PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

C. ROGER
M. ELGALIOU
A. TIHAMI

Une cohomologie pour les algèbres de Lie de Poisson homogènes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1990
, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1990____1_0>

UNE COHOMOLOGIE POUR LES ALGEBRES DE LIE DE POISSON HOMOGENES

C. ROGER, M. ELGALIOU, A. TIHAMI

RESUME : Dans ce travail nous étudions les algèbres de Lie de Poisson homogènes de degré p ([1,4]). Nous définissons une cohomologie de Poisson qui nous permet d'étudier les déformations de ces structures. Nous terminons avec des calculs de cohomologie et de déformations de certaines structures.

1. ALGEBRES DE POISSON QUADRATIQUES

Définition 1 : *Soit* K *un corps commutatif de caractéristique nulle et* A *un anneau commutatif.* A *est une algèbre de Poisson sur* K *si c'est une* K*-algèbre de Lie dont le crochet* {,} *vérifie :*

$$\forall\ f,g,h \in A \quad \{fg,h\} = f.\{g,h\} + \{f,h\}.g$$

Définition 2 : *Si* $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ et si $\{X_i,X_j\} = P_{ij}(X_1,\ldots,X_n)$ où $P_{ij}(X_1,\ldots,X_n)$ *est un polynôme de degré* p, *on dit que* A *est une algèbre de Poisson homogène de degré* p. *En particulier pour* p=2, A *est une algèbre de Poisson quadratique.* Ces algèbres ont été introduites par Sklyanin dans ([5]).

Exemples :

1) <u>n = 2</u>.

Toute matrice symétrique d'ordre 2 $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ définit un crochet quadratique sur K[X,Y] par :

$[X,Y] = aX^2+2bXY + cY^2$.

2) $\underline{n=3}$.

Soit $(a,b) \in k^2-\{(O,O)\}$. $\{X_i,X_2\} = 2aX_1X_2 + bX_3^2$; $\{X_2,X_3\} = 2aX_2X_3+bX_1^2$ et $\{X_3,X_1\} = 2aX_3X_1 + bX_2^2$ définissent sur $K[X_1,X_2,X_3]$ une structure d'algèbre de Poisson quadratique. Ces structures ne sont pas rigides au sens strict, mais leurs seules déformations sont parmi les algèbres du même type.

3) $\underline{n=4}$.

Les formules

$$\{X_1,X_o\} = 2J_{23}X_2X_3 \; ; \; \{X_1,X_2\} = -2X_oX_3$$
$$\{X_2,X_0\} = 2J_{31}X_3X_1 \; ; \; \{X_2,X_3\} = -2X_0X_1$$
$$\{X_3,X_0\} = 2J_{12}X_1X_2 \; ; \; \{X_3,X_1\} = - 2X_0X_2$$

avec $J_{12} + J_{23} + J_{31} = 0$ (Identité de Jacobi) définissent sur $K[X_0,X_1,X_2,X_3]$ une structure d'algèbre de Poisson quadratique dite algèbre de Sklyanin. Cette algèbre a été obtenue par Sklyanin en calculant certaines solutions de l'équation de Yang-Baxter. Cette structure est un cas particulier d'une famille plus générale de structures, définies par $\{X_i,X_j\} = a_{ij}\{X_kX_l\}$ avec $(i,k,l) = \{1,2,3,4\}$, $a_{ij} = -a_{ji}$ et

$$a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0 \text{ (Identité de Jacobi).}$$

Ces algèbres, en un sens, des généralisations de so(3).

L'algèbre des polynômes $A = K[X_1,...,X_n]$ est filtrée par $(A^p)_{p\in \mathbb{N}}$, où $A_p$est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p. L'algèbre graduée associée est $\underset{p\in \mathbb{N}}{\oplus} A_p$, où A_p est l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré p. Le crochet de Poisson est homogène pour cette graduation. On a $(A^p,A^q) \subseteq A^{p+q}$ et $(A_p,A_q) \subseteq A_{p+q}$ $\forall$ $p,q \in \mathbb{N}$.

Définition 3 : *Soit* $\{,\}$ *et* $\{,\}'$ *deux crochets quadratiques définis sur* A. *Un homomorphisme de* $(A,\{,\})$ *dans* $(A,\{,\}')$ *est un homorphisme* ϕ *d'algèbre de Lie et d'algèbre associative qui respecte la filtration* (A^p) *c'est-à-dire* :

1) $\phi(\{X,Y\}) = \{\phi(X),\phi(Y)\}'$ $\forall$ $X,Y\in A$.

2) $\phi(XY) = \phi(X).\phi(Y)$

3) $\phi(A^p) \subseteq A^p$ $\qquad \forall$ $p\in \mathbb{N}$.

Un tel homomorphisme sera appelé homomorphisme de Sklyanin. Il est entièrement déterminé par la donnée des $\phi(X_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} X_i + a_i$ pour $i=1,...,n$ et donc par la matrice $M_\phi = (a_{ij})_{i,j}$ et le vecteur $E_\phi = (a_1,...,a_n)$.

Notons $\{X_i,X_j\} = \sum_{kl} C_{ij}^{kl} X_kX_l$ et $\{X_i,X_j\}' = \sum_{k,l} C'^{kl}_{ij} X_kX_l$; $C_{ij} = (C_{ij}^{kl})_{k,l}$ et

$C'_{ij} = (C_{ij}^{kl})_{k,l}$ matrices symétriques d'ordre n ; $C = (C_{ij})_{i,j}$ et $C' = (C'_{ij})_{i,j}$ matrices symétriques par blocs d'ordre n^2.

Proposition : *Soit* ϕ *un endomorphisme de* A *compatible avec la filtration* A^p. ϕ *est un homomorphisme de* (A,{,}) *dans* (A,{,}') *si et seulement si* ${}^t\mathfrak{M}_\phi C \mathfrak{M}_\phi = {}^t\mathfrak{N}_\phi C' \mathfrak{N}_\phi$ *et* ${}^tE_\phi C_{ij} E_\phi = O$ *et* $M_\phi C_{ij} E_\phi = O$, $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ *où* $\mathfrak{M}_\phi = (\delta_{ij} M_\phi)_{i,j}$, $\mathfrak{N}_\phi = (a_{ij} I_n)_{o,j}\delta_{ij}$ *est le symbole de Kronecker et* I_n *est la matrice unité d'ordre* n.

Corollaire : *Soit* ϕ *un automorphisme de* A (i.e. det $M_\phi \neq O$) *compatibble avec la filtration* $(A^p)_{p\in \mathbb{N}}$. ϕ est *un isomorphisme de Sklyanin de* (A,{,}) *sur* (A,{,}') *si et seulement si :*

(1) $\quad {}^t\mathfrak{M}_\phi C \mathfrak{M}_\phi = {}^t\mathfrak{N}_\phi C' \mathfrak{N}_\phi$ et $C_{ij}E_\phi = O \ \forall \ i,j \in \{1,\dots,n\}$.

En effet $C_{ij}E_\phi \in \mathrm{Ker}\ \phi = \{O\}$.

Proposition : *Si les algèbres de Poissons quadratiques* (A,{,}) et (A,{,}') *sont isomorphes alors* C *et* C' *sont des matrices de même rang.*

Cas particulier : Si n=2, l'identité (1) est équivalente à $M_\phi C_{12} {}^tM_\phi = (\det M_\phi).\ C'_{12}$.
On en déduit du corollaire que, modulo isomorphisme de Sklyanin, on a quatre structures d'algèbre de Poisson sur $\mathbb{R}[X,Y]$ données par les matrices

$$\begin{pmatrix} o & o \\ o & o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & o \\ o & o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & o \\ o & 1 \end{pmatrix} \text{et} \begin{pmatrix} 1 & o \\ o & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(voir exemple 1°).}$$

II. COHOMOLOGIE DE POISSON

a) Cochaines de Poisson

Définition : *Une* q-*cochaine de Poisson* γ *de poids inférieur ou égal à* k *est une application* (q+1) - *linéaire alternée de* Ax..xA((q+1)-*fois) à valeurs dans* A *vérifiant* :

i) $\gamma(A^{i_0},\dots,A^{i_q}) \subset A^{i_0+\dots+q+k}$

ii) $\gamma(ab,a_1,\dots,a_q) = a.\gamma(b,a_1,\dots,a_q) + b.\gamma(a,a_1,\dots,a_q)$.

Notons $P^q_{(\leq k)}(A)$ l'espace vectoriel des q-cochaines de Poisson de poids inférieur ou égal à k.

Remarque : Une application (q+1)-linéaire alternée de $A_1 x\dots x A_1$ dans A^{q+1+k} définit une unique Q-cochaine de Poisson de Poids inférieur ou égal à k car celle-ci est une dérivation par rapport à chaque argument.

Inversement, la restriction de toute q-cochaine de Poisson de poids inférieur ou égal à k à $A_1 x \ldots x A_1$ est une application (q+1)-linéaire alternée à valeurs dans A^{q+1+k}. Ainsi $\gamma \in P^{q}_{(\leq k)}(A)$ est parfaitement déterminée par la donnée des $\gamma(X_{io},\ldots,X_{iq})$ $io,\ldots,iq \in \{1,\ldots,n\}$.

