=1}^{n}a_{k_i}\left[x_{k_1},\dots,x_{k_s}\right] = \xi^{m,n}\left(a,x^{m,n}\right) = \det\left(I+\tilde{A}(x(a))\right).$$

Nous démontrerons l'égalité (3.13) pour $G^{n,n+1}$ par récurrence sur $n\in\mathbf{N}$. Soit $n=1$; alors, après avoir posé $x_1(a)=\sqrt{a_1}\,x_{11}$, $x_2(a)=\sqrt{a_2}\,x_{12}$,

$$\tilde{x}_1(a)=\left(\sqrt{a_1}\,x_{11},\sqrt{a_2}\,x_{12}\right),\ \det(I+A(x(a)))=\left(1+\left(\tilde{x}_1(a),\tilde{x}_1(a)\right)\right)=1+\sum_{k=1}^{2}a_k x_{1k}^2,$$

$$\det\left(I+A(x(b))\right)=1+\sum_{k=1}^{2}b_k x_{1k}^2,\ d(a)=\sum_{k=1}^{2}\frac{a_k x_{1k} z_k}{\sqrt{a_k+b_k}},\ d(b)=\sum_{k=1}^{2}\frac{b_k x_{1k} z_k}{\sqrt{a_k+b_k}},$$

$$\left(\left((I+A(x(a)))d(a),d(a)\right)+\left((I+A(x(b)))d(b),d(b)\right)\right)=\left(c_1,z\right)^2+\left(c_2,z\right)^2$$

$$\text{où } c_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{k=1}^{2} a_k x_{1k}^2}}\left(\frac{a_1 x_{11}}{\sqrt{a_1+b_1}}, \frac{a_2 x_{12}}{\sqrt{a_2+b_2}}\right),$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{k=1}^{2} b_k x_{1k}^2}}\left(\frac{b_1 x_{11}}{\sqrt{a_1+b_1}}, \frac{b_2 x_{12}}{\sqrt{a_2+b_2}}\right),$$ nous avons, d'après (3.31), (3.30)

$$G^{1,2}(a,b,x_{11},x_{12}) = \left\{\prod_{k=1}^{2} \frac{4a_k b_k}{(a_k+b_k)^2} \frac{1}{\det(I+A(x(a)))\det(I+A(x(b)))\det^2((I-A(c))}\right\}^{1/4}$$

mais d'après (3.34)

$$\det(I-A(c)) = \det\left(I-\tilde{A}(c)\right) = \det\begin{Vmatrix} 1-(c_1,c_1) & -(c_1,c_2) \\ -(c_2,c_1) & 1-(c_2,c_2) \end{Vmatrix} = \left(1 - \frac{\sum_{k=1}^{2} \frac{a_k^2 x_{1k}^2}{a_k+b_k}}{1+\sum_{k=1}^{2} a_k x_{1k}^2}\right) \times$$

$$\times\left(1 - \frac{\sum_{k=1}^{2} \frac{b_k^2 x_{1k}^2}{a_k+b_k}}{1+\sum_{k=1}^{2} b_k x_{1k}^2}\right) - \frac{\left(\sum_{k=1}^{2} \frac{a_k^2 b_k^2 x_{1k}^2}{a_k+b_k}\right)^2}{\left(1+\sum_{k=1}^{2} a_k x_{1k}^2\right)\left(1+\sum_{k=1}^{2} b_k x_{1k}^2\right)} = \frac{\left(1+\sum_{k=1}^{2} \frac{2a_k b_k}{a_k+b_k} x_{1k}^2\right)^2}{\left(1+\sum_{k=1}^{2} a_k x_{1k}^2\right)\left(1+\sum_{k=1}^{2} b_k x_{1k}^2\right)}$$

il en découle (3.13) pour $G^{1,2}(a,b,x_{11},x_{12})$.

