DOUGLAS L. COSTA

Sur la condition de chaînes sur les annulateurs

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 7-11
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___3B_7_0>

SUR LA CONDITION DE CHAINES SUR LES ANNULATEURS

Douglas L. COSTA

INTRODUCTION.

Deux articles de Roitman [7,8] ont établi récemment que :

1). Si A est un anneau intègre de Mori contenant un corps k indénombrable, alors A[X] est de Mori ;

2). Il existe pour chaque corps k un anneau intègre de Mori A contenant k tel que A[[X]] n'est pas de Mori.

Querré a montré que A de Mori implique A[X] de Mori sous l'hypothèse que A soit intégralement clos [6]. Ce sont les seuls résultats définitifs sur la conjecture de Querré : A[X] est un anneau de Mori pour chaque anneau intègre de Mori.

Roitman a montré (1) en utilisant le fait qu'un anneau intègre A est de Mori si et seulement si pour chaque élément non nul $x \in A$, l'anneau quotient A/xA vérifie la condition chaîne sur les annulateurs (la $CC^{\perp}$). Et les exemples (2) viennent de la construction dans un anneau $B = k[\{X_\alpha\}]$ de polynômes sur le corps k d'un idéal homogène I tel que B/I ait la $CC^{\perp}$. Ainsi inspiré, je commence ici une étude des idéaux I dans un anneau commutatif R tels que R/I ait la $CC^{\perp}$.

1 - GENERALITES.

Soient L, M et N des modules sur l'anneau R et $f : M \times N \longrightarrow L$ une application R-bilinéaire. Pour chaque partie S de N on appelle l'***annulateur de*** S (par rapport à f) le sous-ensemble $S^{\perp} = \{x \in M \mid f(x,S) = 0\}$ de M. $S^{\perp}$ est un sous-module de M. On dit que M vérifie la <u>DCC</u>$^{\perp}$ (par rapport à f) si toute chaîne décroissante $S_1^{\perp} \supseteq S_2^{\perp} \supseteq \ldots$ d'annulateurs se stabilise. On définit la $ACC^{\perp}$ pour M, la $DCC^{\perp}$ pour N, et la $ACC^{\perp}$ pour N, de façon analogue. Si M vérifie à la fois la $DCC^{\perp}$ et la $ACC^{\perp}$, on dit que M a la $CC^{\perp}$.

Les arguments classiques de la dualité montrent qu'une partie E de M est un annulateur si et seulement si $E = E^{\perp\perp}$ et que $E^{\perp}$ est la plus grande partie S de N telle que $E = S^{\perp}$.

PROPOSITION 1.1 - *Soit* $f : M \times N \longrightarrow L$ *une application bilinéaire de* R-*modules. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1). M *a la* $DCC^{\perp}$ *(par rapport à* f*).*
2). N *a la* $ACC^{\perp}$.
3). *Chaque partie* S *de* N *contient un sous-ensemble fini* S_0 *tel que* $S^{\perp} = S_0^{\perp}$.
4). *Si* $\{x_i\}_{i \geqslant 1} \subseteq M$ *et* $\{y_i\}_{i \geqslant 1} \subseteq N$ *sont deux suites telles que* $f(x_n,y_i) = 0$ *pour* $n \geqslant 1$ *et* $i < n$, *alors* $f(x_n,y_n) = 0$ *pour* $n >> 0$.

De cette proposition on voit immédiatement que si $f : M \times M \longrightarrow L$ est ***symétrique***, les trois contiditions $DCC^{\perp}$, $ACC^{\perp}$, et $CC^{\perp}$ pour M sont équivalentes.

PROPOSITION 1.2 - *Soit* $f : M \times N \longrightarrow L$ *une application bilinéaire de* R-*modules, où* L *est un* R-*module noethérien. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1). M *a la* $DCC^{\perp}$.
2). M *a la* $ACC^{\perp}$.
3). M *a la* $CC^{\perp}$.
4). $M/N^{\perp}$ *est un* R-*module noethérien.*
5). $N/M^{\perp}$ *est un* R-*modules noethérien.*

2 - $CC^{\perp}$-ANNEAUX ET $CC^{\perp}$-IDEAUX.

