

J. M. GIRAL

**Sur la dépendance de l'homologie de Koszul par rapport  
aux générateurs d'un idéal**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1988, fascicule 3B  
, p. 65-68

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1988\\_\\_3B\\_65\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__3B_65_0)

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DEPENDENCE DE L'HOMOLOGIE DE KOSZUL PAR RAPPORT AUX GÉNÉRATEURS D'UN IDÉAL.

J.M. GIRAL

Soient  $A$  un anneau commutatif,  $\underline{x} : x_1, \dots, x_n$  une suite d'éléments de  $A$ . On associe à ces données le complexe (homologique) de Koszul

$$K(\underline{x}) : \dots \longrightarrow \bigwedge^p A^n \longrightarrow \bigwedge^{p-1} A^n \longrightarrow \dots \longrightarrow A^n \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

dont l'homologie est notée  $H(\underline{x})$ .

Soit  $I = (x_1, \dots, x_n)$  l'idéal de  $A$  engendré par  $x_1, \dots, x_n$ . Si on considère un autre système de générateurs de  $I$

$$I = (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$$

on se pose le suivant

Problème 1: Comparer  $H(\underline{x})$  et  $H(\underline{y})$

On doit répondre à cette question si l'on veut obtenir des invariants pour l'idéal  $I$  à travers de l'homologie de Koszul et, plus en général, si l'on veut obtenir des renseignements sur un idéal  $I$  en partant de n'importe quelle donnée de ses générateurs.

Si  $A$  est local et  $\underline{x}, \underline{y}$  sont deux systèmes minimaux engendrant  $I$  (donc  $n=m$ ), on passe d'un système à l'autre par une matrice  $n \times n$  inversible, et on déduit par functorialité un isomorphisme de complexes  $K(\underline{x}) \simeq K(\underline{y})$  et, bien sûr,  $H(\underline{x}) \simeq H(\underline{y})$ . (Ceci, étendu au cas gradué, est le résultat final de [4]). Avec un peu plus de travail, on prouve la même chose avec  $\underline{x}, \underline{y}$  deux systèmes de générateurs quelconque à  $n$  éléments. Alors il semble naturel se poser auparavant le

Problème 2 : Comparer  $K(\underline{x})$  et  $K(\underline{y})$ , si  $I = (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ .

On rappelle que le rang stable de  $A$  est le plus petit  $r$  vérifiant; pour toute ligne unimodulaire  $[a_0, \dots, a_r] \in A^{r+1}$ , il existe  $b_1, \dots, b_n \in A$  tels que la ligne  $[a_1 + b_1 a_0, \dots, a_r + b_r a_0] \in A^r$  est aussi unimodulaire. On a  $r=1$  si  $A$  est local, et Bass [1] a montré que l'on a  $r \leq d+1$  si  $A$  est noethérien avec  $\dim A = d$ .

Alors, en utilisant un résultat de Warfield sur l'équivalence de matrices (th. 9 de [8]), nous avons la réponse suivante au problème 2 ( $\mu(I)$  = nombre minimum de générateurs de  $I$ ).

Proposition 1: Soient  $I = (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $r$  le rang stable de  $A$ . Si  $n \geq \mu(I) + r$ , on a  $K(\underline{x}) \simeq K(\underline{y})$ ; et il suffit  $n \geq \mu(I) + r - 1$  si  $r \leq 2$  ou si l'on a cancellation pour les  $A$ -modules projectifs de type fini.

Ce résultat étend celui déjà vu pour le cas local. En général on ne peut pas améliorer la borne  $\mu(I) + r - 1$ :

Exemple 1. Soit  $A = \mathbb{Z}[T]/(5T)$ ,  $I = (\bar{T}) = (\overline{2T})$ . On a  $r=2$ ,  $\mu(I)=1$ , mais  $K(x_1) \not\simeq K(y_1)$ . (Cela revient à dire: bien que  $(x_1) = (y_1)$ , il n'existe pas d'unité  $a$  de  $A$  telle que  $x_1 = ay_1$ ).

Cependant dans cet exemple  $H_1(\underline{x}) = H_1(\underline{y})$ . En fait, en général on a  $H_0(\underline{x}) = A/I$ ,  $H_n(\underline{x}) = \text{Ann } I$ , donc le problème 1 n'a pas d'intérêt que lorsque  $n \geq 2$ . Par conséquent, on doit aborder directement le problème 1, non à travers du problème 2. Signalons ici que Gover et Ragusa montrent dans [3] que si on cherche un isomorphisme  $H_1(\underline{x}) \simeq H_1(\underline{y})$  induit par un morphisme de complexes  $K(\underline{x}) \xrightarrow{\varphi} K(\underline{y})$ , alors  $\varphi$  doit être déjà un isomorphisme.