Montrons que si (3.13) est vérifiée pour $G^{n-1,n}(a,b,x^{n-1,n})$, alors l'égalité (3.13) est vérifiée pour $G^{n,n}(a,b,x^{n,n})$. En vertu de l'invariance $G: G^{n,n}(a,b,\theta x) = G^{n,n}(a,b,x), \theta \in \theta(n)$,, on peut considérer que la matrice x est triangulaire :

$$x = \left\| \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1\,n-1} & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ x_{n-1\,1} & x_{n-1\,2} & \cdots & 0 & 0 \\ x_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

on peut écrire la fonction $\xi^{n,n}(a,x)$ sous la forme suivante :

$$\xi^{n,n}(a,x) = 1 + \sum_{r=1}^{n} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n} \prod_{i=1}^{r} a_{k_i} \left[x_{k_1}, \ldots, x_{k_r} \right] =$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{n} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n-1} \prod_{i=1}^{r} a_{k_i} \left[x_{k_1}, \ldots, x_{k_r} \right] + \sum_{r=1}^{n} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_r = n} \prod_{i=1}^{r} a_{k_i} \left[x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r-1}}, x_n \right].$$

D'après la propriété (3.33) nous obtenons, pour la matrice x,

$$\left[x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r-1}}, x_n \right] = \sum_{1 \le p_1 < \cdots < p_r \le n} \left| M^{p_1, \ldots, p_{r-1}, p_r}_{k_2, \ldots, k_{r-1}, n}(x) \right|^2 =$$

$$= \sum_{1 = p_1 < p_2 < \cdots < p_r \le n} \left| M^{1, p_2, \ldots, p_{r-1}, p_r}_{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}, n}(x) \right|^2 =$$

$$= \sum_{2 \le p_2 < \cdots < p_r \le n} \left| M^{p_2, \ldots, p_r}_{k_1, \ldots, k_{r-1}}\left({}^1x\right) \right|^2 x_{1n}^2 =$$

$$= x_{1n}^2 \left[{}^1x_{k_1}, \ldots, {}^1x_{k_{r-1}} \right],$$

où $M^{p_2, \ldots, p_r}_{k_1, \ldots, k_{r-1}}\left({}^1x\right)$ sont les mineurs de la matrice ${}^1x$, ${}^1x_1, \ldots, {}^1x_{n-1}$ sont les colonnes de la matrice ${}^1x$:

$$
{}^{1}x = \begin{Vmatrix} x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2\,n-1} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ x_{n-1\,1} & x_{n-1\,2} & \cdots & 0 \\ x_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}, \quad {}_{1}x = \begin{Vmatrix} x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{22} & x_{23} & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ x_{n-2\,2} & x_{n-2\,3} & \cdots & 0 \\ x_{n-1\,2} & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix},
$$

c'est pourquoi

$$
\xi^{n,n}\left(a, x^{n,n}\right) = \xi^{n,n-1}\left(a, x^{n,n-1}\right) + a_n x_{1n}^2\, \xi^{n-1,n-1}\left(a, {}^{1}x^{n,n}\right). \tag{3.36}
$$

On montre par analogie que

$$
\xi^{n,n}\left(a, x^{n,n}\right) = \xi^{n-1,n}\left(a, x^{n-1,n}\right) + a_1 x_{n1}^2\, \xi^{n-1,n-1}\left(a, {}_{1}x^{n,n}\right) \tag{3.37}
$$

Etant donné que

$$
\int_{\mathbb{R}^1} \exp\left(-a(y+tx)^2\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-t^2\right)dt = \frac{1}{\sqrt{1+ax^2}}\exp\left(\frac{(ayx)^2}{1+ax^2} - ay^2\right) =
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{1+ax^2}}\exp\left(-\frac{ay^2}{1+ax^2}\right) \tag{3.38}
$$

alors

$$
\int_{\mathbb{R}^1} \exp\left(-a_1\left(x_{n+1\,1} + \sum_{r=1}^{n-1} t_r x_{r1} + t_n x_{n1}\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-t_n^2\right)dt_n =
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{1+a_1 x_{n1}^2}}\exp\left(-\frac{a_1\left(x_{n+1\,1} + \sum_{r=1}^{n-1} t_r x_{r1}\right)^2}{1+a_1 x_{n1}^2}\right)
$$

$$\int_{\mathbb{R}^1} \exp\left(-b_1\left(x_{n+1\,1}+\sum_{r=1}^{n-1} t_r x_{r1}+t_n x_{n1}\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-t_n^2\right)dt_n =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+b_1 x_{n1}^2}}\exp\left(-\frac{b_1\left(x_{n+1\,1}+\sum_{r=1}^{n-1} t_r x_{r1}\right)^2}{1+b_1 x_{n1}^2}\right)$$