On dit que l'anneau R est un $CC^{\perp}$ -anneau si la forme bilinéaire symétrique de multiplication $R \times R \longrightarrow R$ a la $CC^{\perp}$. Un idéal I dans un anneau R est appellé un $CC^{\perp}$ -idéal si l'anneau quotient R/I est un $CC^{\perp}$ -anneau.

Des conditions nécessaires pour la $CC^{\perp}$ sont données dans le théorème suivant.

THEOREME 2.1 - *Soit* R *un* $CC^{\perp}$*-anneau. Alors :*

1). *Le nilradical* $\sqrt{0}$ *de* R *est nilpotent.*

2). *Pour chaque partie* S *de* R, R/Ann(S) *a la* $CC^{\perp}$.

3). *Les idéaux premiers minimaux de* R *sont des annulateurs.*

4). $Ass_f(R) = Ass(R)$.

5). Ass(R) *est fini.*

6). *L'anneau total de fractions de* R, Tot(R), *est semi-local.*

7). $R / \sqrt{0}$ *a la* $CC^{\perp}$.

8). *Pour chaque partie multiplicative* S *de* R, *il existe un élément* $s^* \in S$ *tel que* $Ker(R \longrightarrow R_S) = Ann(s^*)$.

9). *Chaque localisé* R_S *de* R *a la* $CC^{\perp}$.

(On trouve dans (1) le livre [4] de Herstein. Roitman [7] a noté (2), (3), (4) et (7). La démonstration de (5) est comme celle de [5, Th. 2.1], et on en déduit (6) facilement. Heinzer and Lantz [3] ont montré (8) et (9)).

De (5), on voit que tout anneau absolument plat et non-noethérien, nous donne un exemple d'un anneau localement $CC^{\perp}$, mais pas $CC^{\perp}$.

Pour un anneau R, notons par Max Z(R) l'ensemble d'idéaux premiers maximaux dans l'ensemble de diviseurs de zéro. Nous donnons un critère local pour la $CC^{\perp}$.

THEOREME 2.2 - *Soit* R *un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1). R *a la* $CC^{\perp}$.

2). Tot(R) *a la* $CC^{\perp}$.

3). R *vérifie :*

   a). Max Z(R) *est fini,*

   b). $\forall P \in$ Max Z(R), $\exists s \in R \setminus P$ *tel que* $Ker(R \longrightarrow R_P) = Ann(s)$,

et c). R_P *a la* $CC^{\perp}$, *pour chaque* $P \in$ Max Z(R).

Pour étudier les $CC^{\perp}$ -idéaux, le lemme suivant est indispensable.

LEMME 2.3 - *Si* I *et* J *sont* $CC^{\perp}$ *-idéaux de* R, *alors* $I \cap J$ *est un* $CC^{\perp}$ *-idéal de* R.

On déduit de [5, (5.5) - (5.7)] qu'il existe un anneau R et un $CC^{\perp}$ -idéal I de R tel que I n'a pas de décomposition primaire. Mais si tous les idéaux premiers associés à I sont minimaux sur I, on a le résultat suivant.

THEOREM 2.4 - *Soit* I *un idéal dans un anneau* R *tel que* dim $\mathrm{Ass}_f(R/I) = 0$. *Alors* I *est un* $CC^{\perp}$ *-idéal si et seulement si* I *a une décomposition primaire* $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ *dont tous les primaires* Q_i *sont des* $CC^{\perp}$ *-idéaux.*

Ceci nous dit qu'il faut chercher les idéaux primaires Q qui sont $CC^{\perp}$ -idéaux. Soit P le radical de Q. Selon 2.1 (1), il est nécessaire qu'il existe un entier n tel que $P^n \subseteq Q$. Et selon 2.2, Q est un $CC^{\perp}$ -idéal si et seulement si $\mathrm{Tot}(R/Q) = R_P / Q R_P$ est un $CC^{\perp}$ -anneau. Donc, nous sommes réduits à considérer un anneau quasi-local

$\bar{R} = R_P / Q R_P$ d'idéal maximal $\bar{P} = P R_P / Q R_P$ tel que $\bar{P}^n = 0$.