Proposition : *Soit* γ: $A x \ldots x A \longrightarrow A$ *une application* (q+1)*-linéaire alternée vérifiant la condition i) de la définition. Alors* $\gamma \in P^{q}_{(\leq k)}(A)$ *si et seulement si* γ *est un cocycle de Hochschild.*

Proposition (voir [ ] pour les définitions de la cohomologie de Hochschild) : *Soit* (A,{,}) *une algèbre de Poisson quadratique sur* A.$(P^{*}_{(\leq k)}(A),\partial)$ *est un sous complexe du complexe de Chevalley, pour la cohomologie de* A *comme algèbre de Lie,* ∂ *désignant le cobord de Chevalley relatif au crochet* {,}.

b) Cup produit :

Soit $\gamma_1 \in P^{q1}_{(\leq k)}(A)$ et $\gamma_z \in P^{q2}_{(\leq k2)}(A)$. On définit le cup produit $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ de γ_1 et γ_z par :

$\forall\, (a_o,\ldots,a_{q1+qz+1}) \in A^{io} x \ldots x A^{iq_1+q_2+1}$

$$(\gamma_1 \wedge \gamma_2)(a_o,\ldots,a_{q1+Qz+1}) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_{q1+1,q2+1}} \varepsilon(\sigma)\, \gamma_1(a_{\sigma(o)},\ldots,a_{\sigma(q1)}) \cdot \gamma_2(a_{\sigma(q1+1)},\ldots,a_{\sigma(q1+q2+1)}).$$

où $\mathscr{S}_{q1+1,q2+1} = \{\sigma \in \mathscr{S}_{q1+q2+2} \,/\, \sigma(1)<..<\sigma(q1+1) \text{ et } \sigma(q1+2)<..<\sigma(q1+q2+1)\}$.

On vérifie aisément que :

1) $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \in P^{q1+q2+1}_{(\leq k1+k2)}(A)$

2) $\partial(\gamma_1 \wedge \gamma_2) = \partial \gamma_1 \wedge \gamma_2 + (-1)^{\theta 1+1} \gamma_1 \wedge \partial\, 22$

3) $\phi^* (\gamma_1 \wedge \gamma_2) = \phi^*\gamma_1 \wedge \phi^* \gamma_2$ pour tout isomorphisme ϕ de Sklyanin.

4) Produit intérieur :

$\forall\, X \in A\ \forall\, p_1,\ldots,p_q \in A \qquad i_X \gamma(p_1,\ldots,p_q) = \gamma(X,p_1,\ldots,p_q)$

on a $i_X(\gamma_1 \wedge \gamma_2) = i_X \gamma_1 \wedge \gamma_2 + (-1)^{q1+1} \gamma_1 \wedge i_X \gamma_2$

5) Dérivée de Lie : $\forall X \in A\ \ \mathfrak{L}_X = \delta\, {}_o i_X + i_X\, {}_o\delta$

on a $\mathfrak{L}_X(\gamma_1 \wedge \gamma_2) = \mathfrak{L}_X \gamma_1 \wedge \gamma_2 + \gamma_1 \wedge \mathfrak{L}_X \gamma_2$.

c) <u>**Cohomologie de Poisson**</u> :

La cohomologie de Poisson de poids inférieur ou égal à k de A est définie par

$$H^q_{(\leq k)}(A) = \frac{\operatorname{Ker}(P^{q-1}_{(\leq k)}(A) \xrightarrow{\partial} P^q_{(\leq k)}(A))}{\operatorname{Im}(P^{q-z}_{(\leq k)}(A) \xrightarrow{\partial} P^{q-1}_{(\leq k)}(a))}.$$

On peut décomposer cette cohomologie suivant les poids :

Soit $q\in \mathbb{N}$ et $j\in \mathbb{N}$. Notons $P^q_{(j)}$ l'ensemble des applications (q+1)-linéaires alternées ω de Ax...xA

dans telles que :

a) $\forall\ (i_o,\dots,i_q)\in \mathbb{N}^{q+1}\ \ \omega : A_{i_o}$ x...x $A_{i_q} \longrightarrow A_{i_o} + i_1+\dots+i_q+j$ et

b) $\omega(ab,a_1,\dots,a_q) = a.\omega(,a_1,\dots,a_q) + b.\omega(a,a_1,\dots,a_q)$

ω est dite cochaine de poids j.

Soit $h_r(r\in \mathbb{N})$ la surjection canonique de A sur A_r

Soit γ une q-cochaine de Poisson de poids $\leq$ k et soit γ' la restriction de γ à A_1 x...x A_q (q+1 fois) :

$$\gamma' = \prod_{r=o}^{q+1+k} h_r \circ \gamma\ .$$

$h_r \circ \gamma'$ est une application (q+1)-linéaire alternée de A_1x...xA_1 dans A_r et donc se prolonge de manmière unique en un élément de $p^q_{(r-q-1)}$ (A).

Ainsi γ s'écrit de manière unique :

$$r = \prod_{i=o}^{q+1+k} \gamma_i \qquad \text{avec } \gamma_i\in p^q_{(i-q-1)}(A).$$

On en déduit la décomposition : $p^q_{(\leq k)}(A) = P^q_{(k)}(A) \dots \oplus P^{\,q}_{(i-q-1)}(A)$.

Proposition : *a)* $\gamma\in P^q_{(\leq k)}$ (A) *est un cocycle de Poisson (resp. un cobord de Poisson) si et seulement si* $\gamma_k , \gamma_{k-1} ,\dots, \gamma_{-q-1}$ *sont des cocycles de Poisson (resp. des cobords de Poisson).*

b) $H^q_{(\leq k)}(A) = H^q_{(k)}(A) \oplus H^q_{(k-1)}(A) \oplus \dots\oplus H^q_{(-q-1)}(A)$

ou $$H^q_{(j)}(A) = \frac{\operatorname{Ker}^{q-1}_{(j)}(A) \xrightarrow{\partial} P^q_{(j)}(A)}{\operatorname{Im}(P^{q-z}_{(j)}(A) \xrightarrow{\partial} P^{q-1}_{(j)}(A))}$$

Remarque : Si q+1 > n alors $H^q_{(\leq k)}(A) = O$. En effet les représentants des éléments de $H^q_{(\leq k)}(A)$ sont des applications (q+1)-linéaires alternées γ entièrement déterminées par les $\gamma(x_{i_0},...,x_{i_q})$ $i_0,...,i_q \in \{1,...,n\}$. Si q+1 > n alors nécessairement au moins deux des x_{i_j} sont égaux et la cochaîne est donc identiquement nulle.

III. DEFORMATIONS :

Soit A un K-espace vectoriel et $\{,\}$ un crochet de Lie sur A. Nous désigones par $E(A,\lambda)$ l'ensemble des séries formelles en $\lambda \in K$ à coefficients dans A.

Nous précisons ici les diverses notions de déformation : déformation d'algèbre de Lie [2], déformation d'algèbre de Poisson et déformation d'algèbre de Sklyanin (qui est un cas particulier de celle de Poisson).

1) Déformation d'algèbre de Lie :

Nous suivrons la présentation de [2]

a) **Rappel** : Considérons l'application bilinéaire alternée

$$\{,\}_\lambda : A \times A \longrightarrow E(A,\lambda)$$

$$(u,v) \longrightarrow \{u,v\}_\lambda = \{u,v\} + \sum_{r=1}^{+\infty} \lambda^r C_r(u,v,w)$$

où les C_r sont des 2-cochaines de Chevalley [2].

On a, pour u, v, w$\in$ A,

$$S\ \{\{u,v\}_\lambda\ ,\ w\}_\lambda = \sum_{t=1}^{+\infty} \lambda^t D_t(u,v,w)$$

où S est la sommation après permutation circulaire de (u,v,w) et où

$$D_t(u,v,w) = \sum_{r+s=t} S\ C_r(C_s(u,v),w)\ \ r,s \geq 1.$$

On a l'égalité $D_t = E_t - \partial C_t$ où ∂ est le cobord de Chevalley associé à $\{,\}$. Si $D_t = O$, pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, on aura :

$$S\left\{\ \{u,v\},w\right\} = O \quad (2)$$

On dira alors que $\{,\}_\lambda$ est une déformation de $\{,\}$.

