PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

D. NOUR-EL-ABIDINE

Les idéaux transformés et l'anneau $R^{\#}$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 51-57
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___3B_51_0>

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I

INSTITUT DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

Laboratoire d'ALGEBRE

LES IDEAUX TRANSFORMES ET L'ANNEAU $R^{\#}$

D. NOUR-EL-ABIDINE

INTRODUCTION.

Ce travail s'inspire d'un article intitulé : ≪ Ideals trasforms and overring of a quasilocal intégral domain ≫ de David F. ANDERSON et Alain BOUVIER.

Soit R un anneau intègre commutatif et unitaire. Désignons par K = Frac(R) le corps des fractions de R. On pose : $R^{\#} = \bigcap_{x \in R^* - U(R)} R_x$, avec $R_x = R[\frac{1}{x}]$, et U(R) l'ensemble des éléments inversibles dans R. On rappelle que, si R est non local $R^{\#} = R$. De ce fait, on restreint notre travail aux anneaux locaux.

1). Soient T un anneau et M un idéal maximal de T. Soit D un sous-anneau de K, où $K = T/M$. Posons $R = \varphi^{-1}(D)$ où φ est la surjection canonique de T dans K. L'anneau R est appelé un produit fibré. Notre but, dans ce paragraphe est de déterminer l'anneau $R^{\#}$, lorsque R est un produit fibré. Le résultat du [[1] Th. 16] sera un cas particulier (voir Th. 11).

2). Dans ce paragraphe, on détermine une application naturelle qui relie

$$\mathrm{Spec}(R^{\#}[X_1,\ldots,X_n]) \text{ et } \mathrm{Spec}(R[X_1,\ldots,X_n])$$

pour n donné quelconque, généralisant ainsi [[1], Th. 37], qui induit une bijection entre

$$X^{(n)}_{R^{\#}} = \{Q^{\#}, Q^{\#} \in \mathrm{Spec}(R^{\#}[X_1,\ldots,X_n]) \,/\, Q^{\#} \cap R \neq M\}$$

et

$$Y^{(n)} = \{Q \in \mathrm{Spec}(R[X_1,\ldots,X_n]) \,/\, Q \cap R \neq M\}.$$

On remarque que le comportement des éléments de $\mathrm{Spec}(R^{\#}[X_1,\ldots,X_n])$ pour n donné, vis à vis de ceux de $\mathrm{Spec}(R[X_1,\ldots,X_n])$ est le même que, si on prend un suranneau A de R tel que,

$R \subset A \subset R^{\#}$. On établit d'une manière analogue une relation entre $\mathrm{Spec}(A[X_1,\ldots,X_n])$ et $\mathrm{Spec}(R[X_1,\ldots,X_n])$.

3). Dans [4], il est établi que si R est noethérien avec R local et A un suranneau de R tel que $R \subseteq A \subseteq R^{\#}$, alors A est noethérien. Sachant qu'un anneau noethérien est un anneau de Jaffard. On peut poser la question suivante : si (R,M) est de Jaffard et si A est un suranneau de R tel que, $R \subseteq A \subseteq R^{\#}$, est-ce que A est de Jaffard ? Le problème est toujours ouvert, cependant on va énoncer une proposition (prop. 3.1) qui nous donne des renseignements sur $A[X_1,\ldots,X_i]$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$.

4). Dans ce paragraphe, on va donner une grande classe d'anneaux R qui vérifie $R^{\#} \neq R_S$, pour toute partie multiplicative S de R. Parmi ces anneaux, il y a les anneaux noethériens locaux dont l'idéal maximal est de grade 1, ensuite à l'aide des "D + M" on va construire d'autres exemples non triviaux.

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs, intégrés et unitaires. Les nombres entre [ ] font référence à la bibliographie placé à la fin de ce document, ceux entre parenthèses ( ) renvoient aux résultats de ce travail. Les notations et les résultats préliminaires sont deux de [1].

1 - Calcul de $R^{\#}$ lorsque R est un produit fibré.

