PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

B. L. FEIGIN

A. V. ODESSKI

Algèbres de Sklyanin associées à une courbe elliptique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1991
, p. 71-102

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1991____71_0>

B. L. Feigin, A. V. Odesski

ALGEBRES DE SKLYANIN ASSOCIEES A UNE COURBE ELLIPTIQUE

(Traduit du Preprint ITF-89-16R de l'Institut de physique chimique de l'Académie des sciences de la RSS d'Ukraine - Kiev 1989)

INTRODUCTION

Nous désignerons par algèbre de Sklyanin avec n générateurs une algèbre associative graduée A sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, $A = \mathbb{C} \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ telle que :

a) A est engendré par son sous-ensemble A_1, $\dim A_1 = n$,

b) A est un facteur de l'algèbre tensorielle $\mathbb{C} \oplus A_1 \otimes A_1 \otimes A_1 \otimes \ldots$ selon l'idéal engendré par un certain sous-espace de $A_1 \otimes A_1$,

c)

$$\dim A_i = \binom{n+i-1}{i}$$

Un exemple trivial d'algèbre de ce type est l'algèbre des polynômes à n indéterminées. Le terme d'"Algèbre de Sklyanin" est justifié par l'étude [2] où l'on a construit et étudié une famille non triviale d'algèbres de ce type avec quatre générateurs. Quelques modèles intégrables de physique statistique correspondent aux représentations de ces algèbres.

Soit A_t une famille d'algèbres de Sklyanin, $t \in V$, V étant un petit voisinage de zéro dans le plan complexe et A_0 étant l'algèbre des polynômes à n indéterminées. Cette famille définit une partition de $\mathbb{C}^n$ en feuilles symplectiques (Cf. §1). Par analogie avec la méthode des orbites en théorie des représentations des groupes de Lie (Cf. [7]), il est naturel de considérer qu'à chaque feuille symplectique correspond un idéal bilatère de l'algèbre A_t (pour de petites valeurs de t), tandis qu'au sous-ensemble de Lagrange du feuille symplectique correspond une représentation de A_t. L'origine des coordonnées est la feuille de dimension minimale. Supposons que l'on ait une feuille symplectique K homogène de dimension 2 (cône au-dessus d'une courbe algébrique non singulière $\mathscr{E}$. La variété K a un point singulier : l'origine des coordonnées. Choisissons un recouvrement ouvert $\{V_i\}$ de la courbe $\mathscr{E}$. Le recouvrement $\{\widetilde{V}_i\}$, $\widetilde{U}_i \cong V_i \times \mathbb{C}^*$ est construit de manière canonique sur la variété $K \setminus \{0\}$. Factorisons A_t selon l'idéal correspondant à la feuille symplectique K. Nous obtenons une famille d'algèbres $\mathscr{O}_t$ où $\mathscr{O}_0$ est l'algèbre des fonctions sur K. La déformation $\mathcal{O}_t$ définit un champ bivectoriel x sur K invariant par rapport aux extensions de $\mathbb{C}^n$. Localement, x est de la forme $\alpha \wedge \beta$ où α est un champ de vecteurs correspondant au groupe des extensions et où β est un champ de vecteurs sur un ensemble ouvert $V_i \subset \mathscr{E}$. On en déduit qu'il existe un champ non trivial x seulement s'il existe un champ de vecteurs non nul sur $\mathscr{E}$, c'est-à-dire que si $\mathscr{E}$ est soit $\mathbb{C}P^1$, soit une courbe elliptique. Nous étudions le cas où $\mathscr{E}$ est une courbe elliptique et où l'inclusion $\mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ est définie par un fibré linéaire sur $\mathscr{E}$ possédant un espace de sections de dimension n.

Dans cette étude, nous construirons une famille d'algèbres de Sklyanin $Q_n(\tau, \mathscr{E})$, $n \geq 3$, $\tau \in \mathscr{E}$. C'est une famille d'algèbres à n générateurs dépendant du point τ de la courbe elliptique $\mathscr{E}$. L'algèbre $Q_n(0, \mathscr{E})$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes. L'unique feuille symplectique homogène de dimension 2 est un cône sur $\mathscr{E}$. Pour $n = 4$, notre famille coïncide avec la famille d'algèbres construites par Sklyanin.

Décrivons à présent le contenu de cette étude paragraphe par paragraphe. Au §1, en suivant partiellement [5], nous exposons les éléments de la théorie générale des algèbres de Sklyanin. Nous définissons en particulier une relation entre chaque algèbre de Sklyanin A et la variété projective M au-dessus de laquelle se trouve un cône qui est l'analogue quantique de la réunion des feuilles symplectiques homogènes de dimension 2. Puis nous définissons la transformation $\tilde{\tau}: M \to M$ et l'algèbre S qui apparaît comme le produit semi-direct de l'algèbre des fonctions sur M et de l'algèbre de groupe du sous-groupe des déplacements engendré par $\tilde{\tau}$. (Il n'existe pas de fonctions holomorphes sur M et, de ce fait, on étudie à la place les sections de certains fibrés). Si $A = Q_n(\tau, \mathscr{E})$, alors $M = \mathscr{E}$ et la transformation $\tau = M \to M$ est un déplacement sur un élément qui dépend de $\tau \in \mathscr{E}$. L'algèbre de Sklyanin s'applique dans l'algèbre S. Au §2 nous étudions les algèbres à trois générateurs. Dans ce cas, on définit de manière naturelle une courbe elliptique, ainsi qu'un point de cette courbe et un fibré linéaire. Il semble que ces données déterminent de manière univoque l'algèbre de Sklyanin. Les algèbres à trois générateurs que nous avons construites ont un groupe d'automorphismes non trivial. Le groupe de Heisenberg Γ_3, c'est-à-dire le groupe à trois générateurs a, b, ϵ et avec des relations $a^3 = b^3 = \epsilon^3 = 1$, $a\epsilon = \epsilon a$, $b\epsilon = \epsilon b$, $ab = \epsilon ba$. En étudiant les algèbres à n générateurs, nous nous sommes limités au cas des algèbres sur lesquelles agit, par automorphisme, le groupe de Heisenberg Γ_n (c'est un groupe avec des générateurs a, b, ϵ et des relations analogues à celle de Γ_3, à ceci près que la première relation se transforme en $a^n = b^n = \epsilon^n = 1$). L'action du groupe Γ_n conservant l'espace des générateurs, il réalise une représentation unique irréductible de dimension n du groupe Γ_n.

Au §3 on construit et on étudie une famille d'algèbres $Q_n(\tau, \mathscr{E})$. Le cas où n est pair et celui où n est impair diffèrent quelque peu. Nous étudions en détail le cas où n est impair. On montre à la fin du paragraphe comment construire l'espace des relations dans $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ quand n est pair. Au §4, on étudie en détail le cas où n = 5. En particulier, dans l'algèbre $Q_5(\tau, \mathscr{E})$, on met en évidence une sous-algèbre de Sklyanin $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$, avec cinq générateurs, non isomorphe à $Q_5(\tau, \mathscr{E})$. L'algèbre $Q_5(\tau, \mathscr{E})$ est isomorphe à son tour à une sous-algèbre de $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$. Au §5, nous indiquons une nouvelle famille d'algèbres de Sklyanin avec n générateurs pour tout nombre impair $n \geq 5$ (pour n = 5 on obtient $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$). Nous construisons dans ce paragraphe (en utilisant un procédé qui nous est naturel) la R-matrice de Bélavin et sa duale et indiquons la relation entre cette R-matrice et la famille des algèbres $Q_n(\tau, \mathscr{E})$. Les symboles et les principales formules qui concernent les fonctions θ à une variable θ sont regroupés en annexe. (Nous conseillons au lecteur de lire attentivement tout d'abord ces annexes avant de lire le §2).

Notons que ces algèbres qui sont construites dans cette étude sont loin de représenter toutes les algèbres de Sklyanin associées à une courbe elliptique. Il en existe une infinité ; il en sera question dans une autre étude.

Cette étude est étroitement liée aux recherches de I. V. Tcherednik sur les R-matrices elliptiques. Les auteurs lui savent gré de l'intérêt qu'il a porté à cette étude.

§1. ELEMENTS DE LA THEORIE GENERALE DES ALGEBRES DE SKLYANIN

Soit A une algèbre graduée de polynômes à n indéterminées dont les générateurs sont de degré 1 ; V est l'espace des générateurs ; A s'identifie à l'espace des fonctions polynominales sur V*. Nous étudierons les déformations A_t de l'algèbre A dans la classe des algèbres graduées, t appartenant à un voisinage de zéro dans C. En d'autres termes, sur l'algèbre $A = \oplus S^i(V)$, le produit $\varphi_t : S^i(V) \otimes S^j(V) \to S^{i+j}(V)$, où φ_0 est un produit ordinaire dans l'algèbre de polynômes, est supposé dépendre de t. Alors $\varphi_t(f \otimes g) = fg + t\,\omega(f, g) + \ldots$ On sait que l'opération $\{f, g\} = \omega(f, g) - \omega(g, f)$ définit sur l'algèbre des polynômes une structure d'algèbre de Lie définie par un certain champ bivectoriel ν sur V* tel que $\{f, g\} = \langle df \wedge dg, \nu \rangle$. Le champ bivectoriel ν définit une distribution intégrable T sur V*, et notamment, dans l'espace tangent au point $W \subset V^*$, on choisit un sous-espace T_m tel que $\nu(m) \notin \Lambda^2 T_m$ et pour aucun sous-espace $W \subset T_m$, $\nu(m) \notin \Lambda^2 W$. Nous appellerons feuille symplectique correspondant à la déformation A_t, la variété algébrique $N \subset V^*$ telle que : a) l'espace tangent en n'importe quel point non singulier $n \in N$ contient T_n ; b) N n'est pas la réunion des sous-variétés algébriques vérifiant a).

L'algèbre A_t est un quotient de l'algèbre tensorielle engendrée par l'espace V selon l'idéal engendré par le sous-espace $S^{\perp}{}_t \hookrightarrow V \otimes V$, dim $S_t = n(n-1)/2$; de plus $S_0 = \Lambda^2 V$. Définissons l'algèbre duale $A^*{}_t$ comme facteur de l'algèbre tensorielle engendrée par V*, selon l'idéal engendré par le sous-espace $S_t^{\perp} \subset V^* \otimes V^*$ composé d'éléments s tels que $\langle s, u \rangle = 0$ pour tout $u \in S_t \subset V \otimes V$. Il est facile de montrer que pour tout t suffisamment petit, la famille $A^*{}_t$ est une déformation de l'algèbre de Grassmann à n indéterminées, ainsi que $A^*{}_t \simeq \mathrm{Ext}^*{}_{A_t}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et $A^*{}_t \cong \mathrm{Ext}^*{}_{A^*{}_t}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ (Cf. pour plus de détail [5], [4]). Puis, jusqu'à la fin de ce paragraphe, toutes nos affirmations seront justifiées pour un t suffisamment petit et nous ne le spécifierons pas spécialement.

Si $W \subset V$ est un sous-espace de dimension k, alors le quotient de l'algèbre A_0 selon l'idéal J(W) engendré par W est gradué, A_0 est un module et la dimension

$(A_0/J(W))(i)$ est égale à la dimension de l'espace des polynômes de degré i à (n-k) indéterminées, c'est-à-dire

$$\binom{n-k+i-1}{i}$$

Par analogie, si $\widetilde{W} \subset V^*$, $\dim \widetilde{W} = k$, alors le quotient de l'algèbre A^*_0 selon l'idéal engendré par $\widehat{W}$ possède des composantes homogènes de même dimension que l'algèbre extérieure à (n-k) indéterminées, c'est-à-dire :

$$\binom{n-k}{i}$$

Soit à présent $t \neq 0$. Définissons alors deux sous-ensembles de Grassmann d'une variété de sous-espaces de dimension k dans un espace de dimension n. Désignons par $G^1{}_t(k)$ l'ensemble des sous-espaces W de dimension k tels que les dimensions de composantes homogènes du facteur A_t selon l'idéal à droite $J^1(W)$ engendré par W soient égales à

$$\binom{n-k+i-1}{i}$$

$G^2{}_t(k)$ est défini de la même manière par factorisation de A_t selon l'idéal à gauche engendré par W. On peut montrer que $G^1{}_t(k)$ et $G^2{}_t(k)$ sont des variétés algébriques.