Si (1) est limité à l'ordre q, on a une déformation d'ordre q si (2) (Identité de Jacobi) est satisfaite à l'ordre (q+1) près. S'il en est ainsi, E_{q+1} est automatiquement un 3-cocycle de $(A,\{n,\})$. Pour qu'on puisse trouver une 2-cochaine C_{q+1} telle que $E_{q+1} - \partial C_{q+1} = O.$, il faut et il suffit que E_{q+1} soit un cobord. Ainsi E_{q+1} définit une classe de cohomologie, élément de $H^3(A,A)$, qui est l'obstruction à l'ordre (q+1) à la construction d'une déformation prolongeant la déformation précédente. Une déformation d'ordre 1 est dite une déformation infinitésimale.

b) <u>Equivalence de deux déformations d'algèbres de Lie</u> :

Considérons une série formelle en λ $T_\lambda = Id + \sum_{s=1}^{+\infty} \lambda^s T_s$ où les T_s , $(s\geq 1)$ sont des endomorphismes de A ; T_λ opère naturellement sur $E(A,\lambda)$. Considérons une autre déformation de $\{,\}$:

$$A \times A \longrightarrow E(A,\lambda)$$

$$(u,v) \longrightarrow \{u,v\}_\lambda = \{u,v\} + \sum_{r=1} \lambda^r C'_r\,(u,v).$$

Supposons que T_λ transforme $\{,\}'_\lambda$) en $\{,\}_\lambda$:

$$T_\lambda(\{u,,v\}'_\lambda) = \{T_\lambda(u), T_\lambda(v)\}_\lambda$$

ce qui est équivalent à :

(3) $$C'_t - C_t + G_t = \partial T_t \qquad (t = 1,2,..)$$

où l'on a posé $G_0 = O$ et

(4) $$G_t(u,v) = \sum_{s+r=t} T_s\ C'_r\,(u,v) - \sum_{s+s'=t} C_r\,(T_s u, T_s, v).$$

On dira alors que les déformations $\{,\}_\lambda$ et $\{,\}'_\lambda$ sont équivalentes. Si l'égalité (3) est vérifiée jusqu'à l'ordre q, on dit que les déformations $\{,\}'_\lambda$ et $(,)_\lambda$ sont équivalentes à l'ordre q et $(C'_{q+1} - C_{q+1} - G_{q+1})$ est automatiquement un 2-cocycle. Sa classe de cohomologie de Chevalley, élément de $H^2(A,A)$ est l'obstruction à l'ordre (q+1). En particulier, deux déformations infinitésimales définies respectivement par les 2-cocycles C_1 et C'_1 sont équivalentes si et seulement si $(C'_1 - C_1)$ est exact.

2. Déformation d'algèbre de Poisson :

On suppose maintenant que $(A,\{,\},\ldots)$ est une algèbre de Poisson.

a) __Définition__ : Une déformation de l'algèbre de Poisson $(A,\{,\})$ est une déformation de $(A,\{,\})$ en tant qu'algèbre de Lie : $(u,v) \longrightarrow \{u,v\}_\lambda = \{u,v\} + \sum_{r=1}^{+\infty} \lambda^r C_r(u,v)$, telle que $\longrightarrow \{uv,w\}_\lambda = u\{v,w\}_\lambda + v\{u,w\}_\lambda$. Les C_r vérifient donc $C_r(uv,wv) = u.C_r(v,w) + v.C_r(u,w)$. [On s'intéresse seulement à la déformation du crochet et non à celle de la structure associative].

b) __Equivalence de deux déformations d'algèbre de Poisson__ :

Soient $\{,\}_\lambda$ et $\{,\}'_\lambda$ deux déformations d'algèbre de Poisson et T_λ une série formelle en λ: $T_\lambda = Id + \sum_{s+1}^{+\omega} \lambda^s T_s$ (où les T_s sont des endomorphismes de A) vérifiant :

$$T_\lambda(\{u,v\}'_\lambda = \{ T_\lambda(u), T_\lambda(v)\}_\lambda$$

et $\quad T_\lambda(u,v) = T_\lambda(u).t_\lambda(v)$ ce qui se traduit par :

$$C'_t - C_t + C_t = \partial T_t \quad t=1,2,\ldots \qquad \text{(voir 1)b)} \ (4)$$

(5) $\quad T_\lambda(Id.Id) = \sum_{r+t} T_s.T_r \ \forall t \in \mathbb{N}$ avec la convention $T_0=Id$.

Il résulte de (5) que, si $T_s = O \ \forall \ O<s<t_0$

T_{t_0} est une dérivation, et les mêmes considérations que 1)b) restent valables.

(*) Une structure sera dite rigide si toute déformation est équivalente à une déformation triviale.

3) Déformation des algèbres de Sklyanin :

a) On suppose maintenant que $A = K[X_t,\ldots,X_n]$ et $(X_j,X_j) = P_{ij}(X_1,\ldots,X_n)$ est un polynôme homogène de degré p. Une déformation de $(A,\{,\})$ de poids inférieur ou égal à k ($k \in \mathbb{Z}$) est une déformation d'algèbre de Poisson $(u,v) \longrightarrow \{u,v\} = \{u,v\}_\lambda + \sum_{r=1}^{+\omega} \lambda^r C_{r(u,v)}$ telles que les C_r soient des 1-cochaines de Poisson de poids inférieur ou égal à k. En particulier, si les C_r sont de poids égal à (p-2), nous dirons qu'on a une déformation homogène de poids p. Plus particulièrement si p=2 (le poids k est nul), on a une déformation d'algèbre de Sklyanin. Le crochet $\{,\}_\lambda$ est alors un crochet de Poisson quadratique.

b) Equivalence de deux déformations de Sklynin.

Soient $\{,\}_\lambda$ et $\{,\}'_\lambda$ deux déformations de l'algèbre de Sklyanin de poids inférieur ou égal à k.

Définition : *on dit que* $\{,\}_\lambda$ et $\{\infty\}'_\lambda$ *sont équivalentes s'il existe* $T_\lambda = Id + \sum_{r=1}^{+\infty} \lambda^r T_r$ *où* T_r $(r \geq 1)$ *est endomorphisme de* A *compatible avec la filtration* $(A^q)_q$ (i.e. $T_r(A^q) \subset A^q \ \forall\ r,q \in \mathbb{N}$) *tel que :*

$$T_\lambda(\{u,v\}'_\lambda) = \{T_\lambda(u), T_\lambda(v)\}_\lambda$$

et

$$T_\lambda(u\, v) = T_\lambda(u)\, T_\lambda(v).$$

On a les mêmes considérations qu'en 1)a)b) 2)a)b) *à condition de remplacer* $H^2_{(\leq k)}(A,A)$ *et* $H^3_{(\leq 2k)}(A,A)$ *respectivement.*

Remarques :

1) Pour p=2, toute déformation de (A,(,)) de poids inférieur ou égal à k=O induit une déformation homogène de poids O.

2) Les $H^p_{(o)}(A)$ jouent un rôle essentiel dans la déformation des structures de Poisson quadratiques.

On a la

Proposition :

1) soit A *l'algèbre définie dans l'exemple [2] p. 1*

a) $H^o_{(\leq o)}(A)$ *est la sous-algèbre engendrée par le polynôme*

$$Q = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 6a/bX_1X_2X_3.$$

b) $\mathrm{Dim}\, H^1_{(\leq o)}(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } b^3 + 8a^3 \neq O \\ 3 \text{ sinon} \end{cases}$

c) $\mathrm{Dim}\, H^2_{\leq o}(A) = \begin{cases} 8 \text{ si } b^3 + 8a^3 \neq O \\ 12 \text{ sinon} \end{cases}$

d) $\mathrm{Dim}\, H^3_{(\leq o)}(A) = \begin{cases} 9 \text{ si } b^3 + 8a^3 \neq O \\ 11 \text{ sinon} \end{cases}$

Il résulte de cette proposition qu'il existe des déformations infinitésimales du crochet $\{,\}$; il y a même des vraies déformations. Une classification de ces déformations sera donnée ultérieurement.

2) Pour l'algèbre de Sklyanin $(K[X_o, X_1,X_2,X_3],\{,\})$ *où*

$$\begin{aligned} \{X_1,X_o\} &= 2J_{23}X_2X_3 \quad ; \quad \{X_1,X_2\} = -2X_oX_3 \\ \{X_2,X_o\} &= 2J_{31}X_3X_1 \quad ; \quad \{X_2,X_3\} = -2X_oX_1 \\ \{X_3,X_o\} &= 2J_{12}X_1X_2 \quad ; \quad \{X_3,X_1\} = -2X_oX_2 \end{aligned}$$

avec $J_{12},J_{23},J_{31} \in K$ *et* $J_{12}+J_{23}+J_{31} = O$ $(K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. On a la :

Proposition :

a) $H^{c}_{(\leq o)}(A) = K[K_o,K_1]$ *où* $K_o = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$

$K = X_o^2 + J_1X_1^2 + J_2X_2^2 + J_3X_3^2$ *avec* $J_{ij} = J_i - J_j$. (cf.)

b) $\mathrm{Dim}\, H^1_{(\leq o)}(A) = \begin{cases} 1 \text{ si tous les coefficients J sont non nuls} \\ 2 \text{ si un parmi les coefficients } J_{ij} \text{ est nul} \\ 4 \text{ si tous les } J_{ij} \text{ sont nuls.} \end{cases}$

c) $\mathrm{Dim}\, H^2_{(\leq o)^-}(A) = \begin{cases} 2 \text{ si tous les coefficients J sont non nuls} \\ 7 \text{ si un parmi les coefficients } J_{ij} \text{ est nul} \\ 18 \text{ si tous les } J_{ij} \text{ sont nuls.} \end{cases}$

Là encore on a des déformations infinitésimales. On montrera ultérieurement que ces algèbres admettent des vraies déformations mais qui restent parmi les algèbres du même type. Les algèbres de Sklyanin sont des cas particuliers des structures de Poisson quadratiques de l'exemple 3) page 2 que nous étudierons par la suite.

IV. EXEMPLES DE DEFORMATIONS D'ALGEBRES DE POISSON QUADRATIQUES :

On suppose que $k = \mathbb{C}$.

1) Déformations de l'algèbre $(A,\{,\}_{a,b})$:

$\{X_i,X_j\} = 2aX_iX_j + bX_k^2$ avec $(i,j,k) \in \{ (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \}$.