c'est pourquoi

$$G^{n,n}\left(a,b,x^{n,n}\right)=G^{n-1,n}\left(\tilde a,\tilde b,x^{n-1,n}\right)\left(\frac{1}{\left(1+a_1 x_{n1}^2\right)\left(1+b_1 x_{n1}^2\right)}\right)^{1/4}$$

où $\tilde a=\left(\tilde a_k\right)_{k=1}^n,\ \tilde b=\left(\tilde b_k\right)_{k=1}^n,\ \tilde a_1=\dfrac{a_1}{1+a_1 x_{n1}^2},\ \tilde b_1=\dfrac{b_1}{1+b_1 x_{n1}^2},\ \tilde a_k=a_k,\ \tilde b_k=b_k,\ 2\le k\le n.$

Etant donné que

$$\frac{2\tilde a_1\tilde b_1}{\tilde a_1+\tilde b_1}=\frac{2a_1b_1}{\left(1+a_1x_{n1}^2\right)\left(1+b_1x_{n1}^2\right)}\cdot\frac{1}{a_1\left(1+a_1x_{n1}^2\right)^{-1}+b_1\left(1+b_1x_{n1}^2\right)^{-1}}$$

$$=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}\left(1+\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}x_{n1}^2\right)^{-1},$$

$$\frac{4\tilde a_1\tilde b_1}{\left(\tilde a_1+\tilde b_1\right)^2}=\frac{4a_1b_1\left(1+a_1x_{n1}^2\right)^2\left(1+b_1x_{n1}^2\right)^2}{\left(1+a_1x_{n1}^2\right)\left(1+b_1x_{n1}^2\right)\left(1+\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}x_{n1}^2\right)^2}=$$

$$=\frac{4a_1b_1}{\left(a_1+b_1\right)^2}\frac{\left(1+a_1x_{n1}^2\right)\left(1+b_1x_{n1}^2\right)}{\left(1+\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}x_{n1}^2\right)^2},$$

alors $\xi^{n-1,n}\left(\tilde{a},x^{n-1,n}\right)=1+\sum_{r=1}^{n}\sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n}\prod_{i=1}^{r}\tilde{a}_{k_i}\left[x_{k_1},\ldots,x_{k_r}\right]=$

$$=1+\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{a_1}{1+a_1x_{n1}^2}\sum_{2\le k_2<\cdots<k_r\le n}\prod_{i=2}^{r}a_{k_i}\left[x_{k_1},x_{k_2},\ldots,x_{k_r}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{2\le k_1<\cdots<k_r\le n}\prod_{i=1}^{r}a_{k_i}\left[x_{k_1},\ldots,x_{k_r}\right]\right)=\frac{1}{1+a_1x_{n1}^2}\left(1+a_1x_{n1}^2+\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{2\le k_2<\cdots<k_r\le n}a_1\prod_{i=2}^{r}a_{k_i}\left[x_{k_1},x_{k_2}\ldots,x_{k_r}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{2\le k_1<\cdots<k_r\le n}\prod_{i=1}^{r}a_{k_i}\left[x_{k_1},\ldots,x_{k_r}\right]+a_1x_{n1}^2\left(\sum_{2\le k_1<\cdots<k_r\le n}\prod_{i=1}^{r}a_{k_i}\left[x_{k_1},\ldots,x_{k_r}\right]\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{1+a_1x_{n1}^2}\left(1+\sum_{r=1}^{n}\sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n}\prod_{i=1}^{r}a_{k_i}\left[x_{k_1},\ldots,x_{k_r}\right]+a_1x_{n1}^2\left(1+\sum_{2\le k_1<\cdots<k_r\le n}\prod_{i=1}^{r}a_{k_i}\left[x_{k_1},\ldots,x_{k_r}\right]\right)\right)=$$

$$=\frac{\xi^{n-1,n}\left(a,x^{n-1,n}\right)+a_1x_{n1}^2\,\xi^{n-1,n--1}\left(a,x^{n,n}\right)}{1+a_1x_{n1}^2},$$

