

A. COSTE

D. SONDAZ

Chapitre III Classification de submersions de Poisson isotropes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 1B
« Séminaire Sud-Rhodanien 1ère partie », , p. 91-102

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__1B_91_0

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CLASSIFICATION DE SUBMERSIONS
DE POISSON ISOTROPES

A. COSTE - D. SONDAZ

1. INTRODUCTION.

Dans cet article nous considérons une submersion de Poisson d'une variété symplectique (M, σ) sur une variété de Poisson (P, Λ) telle que les $f^{-1}(x)$ soient isotropes et vérifient diverses hypothèses de connexité et de complétude. Désignant par \mathcal{A} le feuilletage canonique de P et par $\nu^* \mathcal{A}$ son fibré conormal, nous construisons un sous-faisceau \mathcal{R} du faisceau des sections de $\nu^* \mathcal{A}$ tel qu'en tout point $x \in P$, \mathcal{R}_x soit un sous-groupe discret de $\nu_x^* \mathcal{A}$ et tel que $\nu^* \mathcal{A} / \mathcal{R} \rightarrow P$ fournisse un modèle local de $f : M \rightarrow P$. Le cas où f est une fibration lagrangienne a été étudié par DUISTERMAAT ([6]). P. DAZORD et T. DELZANT ([3], [4], [5]) ont généralisé ce résultat au cas où f est une fibration isotrope symplectiquement complète à fibres compactes. La principale différence avec notre travail réside dans le fait que le rang de \mathcal{R}_x varie avec x et que \mathcal{R} n'est plus un revêtement de P . Cela permet néanmoins d'étendre un autre résultat démontré par ces auteurs : on peut définir une classe de Chern $\nu \in H^2(P, \mathcal{R})$ de la submersion f reliée à une classe de cohomologie relative $[\mathcal{A}] \in H^3(P, \mathcal{A})$ ([10]) par un morphisme $\tilde{d} : H^2(P, \mathcal{R}) \rightarrow H^3(P, [\mathcal{A}])$ suivant la formule $d\nu = [\mathcal{A}]$ qui traduit une "variation linéaire" de la forme symplectique des feuilles de \mathcal{A} . Réciproquement la donnée d'une variété de Poisson (P, Λ) munie d'un réseau permet de classifier les réalisations symplectiques ([11]) de (P, Λ) associées à \mathcal{R} .

Les auteurs tiennent à remercier P. DAZORD pour de nombreux conseils et encouragements.

2. HYPOTHESES.

On suppose données une \mathcal{C}^∞ -variété symplectique (M, σ) de dimension $2n$, une \mathcal{C}^∞ -variété de Poisson (P, Λ) , une submersion de Poisson de classe \mathcal{C}^∞ f de M sur P telle que, pour tout $x \in P$, les $f^{-1}(x)$ soient connexes et que le feuilletage \mathcal{V} de M par les $f^{-1}(x)$ soit isotrope symplectiquement complet ([3], [4],[5]).

Soient \mathcal{L} le feuilletage caractéristique de P , $\nu^*\mathcal{L}$ le fibré conormal à \mathcal{L} , $n-k$ la dimension de \mathcal{V} . Alors $\dim P = n+k$, $\dim \nu_x^*\mathcal{L} = n-k$, $\dim \nu^*\mathcal{L} = 2n$, $\dim \mathcal{L} = 2k$.

P est donc une variété de Poisson régulière.

On désignera par $\pi : T^*P \rightarrow P$ la projection canonique, par $\mathcal{C}^\infty(\nu_p^*\mathcal{L})$ (resp. $Z(\nu_p^*\mathcal{L})$) le faisceau des p -formes différentielles sur P conormales ([3], [4], [5]) à \mathcal{L} (resp. des $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\nu_p^*\mathcal{L})$ fermées). Pour $p=1$, on écrira simplement $\mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{L})$ et $Z(\nu^*\mathcal{L})$.