Soit $W \in G^1{}_t(k)$. L'espace $\mathrm{Ext}^*{}_{A_t}(C, A_t/J^1(W))$ est doté de manière naturelle d'une structure de module à droite sur $\mathrm{Ext}^*{}_{A_t}(C, C) = A^*{}_t$.

<u>Proposition</u> 1.1.

a). Le $A^*{}_t$ module $P^*{}_t = \mathrm{Ext}^*{}_{A_t}(C, A_t/J^1(W))$ est isomorphe au quotient de $A^*{}_t$ selon l'idéal à gauche engendré par l'espace $W^\perp \subset V^*$,

$$\dim P^i{}_t = \binom{n-k}{i} ;$$

b) inversement, soit P_t un $A^*{}_t$ module à droite gradué à un générateur,

$$\dim P^i{}_t = \binom{n-k}{i} ;$$

alors $P^i{}_t$ est un facteur de $A^*{}_t$ selon l'idéal engendré par le sous-espace $W^\perp \subset V^*$, $W \in G^1{}_t(k)$.

<u>Démonstration</u>. Soit $W \in G^1{}_t(k)$. On peut montrer qu'il existe une famille d'espaces $W_s \in G^1{}_s(k)$ telle que $W_t = W$. Pour $s = 0$, les affirmations de la proposition

sont connues (Cf. [8]). En calculant Ext à l'aide des bar-résolutions, il est facile de voir que les espaces Ext^i sont des cohomologies d'ensemble gradué (étant donné que les algèbres A_t sont graduées) et que pour $s = 0$, dans chaque composante homogène on ne trouve que des cohomologies de même dimension. Cela signifie que les dimensions des composantes homogènes de l'espace Ext^*_{As} (C, A_s/J^1 (W>s)) pour de petites valeurs de s sont identiques à celles pour $s = 0$. Cela démontre a) ainsi que le point b).

On voit qu'une affirmation analogue est vraie aussi pour $W \in G^2{}_t (k)$.

Proposition 1.2. $G^1{}_t (n - 1)) = G^2{}_t (n - 1))$

Démonstration. Soit $W \perp G^1{}_t (n)$ et $x \in V^*$ un vecteur non nul d'un espace de dimension un $W\perp$. Il découle de la proposition précédente que $W \perp G^1{}_t (n - 1)$, si et seulement s'il existe $y \in V^*$, tel que $yx = 0$. De la même façon, $W \in G^2{}_t (n - 1)$ si pour $x \in W\perp$ il existe y tel que $xy = 0$. Ainsi, nous devons démontrer que si dans l'algèbre A^*t on a choisi deux éléments non nuls $x, y \in A^1{}_t$, $xy = 0$, alors il existe $z \in A^1{}_t$ de sorte que $yz = 0$, et inversement. En réalité, s'il existe un y tel que $xy = 0$, alors le module à droite $xA^*{}_t$ est isomorphe à $A^*{}_t/yA^*{}_t$ et les dimensions des composantes homogènes du module $A^*{}_t/yA^*{}_t$ sont les mêmes que celles de l'algèbre de Grassmann à (n - 1) indéterminées. Cela signifie qu'il existe un z tel que $yz = 0$. La proposition est démontrée.

Il découle de la proposition 2 que sur la variété $G^1{}_t(n - 1) = G^2{}_t(n - 1)$ on a une transformation τ qui associe à l'élément $x \in G^1{}_t(n - 1)$ l'élément y tel que $xy = 0$. Notons que l'équation $xy = 0$ dans l'algèbre $A^*{}_t$ pour de petites valeurs de t possède au plus une solution puisqu'il en est ainsi dans l'algèbre de Grassmann $A^*{}_0$. La variété $G^1{}_t{}^{(n - 1)} \subset CP^{n - 1}$ et, pour cette raison, il existe sur $G^1{}_t{}^{(n - 1)}$ un fibré de dimension un ζ (restriction à $G^1{}_t{}^{(n - 1)}$ du fibré standard sur $CP^{(n - 1)}$. Nous renoncerons par la suite à l'indice supérieur dans $G^1{}_t{}^{(n - 1)}$ et désignerons $G_t{}^{(n - 1)}$ sous le nom de variété caractéristique de l'algèbre A_t.

Nous avons besoin de la construction suivante qui généralise quelque peu la construction habituelle du produit semidirect. Soit N une variété complexe, τ une transformation $N \to N$ et ν un fibré de dimension un sur N. Désignons par les symboles ν_n la suite de fibrés définie par les formules $\nu_1 = \nu$, $\nu_{i+1} = \tau^*\nu^{(i)}$ et soit $\nu(i) = \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_1$, pour $i \geq 1$, $\nu^{(0)}$ étant le fibré trivial. Il est clair qu'il existe un isomorphisme $\theta ij : \nu^{(i)} \otimes (\tau^i)^* \nu^{(j)} \xrightarrow{\sim} \nu^{(i+j)}$. Soit Sj l'espace des sections du fibré $\nu^{(j)}$. L'isomorphisme θij permet de définir la multiplication $S_i \otimes S_j \to S_{i+j}$ qui transforme l'espace $S_* = \otimes S_i$, $i \geq 0$, en algèbre associative graduée que nous désignerons par $S_*(N, \tau, \nu)$. Supposons que ν soit un faisceau ample. Alors $S_*(N, \tau, \nu)$ est une algèbre engendrée par son sous-espace S_1. Les relations quadratiques entre les générateurs peuvent être décrites ainsi. Identifions l'espace $S_1 \otimes S_1$ avec l'espace des sections du fibré $\nu \boxtimes \nu$ sur N x N. Mettons en évidence dans $S_1 \otimes S_1$ le sous-espace de sections T s'annulant sur la sous-variété composée de points $(n, \tau(n))$, $n \in N$ (c'est-à-dire sur le graphe de la transformation τ). Soit C le quotient de l'algèbre tensorielle $\mathbb{C} \oplus S_1 \oplus S_1 \otimes S_1 \oplus \ldots$ selon l'idéal engendré par le sous-espace $T \subset S_1 \otimes S_1$. Il est clair que l'application naturelle $\varphi : C \to S(N, \tau, \nu)$ est une surjection. Si τ est la transformation identique, alors $S(N, \tau, \nu)$ est une algèbre commutative.

Par exemple, si ν est le fibré trivial, alors $S(N, \tau, \nu)$ est le produit semidirect de l'algèbre $\mathcal{O}(N)$ des fonctions sur N par l'algèbre des polynômes à une indéterminée z. Ce produit semidirect est la somme directe des sous-espaces de la forme $\mathcal{O}(N) \otimes z^i$, $i \geq 0$, le produit étant défini par la formule $(f \otimes z^i)(g \otimes z^j) = f(a^i g) \otimes z^{i+j}$ où a est l'endomorphisme de l'algèbre $\mathcal{O}(N)$ induit par la transformation τ.

Citons encore un exemple. Soit N un espace linéaire de dimension finie et τ une application linéaire $B : N \to N$. Il est clair que le produit semidirect S de l'algèbre des polynômes (c'est-à-dire $\mathcal{O}(N)$) et de $\mathbb{C}(z)$ est une algèbre bigraduée puisque l'endomorphisme $\mathcal{O}(N)$ induit par B conserve la graduation naturelle sur $\mathcal{O}(N)$. Soit $S^\circ = \oplus S^\circ_i$ une sous-algèbre dans S, S°_i l'espace des éléments de degré (i, i). Alors $S^\circ = S^\circ(B)$ est une algèbre graduée qui est une déformation de l'algèbre des polynômes. En effet, soit $B(t) = E(1 - t) + Bt$ un endomorphisme de l'espace N, E étant l'application identique. Alors, $S^\circ(B(t))$ est une algèbre de polynômes quand $t = 0$ et - $S^\circ(B)$ quand $t = 1$. Soit w(A) le champ de vecteurs linéaire sur N qui correspond à l'opérateur $A : N \to N$. Le champ bivectoriel sur N qui se produit par suite de la déformation $S^\circ(B(t))$ est $w(E) \wedge w(B)$. Notons également que la variété caractéristique d'une telle algèbre coïncide avec l'espace projectif tout entier.

Nous associerons à chaque point $x \in N$ un $S(N, \tau, \nu)$ module gradué, Mx, $\dim Mx(i) = 1$, $i \geq 0$, $\dim Mx(i) = 0$, $i < 0$. Soit $x \in N$ et soit $OQ(x)$ l'orbite du point x sous l'action du sous-groupe engendré par τ, c'est-à-dire l'ensemble $\{x, \tau(x), \tau^2(x), \dots\}$; ν_x est la restriction du fibré ν sur Q. Il est clair qu'il existe un homomorphisme $S(N, \tau, \nu) \to S(Q(x), \tau, \nu_x)$. L'algèbre $S(Q(x), \tau, \nu_x)$ est isomorphe au produit semidirect de l'algèbre V des fonctions sur $Q(x)$ et de $\mathbb{C}[Z]$. Il existe sur l'algèbre $S(Q(x), \tau, \nu_x)$ un module Mx de base v_j, $j = 0, 1, \dots$ tel que $Z(v_j) = v_{j+1}$ et $f(v_j) = f\tau_j(x))v_j$, $f \in U$. L'homomorphisme $S(N, \tau, \nu) \to S(Q(x), \tau, \nu_x)$ définit sur l'espace Mx une structure de $S(N, \tau, \nu)$ module.

Revenons à présent à l'étude de la famille d'algèbres A_t.

<u>Proposition</u> 1.3. Il existe un homomorphisme d'algèbres graduées $\varphi : A_t \to S(G_t^{(n-1)}, \tau, \xi)$ dont le noyau est contenu dans l'idéal de l'algèbre A_t constitué d'éléments de degré ≥ 2.

<u>Démonstration</u>. A chaque point $x \in G_t^{(n-1)}$ correspond l'A_t module Mx de base v_i, $i = 0, 1, 2, \dots$ Etudions le sous-module de base v_i, $i \geq 1$. Ce module est isomorphe à $M\,\tau(x)$, $\tau(x) \in G_t^{(n-1)}$. En effet, l'A_t module de dimension 2 engendré par (v_i, v_{i+1}) définit un élément y_i de l'espace $\mathrm{Ext}^1{}_{A_t}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \subset A^*{}_t$. Le fait qu'il existe un A_t module de dimension 3 de base $\nu_i, \nu_{i+1}, \nu_{i+2}$ signifie que $y_{i+1}y_i = 0$. Ainsi, l'élément de $G_t^{(n-1)}$ qui correspond à y_{i+1} est obtenu à partir de l'élément qui correspond à y_i par la transformation τ. Il est clair qu'il existe une algèbre $S(G_t^{(n-1)}, \tau, \xi)$ sur le module M_x. L'action des espaces $A^1{}_t$ sur M_x est définie comme suit : $A^1{}_t$ a une représentation sur un sous-espace de l'espace des sections du fibré ξ sur $G_t^{(n-1)}$. Il en découle que l'application $A_t \to S(G_t^{(n-1)}, \tau, \xi)$ se prolonge en un homomorphisme $A_t \to S(G_t^{(n-1)}, \tau, \xi)$.

<u>Remarque</u>. Nous n'avons pas pu montrer que les variétés $G^1{}_t(k)$ et $G^2{}_t(k)$ coïncidaient quand $k < n-1$. Selon toute vraisemblance, ce n'est pas le cas.

Cependant, $G^1{}_t(k)$ et $G^2{}_t(k)$ sont toujours isomorphes. En effet, soit l'$A^*{}_t$ module à droite Mg correspondant à l'élément $g \in G^1{}_t(k)$. L'espace adjoint est naturellement doté d'une structure de module à gauche correspondant au point $u(g) \in G^2{}_t(k)$. On définit de manière analogue l'application $u^* : G^2{}_t(k) \to G^1{}_t(k)$. Il est clair que uu^* et u^*u sont égaux à l'application identique.