c'est pourquoi

$$G^{n,n}\left(a,b,x^{n,n}\right)=\frac{1}{\left(\left(1+a_1x_{n1}^2\right)\left(1+b_1x_{n1}^2\right)\right)^{1/4}}G^{n-1,n}\left(\tilde{a},\tilde{b},x^{n-1,n}\right)=$$

$$=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{4a_kb_k\left(1+a_1x_{n1}^2\right)\left(1+b_1x_{n1}^2\right)\left(1+\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}x_{n1}^2\right)}{\left(a_k+b_k\right)^2\left(1+\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}x_{n1}^2\right)\left(1+a_1x_{n1}^2\right)\left(1+b_1x_{n1}^2\right)}\times\right.$$

$$\times\frac{\left(\xi^{n-1,n}\left(a,x^{n-1,n}\right)+a_1 x_{n1}^2\,\xi^{n-1,n-1}\left(a_1, x^{n,n}\right)\right)\left(\xi^{n-1,n}\left(b,x^{n-1,n}\right)+b_1 x_{n1}^2\,\xi^{n-1,n-1}\left(b_1, x^{n,n}\right)\right)}{\left(\xi^{n-1,n}\left(\frac{2ab}{a+b},x^{n-1,n}\right)+\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}x_{n1}^2\,\xi^{n-1,n-1}\left(\frac{2ab}{a+b}_1, x^{n,n}\right)\right)^2}\Bigg]^{1/4}$$

$$=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{4a_kb_k}{\left(a_k+b_k\right)^2}\,\frac{\xi^{n,n}\left(a,x^{n,n}\right)\xi^{n,n}\left(b,x^{n,n}\right)}{\left(\xi^{n,n}\left(\frac{2ab}{a+b},x^{n,n}\right)\right)^2}\right\}^{1/4},$$

ce qui, compte tenu de (3.37) démontre (3.13) pour $G^{n,n}\left(a,b,x^{n,n}\right)$.

Démontrons à présent que la formule (3.13) est vraie pour $G^{n,n+1}\left(a,b,x^{n,n+1}\right)$.

Si l'on désigne par

$$x^{n,n+1}=\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} & x_{1n+1} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{Vmatrix},\ x^{n,n}=\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & 0 \end{Vmatrix}$$

$${}^1x=\begin{Vmatrix} x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & 0 \end{Vmatrix}$$

(on peut réduire la matrice $x=x^{n,n+1}$ à cette forme en vertu de l'invariance de $G^{n,n+1}\left(a,b,x^{n,n+1}\right)$ par $\Phi(m)$) et si l'on utilise (3.36) pour $\xi^{n,n+1}(a,x)$ alors l'égalité (3.13) peut être écrite sous la forme :

$$\psi(a,b,x):=\left(\frac{\left(\xi^{n,n}\left(a,x^{n,n}\right)+a_{n+1}x_{1\,n+1}^2\,\xi^{n-1,n}\left(a,{}^1x\right)\right)\left(\xi^{n,n}\left(b,x^{n,n}\right)+b_{n+1}x_{1\,n+1}^2\,\xi^{n-1,n}\left(b,{}^1x\right)\right)}{\left(G^{n,n+1}(a,b,x)\right)^4}\right)^{1/2}=$$

$$=\left\{\prod_{k=1}^{n+1}\frac{4a_k b_k}{\left(a_k+b_k\right)^2}\right\}^{-1/2}\left(\xi^{n,n}\left(\frac{2ab}{a+b},x^{n,n}\right)+\frac{2a_{n+1}b_{n+1}}{a_{n+1}+b_{n+1}}x_{1\,n+1}^2\,\xi^{n,n}\left(\frac{2ab}{a+b},{}^1x\right)\right). \tag{3.39}$$

Pour $x_{1\,n+1}=0$ (3.39) correspond à (3.13) pour $G^{n,n}\left(a,b,x^{n,n}\right)$. Etant donné que $G^{n,n+1}(a,b,x)$ est une fonction paire par rapport à $x_{1\,n+1}$, alors $\psi(a,b,x)$ est une fonction paire, mais compte tenu de (3.32) nous en déduisons que $\psi(a,b,x)$ est un polynôme :

$$\psi(a,b,x)=\sum_{k=1}^{p}\psi_k(a,b,x)x_{1\,n+1}^2,\ p<\infty, \tag{3.40}$$

$$\psi_0(a,b,x)=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{\left(a_k+b_k\right)^2}{4a_k b_k}\right\}^{1/2}\xi^{n,n}\left(\frac{2ab}{a+b},x^{n,n}\right).$$