3. ACTION DE $\nu_x^*\mathcal{L}$ SUR $f^{-1}(x)$.

Si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{L})$ on définit le champ de vecteurs $X^\alpha \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ par

$$i_{X^\alpha} \sigma = -f^* \alpha$$

X^α est alors tangent à \mathcal{V} . On suppose que les feuilles $f^{-1}(x)$ sont complètes pour la connexion canonique plate ([2]). Les flots φ^α des X^α sont par conséquent complets.

On définit une action du groupe abélien $\nu_x^*\mathcal{L}$ sur la feuille $f^{-1}(x)$ par

$$\alpha.y = \varphi_1^\alpha(y), \quad \forall y \in \nu_x^*\mathcal{L}, \quad \forall y \in f^{-1}(x).$$

Soit $\mathfrak{R}_x = \{ \alpha \in \nu_x^*\mathcal{L} ; \alpha.y = y, \quad \forall y \in f^{-1}(x) \}$.

On remarque que $\alpha \in \mathfrak{R}_x \Leftrightarrow \exists z \in f^{-1}(x), \alpha.z = z$ et que \mathfrak{R}_x est un sous - groupe discret de $\nu_x^* \mathcal{A}$ (pour des raisons de dimension).

On pose $\mathfrak{R} = \bigcup_{x \in P} \mathfrak{R}_x$.

Pour tout point $x_0 \in P$ il existe une section s de f définie dans un voisinage ouvert U de x_0 et

$$x \in U, \alpha \in \mathfrak{R}_x \Leftrightarrow \varphi_1^\alpha(s(x)) = s(x).$$

L'application $\alpha \mapsto F_s(\alpha) = \varphi_1^\alpha(s(\pi(\alpha)))$ est un difféomorphisme local. C'est l'existence de sections locales de f qui permet d'établir le lemme et le théorème suivants qui sont les outils permettant d'étendre les résultats de [3] , [4] ,[5] au cas d'une submersion.

4. LEMME. *Pour tout $x_0 \in P$ et tout $\alpha_0 \in \mathfrak{R}_{x_0}$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans P , un voisinage ouvert W de α_0 dans $\nu^* \mathcal{A}$ et une unique section η de $\nu^* \mathcal{A}$ définie dans U tels que $\eta(x_0) = \alpha_0$ et $\eta(U) = \mathfrak{R}_U \cap W$.*

Preuve. On se donne une section s de f définie au voisinage de x_0 . On est ramené à montrer l'existence d'une section η définie au voisinage de x_0 vérifiant $F_s(\eta(x)) = s(x)$.

Compte tenu de ce que F_s est un difféomorphisme local, le théorème des fonctions implicites permet de conclure.

5. COROLLAIRES.

- i) \mathfrak{R} s'identifie au faisceau des germes de ses sections.
- ii) La topologie de faisceau de \mathfrak{R} est identique à la topologie induite par $\nu^* \mathcal{A}$.

Preuve.

i) est évident.

ii) Le lemme montre que la topologie induite est plus fine que la topologie de faisceau.

Réciproquement si A est un voisinage ouvert de α_0 pour la topologie induite,

$A = \mathfrak{R}_{\pi(\nu)} \cap V$ où V est un ouvert de $\nu^* \mathcal{A}$ contenant α_0 . On applique le lemme en

$x_0 = \pi(\alpha_0)$ et en α_0 : en restreignant au besoin U et W on peut supposer que

$\pi(W) = U$ et que $W \subset V$. Alors $\eta(U) = \mathfrak{R}_U \cap W \subset \mathfrak{R}_{\pi(\nu)} \cap V = A$.

6. THEOREME.

a) \mathfrak{R} est un sous-faisceau de $\mathfrak{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A})$ et une sous-variété fermée de $\nu^* \mathcal{A}$ de dimension $n+k$.

b) On peut munir $\nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R}$ d'une unique structure de variété séparée faisant de la projection canonique $\rho : \nu^* \mathcal{A} \rightarrow \nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R}$ une submersion.