Lemme : *Soit* $(a,b) \in K^{*2}$ *tel que* $b^3 + 8a^3 = 0$ *alors* $(A,\{,\}_{a,b})$ *est isomorphe à* $(A,\{,\}_{-ia\sqrt{3},o})$.

Proposition 1 : *Un* 2-cocycle $c \in P^1_{(0)}(A)$ *s'écrit :*

1) $$c=(2uX_1X_2 + vX_3^2)(\partial_1 \wedge \partial_2)$$
$$+ (2uX_1X_3 + vX_2^2)(\partial_3 \wedge \partial_1)$$
$$+ (2uX_2X_3 + vX_1^2 (\partial_2 \wedge \partial_3) + \partial T$$

avec $u,v \in K$ et $T \in P^0_{(0)}(A)$ *si* $b^3 + 8a^3 \neq 0$ *et* $b \neq 0$.

2) $$c = (2u_1X_1X_2 + v_1X_3^2)(\partial_1 \wedge \partial_2)$$
$$+ (2u_2X_1X_3 + v_2X_2^2)(\partial_3 \wedge \partial_1)$$
$$+ (2u_3X_2X_3 + v_3X_1^2)(\partial_2 \wedge \partial_3) + \partial T$$

avec $u_i,v_i \in K$ $(i=1,2,3)$ *et* $T \in P^0_{(0)}(A)$ *si* $b=0$. *Les coefficients* u,v,u_i,v_i *sont uniques et* T *est unique modulo un cocycle de* $P^0(A)$.

Proposition 2 :

1) Si $b^3 + 8a^3 \neq 0$ *et* $b \neq 0$ *alors toute application*

$$(u,v) \longrightarrow \{u,v\}_{a,b} + \sum_{r=1}^{+\omega} \lambda^r C_r(u,v) \quad \textit{où}$$

$$c_r = \{2a_rX_1X_2 + b_rX_3^2 (\partial_1 \wedge \partial_2)$$
$$+ (2a_r X_1X_3 + b_rX_2^2)(\partial_3 \wedge \partial_1)$$
$$+ (2a_rX_2X_3 + b_rX_1^2 (\partial_2 \wedge \partial_3) \quad \textit{avec } a_r,b_r \in K,$$

est une déformation de $\{,\}_{a,b}$.

2) Si $b=0$ *alors toute application*

$$(u,v) \longrightarrow \{u,v\} + \sum_{r=1}^{+\omega} \lambda^r C_r(u,v) \quad \textit{où}$$
$$c_r = (2a_{ri}X_1X_2 + b_{r1}X_3^2)(\partial_1 \wedge \partial_3)$$
$$+ (2a_{r2}X_1X_3 + b_{r2}X_2^2)(\partial_3 \wedge \partial_1)$$
$$+ (2a_{r3}X_2X_3 + b_{r3}X_1^2)(\partial_2 \wedge \partial_3) \quad \textit{avec } a_{ri},b_{ri} \in K$$

est une déformation de $\{,\}_{o,o}$ *si et seulement si* $\forall$ $t \in (2,3,\ldots,..)$.

$$\sum_{\substack{r+s=t\\ r\geq 1, s\geq 1}} (a_{ri} - a_{r2})\, b_{s3} + (a_{si} - a_{s2})\, b_{r3} = 0$$

$$\sum_{\substack{r+s=t\\ r\geq 1, s\geq 1}} (a_{r3} - a_{ri})\, b_{s2} + (a_{s3} - a_{si})\, b_{r2} = 0$$

et

$$\sum_{\substack{r+s=t\\ r\geq 1, s\geq 1}} (a_{r2} - a_{r3})\, b_{si} + (a_{s2} - a_{s3})\, b_{ri} = 0.$$

Proposition 3 :

1) Si $b^3 + 8a^3 \neq 0$ **et** $b \neq 0$ *alors toute déformation infinitésimale de* $(a,\{,\}_{a,b})$ *est prolongeable en une vraie déformation.*

2) Une déformation infinitésimale $(u,v) \longrightarrow \{u,v\}_{o,o} + \lambda \underset{1}{C}(u,v)$ $\quad a\in K$, *de* $\{,\}_{o,o}$ *est prolongeable en une vraie déformation si et seulement si* $\underset{1}{C}$ *est de la forme :*

$$\begin{aligned} C_1 = \;& (2a_1X_1X_2 + b_1X_3^2)\,(\partial_1 \wedge \partial_2)\\ &+ (2a_2X_1X_3 + b_2X_2^2)\,(\partial_3 \wedge \partial_1)\\ &+ (2a_3X_2X_3 + b_3X_1^2)\,(\partial_2 \wedge \partial_3) \end{aligned}$$ *avec* $(a_1 - a_2)b_3 = (a_3 - a_1)b_2 = (a_2 - a_3)b_1 = 0$ *et* $T\in P^{o}_{(0)}(A)$.

On déduit donc des résultats précédents que les structures $\{,\}_{o,b}$ *ne sont pas rigides.*

Proposition 4 :

1) Si $b^3 + 8a^3 \neq 0$, $b\neq 0$ *alors toute déformation de* $\{,\}_{a,b}$ *est équivalente à une déformation de la forme :* $(u,v) \longrightarrow \{u,v\}_{a,b} + \sum_{r=1}^{+\infty} \lambda^r C_r(u,v)$,

où $$\begin{aligned} C_r = \;& (2a_rX_1X_2 + b_rX_3^2)\,(\partial_1 \wedge \partial_2)\\ &+ (2a_rX_1X_3 + b_rX_2^2)\,(\partial_3 \wedge \partial_1)\\ &+ (2a_rX_2X_3 + b_rX_1^2)(\partial_2 \wedge \partial_3) \end{aligned}$$ *avec* $a_r, b_r \in K$.

2) Toute déformation de $\{,\}_{o,o}$ *est équivalente à une déformation de la forme :*

$$(u,v) \longrightarrow \{u,v\}_{a,o} + \sum_{r=1}^{+\infty} \lambda^r C_r(u,v) ,$$

où $C_r = (2a_{ri}X_1X_2 + b_{ri}X_3^2)(\partial_1 \wedge \partial_2)$

$$+ (2a_{r2}X_1X_3 + b_{r2}X_2^2)(\partial_3 \wedge \partial_1)$$

$$+ (2a_{r3}X_2X_3 + b_{r3}X_1^2)(\partial_2 \wedge \partial_3)$$ *avec* $a_{ri}, b_{ri} \in K$ et $\forall\ t \in \{2,3,\ldots\}$.

$$\sum_{r+s=t} (a_{ri} - a_{r2})\, b_{s3} + (a_{si} - a_{s2})\, b_{r3} = 0$$

$$\sum_{r+s=t} (a_{r3} - a_{ri})\, b_{s2} + (a_{s3} - a_{si})\, b_{r2} = 0 \qquad r, s \geq 1$$

$$\sum_{r+s=t} (a_{r2} - a_{r3})\, b_{si} + (a_{s2} - a_{s3})\, b_{ri} = 0.$$

La proposition 4 donne une classification, par isomorphisme, des déformations des crochets $\{,\}_{a,b}$, on obtient un crochet du même type. Cette dernière remarque est encore valable pour les algèbres du type . Cette dernière remarque est encore valable pour les algèbres du type :

$$\{X_i, X_j\} = -2X_oX_k \text{ et } \{X_i, X_o\} = 2K_{jk}X_jX_k$$
$$(i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1)(3,1,2)\}.$$

On suppose que les coefficients de structure J_{12}, J_{23}, J_{31} sont non nuls (c'est le cas générique).

Proposition :

$\mathrm{Ker}\, \partial_{\,|\,P^1_{(o)}}(A) = Ku \oplus Kv \oplus \partial P^{1}_{(o)}(A)$ *où* $u = J_{31}\, X_oX_1\, (\partial_2 \wedge \partial_3) - J_{23}X_oX_2\, (\partial_3 \wedge \partial_1)$

$v = J_{12}X_oX_1(\partial_2 \wedge \partial_3) - J_{23}X_oX_3(\partial_1 \wedge \partial_2)$.

Lemme :

$[\,u,u\,] = [\,v,v\,] = [\,u,v\,] = 0$ où $[\ ,\ ]$ *est le crochet de Richardson-Nijenhuis* (cf. [2]).

Proposition : *Les séries de la forme* : $\{,\} + \sum_{r=1}^{+\infty} \lambda^r C_r$ *où* $C_r = a_r u + b_r v$ *avec* $a_r, b_r \in K$, *sont des déformations de* $\{,\}$.

Corollaire : *Toute déformation infinitésimale de* $\{,\}$ *est prolongeable en une vraie déformation de* $\{,\}$.