Un calcul direct donne

$$2\psi_1(a,b,x)=\left.\frac{\partial^2\psi(a,b,x)}{\partial^2 x_{1\,n+1}^2}\right|_{x_{1\,n+1}=0}=$$

$$=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{4a_k b_k}{\left(a_k+b_k\right)^2}\right\}^{-1/2}\frac{4a_{n+1}b_{n+1}}{a_{n+1}+b_{n+1}}\xi^{n,n}\left(\frac{2ab}{a+b},x^{n,n}\right). \tag{3.41}$$

En effet,

$$\frac{\partial^2\psi(a,b,x)}{\partial x_{1\,n+1}^2}=\psi(a,b,x)\Big|_{x_{1\,n+1}=0}\times\left.\left(\frac{a_{n+1}\,\xi^{n-1,n}\left(a,{}^1x\right)}{\xi^{n,n}\left(a,x^{n,n}\right)}+\frac{b_{n+1}\,\xi^{n-1,n}\left(b,{}^1x\right)}{\xi^{n,n}\left(b,x^{n,n}\right)}-\frac{2\dfrac{\partial^2 G^{n,n+1}}{\partial x_{1\,n+1}^2}}{G^{n,n+1}}\right)\right|_{x_{1\,n+1}=0}$$

mais la fonction $\hat{G} = \left(\prod_{k=1}^{n+1} a_k b_k\right)^{-1/4} G^{n,n+1}(a,b,x)$ vérifie :

$$\left(G^{n,n+1}\right)^{-1} \left.\frac{\partial^2 G^{n,n+1}}{\partial x_{1\,n+1}^2}\right|_{x_{1\,n+1}=0} = \left(\hat{G}\right)^{-1} \left.\frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial x_{1\,n+1}^2}\right|_{x_{1\,n+1}=0} =$$

$$= -2\left(\hat{G}\right)^{-1} \left.\left(a_{n+1}^2 \frac{\partial \hat{G}}{\partial a_{n+1}} + b_{n+1}^2 \frac{\partial \hat{G}}{\partial b_{n+1}}\right)\right|_{x_{1\,n+1}=0} - \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2},$$

ce qui permet d'utiliser la formule déjà démontrée

$$\hat{G}(a,b,x)\Big|_{x_{1\,n+1}} = \left(\prod_{k=1}^{n+1} a_k b_k\right)^{-1/4} G^{n,n+1}(a,b,x)\Big|_{x_{1\,n+1}} =$$

$$= \left\{\frac{4^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1}\left(a_k + b_k\right)^2} \frac{\xi^{n,n}\left(a,x^{n,n}\right) \xi^{n,n}\left(b,x^{n,n}\right)}{\left(\xi^{n,n}\left(\frac{2ab}{a+b},x^{n,n}\right)\right)^2}\right\}^{1/4},$$

En calculant $\left(G^{n,n+1}\right)^{-1} \left.\frac{\partial^2 G^{n,n+1}}{\partial x_{1\,n+1}^2}\right|_{x_{1\,n+1}=0}$ et en reportant dans $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{1\,n+1}^2}$, nous obtenons (3.41).

Montrons que $\left.\frac{\partial^{2k} \psi(a,b,x)}{\partial x_{1\,n+1}^{2k}}\right|_{x_{1\,n+1}=0} = 0,\ k > 1$

Démontrons pour cela que

$$\lim_{x_{1\,n+1}\to\infty} G^{n,n+1}(a,b,x) > 0 \tag{3.42}$$

En effet, en intégrant par rapport à $t_1 \in \mathbf{R}^1$ et en utilisant (3.38) nous obtenons

$$G^{n,n+1}(a,b,x) = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n+1} a_k b_k\right)^{1/4}}{\sqrt{\pi^{n+1}}} \int_{\mathbf{R}^{n+1}} \left(\int_{\mathbf{R}^{m-1}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} a_k \left(x_{m+1\,k} + \sum_{r=2}^{m} x_{r\,k} t_r \right)^2 - a_{n+1} x_{m+1\,n+1}^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1\,k} \left(x_{m+1\,k} + \sum_{r=1}^{m} x_{r\,k} t_r \right) \right)^2}{1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1\,k}^2} \right) \bigotimes_{k=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-t_k^2\right) dt_k \times \right.$$