Soient T un anneau, M un idéal maximal de T, et $K = T/M$. Soit $\varphi : T \longrightarrow T/M = K$ la surjection canonique et soit D un sous-anneau du corps K. Posons $R = \varphi^{-1}(D)$. On aura le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads] \arrow[d] & D \arrow[d] \\ T \arrow[r, two heads, "\varphi"] & K \end{tikzcd}$$

<u>Notation</u> : $R = T \underset{K}{\times} D$ voir [3]. R est appelé produit fibré de T et D au-dessus de K. On va déterminer $R^{\#}$, lorsque R est un produit fibré.

THEOREME 1.1 - *Supposons qu'on est dans les mêmes conditions précédentes, c'est-à-dire* $R = T \underset{K}{\times} D$, *alors :*

(a). *Si* T *est non local alors* R *est non local par suite* $R^{\#} = R$.

(b). *Si* (T,M) *est local d'idéal maximal* M, *alors :*

(α). *Si* D *est un corps,* $R^{\#} = T^{\#}$.

(β). *Si* D *n'est pas un corps,* $R^{\#} = T \underset{K}{\times} D^{\#}$.

REMARQUE 1.1 - Si T est non local et D n'est pas un corps en général : $R^{\#} \neq T \underset{K}{\times} D^{\#}$.

CONTRE-EXEMPLE 1.1 - Prenons :

$$\begin{cases} T = K(X) + YK(X)[Y] = K(X)[Y] \\ D = K[X]_{(X)} \end{cases}$$

Prenons comme idéal maximal de T, M = YT. On a : $D^{\#} = K(X)$[[1], Th. 1.2]. Soit :

$$\varphi : T \longrightarrow T/M = K(X).$$

On aura :

$$\varphi^{-1}(K(x)) = T = \varphi^{-1}(D^{\#}).$$

R est non local, donc $R^{\#} = R$, d'où : $R^{\#} \neq T \underset{K(X)}{\times} D^{\#}$.

REMARQUE 1.2 - Le résultat de [[1], Th. 1.6] sera un cas particulier du Th. 1.1. En effet : si T = L + M où M est l'idéal maximal de T et L est un corps, et si R = D + M avec $D \subsetneq L$, alors :

1). Si D est un corps $R^{\#} = T^{\#}$.

2). Si D n'est pas un corps $R^{\#} = D^{\#} + M$.

2 - Etude du spectre de $R^{\#}[X_1,\ldots,X_n]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On va donner un théorème plus général qui sera une généralisation du [[1], Th. 37] reliant le spectre de $R^{\#}[X_1,\ldots,X_n]$ et le spectre de $R[X_1,\ldots,X_n]$.

THEOREME 2.2 - *Soit* R *un anneau local d'idéal maximal* M (dim R $\geq$ 2). Alors l'application définie :

$$\varphi^{(n)}_{R^{\#}} : \mathrm{Spec}(R^{\#}[X_1,\ldots,X_n]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R[X_1,\ldots,X_n])$$

$$Q^{\#} \longrightarrow Q^{\#} \cap R[X_1,\ldots,X_n]$$

induit une bijection entre :

$$X^{(n)}_{R^{\#}} = \{Q^{\#} \in \mathrm{Spec}(R^{\#}[X_1,\ldots,X_n]) \,/\, Q^{\#} \cap R = \neq M\}$$

et

$$Y^{(n)} = \{Q \in \mathrm{Spec}(R[X_1,\ldots,X_n]) \,/\, Q \cap R \neq M\}.$$

De plus si :

$$Q^{\#} \in X^{(n)}_{R^{\#}}\text{, on a : } \quad (R^{\#}[X_1,\dots,X_n])_{Q^{\#}} \simeq (R[X_1,\dots,X_n])_{Q^{\#} \cap R[X_1,\dots,X_n]}.$$

COROLLAIRE 2.1 - *Soit* R *un anneau, alors :*

$$\operatorname{Dim} R^{\#}[X_1,\dots,X_n] \geq \dim R[X_1,\dots,X_n] - (n+1).$$

REMARQUE 2.3 - Pour n = 0, on retrouve le résultat du [[1], Th. 3.7] et du [Corollaire 3.8 [1]].