§2. ALGEBRES A TROIS GENERATEURS

En utilisant la technique du paragraphe précédent, nous étudierons dans ce paragraphe une certaine classe d'algèbres à trois générateurs. Commençons par quelques considérations. Soit $B = \mathbb{C} \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots$ une algèbre graduée à trois générateurs, $\dim B_1 = 3$ et $\dim B_i = (i+1)(i+2)/2$ et $B^* = \mathrm{Ext}^*{}_B(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus B^*{}_1 \oplus B^*{}_2 \oplus \oplus B^*{}_3$, $\dim B^*{}_1 = \dim B^*{}_2 = 3$ $\dim B^*{}_3 = 1$. Pour chaque élément $x \in B^*{}_1$, on définit deux opérateurs L_x et R_x de $B^*{}_1 \to B^*{}_2$, $L_x y = xy$, $R_x y = yx$. Nous dirons que l'algèbre B^* est non dégénérée s'il existe $x \in B^*{}_1$ tel que l'application L_x ne possède pas de noyau. Soit X l'ensemble des x tels que $\dim \mathrm{Ker}\, L_x \neq 0$. Il découle de la proposition 2.1 que si l'algèbre B est une petite déformation d'une algèbre commutative, alors $\dim \mathrm{Ker}\, L_x = \dim \mathrm{Ker}\, R_x$ et est égale à zéro ou à un. Choisissons une base des espaces $B^*{}_1$ et $B^*{}_2$. L'ensemble X est défini par une seule équation de troisième degré $\mathrm{Det} L_x = 0$. Supposons à présent que le polynôme $\mathrm{Det} L_x$ est non dégénéré, c'est-à-dire que son ensemble de zéros est un cône au-dessus d'une courbe elliptique $\mathscr{E}$. Ainsi, dans ce cas, la variété caractéristique de l'algèbre B est une courbe elliptique. Si B est une petite déformation de l'algèbre commutative, alors la transformation $\tau : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ doit être voisine de l'identité, c'est-à-dire que τ est un petit déplacement. Introduisons sur $\mathscr{E}$ une structure de groupe algébrique (à cette fin, on prend généralement pour élément nul l'un des points de la courbe). Nous désignerons désormais par la lettre τ le déplacement $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$ et l'élément par lequel s'effectue le déplacement, c'est-à-dire $\tau(x) = x + \tau$, $\tau \in \mathscr{E}$.

Ainsi, dans ce cas, l'algèbre B s'applique sur l'algèbre $S(\mathscr{E}, \tau, \nu)$, ν étant un fibré défini sur $\mathscr{E}$ possédant un espace de sections de dimension 3. Notons que les deux algèbres $S(\mathscr{E}, \tau, \nu_i)$ qui correspondent à deux fibrés vectoriels égaux ν_1 et ν_2 possédant un espace de sections de dimension 3 sont isomorphes puisqu'il existe un isomorphisme $x : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ tel que $x^* \nu_1 \simeq \nu_2$. Nous désignerons par $S(\mathscr{E}, \tau, n,)$ l'algèbre S qui correspond à la courbe $\mathscr{E}$, au déplacement τ et au fibré possédant n sections. La dimension de l'espace de sections du fibré $\nu \otimes \ldots \otimes \nu$ (i fois) est égale à 3i. Il en découle que l'application $B_i \to S_1$ $(\mathscr{E}, \tau, 3)$ est une surjection, de plus les applications $B_1 \to S_1$ $(\mathscr{E}, \tau, 3)$ et $B_2 \to S_2$ $(\mathscr{E}, \tau, 3)$ sont isomorphes. Et comme B est une algèbre à relations quadratiques, B est défini univoquement par une courbe elliptique et un déplacement.

Proposition 2.1. a) Soit $\mathscr{E}$ une courbe elliptique, ν un fibré linéaire sur $\mathscr{E}$ possédant un espace de sections de dimension 3 $\Gamma(\nu)$ et $\tau \in \mathscr{E}$. Il existe alors une algèbre graduée de Sklyanin avec un espace de générateurs de dimension trois isomorphe à $\Gamma(\nu)$. L'espace des relations est composé des éléments $\Gamma(\nu) \otimes \Gamma(\nu) \simeq \Gamma(\nu \boxtimes \nu)$ qui s'annulent sur la sous-variété $\{x, x+\tau\}$, $x \in \mathscr{E}$, de $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$.

b). Il existe dans l'algèbre B un élément Δ de degré 3 qui appartient au centre. Le facteur de l'algèbre B selon l'idéal engendré par Δ est isomorphe à l'algèbre $S(\mathscr{E}, \tau, 3)$. Si τ n'est pas un point d'ordre fini, le centre de l'algèbre B est engendré par l'élément Δ.

c). Un groupe de Heisenberg Γ_3 agit par automorphismes sur l'algèbre B.

d). L'algèbre duale de B, B^*, c'est-à-dire $\mathrm{Ext}^*_B(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ a des composantes homogènes de même dimension que l'algèbre de Grassmann à trois indéterminées.

Il est bien connu (Cf. [1]) que le sous-groupe de $\mathscr{E}$ constitué des éléments $x \in \mathscr{E}$ tels que $x^*(\nu) \simeq \nu$ est précisément le groupe des points d'ordre trois. L'isomorphisme $x^*(\nu) \simeq \nu$ définit sur l'espace $\Gamma(\nu)$ une action projective du groupe $Z_3 \oplus Z_3$, c'est-à-dire une action du groupe de Heisenberg. L'espace des relations décrit au point a) est invariant par rapport à l'action du groupe de Heisenberg. Cela démontre le point c).

L'algèbre commutative $S(\mathscr{E}, 0, 3)$ est un facteur de l'algèbre des polynômes à trois indéterminées selon un idéal engendré par un polynôme de troisième degré. Il en découle que l'algèbre $\mathrm{Ext}^*_{S(\mathscr{E},\, 0,\, 3)}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est une algèbre anti-commutative à trois générateurs impairs de degré 1 et à un générateur pair de degré 3. Calculons à présent $\mathrm{Ext}^*_{s(\mathscr{E}, 0, 3)}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

<u>Lemme</u> 2.2. $\dim \mathrm{Ext}^*_{s(\mathscr{E}, 0, 3)}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \dim \mathrm{Ext}^i_{s(\mathscr{E}, 0, 3)}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ pour tout $i \geq 0$.

Nous remettons la démonstration de ce théorème à la fin du paragraphe. D'après le point d de la propriété 3.1, la sous-algèbre de $\mathrm{Ext}^*_{s}(\mathscr{E}, \tau, 3)(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ engendrée par les éléments de degré 1 est l'algèbre B*. On peut montrer que l'algèbre B est isomorphe à l'algèbre $\mathrm{Ext}^*B(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Les autres affirmations de la proposition se déduisent des résultats du paragraphe suivant.

Supposons à présent que la variété projective définie par l'équation $\mathrm{Det}\, L_X = 0$ possède des singularités. Trois cas peuvent alors se présenter : les zéros du polynôme $\mathrm{Det} L_X$ (c'est-à-dire le cône au-dessus de la variété caractéristique G) est la réunion de trois plans ou la réunion d'une quadrique et d'un plan ou un cône au-dessus d'un cubique à point double. Etudions d'abord le premier cas et limitons-nous à la situation générale où les trois plans ne coïncident pas deux à deux. Alors, G est la réunion de trois droites dans $\mathbb{C}P^2$ qui passent par des points distincts deux à deux Z_1, Z_2, Z_3. La transformation $\tau : G \to G$ qui se trouve dans la composante connexe de la transformation identique est un triplet de trois automorphismes P_{12}, P_{13}, P_{23} où P_{ij} est l'automorphisme de la droite (Z_i, Z_j) passant par les points Z_i et Z_j qui laisse les points Z_i et Z_j invariants. L'algèbre B qui correspond à la variété G et à l'automorphisme τ s'applique sur l'algèbre $S(G, \tau, \nu)$ tandis que $S(G, \tau, \nu)$ s'applique sur l'algèbre $S((Z_i, Z_j, P_{ij}, \nu \mid p_{ij}) = S_{ij}$. L'algèbre S_{ij} est isomorphe à l'algèbre à deux générateurs x_i, x_j ; et à une relation $x_i x_j = q_{ij}\, x_j\, x_i$, $i < j$, où le nombre q_{ij} est défini par la transformation p_{ij}. Il en découle que l'algèbre B est engendrée par trois générateurs x_1, x_2, x_3 qui vérifient les relations $x_i x_j = q_{ij}\, x_j\, x_i$, $i < j$

On étudie par analogie le cas où G est la réunion d'une quadrique et de la droite. Limitons-nous encore à la situation générale où la quadrique K et la droite L s'intersectent en deux points, Z_1 et $Z_2 \in \mathbb{C}P^2$. La transformation $\tau : G \to G$ qui se trouve dans la composante connexe de l'application identique conserve les points Z_1

et Z_2 et définit une transformation projective $L \to L$. En raisonnant comme précédemment, nous trouvons que l'algèbre B qui correspond à la variété G et à la transformation τ s'applique sur l'algèbre à deux générateurs x_1, x_2 et à une relation $x_1x_2 = qx_2x_1$, $q \in \mathbb{C}$.

Il est facile de montrer que si B est une algèbre telle qu'il existe une application surjective de B sur l'algèbre de Sklyanin à deux générateurs et que Det $L_X \neq 0$, alors la variété G est réductible. Nous laissons au lecteur le cas où G est une cubique à point double.

Démontrons à présent le lemme. L'ensemble K_* dont les cohomologies sont $\mathrm{Ext}^*{}_s(\mathscr{E}, 0, 3)(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est naturellement gradué, $K_* = \oplus Kn$, $n \in Z$. L'ensemble dual de K_* peut être décrit comme suit. Soit $\xi = \nu \boxtimes \tau^*\nu \boxtimes \ldots \boxtimes (\tau^{n-1})^* \nu$ un fibré sur $E \cong \mathscr{E} x \ldots x \mathscr{E}$ (n fois). Désignons par le symbole E_k, $1 \leq k \leq n - 1$ la sous-variété dans E constituée des n-uplets $x_1, \ldots, x_n$, $x_i \leq \mathscr{E}$, $x_k = x_{k+1}$. Soit $\Gamma(\mathscr{E})$ un sous-ensemble dans $\Gamma(\xi)$ constitué de sections réduites à zéro sur la sous-variété E_k. Au uplet d'indices $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n - 1$ nous ferons correspondre l'espace $\Gamma(\xi)/\Gamma_{i1}(\xi) + \ldots + \Gamma_{is}(\xi) = W_{i1 \ldots is}$, au uplet vide nous ferons correspondre l'espace $W = \Gamma(\xi)$. Le uplet des espaces $W_{i1 \ldots is}$ est un système de coefficients sur l'ensemble simplicial correspondant à un simplexe de dimension n - 1. L'ensemble des cochaînes à valeurs dans ce système de coefficients est l'ensemble K_*. Il est facile de montrer que dans notre situation sa cohomologie est la cohomologie du fibré ξ - D sur E où D est le fibré correspondant au diviseur $E_1 + \ldots + E_{n-1}$. En utilisant des résultats connus (Cf. [1]) sur les cohomologies des faisceaux inversibles des variétés abéliennes, il est facile de montrer que les cohomologies du faisceau ξ - D ne dépendent pas de τ.

§3. ALGEBRES QUADRATIQUES A n GENERATEURS ASSOCIES A UNE COURBE ELLIPTIQUE ET A UN POINT SUR CETTE DERNIERE

Soit $\mathscr{E}$ une courbe elliptique, $\tau \in \mathscr{E}$, $n \geq 3$ est un nombre impair. Désignons par $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ une algèbre avec des générateurs $\{x_i \mid i \in Z_n\}$ avec les relations :

$$\frac{x^2_i}{\theta_j(\tau)h_{-j}(\tau)}+\frac{x_{i-1}x_{i+1}}{\theta_{j+1}(\tau)\theta_{-j+1}(\tau)}+\ldots+\frac{x_{i-(n-1)}\,x_{i+n-1}}{\theta_{j+n-1}(\tau)h_{-j+n-1}(\tau)}=0,$$

où $i, j \in Z_n$, $j \neq 0$, $\{\theta j\}$ sont les fonctions θ d'ordre n (Cf. annexe).

On voit facilement que l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ admet les automorphismes suivants : σ_1, σ_2, $\sigma_1(x_k) = x_{k+1}$, $\sigma_2(x_k) = e^{2nik/n}x_k$. Le groupe engendré par σ_1 et σ_2 est isomorphe au groupe de Heisenberg Γ_k.