$$\times \int_{\mathbf{R}^{m-1}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} b_k \left(x_{m+1\,k} + \sum_{r=2}^{m} x_{r\,k} t_r \right)^2 + \frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k x_{1\,k} \left(x_{m+1\,k} + \sum_{r=1}^{m} x_{r\,k} t_r \right) \right)^2}{1 + \sum_{k=1}^{n+1} b_k x_{1\,k}^2} \right.$$

$$\left. \left. - b_{n+1} x_{m+1\,n+1}^2 \right) \bigotimes_{k=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-t_k^2\right) dt_k \right)^{1/2} \bigotimes_{k=1}^{n+1} dx_{m+1\,k} \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1\,k}^2\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} b_k x_{1\,k}^2\right) \right)}}$$

Etant donné que $\frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1\,k} \left(x_{m+1\,k} + \sum_{r=1}^{m} x_{r\,k} t_r \right) \right)^2}{1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1\,k}^2} =$

$$\frac{\left(\sum_{r=2}^{m} t_r \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1\,k} + x_{2\,k} + \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1\,k} x_{m+1\,k} \right)^2}{1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1\,k}^2} \geq \frac{\left(a_{n+1} x_{1\,n+1} x_{m+1\,n+1} \right)^2}{1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1\,k}^2}$$

quand $\left(t_2,\ldots,t_m\right)\in L_{m-1}(a)=\left\{\left(t_2,\ldots,t_m\right)\in \mathbf{R}^{m-1}\left|t_r\sum_{k=1}^{n}a_k x_{1k}x_{rk}\geq 0\right.\right\}$

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1}b_k x_{1\,k+1}\left(x_{m+1\,k}+\sum_{r=1}^{m}x_{rk}s_r\right)\right)^2}{1+\sum_{k=1}^{n+1}b_k x_{1k}^2}\geq\frac{\left(b_{n+1}x_{1\,n+1}x_{m+1\,n+1}\right)^2}{1+\sum_{k=1}^{n+1}b_k x_{1k}^2}$$

pour $\left(s_2,\ldots,s_m\right)\in L_{m-1}(b)=\left\{\left(s_2,\ldots,s_m\right)\in \mathbf{R}^{m-1}\left|s_r\sum_{k=1}^{n}b_k x_{1k}x_{rk}\geq 0,\ r=2,\ldots,m\right.\right\}$

$x^{(m+1)}=\left(x_{m+1\,1},\ldots,x_{m+1\,n}\right)\in D_n(a,b)=D_n(a)\cap D_n(b)$, puisque $a_k,b_k>0,\ k=1,\ldots,n$

$$D_n(a)=\left\{x^{(m+1)}\in\mathbf{R}^n\left|\sum_{k=1}^{n}a_k x_{1k}x_{m+1\,k}\geq 0\right.\right\},\ D_n b=\left\{x^{(m+1)}\in\mathbf{R}^n\left|\sum_{k=1}^{n}b_k x_{1k}x_{m+1\,k}\geq 0\right.\right\}$$

alors $G^{n,n+1}(a,b,x)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$G^{n,n+1}(a,b,x)\geq\frac{\left(\prod_{k=1}^{n+1}a_k b_k\right)^{1/4}}{\sqrt{\pi^{n+1}}}\int_{\mathbf{R}_+^1}\int_{D_n(a,b)}\left(\int_{L_{m-1}(a)}\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}a_k\left(x_{m+1\,k}+\sum_{r=2}^{m}x_{rk}t_r\right)^2\right)\right.$$

$$\bigotimes_{k=2}^{m}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-t_k^2\right)dt_k\int_{L_{m-1}(b)}\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}b_k\left(x_{m+1\,k}+\sum_{r=2}^{m}x_{rk}s_r\right)^2\right)$$