Proposition : *Toute déformation de* $\{,\}$ *est équivalente à une déformation de la forme*

$$\{,\}+\sum_{r=1}^{+\infty}\lambda^r C_r$$

et $\{,\} + \sum_{r=1}^{+\infty}\lambda^r C_r$. *où* $C_r = a_r u + b_r v$ *et* $C_r^{\cdot}$ $\forall\, r \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : Les deux dernières propositions donnent une classification, par isomorphisme,des déformations de $\{,\}$ et montrent que le représentant de chaque classe appartient à la famille des crochets :

$$\sum_{i,j,k,l} a_{ij}\, X_k X_l\, (\partial_i \wedge \partial_j)$$

la sommation est sur les $i,j,k,l \in \{O,1,2,3\}$ tels que $\{i,j,k,l\} = \{O,1,2,3\}$. Cette famille de crochets sera étudiée ultérieurement. On montrera que pour les $a_{ij} \neq O$, ces crochets sont équivalents à des crochets de Sklyanin avec J_{12}, J_{23}, J_{31} tous non nuls. Ceux-ci sont donc invariants par déformation. Il semble qu'on n'ait pas de rigidité au sens strict mais seulement des familles de crochets admettant des déformatrions non triviales vers des crochets du même type, où seules les valeurs des constantes de structure sont modifiées.

V. CROCHETS DE RICHARDSON NIJENHUIS ET PROLONGEMENT DES STRUCTURES.

On se propose d'appliquer au travail précédent les méthodes d'algèbre de Lie graduée pour le crochet de Richardson-Nijenhuis. On essaiera ensuite de prolonger les structures d'algèbres de Poisson sur l'anneau des polynômes à deux indéterminées vers l'anneau des polynômes à trois indéterminées.

Crochet de Richardson-Nijenhuis : (voir [2], ou [4] pour la version présentée ici)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Λ^*E^* et S^*E sont respectivement ses algèbres extérieures et symétriques associées. Sur l'espace vectoriel $(\Lambda^* E^* \otimes S^*E)$, on définit le crochet de R-N par $\forall\ \alpha\otimes X \in \Lambda^p E^* \otimes S^q E$. $\forall\ \beta\otimes Y \in \Lambda^s E^* \otimes S^t E$ où $X = X_1 \ldots X_q$ et $Y = Y_1 \ldots Y_t$

$$[\alpha\otimes X\,,\, \beta\otimes Y] = \sum_{k=1}^{t} \beta \wedge i_{Y_k}(\alpha) \otimes XY_1 \ldots \hat{Y}_k \ldots Y_t$$

$$+ (-1)^{(p-1)(2-1)+1} \sum_{k=1}^{a} \alpha \wedge i_{Y_k}(\beta) \otimes X_1 \ldots \hat{X}_k \ldots X_q Y\,.$$

$[,] : (\Lambda^p E^* \otimes S^q E.) \times (\Lambda^s E^* \otimes S^t E^*) \longrightarrow (\Lambda^{p-s-1} E^* \otimes S^{q+t-1} E).$

$$(\alpha\otimes X, \beta\otimes Y) \longrightarrow [(\alpha\otimes X , \beta\otimes Y]$$

Ce crochet vérifie :

1°) $(\Lambda^p E^* \otimes S^q E^*) \times (\Lambda^s E^* \otimes S^t E^*) \subseteq \Lambda^{p+s-1} E^* \otimes S^{q+t-1} E)$

2°) Si $\alpha\otimes X. \in \Lambda^{p+1} E^* \otimes S^* E$ et $\beta\otimes Y \in \Lambda^{s+1} E^* \otimes S^* E$ alors

$$[\alpha\otimes X. \beta\otimes Y] = (-1)^{P2+1} [\beta\otimes Y . \alpha\otimes X] .$$

3°) Si $\alpha\otimes X \in \Lambda^{p+1} E^* \otimes S^{\cdot} E$. $\beta\otimes Y \in \Lambda^{s+1} E^* \otimes S^{\cdot} E$ et $\gamma\otimes Z \in \Lambda^{u+1} E^* \otimes S^{\cdot} E$ alors $(-1)^{pu} [\alpha\otimes X, [\beta\otimes Y, \gamma\otimes Z]] + (-1)^{pr} [\beta\otimes Y, [\gamma\otimes Z, \alpha\otimes X]] +$ $(-1)^{su} [\gamma\otimes Z, [\alpha\otimes X, \beta\otimes Y]] = 0$

$\Lambda^* E^* \otimes S^{\cdot} E = \bigoplus_{p\geq 1} \Lambda^{p+1} E^* \otimes S^{\cdot} E$ muni de $[,]$ est une algèbre de Lie graduée où l'espace vectoriel des éléments homogènes de degré p est $\Lambda^{p+1} E^* \otimes S^{\cdot} E$.

Cochaines de Poisson de poids $\leq$ k (resp. = k).

Tout élément $\gamma \in \Lambda^p E^* \otimes S^* E$ définit une application p-linéaire alternée de $E \times .. \times E$ (p fois dans S^*E qui se prolonge en une application $\hat{\gamma} \in \Lambda^p((S^*E^*) \otimes S^*E$ qui soit une dérivation par rapport à chaque argument. Ainsi, on définit l'application

$$\psi : \Lambda^{\cdot} E^* \otimes S^{\cdot} E \longrightarrow \Lambda^*((S^{\cdot} E)^*) \otimes S^{\cdot} E$$
$$\gamma \longrightarrow \psi(\gamma) = \hat{\gamma}$$

ψ est linéaire injective et son image $\psi(\Lambda^* E^* \otimes S^* E) = \bigoplus_{p\geq O} \psi(\Lambda^p E^* \otimes S^* E)$ est somme directe des sous-espaces vectoriels de $\Lambda^p (S^*E)^* \otimes S^*E$, $p \in \mathbb{N}$, dont les éléments sont des dérivations par rapport à chaque argument. Avec $E = A_1$ (l'espace vectoriel engendré par les polynômes homogènes de degré 1 de $K[X_1,...,X_n]$ et via ψ on a : $P^a_{(k)}(S^*E) = (\Lambda^{a+1} E^* \otimes S^{a+1+k} E, P^a_{(\leq k)}(S^{\cdot} E) = \Lambda^{a+1} E^* \otimes S^{\leq a+1+k} E)$

où $S^{\leq 1} E = \bigoplus_{i=0}^{1} S^i E$.

$P^a_{(\leq k)}(S^*E)$ (resp. $P^a_{(k)}(S^*E)$) est l'espace vectoriel des a-cochaines de poids inférieur ou égal à k (resp. égal à k).

Les crochets de Poisson homogènes de degré p sur S*E sont les $c \in \Lambda^2E^* \otimes S^pE$ vérifiant : $[c,c] = 0$ et $[c,m]_i = 0$ où $[,]_1$ est le crochet de Lecomte et De Wilde sur l'algèbre de Lie graduée M*(S*E) (voir [2])

Cup-produit.

Sur $\Lambda^*E^* \otimes S^*E$, on définit également la loi naturelle "$\wedge$" par $\forall\ \alpha \otimes X \in \Lambda^pE^* \otimes S^*E$, $\beta \otimes Y \in \Lambda^qE^* \otimes S^*(E)$ $(\alpha \otimes X) \wedge (\beta \otimes Y) = (\alpha \wedge \beta) \otimes XY$ où $(\alpha \wedge \beta)$ est le produit extérieur de la p-forme α par la q-forme β. Via ψ, la loi "$\wedge$" n'est autre que le cup-produit de cochaines de Poisson de $\Lambda^*((S^*E)^*) \otimes S^*E$.

Un simple calcul montre qu'alors :

$\forall\ \alpha \in X \in \Lambda^pE^* \otimes S^*E.\ \beta \otimes Y \in \Lambda^qE^* \otimes SE$ et $\gamma \otimes Z \in \Lambda^pE^* \otimes S^*E$

$[\alpha \in X, (\beta \otimes Y) \wedge (\gamma \otimes Z) = (\beta \otimes Y) \wedge [\alpha \in X\ \gamma \otimes Z] + (-1)^{r(p+1)} [\alpha \in X\ ,\ \beta \otimes Y] \wedge (\gamma \otimes Z).$

Cette identité suggère la définition suivante :

Définition : *Soit* $A = \oplus A^k$, $k \in \mathbb{Z}$, *une algèbre de Lie graduée* (A,[,]). *On munit* A *d'une loi* "$\wedge$ " *bilinéaire, antisymétrique graduée et vérifiant :*

1°) $A^u \times A^v \longrightarrow A^{uv}$ *et*

$(U\ ,\ V) \longrightarrow U \wedge V$

2°) $\forall\ U \in A^u$, $\wedge \in A^v$ et $W \in A^w$

$[U,V \wedge W] = V \wedge \rightarrow U,W \leftrightarrow + (-1)^{u(w+1)} [U,V] \wedge W.$

(A,[,], $\wedge$) *s'appelle alors une algèbre de Lie de Poisson graduée.*

Cohomologie de Poisson :

Soit $c \in \Lambda^2E^* \otimes S^pE$ vérifiant $[c,c] = O$ et $[c,m]_1 = O$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a le complexe

$$\Lambda^oE^* \otimes S^{\leq k}E \xrightarrow{\partial c} \Lambda^1E^* \otimes S^{\leq k+p-1} \xrightarrow{\partial c} \Lambda^2E^* \otimes S^{\leq k+2(p-1)}E \xrightarrow{\partial c} \ldots \Lambda^nE^* \otimes S^{\leq k+n(p-1)}E \xrightarrow{\partial c} O$$

où $\partial_c(\alpha \otimes X) = (-1)^{\alpha} [c,\alpha \otimes X]$ si $\alpha \otimes X\ \Lambda\ ^{a+1}E^* \otimes S'E$.