COROLLAIRE 2.2 - *Soit* (R,M) *un anneau local* (dim R ≥ 2) *d'idéal maximal* M, *soit* A *un suranneau de* R *tel que :* $R \subsetneq A \subsetneq R^{\#}$. *On pose :*

$$X^{(n)}_{A} = \{Q \in \operatorname{Spec}(A[X_1,\dots,X_n]) \,/\, Q \cap R \not\simeq M\}.$$

Alors l'application $\varphi^{(n)}_{A}$ *définie par :*

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(A[X_1,\dots,X_n]) &\longrightarrow \operatorname{Spec}(R[X_1,\dots,X_n]) \\ Q &\longrightarrow Q \cap R[X_1,\dots,X_n] \end{aligned}$$

induit une bijection entre $X^{(n)}_{A}$ et $Y^{(n)}$ *où* $Y^{(n)} = \{Q \in \operatorname{Spec}(R^{(n)}) \,/\, Q \cap R \not\simeq M\}$. *De plus, si :*

$$Q \in X^{(n)}_{A}\text{, on a : } \quad (A[X_1,\dots,X_n])_{Q} \simeq (R[X_1,\dots,X_n])_{Q \cap R[X_1,\dots,X_n]}.$$

REMARQUE 2.4.

(a). On remarque que si $Q \in X^{(n)}_{A}$, alors :

$$Q = (Q \cap R[X_1,\dots,X_n])^{\#} \cap A[X_1,\dots,X_n]$$

avec

$$(Q \cap R[X_1,\dots,X_n])^{\#} = (Q \cap R[X_1,\dots,X_n])_x \cap R^{\#}[X_1,\dots,X_n],$$

pour $x \in M - Q \cap R$.

(b). On montre de la même façon que le corollaire 2.1, que :

$$\dim A[X_1,\dots,X_n] \geq \dim R[X_1,\dots,X_n] - (n+1) \quad \forall \mid R \subsetneq A \subsetneq R^{\#}.$$

3 - Etude de la notion de Jaffard de $R^{\#}$.

Soit (R,M) un anneau local, d'idéal maximal M. Si R est de Jaffard [3] que peut-on dire de A, tel que : $R \subseteq A \subseteq R^{\#}$? Plus précisément est-ce que A est de Jaffard ?

Le problème est toujours ouvert. On va énoncer une proposition qui nous donne le renseignement sur $A[X_1,\dots,X_i]$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$.

PROPOSITION 3.1 - *Soit R un anneau local d'idéal maximal M de dimension finie. Alors $\forall A$ tel que $R \subseteq A \subseteq R^{\#}$, $A[X_1,\dots,X_{\dim R-1}]$ est de Jaffard.*

REMARQUE 3.5.

(a). Si on supprime dans la proposition 3.1 l'hypothèse R est de Jaffard, le résultat ne reste plus vrai.

CONRE-EXEMPLE.

$$V = K(X_1,\dots,X_n) + \overbrace{Y\,K(X_1,\dots,X_n)[[Y]]}^{M} = K(X_1,\dots,X_n)[[Y]].$$

L'anneau des séries formelles à coefficients dans $K(X_1,\dots,X_n)$. Posons :

$$R = K[X_1]_{(X_1)} + M.$$

On montre que : $\dim R[Z] = 3$, $\dim_v R^{\#} = n$ et $\dim R = 2$. On aura :

$$\dim_v R^{\#}[Z] = n + 1 \text{ et } \dim R^{\#}[Z] = 3.$$

Si on prend $n \geq 3$, $R^{\#}[Z_1,\dots,Z_{\dim R-1}] = R^{\#}[Z]$ n'est pas de Jaffard.

(b). Le fait que $R^{\#}$ est de Jaffard n'a aucune influence sur la dimension valuative de $R^{(i)} = R[X_1,\dots,X_i]$ pour $i \in \mathbb{N}$. On va exhiber un exemple qui vérifie les propriétés suivantes :

1°). $R^{\#}$ est de Jaffard.