Preuve.

a) résulte facilement de ce qui précède.

Pour montrer b) posons :

$$\mathfrak{C} = \{(\alpha, \beta) \in \nu^* \mathcal{A} \times \nu^* \mathcal{A} ; \alpha - \beta \in \mathfrak{R}\}$$

\mathfrak{C} est une sous-variété fermée de $\nu^* \mathcal{A} \times \nu^* \mathcal{A}$.

Si $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathfrak{C}$, le lemme montre l'existence d'une section η de $\nu^* \mathcal{A}$ définie sur un voisinage U de $x_0 = \pi(\alpha_0 - \beta_0)$ telle que $\eta(U) \subset \mathfrak{R}$. L'application

$s(\alpha) = (\alpha, \alpha + \eta(\pi(\alpha)))$ est une section de la première projection de \mathfrak{C} dans $\nu^* \mathcal{A}$ qui est ainsi une submersion.

Le théorème de Godement sur les variétés quotients donne alors ce que nous voulons.

Remarque. La principale différence avec les résultats analogues établis dans [3], [4], [5] est que le rang de \mathfrak{R}_x dépend de x .

7. COROLLAIRE. Localement, $\nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R} \rightarrow P$ est un modèle de $f : M \rightarrow P$. En effet, si $\tilde{\alpha}$ désigne la classe de $\alpha \in \nu^* \mathcal{A}$ modulo \mathfrak{R} , si $\tilde{\pi} : \nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R} \rightarrow P$ est la projection définie par $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha}) = \pi(\alpha)$, si s est une section de f définie sur un voisinage

ouvert U de $x_0 \in P$, le difféomorphisme local $\hat{F}_s : (\nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R})_U \rightarrow f^{-1}(U)$ défini par $\hat{F}_s(\tilde{\alpha}) = F_s(\alpha)$ rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & \hat{F}_s & \\
 (\nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R})_U & \xrightarrow{\quad} & f^{-1}(U) \\
 \tilde{\pi} \searrow & & \swarrow f \\
 & U &
 \end{array}$$

8. PROPOSITION.

- a) Si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A})$, $(\varphi_1^\alpha)^* \sigma - \sigma = -f^* d\alpha$.
 b) $\mathcal{R} \subset Z(\nu^* \mathcal{A})$.

Preuve. Si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A})$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 (\varphi_1^\alpha)^* \sigma - \sigma &= \int_0^1 \frac{d}{dt} ((\varphi_t^\alpha)^* \sigma) dt = \int_0^1 (\varphi_t^\alpha)^* (\mathfrak{L}_X \alpha \sigma) dt = \\
 &= -d \int_0^1 (f \circ \varphi_t^\alpha)^* \alpha = -f^* d\alpha.
 \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathcal{R}$, $(\varphi_1^\alpha)^* \sigma = \sigma$; f étant une submersion on en tire que $d\alpha = 0$.

9. COROLLAIRES.

i) La différentielle extérieure $d : \mathcal{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A}) \rightarrow Z(\nu^* \mathcal{A})$ passe au quotient en une application

$$\hat{d} : \mathcal{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R}) \rightarrow Z(\nu^* \mathcal{A})$$

définie par $\hat{d} \tilde{\alpha} = d\alpha$.

ii) Soient λ l'image réciproque par l'inclusion $\nu^* \mathcal{A} \hookrightarrow T^*P$ de la 1-forme de Liouville de T^*P et β la 2-forme définie sur $\nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R}$ par passage au quotient de $d\lambda$. Alors, avec les notations de 7,

$$\hat{F}_s^* \sigma = \tilde{\pi}^* s^* \sigma - \beta.$$

En effet, pour tout $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}^* \mathcal{A})$, $\alpha^* \lambda = \alpha$. On en tire, en utilisant 8, que

$$s^*((\varphi_1^\alpha)^* \sigma) = \tilde{\alpha}^*(\tilde{\pi}^* s^* \sigma - \beta).$$

Par ailleurs $s^*((\varphi_1^\alpha)^* \sigma) = (\hat{F}_s \circ \tilde{\alpha})^* \sigma$ et la formule à montrer en résulte.