Proposition : *On a* $\partial_c \circ \partial_c = O$.

Définition : *La cohomologie de Poisson de poids inférieur ou égal à* k *(resp. de poids égal à* k*) d'une structure de Poisson homogène de degré* p (p ≤ 2) *est donnée par :*

$$H^a_{(\leq k)}(E,\partial_c) = \frac{\mathrm{Ker}(\Lambda^a E^*\otimes S^{\leq a+k}E \xrightarrow{\partial c} \Lambda^{a+1}E^*\otimes S^{\leq a+k+p-1}E)}{\mathrm{Im}(\Lambda^{a-1}E^*\otimes S^{\leq a-1+k}E \xrightarrow{\partial c} \Lambda^{a}E^*\otimes S^{\leq a+k+p-2}E)} \quad si\ p \leq 2$$

$$(\text{resp } H^a_{(k)}(E,\partial_c) = \frac{\mathrm{Ker}(\Lambda^a E^*\otimes S^{a+k}E \xrightarrow{\partial c} \Lambda^{a+1}E^*\otimes S^{a+k+p-1}E)}{\mathrm{Im}(\Lambda^{a-1}E^*\otimes S^{a-1+k}E \xrightarrow{\partial c} \Lambda^{a}E^*\otimes S^{a+k+p-2}E)} \quad si\ p = 2).$$

Proposition : $H^*_{(\leq k)}(E,\partial_c)$ *resp.* $H^*_{(k)}(E,\partial_c)$ *est une algèbre de Lie graduée.*

Remarque : $P^a_{(\leq k)}(E) = \Lambda^{a+1}E^*\otimes S^{\leq a+1+k}E = \bigoplus_{i=o}^{a+i+k} \Lambda^{a+1}E^*\otimes S^iE = \bigoplus_{i=o}^{a+i+k} P^a_{(i-a-1)}(E)$

est la décomposition en "tenseurs purs".

On en déduit une décomposition en espaces de cohomologie "purs" :

$$H^{a+1}_{(\leq k)}(E,\partial_c) = \bigoplus_{i=o}^{a+k+i} H^{a+1}_{(i-a-1)}(E,\partial_c).$$

Proposition : *la loi* "$\wedge$" *passe à la cohomologie de Poisson de poids* ≤k *(resp. de poids égal à* k*).*

Corollaire : $(H^a_{(\leq k)}(E,\partial_c), [,],\wedge)$ *(resp.* $H^a_{(k)}(E,\partial_c), [,],\wedge)$ *est une algèbre de Lie de Poisson graduée.*

La démonstration résulte de l'argument général pour les algèbres de Lie graduées présenté dans [2].

Déformation d'algèbres de Poisson de degré p (p ≤ 2) :

Soit $c \in \Lambda^2E^* \otimes S^2E$ tel que $[c,c] = O$ et $[c,m]_1 = O$.

Une déformation de l'algèbre (S'E,m,c) est une série, en λ,

$c_\lambda = c + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r c_r$, telle que :

i°) $c_r \in \Lambda^2E^* \otimes S^{\leq 2} E$

ii°) $[c_\lambda, c_\lambda] = O$ où $[,]$ est le crochet de R-N.

iii°) $[c_\lambda, m]_1 = O$ où $[,]_1$ est le crochet de Lecomte.

Les identités ii°) et iii°) sont respectivement équivalentes à :

$$[c,c_r] = -1/2 \sum_{\substack{t,2\geq 1\\ t+3=r}} [c_3,c_t] \text{ et } [c_r,m]_i = O \qquad \forall\ r \in \mathbb{N}.$$

Deux déformations c_λ et $c'_\lambda = c + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r c'_r$ sont équivalentes si et seulement si il existe $T_l = Id + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r T_r$ avec $T_r \in E^* \otimes (K \oplus E)$ tel que $T_\lambda(c'_\lambda(u,v)) = c_\lambda(T_\lambda(u), T_\lambda(v))$; identité qui se traduit par : $c'_t - c_t + \mathfrak{G}_t = \partial T_t$ où $\mathfrak{G}_1 = O$ et

$$\mathfrak{G}_t(u,v) = \sum_{r+2=t} T_S c'_r(u,v) - \sum_{2+2'=t} c(T_2(u),T_{2'}(v))$$

$$- \sum_{r+2=t} (c_r(T_S(u),v) + c_r(u,T_2(v)) - \sum_{r+2+2=t} c_r(T_S(u),T_{S'}(v)) \quad \text{avec } r,s,s' \geq 1.$$

Quelques classes de crochets de Poisson quadratiques :

a) Les éléments $g \wedge id_E$ où $g \in E^* \otimes E$ sont des crochets de Poisson quadratiques. Ils forment un sous-espace vectoriel irréductible de $\Lambda^2E^* \otimes S^2E$ pour l'action de $\mathfrak{G}L(E)$.

Proposition : Soit $g \in E^* \otimes E$. L'algèbre de Lie de Poisson $(A, g \wedge id_E)$ n'est pas rigide.

En effet : En supposant que $g \neq \lambda id_E$ $\lambda \in K$ (sinon $g \wedge id_E = O$).

L'application ϕ : $\quad EndE \longrightarrow EndE \quad$ a un noyau de dimension ≥ 2 (car il contient g et $\quad a \longrightarrow [a,g] = a_o g - g_o a$

id_E). Il existe donc $c \notin Im\phi + Kid_E$ c'est-à-dire $c \neq [a,g] + \alpha\, id_E$ avec $a \in E^* \otimes E$ et $\alpha \in K$.

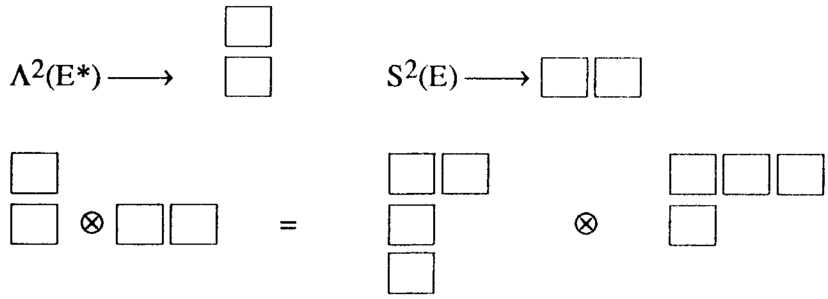
On a $[c\wedge id, c\wedge id] = [g\wedge id, c\wedge id] = O$ et $c\wedge id \notin \langle [a,g] \wedge id_E / a \in E^* \otimes E)$ car l'application

$sl(E) \longrightarrow \Lambda^2E^* \otimes S^2 E$ est injective. Donc $g\wedge id + t\, c\wedge id$ est une vraie déformation de $g\wedge id_E$.

$(1 \longrightarrow 1\wedge id_E)$

b) $\Lambda^2E^* \otimes S^2E$ est la somme directe de deux facteurs irréductibles (pour l'action de $\mathfrak{G}L(E)$) qui sont $A_1 = (g\wedge id_E\,,\, g \in E^* \otimes E)$ et un espace supplémentaire noté A_2.

Cette décomposition résulte du calcul des diagrammes de Young pour les représentations de GL(E) (on supposera que dim $E \geq 3$)



soit $\Lambda^2(E^*) \otimes S^2(E) \longrightarrow A_1 \oplus A_2$. On identifie facilement A_1 et $SL(E)$.
Soit Γ l'application linéaire :
$\Gamma : \Lambda^2(E^*) \otimes S^2(E) \longrightarrow E^* \otimes E$

$$\Gamma : (u_1 \wedge u_2) \otimes (v_1.v_2) \longmapsto [u_1(v_1)u_2 - u_2(v_1)u_1] \otimes V_2 + [u_1(v_2)u_2 - u_2(v_2u_1] \otimes v_1$$

Γ est $GL(E)$-équivariante et induit une décomposition $\mathrm{Im}(\Gamma) = A_1$ et $\mathrm{Ker}(\Gamma) = A_2$.

Les éléments de $L^2(E^*) \otimes S^2(E)$ du type $g \wedge f$ avec g et f dans $GL(E)$ vérifiant $g^2 = f^2 = fg - gf = O$ sont dans A^2.

Exemples :
Crochets de Poisson quadratiques appartenant à A^2 *:*

1°) Soit f un élément nilpotent de $E^* \otimes E$ et p son degré de nilpotence. Alors $\sum_{i,j \geq p/2} a_{ij} f^i \wedge f^j$ avec $a_{ij} \in K$ est un crochet de Poisson quadratique appartenant à A_2.

Plus généralement, si A est un sous-espace vectoriel de $E^* \otimes E$ tel que : $\forall f, g \in A \;\; f_o g = g_o f$ alors toute somme finie de la forme $\sum f_i \wedge g_i$, avec $f_i, g_i \in A$, est un crochet quadratique de Poisson. Remarquons que les crochets ci-dessus ne sont pas nécessairement dans A_2.

2°) On suppose que $n = 4$. Soit $a_{ij} \in K$, $i,j = 1,2,3,4$ tels que $a_{ii} = O$. $a_{ij} = -a_{ji}$ et
$a_{12}a_{13} + a_{31}\, a_{12} + a_{23}a_{11} = O$ (Jacobi).