<u>Théorème</u> 3.1. Soit $z \in \mathscr{E}$. Désignons par $M^1{}_z$ l'espace de base v_i, $i \in Z$. les formules $x_iv_j = \theta i\ (z + (n-2)j\tau)\ v_{j+1}$ définissent sur $M^1{}_z$ une structure de $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ module.

<u>Démonstration</u>. Il faut montrer que les opérateurs x_i agissant sur $M^1{}_z$ satisfont aux relations de l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$. Cela revient à vérifier la relation suivante entre les fonctions θ :

$$\sum_s \theta_s(\tau)\theta_{s+1}(\tau)\ldots\widehat{\theta_{s+j}(\tau)}\ldots\widehat{\theta_{s-j}(\tau)}\ldots\theta_{s+n-1}(\tau)\,x\theta_{i-s}(z+(n-2)\tau)\theta_{i+s}(z)=0$$

où la sommation est effectuée sur tous les $s \in Z_n$.

Cela découle de l'équation plus générale :

$$\sum_s \theta_s(\tau_1)\theta_{s+1}(\tau_2)\ldots\widehat{\theta_{s+j}}\ldots\widehat{\theta_{-j+s}}\ldots\theta_{s+n-1}(\tau_{n-2})\,x$$

$$x\ \theta_{i-s}(z+\tau_1+\ldots+\tau_{n-2})\theta_{i+s}(z)=0,\ s\in Z_n$$

Dans ces formules, le signe $\wedge$ signifie que le membre correspondant dans la formule a été omis. Dans la seconde formule, les indices de τ parcourent les valeurs 1, ..., n-2 (c'est-à-dire qu'il y en a autant que de facteurs de la forme $\theta\alpha(\tau\beta)$). Pour démontrer la seconde formule, il faut fixer toutes les variables τ_1, ... τ_{n-2}, z, sauf une seule, et utiliser les relations bilinéaires de Riemann.

Il découle du théorème 3.1 que l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ s'applique sur l'algèbre $S(\mathscr{E}, (n-2)\tau, n)$. Décrivons à présent l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ en termes plus géométriques. Soit ν un fibré linéaire sur $\mathscr{E}$ dont l'espace de sections est de dimension n. Mettons en évidence dans $\Gamma(\nu) \otimes \Gamma(\nu) \simeq \Gamma(\nu \boxtimes \nu)$ le sous-espace $\bar{\Gamma}$ de sections s'annulant sur la "diagonale" déplacée $\Delta\rho = \{(x, x + \rho)\ |x \in \mathscr{E}\}$. Identifions $\bar{\Gamma}$ avec l'espace de sections du fibré $\nu\boxtimes\nu - \widetilde{\Delta\rho}$ où $\widetilde{\Delta\rho}$ est le fibré qui correspond au diviseur $\Delta\rho$; dim $(\Gamma(\nu\boxtimes\nu) - \widetilde{\Delta\rho})) = n^2 - 2n$. Le fibré $\nu\boxtimes\nu - \widetilde{\Delta\rho}$ est invariant par rapport au déplacement sur les éléments (x, y) de la variété abélienne $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ tels que $n(x + y) = C$, $(n - 2)(x - y) = 0$. Cela signifie qu'une action projective du groupe $H = Z_n \times Z_n \times Z_{n-2} \times Z_{n-2}$ est définie sur l'espace $\Gamma(\nu\boxtimes\nu) - \Delta\rho)$. Le fibré $\nu\boxtimes\nu$ est $\widetilde{\Delta\tau_1}$ et $\nu\boxtimes\nu$ est $\widetilde{\Delta\tau_2}$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{E}$ se trouvent dans une composante connexe du groupe de Picard de la variété $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Il existe un élément $a(\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ tel que $\nu\boxtimes\nu - \widetilde{\Delta\tau_1} = a(\tau_1, \tau_2)^* (\nu\boxtimes\nu - \widetilde{\Delta\tau_2})$; a est défini à l'addition d'un élément de H près. Soit $\tau_1 - \tau_2$ voisin de zéro. Alors l'élément $a(\tau_1, \tau_2)$ peut être également choisi voisin de zéro. Cela nous donne une connexion plane projective sur le fibré ξ sur la courbe $\mathcal{E}$, la couche ξ au-dessus du point ρ étant l'espace $\Gamma(\nu\boxtimes\nu) - \widetilde{\Delta\rho})$. La monodromie de cette connexion est non triviale, le groupe de points d'ordre (n-2) sur $\mathcal{E}$ isomorphe au groupe $\Pi_1(\mathcal{E})/(n-2)\Pi_1(\mathcal{E})$ agit sur $\Gamma(\nu \times \nu) \Delta p)$. Soit $\rho : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ le revêtement $\rho(x)=(n-2)x$. La monodromie de la connexion projective sur le fibré $\rho^*(\xi)$ est triviale. Ainsi, nous pouvons identifier à une constante de l'espace $\Gamma(\nu\boxtimes\nu) - \widetilde{\Delta}_{(n-2)\tau 1})$ et $\Gamma(\nu\boxtimes\nu) - \widetilde{\Delta}_{(n-2)\tau 2})$ près. Sur l'espace $\Gamma(\nu\boxtimes\nu) - \widetilde{\Delta}_{0\tau})$ le groupe de permutations à deux éléments agit et soit Λ le sous-espace de sections antisymétriques. Le sous-espace correspondant dans $\Gamma(\nu\boxtimes\nu)\widetilde{\Delta}_{(n-2)\tau}) \subset \Gamma(\nu) \otimes \Gamma(\nu)$ et c'est l'espace des relations de l'algèbre $Q_n(\tau, \mathcal{E})$.

Théorème 3.2. Soit $Mk_{z1, \ldots zk}$, $z_i \in \mathcal{E}$ un espace de base $\{v_{i1 \cdots ik} \mid i_1, \ldots, i_k \geq 0\}$. Définissons l'action des opérateurs x_j par la formule suivante :

$$x_j v_{i1 \cdots ik} = \sum_s \frac{\theta_j(z_s + (ni_s - 2(i_1 + \ldots + i_k))\tau)}{\prod_{r \neq s} \theta(z_r - z_s + n(i_r - i_s)\tau)} v_{i1, \ldots, is+1, \ldots, ik},$$

$1 \leq s \leq k$.

Alors, $M^k{}_{z1, \ldots, zk}$ est un $Q_n(\tau, \mathcal{E})$ module. Si $n > 3$, les modules $M^k{}_{z1, \ldots, zk}$ et $M^k{}_{z'1, \ldots, z'k}$ sont alors isomorphes seulement si le uplet $z_1, \ldots, z_k$ est obtenu à partir du k-uplet $z'_1, \ldots, z'_k$ par permutation. Lorsque n = 3, les modules $M^2_{z1,\, z2}$ et $M^2_{z2,\, z3}$ sont isomorphes si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Démonstration. Pour simplifier les calculs, limitons-nous au cas où n = 3. La démonstration est analogue dans le cas général. Etant donné que l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ est définie par les relations quadratiques, alors il suffit de démontrer le théorème dans le cas k = 2. Appliquons la relation dans l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ au vecteur $v_{0,0}$. Il découle du théorème 3.1 que l'on obtiendra $v_{1,1}$ multiplié par un certain coefficient. L'annulation de ce coefficient est équivalente à la relation suivante entre les fonctions θ :

$$\frac{\theta_0(\tau)\,\theta_0(z_1)\,\theta_0(z_2-2\tau)+\theta_1(\tau)\,\theta_1(z_1)\,\theta_2(z_2-2\tau)}{\theta_0(\tau)\,\theta_0(z_2)\,\theta_0(z_1-2\tau)+\theta_1(\tau)\,\theta_1(z_2)\,\theta_2(z_1-2\tau)}+$$

$$+\frac{\theta_2(\tau)\,\theta_2(z_1)\,\theta_1(z_2-2\tau)}{\theta_2(\tau)\,\theta_2(z_2)\,\theta_1(z_1-2\tau)}=\frac{\theta(z_1-z_2+3\tau)}{\theta(z_2-z_1+3\tau)}$$

Utilisons l'égalité qu'il est facile de démontrer en comparant les zéros des deux parties :

$$\operatorname{Det}\begin{matrix}\theta_0(z_1) & \theta_1(z_1) & \theta_2(z_1)\\ \theta_2(z_2) & \theta_0(z_2) & \theta_1(z_2)\\ \theta_1(z_3) & \theta_2(z_3) & \theta_0(z_3)\end{matrix} =$$

$$= \alpha\theta(z_1 - z_2 + \eta/3)\theta(z_2 - z_3 + \frac{\eta}{3})\theta(z_3 + z_1 + \frac{\eta}{3})\theta(z_1 + z_2 + z_3),$$

où α est une valeur ne dépendant pas de z_1, z_2, z_3. On en déduit que :

$$\theta_0(z_1)\,\theta_0(z_2)\,\theta_0(z_3) + \theta_1(z_1)\theta_1(z_2)\theta_1(z_3) + \theta_2(z_1)\theta_2(z_2)\theta_2(z_3) =$$

$$= \theta\,(z_1 - z_2 + z_3)\,(\alpha_1\theta\,(z_1 - z_2 + \frac{\eta}{3})\,\theta\,(z_2 - z_3 + \frac{\eta}{3})$$

$$\theta\left(z_3 - z_1 + \frac{\eta}{3}\right) + \alpha_2 \theta\left(z_1 - z_2 + \frac{\eta}{3} + \frac{2}{3}\right) \theta\left(z_2 - z_3 + \frac{\eta}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

$$\theta\left(z_3 - z_1 + \frac{\eta}{3}\right) + \frac{2}{3}))$$

où α_1 et α_2 ,ne dépendent pas de z_1, z_2, z_3. Remplaçons dans cette formule z_1, z_2, z_3 respectivement par $\tau, z_1, 2\tau - z_2$. Nous obtenons

$$\theta_0(\tau)\, \theta_0(z_1)\, \theta_0(z_2 - 2\tau) + \theta_1(\tau)\, \theta_1(z_1)\, \theta_2(z_2 - 2\tau)$$
$$+ \theta_2(\tau)\, \theta_2(z_1)\, \theta_1(z_2 - 2\tau) = \theta(z_1 - z_2 + 3\tau)\, S(z_1, z_2),$$

où $S(z_1, z_2) = S(z_2, z_1)$, d'où l'on déduit l'égalité recherchée.

<u>Remarque</u>. Dans le cas général, il faut examiner le déterminant correspondant d'ordre n.

Il est facile de montrer que pour les $z_1, \ldots, z_n$ généraux; le module $M^n{}_{z1,\,..,\,zn}$ est engendré par le vecteur $v_{0,\ \ldots,\ 0}$. Il en découle que les dimensions des composantes homogènes de l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ sont dans tous les cas inférieures à celles de l'algèbre des polynômes à n indéterminées. Pour $\tau \to 0$ les relations entre les générateurs de $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ tendent vers les relations dans l'algèbre des polynômes. Cela signifie que $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ est une algèbre de Sklyanin pour tous les τ, à l'exception, peut-être, d'un nombre fini. Pour les petites valeurs de τ, $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ est une déformation de l'algèbre des polynômes. Décrivons les feuilles symplectiques qui correspondent à la déformation $Q_n(\tau, \mathscr{E})$, $\tau \to 0$.

Pour tout m, $0 \leq m \leq (n - 1)/2$, il existe un feuille symplectique M^m. La dimension de la variété M^m est égale à 2 m ; M^0 est l'origine des coordonnées, M^1 le cône au-dessus de la courbe $\mathscr{E}$, M^2 est le cône au-dessus de la réunion des cordes de $\mathscr{E}$ et, en général, M^m est le cône au-dessus de la réunion de tous les espaces à m dimensions qui passent par le (m + 1) point de $\mathscr{E}$, $M^0 \subset M^1 \subset \ldots \subset M^{(n-1)/2}$. La variété M^{m-1} est l'ensemble des caractéristiques de la variété M^m. La feuille M est une hypersurface qui est l'ensemble des zéros d'un certain polynôme K de degré n invariant par rapport à l'action du groupe de Heisenberg. Les feuilles symplectiques restantes sont définies par les équations $K = \lambda$, $\lambda \in C^*$, et sont des variétés algébriques non singulières de dimension n - 1.