$$\left.\bigotimes_{k=2}^{m}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-s_k^2\right)ds_k\right)^{1/2}\exp\frac{1}{2}\left(\frac{\left(a_{n+1}x_{1\,n+1}x_{m+1\,n+1}\right)^2}{1+\sum_{k=1}^{n+1}a_k x_{1k}^2}-a_{n+1}x_{m+1\,n+1}^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(b_{n+1}x_{1\,n+1}x_{m+1\,n+1}\right)^2}{1+\sum_{k=1}^{n+1}b_k x_{1k}^2}-b_{n+1}x_{m+1\,n+1}^2\right)dx_{m+1\,n+1}\otimes\left(\bigotimes_{k=1}^{n}dx_{m+1\,k}\right)\times$$

$$\times\left(\left(1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1k}^2\right)\left(1+\sum_{k=1}^{n+1} b_k x_{1k}^2\right)\right)^{-1/4}.$$

Etant donné que

$$\frac{1}{\left(\left(1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1k}^2\right)\left(1+\sum_{k=1}^{n+1} b_k x_{1k}^2\right)\right)^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}^1}\exp\frac{1}{2}\left(-\frac{\left(a_{n+1}x_{1\,n+1}x_{m+1\,n+1}\right)^2}{1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1k}^2}-\right.$$

$$\left.-a_{n+1}x_{m+1\,n+1}^2+\frac{\left(b_{n+1}x_{1\,n+1}x_{m+1\,n+1}\right)^2}{1+\sum_{k=1}^{n+1} b_k x_{1k}^2}-b_{n+1}x_{m+1\,n+1}^2\right)dx_{m+1\,n+1}=$$

$$=\frac{1}{\left(\left(1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1k}^2\right)\left(1+\sum_{k=1}^{n+1} b_k x_{1k}^2\right)\right)^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}^1}\exp\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{a_{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k x_{1k}^2\right)}{1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1k}^2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{b_{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n} b_k x_{1k}^2\right)}{1+\sum_{k=1}^{n+1} b_k x_{1k}^2}\right)x_{m+1\,n+1}^2\right\}dx_{m+1\,n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1k}^2\right)\left(1+\sum_{k=1}^{n+1} b_k x_{1k}^2\right)}{a_{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k x_{1k}^2\right)\left(1+\sum_{k=1}^{n+1} b_k x_{1k}^2\right)+b_{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n} b_k x_{1k}^2\right)\left(1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_{1k}^2\right)}\right)^{1/4}$$

$$\xrightarrow[x_{1\,n+1}\to\infty]{}\frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{\left(a_{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k x_{1k}^2\right)b_{n+1}+b_{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n} b_k x_{1k}^2\right)a_{n+1}\right)^2}\right)^{1/4}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_{n+1}b_{n+1}\left(2+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)x_{1k}^2\right)\right)^{-1/4}>0$$

pour tout uplet $\left(x_{11},\ldots,x_{1n}\right)\in \mathbf{R}^n$

$$G^{n,n+1}(a,b,x)\geq \frac{\left(\prod_{k=1}^{n+1}a_kb_k\right)^{1/4}}{\sqrt{\pi^n}}\int_{D_n(a,b)}\left(\int_{L_{m-1}(a)}\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}a_k\left(x_{m+1\,k}+\sum_{r=2}^{m}x_{rk}t_r\right)^2\right)\right.$$

$$\bigotimes_{k=2}^{m}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-t_k^2\right)dt_k\int_{L_{m-1}(b)}\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}b_k\left(x_{m+1\,k}+\sum_{r=2}^{m}x_{rk}s_r\right)^2\right)$$

$$\left.\bigotimes_{k=2}^{m}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-s_k^2\right)ds_k\right)^{1/2}\bigotimes_{k=1}^{n}dx_{m+1\,k}\times\frac{1}{2}\left(a_{n+1}b_{n+1}\right)^{-1/4}\left(2+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)x_{1k}^2\right)^{-1/2}>0$$

Ainsi, (3.41) est démontré.

Par conséquent, $\Psi(a,b,x)=0$ pour $k\geq 2$ puisque dans le cas contraire, compte tenu de (3.39) et (3.40) nous aboutissons à une contradiction avec (3.42), ce qui termine la démonstration du lemme 3.3.