2°). $\dim_v R = \infty$ c'est-à-dire $R[X_1,\dots,X_i]$ est non de Jaffard, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE - Soient K un corps et $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ une collection d'indéterminées sur K tel que le cardinal de I soit infini. Posons :

$$\begin{cases} L = K(X_\alpha)_{\alpha \in I} \text{ corps des fractions de } K[X_\alpha]_{\alpha \in I} \\ V = L + M = L[[Y]] \text{ l'anneau des séries formelles à coefficients dans } L \\ R = K + M \text{ où } M = YL[[Y]] \end{cases}$$

On remarque que $R^{\#} = L((Y))$ [[1], Th. 1.6] corps des fractions de $L[[Y]]$, et $\dim_v R = \infty$. Par suite R vérifie les propriétés 1) et 2) de la remarque 3.5 précédente.

4 - Autres exemples vérifiant $R^{\#} \not\simeq R_S$, où S partie multiplicative de R quelconque.

THEOREME 4.3 - *Soit* R *un anneau noethérien local d'idéal maximal.* M, ($\dim R \geq 2$), *et tel que* $\mathrm{grad}(M) = 1$. *Alors* $R^{\#} \not\simeq R_S$ *quel que soit* S *partie multipicative de* R.

EXEMPLES.

1).

$$R_1 = K\Big[\Big[X_1^2, X_2^2, \ldots, X_n^2, \underset{i \neq j}{X_i.X_j}, X_1^3, \ldots, X_n^3, \underset{\substack{i \neq j \\ j \neq k \\ k \neq i}}{X_i.X_j.X_k}\Big]\Big]$$

on montre que $\mathrm{grad}(M_{R_1}) = 1$ ou M_{R_1} est l'idéal maximal de R. Par suite R_1 vérifie les conditions du Th. 4.3, donc $R_1^{\#} \not\simeq R_S$, $\forall$ S partie multiplicative.

2). On prend A principal, p est un élément irréductible de A. On pose :

$$C = A[pX, X^2, X^3],$$

on montre que l'idéal maximal M_c de C est de grade 1 avec $M_c = (p, pX, X^2, X^3)$

Si on pose $R_2 = C_{M_c}$, l'idéal maximal de R_2 est de grade 1. R_2 vérifie les conditions du Th. 4.3.

On va donner une condition suffisante pour que $R^{\#}$ soit une extension entière de R.

PROPOSITION 4.2 - *Soit* R *un anneau local d'idéal maximal* M. *Et si s'il existe* B *une extension entière de* R, *de Krull vérifiant* $X'(B) \cap \mathrm{Max}(B) = \Phi$ *(ensemble vide). Alors* $(X'(B)) = \{P \in \mathrm{Spec}(B) \,/\, \mathrm{ht}P = 1\})$. $R^{\#}$ *est une extension entière de* R *et de plus* $R^{\#} \subseteq B$.

EXEMPLES.

(a). Si on prend $B = K[[X_1, \ldots, X_n]]$ l'anneau des séries formelles à plusieurs indéterminées à coefficients dans K. On pend l'anneau R_1 (exemple 1)). On montre que B est entier sur R_1 et B vérifie les conditions de la prop. 4.1 donc on aura $R^{\#} \subseteq B$.

(b). Si on prend R_2 (exemple 2) et $B = A[X]_{(p,pX,X^2,X^3)}$. De le même façon, le couple (R_2,B) vérifie les conditions de la prop. 4.2 donc $R_2^\# \subseteq B$, par suite $R_2^\#$ est une extension entière de R_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **D. ANDERSON, A. BOUVIER**, "Ideal Transforms and overring of a quasilocal Integral Domain".

[2] **A. BOUVIER and M. ZAFRULLAH**, On some classe groupe of an integral domain (preprint).

[3] **D.F. ANDERSON, A. BOUVIER, D.E. DOBBS, M. FONTANA and S. KABBAJ**, On JAFFARD Domains Expositiones. Math. Bib. Institut & F.A. Brockhans AG (à paraître).

[4] **J. MATIJEVIC**, Maximal ideal Transforms of noetherian rings. P.A. MC Volume 54 january 1976.

[5] **S. KABBAJ**, La formule de la dimension pour les S.D. forts universels. Boll. Un. Math. Ital. Algebra et Geometria, Serie VI, Vol. V-D, n°1, 1986, p. 145.