Les feuilles M^k sont étroitement dépendantes des modules $M^k_{z1 \ldots zk}$. Soit I^r_τ l'idéal bilatéral dans l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ composé des éléments agissant trivialement sur tous les modules $M^k_{z1 \ldots zk}$. Lorsque τ tend vers zéro, l'idéal I^k_τ, $k \leq (n-1)/2$ tend vers l'espace des fonctions qui s'annulent sur M^k. C'est pourquoi l'existence de feuilles symplectiques M^k se déduit du théorème 2.

Soit $k \leq (n-1)/2$ et $V_{zs1, \ldots, zk}(\tau)$ un idéal de $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ composé des éléments annulant le vecteur $v_{0, 0, \ldots, 0}$. Lorsque $\tau \to 0$, l'idéal $V_{z1, \ldots, zk}(\tau)$ tend vers l'espace des fonctions qui s'annulent sur l'espace intersectant le cône au-dessus de la courbe $\mathscr{E}$ sur les droites correspondant aux points $z_1, \ldots, z_k$. Cet espace est la sous-variété de Lagrange de la feuille symplectique correspondante.

Le centre de l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ est engendré par un seul élément K_τ de degré n. De plus, $K_\tau \to K$ pour $\tau \to K$. L'élément K_τ agit trivialement dans tous les modules $M^k_{z1 \ldots zk}$, $1 \leq k \leq (n-1)/2$ et l'idéal constitué des éléments annulateurs dans tous les modules $M^k_{z1 \ldots zk}$, $1 \leq k \leq (n-1)/2$ engendré par K_τ.

Donnons la description géométrique des idéaux $I_{k\tau}$. Soit T l'algèbre tensorielle de l'espace $\Gamma(\nu)$, $T = C \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots$, où $Ti = \Gamma(\boxtimes^i \nu)$, $\boxtimes^i \nu$ est un fibré $\nu \boxtimes \nu \boxtimes \nu \ldots \boxtimes \nu$ sur $\mathscr{E}^i = \mathscr{E} x \ldots \mathscr{E}$ (i fois). Désignons par N^i_k la sous-variété composée de i-uplets $(x_1, \ldots, x_i)$, $x_j \in \mathscr{E}$ tels qu'il n'y ait pas plus de k éléments différents parmi $x_j - j(n-2)\tau$, $1 \leq j \leq i$. Il est facile de montrer que l'espace $J^k_\tau = \oplus J^k_\tau(i)$, où $J^k_\tau(i) \subset T_i$ est l'espace des sections du fibré $\boxtimes^i \nu$ qui s'annulent sur la sous-variété N^i_k, est un idéal bilatère de T. L'idéal I^k_τ est précisément l'image de J^k_τ pour un homomorphisme $T \to Q_n(\tau, \mathscr{E})$. Etudions le cas où $\tau = 0$. Alors $Q_n(0, \mathscr{E}) = \oplus_i \Gamma(S^i_\nu)$ où S^i_ν est le degré tensoriel symétrique du fibré ν, c'est-à-dire le fibré sur l'espace $\mathscr{E} x \ldots \mathscr{E}/\Sigma i$ (Σi est un groupe symétrique agissant naturellement sur $\mathscr{E} x \ldots \mathscr{E}$. L'idéal I^k_0 est engendré par l'espace $I^k_0(k+1)$ de sections de $\Gamma(S^{k+1}\nu)$, qui s'annulent sur la sous-variété de $\mathscr{E}^{k+1}$ composée des uplets $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ dont au moins deux composantes coïncident. Identifions $\Gamma(S^{k+1}\nu)$ avec l'espace de polynômes à n indéterminées de degré (k+1). Alors la variété algébrique projective définie par le système d'équations $I^k{}_0\ (k + 1) \subset S^{k+1}\ (\Gamma(\nu))$ est précisément la feuille M^k. C'est vrai lorsque

$$k < \frac{n-1}{2}$$

Décrivons à présent les modules correspondant aux feuilles symplectiques définies par l'équation $K = \lambda,\ \lambda \in C^*$. Notons que pour différents λ, ces feuilles sont isomorphes et sont appliquées l'une sur l'autre par étirement de l'espace C^n. Etudions le module

$$M^{(n+1)/2}_{z1,\ \ldots,\ z(n+1)/2}$$

Un élément central K_τ n'agit plus en tant que zéro. Il est naturel de définir le module correspondant à la feuille symplectique comme le facteur

$$M^{(n+1)/2}_{z1,\ \ldots,\ z(n+1)/2}/K_\tau - \lambda) \times M^{(n+1)/2}_{z1,\ \ldots,\ z(n+1)/2}$$

Ce module est irréductible pour des valeurs générales de z_i.

Pour les algèbres $Q_n(\tau, \mathscr{E})$, il n'existe pas d'équivalent naturel des modules de Verma. Les modules

$$M^{(n+1)/2}_{z1,\ \ldots,\ z(n+1)/2}$$

sont plutôt des équivalents des modules de Whittaker (c'est-à-dire des modules au-dessus d'une algèbre de Lie semi-simple, induits à partir de la représentation de dimension 1 de la sous-algèbre nilpotente maximale). Pour progresser dans la description des modules $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ irréductibles, nous décrirons à présent les homomorphismes des modules

$$M^{(n+1)/2}_{z1,\ \ldots,\ z(n+1)/2}$$

les uns dans les autres.

Nous dirons que le vecteur homogène

$$v \in M^{(n+1)/2}_{z1, \ldots, z(n+1)/2}$$

est singulier si la dimension de l'espace engendré par les vecteurs $x_i v$, $i \in Z_n$ est égale à (n + 1)/2 (dans le cas général, elle est égale à n). En d'autres termes, il existe dans ce cas un homomorphisme

$$M^{(n+1)/2}_{u1, \ldots, u(n+1)/2} \to M^{(n+1)/2}_{z1, \ldots, z(n+1)/2},$$

qui applique le vecteur $v_{0, 0, \ldots, 0}$ sur v. Nous appellerons l'ensemble

$$\{u1, \ldots, u(n+1)/2\} \in E^{\frac{n+1}{2}}$$

ensemble propre du vecteur v. Il est clair que les vecteurs $v_{i1, \ldots, i(n+1)/2}$ sont singuliers. Il est clair également que l'opérateur $K\tau$ transforme un vecteur singulier en un vecteur singulier avec le même ensemble propre. Le premier vecteur singulier non trivial (c'est-à-dire non proportionnel à un des vecteurs $v_{i1, \ldots, i(n+1)/2}$) pour z1, ..., z(n+1)/2 est homogène de degré (n - 1)/2. Nous le désignerons par $v_{0, \ldots, 0\,;\,1}$. La formule suivante est vérifiée :

$$v_{0,\ldots,0\,;\,1} = \sum_s \frac{\theta\left(2 z_1 + \ldots + 2 z_{(n+1)/2} - z_s - \frac{(n-1)(n-2)}{2}\tau\right)}{\theta(z_1 - z_s)\theta(z - z_s)\ldots\widehat{\theta}(z_2 - z_s)\theta(z_{\frac{n+1}{2}} - z_s)} v_s$$

où $v_s = v_{1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots 1}$ (zéro en s) et la sommation étant effectuée sur s, $1 \le s \le (n + 1)/2$. L'ensemble propre du vecteur $v_{0 \ldots, 0, 1}$ est égal à $\{z_1 + \tau, \ldots, z_{(n+1)/2} + \tau\}$. En répétant cette procédure, on peut obtenir les vecteurs singuliers $v_{i1, . i(n+1)/2\,;\,p}$ pour tous les uplets i_α, $p \ge 0$ avec l'ensemble propre

$$\{z_1 + (n i_1 - 2 \sum_{s=1}^{(n+1)/2} i_s + p)\tau, \ldots, z_{(n+1)/2} +$$

$$+ (n i_{(n+1)/2} - 2 \sum_{s=1}^{(n+1)/2} i_s + p)\tau\},$$

de plus le degré d'homogénéité du vecteur $v_{i1, \dots, i(n+1)/2}$; p est égal à

$$\Sigma_{is} + \frac{n-1}{2} p.$$

Notamment le vecteur $v_{i1, \dots, 1, 1}$ est de degré n et d'ensemble propre $\{z_1, \dots, z_{(n+1)/2}\}$. (Ce vecteur est proportionnel au vecteur $K_\tau v_{0, 0, \dots, 0}$). En général, le vecteur $K_\tau v_{i1, \dots, i(n+1)/2,}$; p est proportionnel au vecteur $v_{i1+1, \dots, i(n+1)/2+1}$; p + 1. Pour $z_{1, \dots, n+1/2}$ et τ, tout vecteur singulier dans le module

$$M^{(n+1)/2}_{z1, \dots, z(n+1)/2}$$

est proportionnel à l'un de ceux mentionnés.

Remarque 1. Soit n = 3. C'est le seul cas où l'ensemble propre d'un vecteur singulier soit défini univoquement. Si $\{z_1, z_2\}$ est l'ensemble propre du vecteur singulier, les ensembles propres du même vecteur sont les couples $\{z_2, z_3\}$ et $\{z_3, z_1\}$ où $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Dans ce cas, dans la notation $v_{i1\ i2}v_{i3}$, le dernier indice ne se distingue pas des autres, nous écrirons donc v_{i1i2i3}. Le degré du vecteur v_{i1i2i3}, est égal à $i_1 + i_2 + i_3$. Ainsi, il existe dans le module $M^2_{z1, z2}$ un ensemble de vecteurs v_{i1i2i3} liés par les relations :

$$\theta(z_2 - z_3 + 3(i_3 - i_2)\tau)\ v_{i1+1,i2,i3} + \theta(z_3 - z_1 + 3(i_1 - i_3)\tau) \times v_{i1,i2+1,i3} + \theta(z_1 - z_2 + 3(i_2 - i_1)\tau) v_{i1,i2,i3+1} = 0.$$

L'élément central transforme v_{i1i2i3} en un vecteur proportionnel à $v_{i1+1,i2+1,i3+1}$. Les générateurs x_i agissent sur les vecteurs v_{i1i2i3} d'après la formule

$$x_i v_{i1i2i3} = \frac{\theta_i(z_1 + (i_2 + i_3 - 2_{i1})\tau)}{\theta(z_2 - z_1 + 3\ (i_1 - i_2)\tau)} v_{i1,i2+1,i3} +$$

$$+ \frac{\theta_i(z_2 + (i_1 + i_3 - 2_{i2})\tau}{\theta(z_1 + z_2 + 3\ (i_2 - i_1)\tau} v_{i1,i2,i3} =$$

$$= \frac{\theta_i(z_2 + (i_3 + i_1 - 2_{i2})\tau)}{\theta_i(z_3 - z_2 + 3\ (i_2 - i_3)\tau} v_{i2,i3+1,i3} + \frac{\theta_i(z_3 + (i_2 + i_1 - 2i_3)\tau)}{\theta(z_2 - z_3 + 3(i_3 - i2)\tau)}$$

$$\times\, v_{i2+1,i3,i1} = \frac{\theta_i(z_3 + (i_1 + i_2 - 2i_3)\tau)}{\theta(z_1 - z_3 + 3\,(i_3 - i_1)\tau)}\, v_{i3,i1+1,i2} +$$

$$+\, \frac{\theta_i(z_1 + (i_3 + i_2 - 2i_1)\tau)}{\theta(z_3 - z_1 + 3(i_1 - i_3)\tau)}\, v_{i3,i1+1,i2}.$$

Remarque 2. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in C/\Gamma$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0$. Désignons par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ l'élément de l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ qui est une combinaison linéaire des générateurs et dont la θ fonction correspondante (obtenue lors de l'identification $x_i \to \theta_i$) admet l'ensemble $\alpha_1, \ldots,, \alpha_n$ comme ensemble de zéros. Alors les relations suivantes sont vérifiées dans l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$:

$$S(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n)(\alpha_1 + 2\tau, \ldots, \alpha_{n-2}, + 2\tau\ \beta, \gamma) =$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \beta + (n-2)\tau, \gamma + (n - 2)\tau)(\alpha_1 + 2\tau, \ldots,$$
$$\alpha_{n-2} + 2\tau, \alpha_{n-1} - (n-2)\tau, \alpha_n - (n - 2)\tau),$$

où $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta, \gamma$ sont des éléments quelconques de C/Γ tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2} + \beta + \gamma = 0$, S étant une constante. L'apparition d'une constante dans ce cas est inévitable puisque les éléments $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eux-mêmes ne sont définis qu'à une constante près.