Si $n \leqslant 2$, $\bar{P}$ est le seul annulateur non-trivial de $\bar{R}$, et donc $\bar{R}$ a la $CC^{\perp}$.
Si $\bar{P}$ est de type fini, $\bar{R}$ est noethérien, donc $CC^{\perp}$. Même si $\bar{P}$ / Ann $\bar{P}$ est de type fini, [2, Lemma 2.2] montre que $\bar{R}$ a la $CC^{\perp}$. Puisque $\bar{R}$ à la $CC^{\perp}$ si et seulement si la multiplication $\bar{P} \times \bar{P} \longrightarrow \bar{P}^2$ a la $CC^{\perp}$, la proposition 1.2 nous donne que si $\bar{P}^2$ est noethérien, R a la $CC^{\perp}$ si et seulement si $\bar{P}$ / Ann $\bar{P}$ est de type fini.

THEOREM 2.5 - *Soit* Q *un idéal* P*-primaire de l'anneau* R. *Soit* $n = \inf\{m/P^m \subseteq Q\} < \infty$. *Avec les notations ci-dessus,*

1). *Si* $n \leqslant 2$, Q *est un* $CC^{\perp}$ *-idéal.*

2). *Si* $\bar{P}$ / Ann $\bar{P}$ *est de type fini, alors* Q *est un* $CC^{\perp}$ *-idéal, et la réciproque est vraie lorsque* $\bar{P}^2$ *est noethérien.*

COROLLAIRE 2.6 - *Soient* R *un anneau et* $P_1,\ldots,P_n$ *des idéaux premiers sans relations d'inclusion entre-eux. L'intersection* $P_1^{(e_1)} \cap \ldots \cap P_n^{(e_n)}$ *est un* $CC^{\perp}$ *-idéal si pour tout* i, *ou bien* $e_i \leqslant 2$, *ou bien* P_i *est de type fini.*

Pour terminer, considérons le cas n = 3, c'est-à-dire que $\bar{P}^3 = 0$ et $\bar{P}^2 \neq 0$. La $CC^{\perp}$ pour R est encore équivalente à la $CC^{\perp}$ pour l'application bilinéaire de multiplication $\bar{P} \times \bar{P} \longrightarrow \bar{P}^2$. Parce que $\bar{P}^{\perp} = \mathrm{Ann}\,\bar{P} \supseteq \bar{P}^2$, puisque n = 3, c'est équivalent à considérer :

$$\bar{P} / \bar{P}^2 \times \bar{P} / \bar{P}^2 \longrightarrow \bar{P}^2 ,$$

une application bilinéaire symétrique des espaces vectoriels sur le corps $k = \bar{R} / \bar{P}$.

Réciproquement, si $f : V \times V \longrightarrow W$ est une application bilinéaire symétrique des k-espaces vectoriels telle que W est engendré par f(V,V), on peut définir un anneau local, gradué $\bar{R} = k \otimes V \otimes W$ avec $\bar{P} = V \otimes W$ l'idéal maximal, $\bar{P}^2 = W$, et $\bar{P} / \bar{P}^2 = V$. Donc, le cas n = 3 revient au cas général des espaces vectoriels. Si dim $W < \infty$, il suit de 1.3 que $V \times V \longrightarrow W$ a la $CC^{\perp}$ si et seulement si dim $V/V^{\perp} < \infty$. Si dim $W = \infty$, nous sommes face au noyau du problème.

(Pour les démonstrations et des exemples, voir [1]).

REFERENCES

[1] **D. COSTA**, Some remarks on the ACC on annihilators, Preprint.

[2] **W. HEINZER** and **D. LANTZ**, N-rings and ACC on colon ideals, J. Pure and App. Algebra, 32 (1984), 115-127.

[3] **W. HEINZER** and **D. LANTZ**, Universally contracted ideals in commuttive rings. Comm. in Algebra, 12 (1984), 1265-1289.

[4] **I. HERSTEIN**, Topics in Ring Theory, University of Chicago Press.

[5] **E. HOUSTON**, **T. LUCAS**, and **T. VISWANATHAN**, Primary decomposition of divisorial ideals in Mori domains, Preprint.

[6] **J. QUERRE**, Idéaux divisoriels d'un anneau de polynômes, J. Algebra 64 (1980), 270-284.

[7] **M. ROITMAN**, On Mori domains and commutative rings with $CC^{\perp}$. I, J. Pure and App. Algebra, to appear.

[8] **M. ROITMAN**, On Mori domains and commutative rings with $CC^{\perp}$. II, Queen's mathematical preprint 1987-7.