On pose :

$g_i = a_{12}\varepsilon_1 \otimes e_3$; $h_1 = \varepsilon_2 \otimes e_4$	$g_4 = a_{14}\varepsilon_1 \otimes e_2$; $h_4 = \varepsilon_4 \otimes e_3$
$g_2 = a_{31}\varepsilon_3 \otimes \varepsilon_2$; $h_2 = \varepsilon_1 \otimes e_4$	$g_5 = a_{24}\varepsilon_2 \otimes e_3$; $h_5 = \varepsilon_3 \otimes e_1$
$g_3 = a_{23}\varepsilon_2 \otimes e_1$; $h_3 = \varepsilon_3 \otimes e_4$	$g_6 = a_{24}\varepsilon_3 \otimes e_1$; $h_6 = \varepsilon_4 \otimes e_2$.

On a : $g_i^2 = h_i^2 = g_i \circ h_i = h_i \circ g_i = O \ \ \forall\ i = 1,2,3,4$. Donc $c = \sum_{i=1}^{6} g_i \wedge h_i$ est un crochet de Poisson quadratique. Cette famille de crochets de Poisson contient les crochets de Sklyanin [ ].

PROLONGEMENT D'UN CROCHET DE POISSON QUADRATIQUE DE $A=K[e_1,\dots,e_n]$ A $A' = K[e_1,\dots,e_n,e_{n+1}]$.

Position du problème : étant donné un crochet de Poisson quadratique sur A, on veut déterminer les crochets de Poisson quadratiques c' prolongeant c à A'. On utilisera le fait que $A = S^*(E)$ où E est le K espace vectoriel de base $e_1,\dots,e_n$ et $A' = S^*(E)$ où $E' = E \oplus K\ell_{n+1}$.

Le crochet c peut s'écrire :

$$c = \sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} C_{ij}^{kl}\, \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \otimes e_k e_l \ \text{ avec } C_{ij}^{kl} = C_{ij}^{lk} = - C_{ji}^{kl} = - C_{ij}^{lk}.$$

Nous nous limiterons aux crochets c' de la forme suivante :

$$c' = c + \sum_{1\leq i,a,b\leq n+1} C_i^{ab}\, \varepsilon_i \wedge \varepsilon_{n+1} \otimes e_a\, e_b \ \text{ avec } \ C_i^{ab} = C_{i.}^{ba}$$

On pose :

$$D = \sum_{1\leq i,a,b\leq n} C_i^{ab}\, \varepsilon_i \otimes e_a e_b$$

$$\ell = \sum_{1\leq i,a\leq n} 2\, C_i^{a n+1} \varepsilon_i \otimes e_a$$

$$k = \sum_{1\leq i\leq n} C_i^{n+1\ \ n+1}\ \varepsilon_i$$

Il est clair que D (resp. ℓ , resp. k) est une dérivation de poids 1 (resp. O. resp. -1) et

$$c' = c + D \wedge \varepsilon_{n+1} + \ell \wedge (\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1}) + k \wedge (\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1}^2).$$

On a :

1°) $[c',c'] = [c,c] + 2[c,D\wedge \varepsilon_{n+1}\ ] + 2[c,] \wedge (\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1})]$

$+ 2[c,k\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})] + [D \wedge e^2_{n+1},D \wedge e^2_{n+1})$.

$+ [1\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1}) , 1\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1})] + [k\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1}),k\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})]$

$+ 2 [D\wedge \varepsilon_{n+1}] \wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1})] + 2 [D\wedge \varepsilon_{n+1} ,k\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})]$

$+ 2 [\ ] \wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1}), k\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})]$.

2°) $[c,c] = O$

3°) $[D\wedge \varepsilon_{n+1} , D\wedge \varepsilon_{n+1}] = O$

4ϒ) $[1\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1}) , 1\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1})] = O$

5°) $[k\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1}), k\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})] = O$

6°) $[c,D(\varepsilon_{n+1}\ ] = - [c,D] \wedge \varepsilon_{n+1}$

7°) $[c,k\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})] = - [c,k] \wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})$

8°) $[c,]\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1})] = - [c,1] \wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1})$

9°) $[D\wedge \varepsilon_{n+1,1}\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1})] = 1\wedge D\wedge \varepsilon_{n+1}$

10°) $[D\wedge \varepsilon_{n+1}, k\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})] = 2\ k\wedge D\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1})$

11°) $[1\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1}), k\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})] = k\wedge 1\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})$

D'où

$[c',c'] = - 2\ [c,D]\wedge\varepsilon_{n+1} - 2[c,1] \wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1})$

$- 2[c,k]\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1}) + 2\ 1\wedge D\wedge \varepsilon_{n+1} + 4\ k\wedge D\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1})$

$+ 2\ k\wedge 1\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})$.

Proposition :

$$[c',c'] = O \leftrightarrow \begin{cases} [c,D] - 1\wedge D = O \\ [c,1] - 2\ K\wedge D = O \\ [c,k] - k\wedge 1 = O \end{cases}$$

Remarque : Dans le cas particulier où $c = g\wedge id_E$ où $g\in E^* \otimes E$. le système ci-dessus s'écrit :

$$\begin{cases} [D,g]\wedge id_E + 1\wedge D = O \\ [1\ ,g]\wedge id_E + 2\ k\wedge D = O \\ [k,g]\wedge id_E + k\wedge 1 = O \end{cases}$$

Equivalence de deux prolongements :

Deux prolongements c' et c" de c sont dits équivalents s'il existe un isomorphisme de (A',c") sur (A',c'), dont la restriction à A soit un automorphisme de l'algèbre de Lie de Poisson (A,c) :

Si $c'' = c + D'\wedge \varepsilon_{n+1} + 1'\wedge (\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1}) + k'\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1})$ et si c' et c" sont équivalents alors il

existe $h\in \mathcal{GL}(E')$ tel que $h_{|E}\in \mathcal{GL}(E)$, $h_{|E}(c) = c$ et $h(c'') = c'$ où $h(c'')$ est l'image de c" par h conformément à l'action de $\mathcal{GL}(E')$ sur $\Lambda'E'^* \otimes S'E'$. En posant $h(e_{n+1}) = \alpha e_{n+1} + b$ avec $\alpha\in K^*, b\in E$. On obtient :

$$\begin{aligned} h(c'') &= c + h(D')\wedge h(\varepsilon_{n+1}) + h(1')\wedge h(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1}) + h(k')\wedge h(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1}) \\ &= c + \frac{1}{\alpha}(h(D') + h(1')\wedge b + h(k') \otimes b^2) \wedge\varepsilon_{n+1} \\ &\quad + (h(1') + 2h(k') \otimes b) \wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e_{n+1}) + \alpha h(k')\wedge(\varepsilon_{n+1} \otimes e^2_{n+1} \end{aligned}$$

d'où

$$h(c'') = c' \leftrightarrow \begin{cases} D = \dfrac{1}{\alpha}(h(D') + h(1') \wedge b + h(k') \otimes b^2) \\ 1 = h(1') + `2h(k') \otimes b \\ k = \alpha h(k') \end{cases}$$

Remarque : Un cas particulier important est celui où A est un idéal de l'algèbre de Lie (A',c'). Ce cas est caractérisé par k = O et l = O.

c) Prolongements dans le cas où n = 2 :

On suppose que le corps de base est $\mathbb{R}$. On montre qu'il y a quatre classes d'équivalence de crochets de Poisson quadratiques sur A = $\mathbb{R}[e_1 ; e_2]$:
1°) O ; 2°) $\varepsilon_1 \wedge e_2 \otimes e_1^2$; 3°) $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \otimes (e_1^2 + e_2^2)$ et 4°) $\varepsilon_1 \wedge e_2 \otimes (e_1^2 + e_2^2)$.

Les automorphismes de ces structures sont de la forme :
1°) g_1 avec $g_1 \in GL(DE)$.
2°) $g_2 = a(\varepsilon_1 \wedge e_1 + \varepsilon_2 \wedge e_2) + b\, \varepsilon_2 \otimes e_1$ avec $a \neq O$.
3°) $g_3 = a(\varepsilon_1 \otimes e_1 + \varepsilon_2 \otimes e_2) + b(-\varepsilon_1 \otimes e_2 + \varepsilon_2 \otimes e_1)$ avec $a^2 + b^2$ O.
4°) $g_4 = a(\varepsilon_1 \otimes e_1 + \varepsilon_2 \otimes e_2) + b(\varepsilon_1 \otimes e_2 + \varepsilon_2 \otimes e_1)$ avec $a^2 + b^2$ O.