Remarque 3. Les variétés $G^1{}_\tau(K)$ et $G^2{}_\tau(K)$ coïncident pour $K \geq (n+1)/2$. L'espace $W \subset V$, dim $W = K$ appartient à $G^1{}_\tau(K)$ si et seulement si l'espace dual $W^\perp \subset V^*$ intersecte le cône au-dessus de la courbe $\mathscr{E}$ selon (n - k) droites. Ainsi, dans ce cas, les variétés M^k peuvent être définies dans une situation quantique.

Etudions à présent le cas où $n > 2$ et pair. Soit ξ un fibré sur $\mathscr{E}$ possédant n sections et $V \simeq \Gamma(\xi)$. Le groupe Γ des points $a = (x, y)$ d'ordre fini sur $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ tels que $a^*(\xi \boxtimes \xi - \widetilde{\Delta\rho})$, $\rho \in \mathscr{E}$, est composé des couples (x, y) tels que $2n(x + y) = 0$, $(n - 2)(x - y) = = 0$. L'action projective de ce groupe permet de définir une connexion projective sur le fibré sur $\mathscr{E}$ avec la couche $\Gamma(\xi \boxtimes \xi - \widetilde{\Delta}(\rho)$, au-dessus de ρ. Posons $\rho = (n-2)\tau/2$. Sur le fibré avec des couches $\Gamma(\xi \boxtimes \xi - \widehat{\Delta}(n-2)\tau/2$, $\tau \in \mathscr{E}$, la connexion projective possède une monodromie triviale. Cela permet d'identifier (à une constante près) les espaces

$\Gamma(\xi \boxtimes \xi - \widehat{\Delta}\rho)$ et $\Gamma(\xi \boxed{x} \xi - \widehat{\Delta}_0)$. L'image de S avec cette identification de l'espace des sections antisymétriques dans $\Gamma(\xi \times \xi - \Delta_0)$ est l'espace des relations dans l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ pour n pair. ($S \subset \Gamma(\xi \boxed{x} \xi - \widetilde{\Delta}_{\tau(n-2)/2}) \subset \Gamma(\xi \boxed{x} \xi) \simeq V \otimes V$). Les algèbres $Q_{2k}(\tau, \mathscr{E})$ se distinguent des algèbres $Q_{2k+1}(\tau, \mathscr{E})$ par une série de propriétés. Ainsi, si τ n'est pas un point d'ordre fini, alors le centre de l'algèbre $Q_{2k+1}(\tau, \mathscr{E})$ est engendré par deux éléments de degré k.

§4. ALGEBRES A CINQ GENERATEURS

Etudions plus en détail le cas où n = 5. Le noyau de l'homomorphisme $Q_5(\tau, \mathscr{E}) \to S(\mathscr{E}, 3\tau, 5)$ est alors engendré par cinq éléments quadratiques $C^\tau{}_i$, $\tau \in z_5$. Le groupe de Heisenberg agit de manière irréductible sur l'espace de base $\{C^\tau{}_i\}$. Pour $\tau \to 0$, les éléments de $C^\tau{}_i$ tendent vers les polynômes quadratiques à x_i indéterminées, $i \in Z_5$. La variété projective définie par les polynômes $C^0{}_i$ est notre courbe elliptique, c'est-à-dire que le fibré M^1 est défini par les équations $C^0{}_i = 0$. Désignons par K le rapport $\theta_2(0)/\theta_1(0)$. Les polynômes $C^0{}_i$ sont définis par les formules suivantes :

$$C^0{}_{2i} = x^2{}_i + kx_{i+1}\, x_{i+4} - (1/k)\, x_{i+2}\, x_{i+3}.$$

Les relations dans l'algèbre $Q_5(\tau, \mathscr{E})$ peuvent être décrites sous la forme suivante :

$$\theta_{3+2i}(3\tau)x_{i+j+2}\, x_{3+j-i} + \theta_{2i+2}(3\tau)x_{i+j+3}\, x_{j-i+2}$$
$$+ (1/k)\, \theta_{2i}(3\tau)x_{i+j}\, x_{-i+j} = \theta_{3i}(2\tau)\, \theta_{1-i}(\tau)\, \theta_{4-i}(\tau)C^\tau{}_{2j}$$
$$\theta_{4+2i}(3\tau)x_{i+j+1}\, x_{4-i+j} + \theta_{2i+1}(3\tau)x_{4+i+j}\, x_{1-j+1} -$$
$$- k\, \theta_{2i}(3\tau)x_{i+j}\, x_{-i+j} = - \theta_{3i}(2\tau)\, \theta_{2-i}(\tau)\, \theta_{3-i}(\tau)C^\tau{}_{2j}$$

où $i, j \in Z_5$. Les parties gauches des relations sont les identités réalisées dans l'algèbre dans $S(\mathscr{E}, 3\tau, 5)$. Ce sont les conséquences immédiates des relations bilinéaires de Riemann.

Les éléments de $C^\tau{}_i$ engendrent une sous-algèbre de l'algèbre $Q_5(\tau, \mathscr{E})$ qui est également une algèbre de Sklyanin. Désignons précisément par $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ l'algèbre avec les générateurs y_i, $i \in Z_5$ et les relations

$\theta_{1+i}(\tau)\theta_{2+i}(\tau)y_{i+j+2}\, y_{3-i+j} + k\theta_{2+i}(\tau)\theta_{4+i}(\tau)y_{4+i+j}\, y_{1-i+j}$ -

$- k\, \theta_{1+i}(\tau)\theta_{3+i}(\tau)\, y_{1+i+j}\, y_{4-i+j} - \theta_{3+i}(\tau)\, \theta_{4+i}(\tau)$

$x\, y_{3+i+j}\, y_{2-i+j} = 0.$

Théorème 4.1. $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ est une algèbre de Sklyanin et on a l'inclusion $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E}) \to Q_5(\tau, \mathscr{E})$ qui transforme les générateurs y_i en $C^\tau{}_i$. Il est clair que le groupe de Heisenberg agit par automorphismes sur l'algèbre $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$.

Etudions à présent les modules au-dessus de l'algèbre $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$. Etudions le module $M^2{}_{z1,\, z2}$ au-dessus de l'algèbre $Q_5(\tau, \mathscr{E})$. Le sous-espace de $M^2{}_{z1,\, z2}$ de base v_{ij}, $i > 0$ est un sous-module et le module $M^1{}_{z1}$ est un facteur sur ce dernier. De manière analogue, le facteur sur le sous-espace de base v_{ij}, $j > 0$ est un module $M^1{}_{z2}$. Les éléments de $C^\tau{}_i$ agissent de manière triviale sur tous les modules $M^1{}_z$, $z \in \mathbb{C}$. Il en découle que le vecteur $C^\tau{}_i(v_{00})$ est proportionnel à v_{11} et en général le vecteur $C^\tau{}_i v_{k2}$ est proportionnel à $v_{k+1,l+1}$. Ainsi, l'espace de base $\{v_{00}, v_{11}, v_{22}, \ldots\}$ est un module au-dessus de la sous-algèbre de $Q_5(\tau, \mathscr{E})$ engendrée par les éléments Cv. Cela signifie qu'il existe au-dessus de l'algèbre $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ une famille à 2 paramètres de modules gradués avec un espace de dimension 1 dans chaque graduation. (Les deux paramètres sont z^1 et z^2). En réalité, la variété caractéristique $G^4{}_\tau$ de l'algèbre $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ est de dimension deux.

Théorème 4.2. Soit $P^1{}_{z1z2}$ l'espace de base v_j, $j \geq 0$, $j \in Z$. Définissons l'action des opérateurs y_i sur l'espace $P^1{}_{z1z2}$ par les formules suivantes :

$y_{2i}v_j = (2\theta_i(z_1 + j\tau)\theta_i(z_2 + j\tau) + k\theta_{1+i}(z_1 + j\tau)\theta_{4+i}(z_2 + j\tau)$

$+ k\theta_{4+i}(z_1 + j\tau)\theta_{1+i}(z_2 + j\tau) - ({}^1/_k)\theta_{2+i}(z_1 + j\tau)\theta_{3+i}(z_2 + j\tau)$

$- ({}^1/_k)\theta_{3+i}(z_1 + j\tau)\theta_{2+i}(z_2 + j\tau))v_{j+1}.$

Alors $P^1{}_{z1z2}$ est un $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ module.

Décrivons à présent en termes géométriques les relations dans l'algèbre $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$. Soit ν un fibré linéaire sur la courbe elliptique $\mathscr{E}$, $\dim \Gamma(\nu) = 5$, $S^2\nu$ le carré symétrique du fibré ν, $S^2\nu$ est un fibré sur $F = \mathscr{E} \times \mathscr{E}/\Sigma_2$, Δ un idéal sur F des relations de points (x, x), $x \in \mathscr{E}$. Posons ensuite $\xi = S^2\nu - \widehat{\Delta}$ où $\widehat{\Delta}$ est le fibré correspondant à l'idéal Δ. La dimension de l'espace $\Gamma(S^2\nu)$ est égale à 15. La restriction sur Δ du fibré $S^2\nu$ est isomorphe à ν^2, c'est-à-dire qu'elle a un espace de sections de dimension 10. Ainsi, dim $\Gamma(\xi) = 5$. Le groupe $\mathscr{E}$ agit sur la variété F d'après la formule $\tau(x, y) = = (x + \tau, y + \tau)$, $\tau \in \mathscr{E}$. Nous désignerons par le symbole τ le déplacement $F \to F$ pour $\tau \in \mathscr{E}$. Le théorème 4.2 signifie précisément que l'algèbre $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ s'applique sur l'algèbre $S(F, \tau, \xi)$. La dimension de l'espace des éléments de degré 2 dans l'algèbre $S(F, \tau, \mathscr{E})$ est égale à 15. Il s'avère que l'image $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E}) \to S(F, \tau, \mathscr{E})$ est un isomorphisme sur l'espace des éléments quadratiques. Nous avons montré que les relations dans l'algèbre $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ sont des relations quadratiques dans l'algèbre $S(F, \tau, \mathscr{E})$. Notons que la situation est analogue à celle du §2 avec l'algèbre $Q_3(\tau, \mathscr{E})$. Les relations dans $Q_3(\tau, \mathscr{E})$ sont des relations quadratiques dans $S(\mathscr{E}, \tau, 3)$.

Le noyau de l'image $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E}) \to S(F, \tau, \mathscr{E})$ est l'idéal engendré par cinq éléments de troisième ordre d_i, $i \in Z_5$. L'algèbre engendrée par les éléments d_i est isomorphe à l'algèbre $Q_5(\tau, \mathscr{E})$.

Théorème 4.3. L'algèbre $Q_5(\tau, \mathscr{E})$ est incluse dans l'algèbre $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$. La composition des inclusions $Q_5(\tau, \mathscr{E}) \to Q_5(\tau, \mathscr{E})$ transforme le générateur $x_i \in Q_5(\tau, \mathscr{E})$ en élément $K\tau x_i$ (rappelons que $K\tau$ est l'élément central de degré cinq dans l'algèbre $Q_5(\tau, \mathscr{E})$.

De manière tout à fait analogue, la composition d'injections $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E}) \to Q_5(\tau, \mathscr{E}) \to Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ transforme les générateurs y_i de l'algèbre $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ en éléments $K'_\tau y_i$ où K'_τ est un élément central de l'algèbre $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ de degré égal à cinq. Si τ^2 n'est pas un point d'ordre fini, alors le centre de l'algèbre $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ est engendré par un élément de 5ème ordre. (Notons que les éléments K_τ et K'_τ eux-mêmes existent pour tout τ' si τ_0 est un point d'ordre fini, alors ils sont définis comme la limite de K_τ pour $\tau \to \tau_0$).