10. PROPOSITION. *Le rang de \mathfrak{R} est constant le long des feuilles de \mathcal{A} .*

Preuve. Soit $x_0 \in P$. Comme P est une variété de Poisson régulière, x_0 possède un voisinage ouvert U difféomorphe à un produit $S \times N$, S étant la feuille de \mathcal{A} passant par x_0 .

Utilisons des cartes locales : S (resp. N) s'écrit comme un ouvert de \mathbb{R}^{2k} (resp. de \mathbb{R}^{n-k}). Soient $(v^1, \dots, v^{2k}, u^1, \dots, u^{n-k})$ des coordonnées sur $S \times N$ et posons $x_0 = (v_0, u_0)$.

Soient $\eta_0 \in \mathfrak{R}_{(v_0, u_0)}$ et η la section de \mathfrak{R} définie au voisinage de (v_0, u_0) telle que $\eta(x_0) = \eta_0$. Cette section est définie sur un ouvert de la forme $S_0 \times N_0$, S_0 (resp. N_0) étant un ouvert connexe de \mathbb{R}^{2k} (resp. de \mathbb{R}^{n-k}) contenu dans S (resp. dans N). L'écriture locale de η est de la forme

$$\eta(v, u) = \sum_{i=1}^{n-k} a_i(u) du^i \quad (1)$$

Prolongeons η en $\bar{\eta} : S \times N_0 \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}^* \mathcal{A})|_{S \times N_0}$ en définissant $\eta(v, u)$, pour $(v, u) \in S \times N_0$ par la formule (1).

En utilisant 6 et par un argument de connexité on montre que $\bar{\eta}$ est à valeurs dans \mathfrak{R} .

Si $v_1 \in S$, l'application $\eta_0 \mapsto \bar{\eta}(v_1, u_0)$ est un homomorphisme de groupes de $\mathfrak{R}_{(v_0, u_0)}$ dans $\mathfrak{R}(v_1, u_0)$. Le lemme du paragraphe 4 permet de montrer que c'est un isomorphisme.

11. THEOREME. Soit $m(x)$ le rang de \mathfrak{R}_x .

- a) Si $x_0 \in P$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que $m(x) \geq m(x_0), \forall x \in U$.
 b) Soit P_0 l'ouvert de P sur lequel $m(x)$ est maximum. Alors \mathfrak{R}_{P_0} est un revêtement de P_0 .

Preuve.

a) Si $(\eta_0^i)_{1 \leq i \leq m(x_0)}$ est une \mathbf{Z} -base de \mathfrak{R}_{x_0} on peut trouver (d'après 4) $m(x_0)$ sections de \mathfrak{R} , $\eta_i, 1 \leq i \leq m(x_0)$, définies sur un voisinage U de x_0 , telles que $\eta^i(x_0) = \eta_0^i$. En restreignant, au besoin, U on peut supposer les $\eta^i(x)$ indépendants en tout point $x \in U$, ce qui entraîne que $m(x) \geq m(x_0)$.

b) Soient $m = \max_{x \in P} m(x)$ et $P_0 = \{ x \in P ; \text{rg } \mathfrak{R}_x = m \}$. P_0 est ouvert d'après a). Si

$x_0 \in P_0$ et en supposant U connexe, pour tout $(x_1, \eta_1) \in U \times \mathfrak{R}_{x_1}$ il existe $n \in \mathbf{Z}^*$, $n_i \in \mathbf{Z}, 1 \leq i \leq m$, tels que

$$n\eta_1 + \sum_{i=1}^m n_i \eta^i(x) = 0$$

à cause de la maximalité de m . On peut alors retranscrire la démonstration du théorème II.1 de DAZORD et DELZANT ([4]).