Bibliographie

1. J. Dixmier Les C* algèbres et leurs représentations. Moscou : Naouka, 1974.- 400 p.
2. I. M. Gelfand, N. Y. Vilenkine. Quelques applications de l'analyse harmonique. Espaces de Hilbert équipés. Fonctions généralisées, fascicule 4.- Moscou : Fizmatgiz, 1961.- 472 p.
3. Y. S. Samoïlenko. Théorie spectrale des uplets d'opérateurs auto-adjoints.- Dordrecht ; Boston ; London : Cluwer Academic Publisher, 1990. 221 p.
4. R. S. Ismahilov. Représentations unitaires du groupe $C_0(X,G),G=SU_2$ // Recueil de mathématiques.- 1976.- 100, N° 1.- Pp. 117-131.

5. A. Vershic, I. Gelfand et M. Graev. Remarques sur la représentation du groupe des fonctions à valeurs dans un groupe de Lie compact//Composito Math.-1981-42, N° 2, Pp. 217-243.
6. S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn. La représentation énergétique des groupes de Sobolev-Lie.Ibid.- 1978.- 36, N° 1 - Pp. 37-52.
7. R. S. Ismahilov. Représentations du groupe des applications lisses du segment dans un groupe de Lie compact// L'analyse fonctionnelle et ses applications.- 1981.- 15, fascicule 2.- Pp. 77-78.
8. S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn et D. Testard. Irréductibilité et réductibilité pour la représentation énergétique du groupe des applications d'une variété riemannienne dans un groupe de Lie semi-simple// Journ. Funct. Anal.- 1981.- 41, N° 3.- Pp. 378-396.
9. S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, D. Testard et A. Vershik. Représentations factorielles des groupes de chemins//Ibid.- 1983.- 51, N° 1.- Pp. 115-131.
10. K. Okamoto, T. Sakurai. A propos d'une certaine classe de représentations unitaires irréductibles du groupe des rotations 11 de dimension infinie//Hiroshima Math J.- 1982.- 12.- Pp. 385-397.
11. K. Okamoto, T. Sakurai. Un équivalent du théorème de Peter-Weil pour le groupe unitaire de dimension infinie//Ibid.- N° 3.- Pp. 529-541.
12. D. Pickrell. Décomposition des représentations régulières pour $U_\infty(H)$//Pacific Journ. Math.-1987.- 128, N° 2.- Pp. 319-332.
13. N. I. Nessonov. Exemples des représentations en facteurs du groupe $GL(\infty)$//Physique mathématique et analyse fonctionnelle.- Kiev : Naoukova Doumka, 1986.- Pp. 48-52.
14. A. V. Kosyak. Le domaine de Gording et la génération des représentations unitaires des groupes de dimension finie : exposé des grandes lignes d'une thèse, candidat ès sciences physiques et mathématiques,- Kiev, 1985.- 16 p.
15. A. V. Kosyak. Critère d'irréductibilité des représentations régulières de Gauss du groupe de matrice triangulaires supérieures finies//L'analyse fonctionnelle et ses applications.- 1990.- 24, fascicule 3.- Pp. 82-83.
16. A. Veïd. L'intégration dans les groupes topologiques et son

utilisation,- Moscou : Izd-vo inostr. lit.- 1947,- 400 p.

17. Xia-Dao-Xing. Mesures et intégration dans les espaces de dimension infinie. New York ; London ; Academic Press, 1978,- 425 p.

18. A. V. Skorokhod. L'intégration dans un espace de Hilbert.- Moscou : Naouka, 1975,- 232 p.

19. G. E. Chilov, Fan Dik Tyn. Intégrale, mesure et dérivée sur les espaces linéaires.- Moscou : Naouka, 1967.- 192 p.

20. M. Rits, B. Simon. Méthodes de physique mathématique moderne.- Moscou : Mir, 1977.- T 1.- 357 p.

21. You. L. Daletski, S. V. Fomin. Mesures et équations différentielles dans les espaces de dimension infinie.- Moscou : Naouka, 1983,- 384 p.

22 Kh. S. Go. Mesures de Gauss dans les espaces de Banach.- Moscou : Mir, 1979,- 176 p.

23. R. I. Cameron, W. T. Martin. Les transformées de Fourier-Wiener des fonctionnelles analytiques// Duke Math. Journn.- 1945.- 12, N 3.- Pp. 489-507.

TABLE DES MATIERES