Décrivons les feuilles symplectiques correspondant à la déformation de l'algèbre commutative $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$, $\tau \to 0$. Le fibré ξ définit l'inclusion de la variété $\mathscr{E} \times \mathscr{E}/\Sigma_2$ dans $\mathbb{C}P^4$. Le cône de $\mathbb{C}^5$ de base $\mathscr{E} \times \mathscr{E}/\Sigma_2$ est la réunion de feuilles symplectiques de dimension deux. Menons à présent des droites par tous les couples de points de la forme (z, z_1), (z, z_2) dans $\mathscr{E} \times \mathscr{E}/\Sigma_2$ et soit N l'union de ces droites. Soit $\mathscr{E}_z$ la sous-variété de $\mathscr{E} \times \mathscr{E}/\Sigma_2$ formée des points de type (z, z_1). Il est facile de montrer que la courbe $\mathscr{E}_z$ est dans un plan $\mathbb{C}P^2{}_z \subset \mathbb{C}P^4$. La feuille symplectique suivante est un cône au-dessus de l'union de toutes les droites passant par (z, z_1) et (z, z_2), (c'est-à-dire au-dessus de N) ou, ce qui revient au même, le cône au-dessus des réunions de tous les plans $\mathbb{C}P^2{}_z$. L'union de toutes les variétés $CP^2{}_z$ est de dimension trois, c'est-à-dire une feuille de dimension quatre. Les autres feuilles sont les surfaces de niveau d'un certain polynôme de cinquième degré.

Remarque. Les algèbres $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$ et $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ sont une partie de la grande famille des algèbres de Sklyanin que nous décrirons dans une autre étude. Nous donnerons certains exemples de ces algèbres dans le paragraphe suivant.

§5. LA R-MATRICE DE BELAVIN ASSOCIEE A UNE COURBE ELLIPTIQUE

Soit ν un fibré sur la courbe $\mathscr{E}$, dim $\Gamma(\nu) = n$. Soit $\boxtimes^k \nu$ le produit tensoriel du fibré ν et Δ un idéal sur $\mathscr{E}^k = \mathscr{E} \times \ldots \times \mathscr{E}$ (k fois) formé des k-uplets $(x_1, \ldots, x_k)$ tels qu'au moins un couple de points x_i et x_j sont égaux et Δ soit le fibré correspondant sur $\mathscr{E}^k$. La section du fibré $\boxtimes^k \nu - s\,\Delta$, $s \in Z_+$ est une section du fibré $\boxtimes^k \nu$ qui s'annule sur Δ avec une multiplicité s.

Proposition 5.1. La caractéristique d'Euler du fibré $\boxtimes^k \nu - s\,\Delta$ est égale à $n(n - ks)^{k-1}$. Si $n > ks$, alors $\dim \Gamma(\boxtimes^k \nu - s\,\Delta) = n(n - ks)^{k-1}$.

Les deux affirmations de cette proposition sont bien connues et on peut les trouver, par exemple en [1]. Le groupe symétrique Σ_k agit sur l'espace $\Gamma(\boxtimes^k \nu - s\,\widetilde{\Delta})$. Les représentations irréductibles du groupe Σ_k sont numérotées par les diagrammes de Young (Cf. [7]). Soit $\Phi(s, u, n)$ une multiplicité avec laquelle la représentation du groupe Σ_k correspond au diagramme de Young u, entre dans la décomposition de la représentation $\Gamma(\boxtimes^k \nu - s\,\Delta)$. On sait (Cf. [7]) que $\Phi(0, u, n)$ est la dimension de la représentation irréductible de l'algèbre de Lie gl(n) qui correspond au diagramme u.

Proposition 5.2. $\Phi(s, u, n)/n = \Phi(0, u^{(s)}, n - ks)/(n-ks)$, où $u^{(s)} = u$ si s est impair et $u^{(s)}$ est un diagramme double si s est impair n $n - ks > 0$.

On peut le démontrer en calculant par exemple la nature de la représentation $\Gamma(x^{k}\nu' - s\Delta)$ du groupe Σ_k.

Exemple. La dimension de l'espace des sections symétriques du fibré $x^{k}\nu s$ s'annulant sur Δ avec une multiplicité 2s, est égale à $d(n, k, 2s) = n(n+1-2ks)\dots(n+k-1-2ks)/k!$ Remarquons que

$$d(2k+1, k, 2) = 2k+1, \quad d(4k+2, k, 4) = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2}$$

Nous nous servirons à présent de ce calcul pour construire une nouvelle famille d'algèbres de Sklyanin à n générateurs généralisant la famille $Q^2{}_5(\tau, \mathscr{E})$.

Soit N_k le kème produit symétrique de la courbe $\mathscr{E}$; Δ_1 est l'image de l'idéal 2Δ par l'application $\mathscr{E} \times \dots \times \mathscr{E} \to N_k$; $S^k\nu$ est le produit symétrique du fibré ν et soit $\xi = S^k\nu - \Delta_1$, où Δ_1 est le fibré correspondant à l'idéal Δ_1. Le groupe $\mathscr{E}$ agit par déplacement sur la variété N_k d'après la formule $(x_1, \dots, x_k) \to (x_1 + \tau, \dots x_k + \tau)$. Nous supposerons par la suite que n est un nombre impair. L'algèbre $S(N_k, \tau, \xi)$ est graduée et l'espace des éléments de degré i est de dimension $d(in, k, 2i)$. Pour $k = (n-1)/2$,

$$d(2n, k, 4) \ \frac{n(n+1)}{2}$$

Ainsi, pour $i = 1, 2$ espaces $S(N_k, \tau, \xi)$ sont de même dimension que l'algèbre des polynômes à n indéterminées. Soit $V = \Gamma(\xi')$ et $C_\tau \subset V \otimes V$ est l'espace de relations quadratiques dans l'algèbre $S(N_{(n-1)/2}, \tau, \xi)$.

Théorème 5.3. Le quotient de l'algèbre tensorielle de l'espace V selon l'idéal engendré par $C_\tau \subset V \otimes V$ est une algèbre de Sklyanin que nous désignerons par $Q^2{}_n(\tau, \mathscr{E})$. La variété G_τ (n-1) de l'algèbre $Q^2{}_n(\tau, \mathscr{E})$ est isomorphe à la variété $N_{(n-1)/2}$. L'algèbre $Q^2{}_n(\tau, \mathscr{E})$ est immergée dans l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$, de plus les générateurs dans $Q^2{}_n(\tau, \mathscr{E})$ sont envoyés sur des éléments de degré (n-1)/2.

Etudions la famille de modules

$$M^{(n-3)/2}_{z1,\ \ldots,\ z(n-3)/2}$$

de l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$. Soit L le sous-espace des éléments de degré (n-1)/2 agissant trivialement sur tous les modules de cette famille. La dimension de l'espace L est égale à n et la sous-algèbre de $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ engendrée par L est isomorphe à $Q^2{}_n(\tau, \mathscr{E})$.

Passons à présent à la construction de la matrice elliptique R. Nous définirons l'algèbre de Zamolodtchikov correspondant à la R-matrice (Cf. [6]).

Soit X un ensemble donné. L'algèbre de Zamolodtchikov $\mathscr{A}n(X)$ est une algèbre associative engendrée par les générateurs $x_i(u)$, $u \in X$, $i \in Z_n$. Les relations dans $\mathscr{A}n(X)$ sont telles que pour tout couple u, $v \in X$, $u \neq v$ et pour les indices i, $j \in Z_n$, le produit $x_i(u)x_j(v)$ est égal à une combinaison linéaire de produits $x_s(v)x_r(u)$, r, $s \in Z_n$. On désignera une algèbre avec de telles relations sous le nom d'algèbre de Zamolodtchikov, si pour tous u_1, u_2, $u_3 \in X$ différents deux à deux, les éléments $x_{i1}(u_1) \times x_{i2}(u_2)x_{i3}(u_3)$, $i_\alpha \in Z_n$ sont linéairement indépendants. Baxter a construit un exemple de cette algèbre. Nous exposerons une variante de cette construction attribuée à I. V. Tcherednik (Cf. [6]).

Soit X_n un ensemble de fibrés vectoriels sur une courbe elliptique possédant un espace de sections de dimension n, $\mathscr{E} \simeq X_n$ et τ un déplacement $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$. Pour $\xi_1, \ldots, \xi_k \in X_n$, posons

$V(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \Gamma(\xi_1 \otimes \tau^* \xi_2 \otimes (\tau^2)^* \xi_1 \otimes \ldots (\tau^{k-1})^* \xi_k)$

Il est clair qu'on a un produit :

$V(\xi_1, \ldots, \xi_k) \otimes V(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_l) \to V(\xi_1, \ldots, \xi_l)$,

puisque

$\xi_1 \otimes \tau^* \xi_2 \otimes \ldots \otimes (\tau^{l-1})^* \xi_l \simeq (\xi_1 \otimes \ldots \otimes (\tau^{k-1})^* \xi_k) \otimes$

$\otimes (\tau^k)^* (\xi_{k+1} \otimes \tau^* \xi_{k+2} \otimes \ldots \otimes (\tau^{l-k-1})^* \xi_l)$.

Le produit direct de tous les espaces $V(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\xi_j \in X_n$, $k \geq 1$ est une algèbre associative que nous désignerons par $V_n(\mathscr{E}, \tau)$. Si n = 2, alors dim $V(\xi_1, \xi_2) = 4$, $\xi_i \in X_n$. Définissons l'algèbre de Zamolodtchikov comme une algèbre engendrée par la somme directe des espaces $V(\xi)$, $\xi \in X_2$ dans laquelle sont vérifiées les relations quadratiques dans l'algèbre $V_2(\mathscr{E}, \tau)$ entre les éléments des espaces $V(\xi_1)$ et $V(\xi_2)$, $\xi_1 \neq \xi_2$. (C'est précisément l'algèbre de Zamolodtchikov qui correspond à la R-matrice de Baxter).

Nous dirons que l'algèbre de Zamolodtchikov $\mathscr{A}_n(X_n)$ est associée à la courbe elliptique et à l'élément τ s'il existe un homomorphisme des algèbres $\mathscr{A}_n(X_n) \to V_n(\mathscr{E}, \tau)$ qui envoie les éléments $x_i(\xi)$ sur la base standard θ_i dans l'espace $V(\xi) = \Gamma(\xi)$.

<u>Théorème</u> 5.4. Soit $n \geq 2$, $u, v \in \mathscr{E}$, $\tau \in \mathscr{E}$. Les relations suivantes définissent l'algèbre de Zamolodtchikov associée à la courbe $\mathscr{E}$ et à l'élément $(n - 1)\tau$

$$K \frac{x_i(u)x_j(v)}{\theta_{j-i}(v-u+\tau)} = \sum_s \frac{x_{j-s}(v)x_{i+s}(u)}{\theta s(\tau)\theta_{j-i-s}(v-u)}.$$

Ici, $s \in Z_n$, $i, j \in Z_n$ et une K constante indépendante de i, j est égale à

$$\frac{\theta_1(0)\theta_2(0)\ldots\ \theta_{n-1}(0)\theta_0(v-u+\tau)\theta_1(v-u+\tau)\ldots\theta_{n-1}(v-u+\tau)}{\theta_0(\tau)\theta_1(\tau)\ldots\ \theta_{n-1}(\tau)\theta_0(v-u)\theta_1(v-u)\ldots\theta_{n-1}(v-u)}$$

Avec un choix de constante K de ce type, l'algèbre de Zamolodtchikov pour $\tau \to 0$ tend vers l'algèbre commutative. La condition que cette algèbre soit associée à une courbe elliptique, signifie qu'il existe un module au-dessus de cette algèbre avec une base v_i, $i \in Z_n$ et une action $x_j(u)v_i = \theta_j\ (z+u+n-1)i\tau)v_{i+1}$, $z \in \mathscr{E}$ (z étant un paramètre dont dépend le module).

