

ANNE-MARIE NICOLAS
Constructions d'anneaux n -acc

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 21-23

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__3B_21_0

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Constructions d'anneaux n-acc.

Anne - Marie NICOLAS

Université de Limoges

Les anneaux n-acc ($n \geq 1$ étant un entier donné) sont les anneaux tels que toute suite croissante d'idéaux engendrés par n générateurs est stationnaire. Les anneaux noetheriens sont n-acc pour tout entier n , mais il existe des anneaux n-acc pour tout n , non noetheriens, par exemple $k[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ où k est un corps (cf. [4]). D'autre part, si $V = K + M$ est un anneau de valuation discrète, et si k est un sous-corps de K tel que $[K : k]$ soit infinie, alors l'anneau $k + M$ est n-acc pour tout n sans être noetherien.

L'étude qui a abouti aux résultats présentés ici, était motivée par les problèmes suivants : les anneaux $k + XK[X]$ (où k est un sous-corps de K), $\mathbb{Z} + 2X\mathbb{Z}[X]$, étaient-ils n-acc pour tout n ? Est-ce que la propriété n-acc de $K[X]$ et de $\mathbb{Z}[X]$ descendait, alors que la propriété noetherienne ne descendait pas ?

Théorème 1 cf. [1]. Soient A et B deux anneaux unitaires tels que $A \subset B$ et tels que B soit un anneau n-acc. On suppose qu'il existe un idéal bilatère M qui est à la fois un idéal de A et de B et tel que l'anneau A/M soit parfait à droite. Alors A est un anneau n-acc.

Corollaire 1 Soit $V = L + M$ un anneau commutatif n-acc, où M est un idéal de V et L un sous-anneau de V . Soit k un sous-corps de L . Alors l'anneau $k + M$ est un anneau n-acc.

On en déduit les exemples suivants d'anneaux n-acc pour tout n :

Exemple 1 $k + XK[X]$ où k est un sous-corps de K .

Exemple 2 $k + XK[X, Y]$

Exemple 3 $k + X_i K[X_1, \dots, X_i, \dots, X_n, \dots]$

Exemple 4 $k + X^r T[X]$ où T est noetherien, k est un sous-corps de T , r est un entier positif.

Corollaire 2 Soient $R \subset B$ deux anneaux commutatifs et M un idéal de R tel que $R \cap MB$ soit maximal dans R . Si l'anneau B est n-acc, alors l'anneau $A = R + MB$ est n-acc.

Exemple 5 $\mathbb{Z} + pX\mathbb{Z}[X]$ où p est premier.

($R = \mathbb{Z}$, $M = p\mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Z} + (p\mathbb{Z})\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z} + pX\mathbb{Z}[X]$.)

Exemple 6 Si R est noetherien commutatif unitaire intègre et si M est un idéal maximal de R , les anneaux $R + M R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ et $R + M R[X_1, \dots, X_n, \dots]$ sont n -acc pour tout n .

Théorème 2 cf.[7]. Soient $A = D + M$ et $B = L + M$ deux anneaux commutatifs unitaires intègres tels que D et L sont des anneaux vérifiant $D \subset L$ et tels que M est un idéal de A et de B (non nécessairement maximal).

On suppose que L est de type fini sur D et que l'anneau D est tel que tout D -module de type fini est ℓ -acc pour tout entier $\ell > 0$.

Alors si l'anneau B est n -acc, l'anneau A est n -acc.

Exemple 7 $A = K[X_2^2, X_3, \dots, X_n, \dots] + X_1 K[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ est n -acc pour tout n .

Il suffit de prendre $L = K[X_2, X_3, \dots, X_n, \dots]$, $B = K[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots] = L + X_1 L[X_1]$.

$D = K[X_2^2, X_3, \dots, X_n, \dots]$. L'anneau D est cohérent et ℓ -acc pour tout ℓ et par conséquent tout D -module de type fini est ℓ -acc pour tout ℓ (cf. [5]).

Problème de la descente n -acc.

P.M. EAKIN a montré que si $A \subset B$, où B est un anneau noetherien et un A -module de type fini, alors l'anneau A est noetherien.

Le problème est le suivant : si $A \subset B$, où B est n -acc et de type fini sur A , est-ce que l'anneau A est n -acc ?

Terminons en remarquant que le théorème 1 peut s'appliquer à un anneau étudié dans [2] par V. BARUCCI, D.E. DOBBS et M. FONTANA qui montrent que cet anneau est un anneau de Mori, donc 1-acc, "conducive". Cet anneau est en effet n -acc pour tout n :

Exemple 8 Soit $V = K[[X]]$, où K est un corps, L_0 un sous-corps de K , et pour

$j = 1, \dots, k$, L_j un sous L_0 -espace vectoriel de K , vérifiant $L_i L_j \subset L_{i+j}$. (avec $L_{i+j} = K$ si $i+j > k-1$).

On suppose que K est de dimension infinie sur L_0 et que L_j est de dimension finie sur L_0 ($0 \leq j \leq k-1$).

Alors l'anneau $A = L_0 + X L_1 + X^2 L_2 + \dots + X^{k-1} L_{k-1} + X^k V$ est un anneau de Mori, conducive, non noetherien, qui est n -acc pour tout entier n .

Bibliographie

- [1] **M.E. ANTUNES SIMOES et A.M. NICOLAS**
Exemples d'anneaux n -acc.
Communications in Algebra 12 (13), 1653-1665, (1984).
- [2] **V. BARUCCI, D.E. DOBBS et M. FONTANA.**
Conducive integral domains as pullbacks.
Manuscripta Mathematica, 54, 261-277, (1986).
- [3] **D.E. DOBBS et R. FEDDER.**
Conducive integral domains.
Journal of Algebra, 86, 494-510, (1984).
- [4] **W. HEINZER et D. LANTZ.**
Commutative rings with a.c.c. on n -generated ideals.
Journal of Algebra, 80, 261-278, (1983).
- [5] **A.M. NICOLAS.**
Sur les modules tels que toute suite croissante de sous-modules engendrés par n générateurs soit stationnaire.
Journal of Algebra, 60, 249-259, (1979).
- [6] **A.M. NICOLAS**
Thèse : Modules factorables, modules n -acc.
Université de Limoges 1981.
- [7] **A.M. NICOLAS.**
Constructions d'anneaux n -acc.
Publications du département de Mathématiques de Limoges.
Fascicule n° 9, 1987.