12. CLASSE DE CHERN DE LA SUBMERSION f .

A toute $\alpha \in \mathfrak{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A})$ on peut associer $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R})$ définie par $\tilde{\alpha}(x) = \alpha(\tilde{x})$ ce qui fournit un isomorphisme de $\mathfrak{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A})/\mathfrak{R}$ sur $\mathfrak{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R})$. On a alors une suite exacte de faisceaux de base P :

$$0 \rightarrow \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R}) \rightarrow 0$$

$\mathfrak{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A})$ étant acyclique, on a un isomorphisme δ de $H^k(P, \mathfrak{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R}))$ sur $H^{k+1}(P, \mathfrak{R}), k \geq 1$.

Lemme. On peut associer à la submersion f une 1-classe de cohomologie $\mu \in H^1(P, \mathcal{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R}))$.

Preuve. Pour toute section s de f au-dessus d'un ouvert U de P on pose $\psi_s = \hat{F}_s^{-1}$. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille de tels ouverts recouvrant P et désignons par s_i la section définie sur U_i . Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, si $x \in U_i \cap U_j$, soit $\mu_{ij}(x) \in \nu_x^* \mathcal{A}/\mathcal{R}$ tel que $\mu_{ij}(x)s_i(x) = s_j(x)$. On a alors, pour tout $\alpha \in \nu_x^* \mathcal{A}$,

$$\psi_{s_i}(\psi_{s_j}^{-1}(\tilde{\alpha})) = \tilde{\alpha} + \mu_{ij}(x)$$

Si $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ on a la relation $\mu_{ij} + \mu_{jk} - \mu_{ik} = 0$, ce qui prouve que (μ_{ij}) est un cocycle et nous permet de définir la classe $\mu \in H^1(P, \mathcal{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R}))$.

Définition. La classe $\nu = \delta\mu$ s'appelle la classe de Chern de f .

Désignons par $H^*(P, \mathcal{A})$ la cohomologie relative de (P, \mathcal{A}) ([4], [10]) : c'est la cohomologie associée au faisceau des formes différentielles ω sur P telles que, pour toute feuille S de \mathcal{A} , on ait $i_S^* \omega = 0$ si i_S est l'injection $S \hookrightarrow P$.

On peut prolonger la 2-forme symplectique σ_S de la feuille S en une 2-forme ω_0 sur P . Alors $d\omega_0$ est telle que $i_S^* d\omega_0 = 0$ et la classe $[d\omega_0]$ de $d\omega_0$ dans $H^3(P, \mathcal{A})$ ne dépend pas du prolongement de σ_S ; on la notera $[\mathcal{A}]$.

Les rapports existant entre ν et $[\mathcal{A}]$ sont précisés par le

13. THEOREME. Si $\nu \in H^2(P, \mathcal{R})$ est la classe de Chern de la submersion f , on a $\tilde{d}\nu = [\mathcal{A}]$ où \tilde{d} est défini par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
H^2(P, \mathfrak{R}) & \xrightarrow{\hat{d}} & H^3(P, \mathfrak{A}) \\
\delta^{-1} \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
H^1(P, \mathfrak{C}^\infty(\mathcal{V}^* \mathfrak{A} / \mathfrak{R})) & \xrightarrow{\hat{d}_*} & H^1(P, Z(\mathcal{V}_2^* \mathfrak{A}))
\end{array}$$

où \hat{d}_* est l'application en cohomologie correspondant au \hat{d} défini en 9 et où l'isomorphisme est celui du lemme suivant ([4], [10]).

Lemme. Si $k \geq 1$, $H^{p+k}(P, \mathfrak{A})$ est isomorphe à $H^k(P, Z(\mathcal{V}_p^* \mathfrak{A}))$.