Nous donnerons à présent une construction géométrique des relations dans cette algèbre pour tout $n \in Z$, $n \geq 2$. Soit $\nu_1 = \xi_1 \times \xi_2$, $\nu_2 = \xi_2 \times \xi_1 (\xi_i \in X_n)$ deux fibrés sur $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$. Les fibrés ν_1 et ν_2 deviennent isomorphes lors d'une restriction sur la courbe $\mathscr{E}_\rho$, $\rho \in \mathscr{E}$ constituée de points $(x, y) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$ tels que $y - x = \rho$. Pour tout $\rho \in \mathscr{E}$, nous définirons l'isomorphisme $K_\rho(\xi_1, \xi_2) : \nu_1 \mid \mathscr{E}_\rho \simeq \nu_2 \mid \mathscr{E}_\rho$. Plus précisément, nous construirons un fibré de dimension un sur $\mathscr{E}$, dont la fibre au-dessus de $\rho \in \mathscr{E}$ est un espace d'homomorphismes de dimension un : $\nu_1 \mid \mathscr{E}_\rho \simeq \nu_2 \mid \mathscr{E}_\rho$. Le système des isomorphismes $K_\rho(\xi_1, \xi_2)$ est une section de ce fibré. La constante K dans les formules pour les relations dans l'algèbre de Zamolodtchikov dépend du choix de cette section. Soit μ_ρ un sous-faisceau dans le faisceau des sections du fibré $\nu_1 \oplus \nu_2$ constitué des sections (s_1, s_2), $s_i \in \Gamma(\nu_i)$ telles que $K_\rho(\xi_1, \xi_2)s_1 \mid \mathscr{E}_\rho = s_2 \mid \mathscr{E}_\rho$. Il est clair que μ_ρ est un faisceau de sections d'un fibré de dimension deux défini sur $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ (que nous désignerons par la même lettre). Le fibré μ_ρ possède les propriétés principales suivantes. Soit $a \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$. Il existe un fibré vectoriel x sur $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ tel que $a^*(\mu_\rho) = \mu_\rho \otimes x$. Et inversement, pour chaque fibré vectoriel x sur $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ dont la première classe de Chern est égale à zéro, il existe a tel que $\mu_\rho \otimes x = a^*(\mu_\rho)$.

Notons que $\mu_{\rho 1} \simeq \mu_{\rho 2} \otimes x_{1,2}$ où $x_{1,2} = \Delta_{\rho 1} - \Delta_{\rho 2}$, $\Delta_{\rho\alpha}$ sont les faisceaux inversibles correspondant aux idéaux $\Delta_{\rho 1}$, $\Delta_{\rho 2}$. Cela signifie qu'il existe un élément $a(\rho_1, \rho_2) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$ tel que $a(\rho_1, \rho_2)^*\mu_{\rho 1} \simeq \mu_{\rho 2}$. Si les points ρ_1 et ρ_2 sont voisins, alors l'élément $a(\rho_1, \rho_2)$ peut être choisi voisin de zéro. Nous obtenons un fibré π sur la courbe $\mathscr{E}$ dont la fibre au-dessus du point $\rho \in \mathscr{E}$ est $\Gamma(\mu_\rho)$. Il y a une connexion projective plane sur π dont la monodromie définit une représentation projective du groupe $\pi_1(\mathscr{E})/(n-1)\pi_1(\mathscr{E})$ sur $\Gamma(\mu_\rho)$. Effectuons le changement par la variable $(n-1)\tau=\rho$. On obtient une connexion projective plane avec une monodromie triviale sur le fibré sur $\mathscr{E}$ dont la fibre au-dessus du point τ est $\Gamma(\mu(n-1)\tau)$. Ainsi, nous pouvons identifier (à la constante près) les espaces $\Gamma(\mu_0)$ et $\Gamma(\mu_{n-1})\tau)$. Soit T un espace dans $\Gamma(\mu_0)$ constitué des sections $(s_1, \sigma s_1)$ où $\sigma : \Gamma(\xi_1 \otimes \xi_2) \to \Gamma(\xi_2 \otimes \xi_1)$ est l'application correspondant à la permutation sur $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$. Le sous-espace T dans $\Gamma(\mu_{n-1})\tau$ est le graphe de l'application $R\tau : \Gamma(\xi_1 \otimes \xi_2) \to \Gamma(\xi_2 \otimes \xi_1)$. Ce sont les relations dans l'algèbre de Zamolodtchikov (c'est-à-dire $x_i(\xi_1)x_j(\xi_2) = R\tau(x_i(\xi_1)x_j(\xi_2))$ où le produit $x_i(\xi_1)x_j(\xi_2)$ est identifié à la section du fibré $\xi_1 \otimes \xi_2$).

Il est curieux que la R-matrice double de la R_τ-matrice (c'est-à-dire l'application $(\Gamma(\xi_2) \otimes \Gamma(\xi_1))^* \to (\Gamma(\xi_1) \otimes \Gamma(\xi_2))^*$) admette une construction géométrique plus simple.

Soit $\xi \in X_n$ et $W(\xi)$ un espace de sections antisymétriques du fibré $x^{n-1}\xi$, $\dim W(\xi) = n$. Définissons l'espace $W(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ comme espace de section du fibré $x^{n-1}\nu$, où $m = \xi_1 \otimes \tau^*\xi_2 \otimes (\tau_2)^* \xi_3 \otimes \ldots \otimes(\tau^{k-1})^*\xi_k$ qui s'annulent (k - 1) fois puisque Δ est dans l'idéal (c'est-à-dire lorsque les coordonnées coïncident), symétriques pour k pair et antisymétriques pour k impair. Il est clair qu'on a une multiplication

$W(\xi_1, \ldots, \xi_k) \otimes W(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_2) \to W(\xi_1, \ldots, \xi_l)$

qui transforme l'espace $W_n(\mathscr{E}, \tau) = \oplus_k W((\xi_1, \ldots, \xi_k)$ en algèbre associative. La dimension de l'espace $W((\xi_1, \xi_2)$ est calculée à l'aide de la proposition 5.2. On obtient $(2n\ n\ (n-1)\ \ldots 3)/(n-1)\ ! = n^2$. Définissons à présent l'algèbre de Zamolodtchikov $\mathscr{A}^*$ comme l'algèbre engendrée par l'espace $\oplus W(\xi)$, $\xi \in X_n$ dans laquelle sont réalisées les relations quadratiques entre les générateurs de l'algèbre $W_n(\mathscr{E}, \tau)$.

Remarque 1. La R-matrice de Bélavin (Cf. [6]) correspond précisément à cette algèbre duale de Zamolodtchikov. On peut choisir dans $\mathscr{A}^*$ la base $x_i(u)$, $u \in \mathscr{E}$, $i \in Z_n$. On a une famille $\mathscr{A}^*$ de modules $M(z_1, \ldots, z_{n-1})$ dépendant du uplet $z_1, \ldots, z_{n-1}$ de points de la courbe $\mathscr{E}$, de base v_j, $j \in Z$, $j \geq 0$. Les opérateurs agissent sur l'espace de base v_j d'après la formule

$x_{-i}(u)v_j = \theta_i(z_1 + u + j\tau)\, \theta_i(z_2 + u + j\tau) - \theta_i(z_{n+i} + u + j\tau) v_{j+1}$.

Remarque 2. Il découle de la formule du théorème 5.4. que lorsque $u - v = \tau$, l'image de la R-matrice est précisément dans l'espace des relations de l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$. (Nous considèrerons que x_j sont des générateurs de l'algèbre $Q_n(\tau, \mathscr{E})$ et nous négligerons la relation entre x_j et u,v).

ANNEXE

Symboles et formules concernant les θ fonctions.

Soit n un nombre positif impair, $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est un réseau non dégénéré, engendré par 1 et η, $\mathrm{Im}\eta > 0$. Désignons par $\theta_n(\Gamma)$ l'espace de fonctions holomorphes sur tout le plan complexe et satisfaisant aux relations $f(z + 1) = f(z)$, $f(z + \eta) = -e^{-2\pi i n z} f(z)$. Il est facile de vérifier que $\dim \theta_n(\Gamma) = n$ et que tous les éléments de $\theta_n(\Gamma)$ ont exactement n zéros aux déplacements sur les éléments du réseau Γ près. On sait (Cf. [1]) qu'il existe une action projective du groupe

$$Z_n \oplus Z_{n} = \left(\frac{1}{n}\Gamma\right)/\Gamma$$

ce qui permet de choisir une base $\{\theta_\alpha(z),\ \alpha \in Z_n\}$ définie par les relations :

$$\theta_\alpha(z+1/n) = e^{2\pi i\alpha/n}\,\theta_\alpha(z)\ ;\ \theta_\alpha(z+\eta/n) = -e^{-2\pi iz+\pi i(n-1)\eta/n}\theta_{\alpha+1}(z)$$

L'ensemble des zéros de la fonction $\theta_\alpha(z)$ est égal à

$$\{-\frac{\alpha}{n}\eta + \frac{m}{n} + \Gamma \mid m \in Z\}$$

Il est facile de vérifier que $\theta_\alpha(-z) = e^{-2\pi inz}\,\theta_{-\alpha}(z)$. Soit $n \geq 3$. Posons $P_\alpha = \theta_\alpha(0)$. Alors $P_{-\alpha} = P_\alpha$ et les formules suivantes sont vérifiées :

$$P_{j+k}P_{j-k}P_{t+i}P_{t-i} + P_{k+i}P_{k-i}P_{t+j}P_{t-j} + P_{i+j}P_{i-j}P_{t+k}P_{t-k} = 0,$$

$$P_{j+k}P_{j-k}\theta_{t+i}(z)\theta_{t-i}(z) + P_{k+i}P_{k-i}\theta_{t+j}(z)\theta_{t-j}(z) +$$
$$+ P_{i+j}P_{i-j}\ \theta_{t+k}(z)\theta_{t-k}(z) = 0, \qquad (*)$$

$$P_{j-k}\theta_{j+k}(\tau)\theta_{t+i}(z+\tau)\theta_{t-i}(z) + \qquad (**)$$
$$+ P_{i-j}\theta_{i+j}(\tau)\theta_{t+k}(z+\tau)\theta_{t-k}(z)$$
$$+ P_{k-i}\theta_{k+i}(\tau)\theta_{t+j}(z+\tau)\theta_{t-j}(z) = 0,\ z,\ \tau \in C.$$

Remarque. si $\mathscr{E} = \mathbb{C}/\Gamma$. Quand $n \geq 5$, les formules (*) définissent l'inclusion $\mathscr{E} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$. Pour $n = 3$, les formules (*) sont vides et l'inclusion $\mathscr{E} \subset \mathbb{C}P^2$ est définie par la relation :

$$\theta^3{}_0(z) + \theta^3{}_1(z) + \theta^3{}_2(z) + k\theta_0(z)\ \theta_1(z)\theta_{20}(z) = 0,$$

où la constante k ne dépend que de η. Les formules (**) pour $n \geq 3$ expriment la loi d'addition sur $\mathscr{E}$.

Nous dirons que toutes ces formules sont des relations bilinéaires de Riemann ; nous désignerons par $\theta(z)$ la θ fonction de premier ordre. L'identité suivante est vraie pour celle-ci :

$$\theta(z_2 + z_3)\theta(z_2 - z_3)\theta(z_4 + z_1)\theta(z_4 - z_1) + \theta(z_3 + z_1)\theta(z_3 - z_1)\,\theta(z_4 + z_2)\theta(z_4 - z_2) +$$
$$+\ \theta(z_1 + z_2)\theta(z_1 - z_2)\theta(z_4 + z_3)\theta(z_4 - z_3)$$

BIBLIOGRAPHIE

1. D. Mumford. Les variétés abéliennes. Moscou : Mir, 1971, 299 p.
2. E. K. Sklyanin. Quelques structures algébriques liées à l'équation de Yang-Baxter.- Funkt. Anal. Appl. 1982, tome 16, fascicule 4, pp. 22-34.
3. E. K. Sklyanin. Quelques structures algébriques liées à l'équation de Yang-Baxter. II Notions d'algèbre quantique.- . Funkt. Anal. Appl. 1983, tome 17, fascicule 4, pp. 34-48.
4. A. M. Verchik. Les algèbres à relations quadratiques.- In : Théorie spectrale des opérateurs et analyse infinidimensionnelle. Kiev. Institut de mathématiques de l'Académie des sciences de la République d'Ukraine, 1984, pp. 20-45.
5. V. G. Drinfeld. Les relations de commutation quadratiques dans le cas quasiclassique.- Physique mathématique, analyse fonctionnelle. - In : Recueil de travaux scientifiques. Kiev ; Naoukova Doumka, 1986, pp. 25-34.
6. I. V. Tcherednik. Quantification R matricielle du groupe formel de courants. In : Méthodes de théorie des groupes en physique.- Actes de la conférence de Yourmalsk, mai 1985,- Moscou : Naouka, 1986, tome 1, pp. 48-54.
7. A. A. Kirillov. Eléments de la théorie des représentations.- Moscou : Naouka, 1978.
8. J.-P. Serre. Algèbre locale et théorie des multiplicités (cours de conférences transcrit par P. Gabriel), recueil Mathématiques, 7:5 (1963).

Soumis à la rédaction le 8.03.89