Remarque : On établit aisément que :

$$g_2^{-1} = \frac{1}{a^2}\Big(a(\varepsilon_1 \otimes e_1 + \varepsilon_2 \otimes e_2) - b\varepsilon_1 \otimes e_2 \Big)$$
$$g_3^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}\Big(a(\varepsilon_1 \otimes e_1 + \varepsilon_2 \otimes e_2) + b(\varepsilon_1 \otimes e_2 - \varepsilon_2 \otimes e_1)\Big)$$
$$g_4^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2}\Big(a(\varepsilon_1 \otimes e_1 + \varepsilon_2 \otimes e_2) - b(\varepsilon_1 \otimes e_2 + \varepsilon_2 \otimes e_1)\Big)$$

d'où, si $k = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2$,

$$g_2(k) = \frac{1}{a^2}\Big(ak_1\varepsilon_1 + (ak_2 - bk_1)\varepsilon_2\Big) \text{ où } g_2(k) = k{,}o\, g_2^{-1}$$
$$g_3(k) = \frac{1}{a^2 + b^2}\Big((ak_1 + bk_2)\varepsilon_1 + (ak_2 - bk_1)\varepsilon_2 \Big)$$
$$g_4(k) = \frac{1}{a^2 - b^2}\Big((ak_1 - bk_2)\varepsilon_1 + (ak_2 - bk_1)\varepsilon_2\Big).$$

Ainsi pour la structure 2°), on peut via un isomorphisme (voir (*)) se ramener à des prolongements tels que $k \in \{O,, \varepsilon_1 , \varepsilon_2\}$ (en jouant sur les valeurs de a et b). De même, pour les structure 3°) et 4°) on peut se ramener à des prolongements tels que $k \in (O,\varepsilon_2)$ et $k \in \{O,\varepsilon_1 + \varepsilon_2 , \varepsilon_1 - \varepsilon_2\}$ respectivement.

Après un calcul long et fastidieux on obtient les propositions suivantes :

Proposition 1 : *A un isomorphisme près, les prolongements du crochet nul sur* $\mathbb{R}\,[e_1,e_2]$ *sont donnés par :*

1°) $k = O\,,\ l = O,\ D = \varepsilon_1 \otimes Q$ *avec* $Q \in S^2E$

2°) $k = O\,,\ l = \varepsilon_1 \otimes e_1,\ D = a\varepsilon_1 \otimes e_2^2$ *avec* $a \in \{O,1\}$.

3°) $k = O\,,\ l = \varepsilon_1 \otimes e_{1\text{-}2}\,,\ D = a\varepsilon_1 \otimes e_2^2$ *avec* $a \in \{O,1\}$.

4°) $k = O\,,\ l \in GL(E)\,,\ D = O$

5°) $k = O\,,\ l = O\,,\ D = \varepsilon_1 \otimes Q$ *avec* $Q \in S^2E$.

Proposition 2 : *A un isomorphisme près, les prolongements de* $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \otimes e_1^2$ *sont donnés par :*

1°) $k = O\,,\ l = O\,,\ D = \varepsilon_1 \otimes (ue_1^2 + ve_1e_2) + \varepsilon_1 \otimes (we_1^2 + \frac{1}{2}ve_2^2)$ *avec* u et $w \in \mathbb{R}$ et $v \in \{O,1\}$.

2°) $k = O\,,\ l = a\,\varepsilon_2 \otimes e_1\,,\ D = \varepsilon_1 \otimes e_1e_2 + \varepsilon_2 \otimes (\frac{1-a}{2}e_2^2)$ *avec* $a \in \mathbb{R}$.

3°) $k = O\,,\ l = 2\,\varepsilon_1 \otimes e_1\ \ ,\ D = \varepsilon_1 \otimes (ve_1e_2 + we_2^2) - \frac{v}{2}\,\varepsilon_1 \otimes e_2^2$ *avec*

$(v,w) \in \{O\} \times (1) \cup \{1\} \times \mathbb{R}$.

4°) $k = O\,,\ l = u\varepsilon_1 \otimes e_1 + \varepsilon_2 \otimes (ve_1 + ue_2),\ D = O$ *avec* $u,\ v \in \mathbb{R}$.

5°) $k = \varepsilon_1\,,\ l = -2\varepsilon_2 \otimes e_1\,,\ D = O$.

6°) $k = \varepsilon_2\,,\ l = O\,,\ D = a\varepsilon_2 \otimes e_1^2$ *avec* $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 3 : *A un isomorphisme près, les prolongements de* $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \otimes (e_1^2 + e_2^2)$ *sont donnés par :*

1°) $k = O\,,\ l = O\,,\ D = \varepsilon_1 \otimes (ue_1^2 + ue_2^2 + \varepsilon_2 \otimes (ve_1^2 + ve_2^2)$ *avec* $(u,v) \in \{O\} \times \{1\} \cup \{1\} \times \mathbb{R}$.

2°) $k = O\,,\ l = \varepsilon_2 \otimes (ue_1 - ve_2) + \varepsilon_2 \otimes (ve_1 + ue_2),\ D = O$ *avec* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

3°) $k = O,\ l = \varepsilon_1 \otimes e_2 - \varepsilon_1 \otimes e_1\,,\ D = \varepsilon_2 \otimes e_1^2 + \varepsilon_2 \otimes e_1e_2$.

4°) $k = O\,,\ l = -2\,\varepsilon_1 \otimes e_2 + 2\,\varepsilon_2 \otimes e_1\,,\ D = \varepsilon_1 \otimes (ue_1^2 + \varepsilon_2 \otimes (ve_1^2 - 2ue_1e_2)$

avec $(u,v) \in \{O\} \times \{1\} \cup \{1\} \times \mathbb{R}$.

5°) $k = \varepsilon_2\,,\ l = 2\,\varepsilon_1 \otimes e_2\,,\ D = \varepsilon_2 \otimes e_2^2 + 2\,\varepsilon_1 \otimes e_1e_2$.

Proposition 4 : *A un isomorphisme près, les prolongements de* $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \otimes (e_1^2 - e_2^2)$ *sont donnés par*

1°) $k = O$, $1 = O$, $D = \varepsilon_1 \otimes (-ue_1^2 + ue_2^2) + \varepsilon_2 \otimes (ve_1^2 - ve_2^2)$ *avec* $(u,v) \in \{O\}x\{1\} \cup \{1\} \times \mathbb{R}$.

2°) $k = O$, $1 = \varepsilon_1 \otimes (ue_1 + ve_2) + \varepsilon_2 \otimes (ve_1 + ue_2)$, $D = O$ *avec* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

3°) $k = O$, $1 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \otimes (ue_1 - e_2) + \varepsilon_2 \otimes (e_1 + ue_2)$, $D = \varepsilon_1 \otimes (e_1^2 + \varepsilon_2 \otimes e_1e_2$ *avec* $u \in \mathbb{R}$.

4°) $k = O$, $1 = 2\,\varepsilon_1 \otimes (e_2 + 2\,\varepsilon_2 \otimes e_1$, $D = \varepsilon_1 \otimes (ue_1^2) + \varepsilon_2 \otimes (ve_1^2 - 2u_1e_2)$

avec $(u,v) \in \{O\}x\{1\} \cup \{1\} \times \mathbb{R}$.

5°) $k = O$, $1 = \varepsilon_1 \otimes (ue_1 + (2-u)e_2) + \varepsilon_2 \otimes ((2-u)e_1 + ue_2)$ *et*

$D = \frac{(2-u)(u-1)}{2}\ \varepsilon_1 \otimes e_2^2 + \varepsilon_2 \otimes (e_1^2 + ue_1e_2 + \frac{u(u-1)}{2} e_2^2)$ *avec* $u \in \mathbb{R}^*$.

6°) $k = O$, $1 = \varepsilon_1 \otimes (ue_1 + (u+2)e_2) + \varepsilon_2 \otimes ((u + 2)e_1 + ue_2)$
et $D = \frac{(u+2)(u+1)}{2}\ \varepsilon_1 \otimes e_2^2 + \varepsilon_2 \otimes (e_1^2 - + ue_1e_2 + \frac{u(u+1)}{2} e_2^2$ *avec* $u \in \mathbb{R}^*$.

7°) $k = \varepsilon_2$, $1 = -2\varepsilon_1 \otimes e_2$, $D = -\varepsilon_2 \otimes e_2^2 - 2\varepsilon_1 \otimes e_1e_2$.

8°) $k = \varepsilon_1 + v\varepsilon_2$, $1 = 2\varepsilon_1 \otimes (ve_1 - e_2)$ et
$D = \varepsilon_1 \otimes [\ (u+1)e_2^2 + 2v(u-1)e_1e_2 + ue_2^2]$

$+ \varepsilon_2 \otimes [\ uve_1^2 + 2ue_1e_2 + v(u-1)\ e_2^2]$ *avec* $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \{-1,+1\}$.

Bibliographie

[1] **J. HUBSCHMANN,** *Poisson cohomology and quantization.* .
Journal für Reine und angewandte Mathematik (1990).

[2] **P. LECOMTE,** *Applications of the cohomology of graded Lie algebras to formal deformations of Lie algebras.*
Letters Mathematical Physics 13 (1987) p. 157-166.

[3] **A. LICHNEROWICZ,** *Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique.*
Ann.Inst. Fourier 32 (1) (1982) p. 157-209.

[4] **C. ROGER,** *Algèbres de Lie graduées et quantification.*
Colloque en l'honneur de J.M. Souriau.Aix-En -Provence (1990).
A paraître chez Birkhauser Verlag.

[5] **E.K. SKLYANIN,** *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation.*
Funct.Anal. Appl. 16 (1982) p. 263-270.

C. ROGER : U.R.A. CNRS n° 746 Laboratoire de Géométrie et Analyse - UCB Lyon I
43, boulevard du 11 novembre 1918 - 69622 Villeurbanne Cedex

M. ELGALIOU : Ecole Normale Supérieure de Marrakech. Marrakech (Maroc).

A. TIHAMI : Faculté des Sciences. Université Cadi Ayyad. Marrakech (Maroc)