Le premier résultat sur le problème 1 se trouve dans [5] :

Proposition 2 (Simis). Soit  $I = (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$  un idéal de  $A$ . On a un isomorphisme de  $A/I$ -modules

$$H_1(\underline{x}) \oplus (A/I)^m \simeq H_1(\underline{y}) \oplus (A/I)^n$$

Nous avons obtenu la généralisation suivante

Proposition 3. Pour chaque  $i \geq 0$ , on a un isomorphisme de  $A/I$ -modules

$$\bigoplus_{j=0}^m H_{i-j}(\underline{x}) \binom{m}{j} \simeq \bigoplus_{k=0}^n H_{i-k}(\underline{y}) \binom{n}{k}$$

Alors le problème 1 est une question de cancellation de  $A/I$ -modules, de nature très différente au problème 2. Comme résultat général on a:

Proposition 4. Soit  $I = (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$  un idéal de  $A$  tel que  $A/I$  est semilocal noethérien. On a pour tout  $i$

$$H_i(\underline{x}) \simeq H_i(\underline{y})$$

Cette proposition 4 n'est pas conséquence de la proposition 1 si le rang stable de  $A$  est  $> 1$ . Autres cas découlent de la proposition 2:

Corollaire 1 (Valla [7]). Soit  $I = (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$  un idéal de  $A$ . Si l'on a  $H_1(\underline{x}) = 0$ , alors  $H_1(\underline{y}) = 0$

Corollaire 2. Soit  $I = (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_{n+1})$  un idéal de  $A$ . Si l'on a  $H_1(\underline{x}) = 0$ , alors  $H_1(\underline{y}) = A/I$ .

Avec les théorèmes de cancellation de Bass [1] et Suslin [6], on obtient (Max = spectre maximal)

Corollaire 3. Soit  $A$  un anneau noethérien,  $I = (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$  un idéal de  $A$ . Si  $n > \dim \text{Max}(A/I)$ , on a

$$H_1(\underline{x}) \cong H_1(\underline{y})$$

Si  $A$  est une  $k$ -algèbre de type fini sur un corps  $k$  algébriquement clos, il suffit que  $n \geq \dim(A/I)$ .

Dans son article [5] Simis suggère que la liberté du  $A/I$ -module  $H_1(\underline{x})$  pourrait être indépendant de  $\underline{x}$ . L'exemple suivant montre que  $n$ 'est pas ainsi en général.

Exemple 2. Soient  $\mathbb{R}$  le corps réel,  $B = \mathbb{R}[X, Y, Z] / (X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$ ,  $x, y, z$  les images de  $X, Y, Z$ . Soit  $A = B[T]$ ,  $I$  l'idéal de  $A$  engendré par  $T$ . On a  $I = (T) = (xT, yT, zT)$ ,  $H_1(T) = 0$  et

$$H_1(xT, yT, zT) \otimes A/I \cong (A/I)^3$$

mais  $H_1(xT, yT, zT)$  n'est pas libre sur  $A/I = B$ .

Cet exemple est dans quelques aspects minimal, en vue des corollaires 2 et 3 ci-dessus. En répétant trois fois le générateur  $T$  on trouve un contre-exemple à la détermination univoque de  $H_1(\underline{x})$  avec  $n=3$ . La construction est fondée dans la proposition suivante.

Proposition 5. Soient  $A$  un anneau,  $[a_1, \dots, a_n]$  une ligne unimodulaire de  $A$ ,  $P = \text{Ker}(A^n \xrightarrow{[a_1, \dots, a_n]} A)$ . On suppose que  $x$  est non diviseur de zéro dans  $A$  tel que le  $B = A/(x)$ -module  $P/xP$  n'est pas libre. Si l'on pose  $y_i = a_i x$ , alors  $H_1(y_1, \dots, y_n)$  n'est pas  $B$ -libre et

$$H_1(\underline{y}) \otimes B \cong B^n$$

On peut ainsi construire d'autres exemples sur  $n$ 'importe quel corps  $k$ ; c'est le cas si l'on prend l'anneau  $B = k[X_1, \dots, X_6] / (X_1 X_4 + X_2 X_5 + X_3 X_6 - 1)$ . Quelques de ces résultats ont été annoncés dans [2].

## BIBLIOGRAPHIE

- 1.- H. BASS, K-Theory and stable algebra, Publ. Math. I.H.E.S. 22 (1964),5-60.
- 2.- J.M. GIRAL, On the dependence of Koszul homology from the generators of an ideal, Extracta Math. 1 (3) (1986), 121-123.
- 3.- E. GOVER, A. RAGUSA, Koszul complexes with isomorphic homology, Math. Scand. 60 (1987), 39-51.
- 4.- D. KIRBY, Isomorphic Koszul complexes, Mathematika 20 (1973), 53-57.
- 5.- A. SIMIS, Koszul homology and its syzygy-theoretic part, J. Algebra 55 (1978), 28-42.
- 6.- A.A. SUSLIN, A cancellation theorem for projective modules over algebras, Soviet Math. Dokl. 18 (1977), 1281-1284.
- 7.- G. VALLA, Remarks on generalized analytic independence, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. 85 (1979), 281-289.
- 8.- R.B. WARFIELD, Stable equivalence of matrices and resolutions, Comm. Algebra 6 (17) (1978), 1811-1828.