Preuve du théorème. Avec les notations de 12, si (μ_{ij}) est un cocycle représentant μ dans $H^1(P, \mathfrak{C}^\infty(\mathcal{V}^* \mathfrak{A} / \mathfrak{R}))$, si $x \in U_i \cap U_j$, on a

$$\mu_{ij}(x) s_i(x) = s_j(x).$$

Une formule établie en 8 nous donne alors que

$$s_j^* \sigma - s_i^* \sigma = -d\mu_{ij}$$

$(s_j^* \sigma - s_i^* \sigma)$ est un 1-cocycle de $Z(\mathcal{V}_2^* \mathfrak{A})$. Si on le lit dans $\mathfrak{C}^\infty(\mathcal{V}_2^* \mathfrak{A})$, c'est un cobord $u_j - u_i$.

Alors $(s_i^* \sigma + u_i)$ définit un prolongement de la forme symplectique des feuilles de \mathfrak{A} , donc $[\mathfrak{A}]$ est la classe de $u_j - u_i = \hat{d}\mu_{ij}$.

14. DEFINITION. Soient (P, Λ) une variété de Poisson et \mathfrak{A} son feuilletage caractéristique. Nous appellerons réseau de $\mathcal{V}^* \mathfrak{A}$ tout sous-faisceau \mathfrak{R} de $Z(\mathcal{V}^* \mathfrak{A})$ tel que :

- i) pour tout $x \in P$, \mathfrak{R}_x soit un sous-groupe discret de $\mathcal{V}_x^* \mathfrak{A}$;
- ii) \mathfrak{R} , muni de sa topologie de faisceau, soit une sous-variété fermée de $Z(\mathcal{V}^* \mathfrak{A})$.

On a la suite exacte :

$$H^1(P, \mathfrak{R}) \xrightarrow{\hat{d}} H^2(P, \mathfrak{A}) \longrightarrow H^1(P, Z(\mathcal{V}^* \mathfrak{A} / \mathfrak{R})) \longrightarrow H^2(P, \mathfrak{R}) \xrightarrow{\hat{d}} H^3(P, \mathfrak{A})$$

(l'application $H^1(P, Z(\nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R})) \rightarrow H^2(P, \mathfrak{R})$ est l'application cobord de la suite exacte $0 \rightarrow \mathfrak{R} \rightarrow Z(\nu^* \mathcal{A}) \rightarrow Z(\nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R}) \rightarrow 0$).

On est alors en mesure d'énoncer une réciproque du théorème précédent.

Théorème. *Sous ces hypothèses, soit $\nu \in H^2(P, \mathfrak{R})$ telle que $\check{d}\nu = [\mathcal{A}]$. Alors ν est la classe de Chern d'une submersion f d'une variété symplectique (M, Σ) sur (P, Λ) .*

De plus, les réalisations ([11]) de (P, Λ) associées à \mathfrak{R} sont classifiées (à difféomorphisme symplectique au-dessus de P près) par $H^2(P, \mathcal{A})/\check{d}H^1(P, \mathfrak{R})$.

Preuve. Le feuilletage caractéristique \mathcal{A} peut être défini par un recouvrement ouvert distingué (U_i) et le 1-cocycle $\sigma_i - \sigma_j$ où σ_i est un prolongement fermé de la 2-forme symplectique $\sigma_{\mathcal{A}}$ des feuilles à U_i . On peut représenter ν par un 1-cocycle (μ_{ij}) dans le recouvrement (U_i) et construire avec ce 1-cocycle une variété M et une submersion $f : M \rightarrow P$. Les hypothèses faites sur \mathfrak{R} assurent que $\nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R}$ est une variété. On a des difféomorphismes $\psi_i : f^{-1}(U_i) \rightarrow (\nu^* \mathcal{A}/\mathfrak{R})_{U_i}$ tels que $\tilde{\pi} \circ \psi_i = f$ et $\psi_i \circ \psi_j^{-1}(y) = y + \mu_{ij}(x)$, si $y \in \pi^{-1}(x)$.

On peut supposer, par l'arbitraire dans le choix des σ_i , que $d\mu_{ij} = \sigma_i - \sigma_j$.

On définit sur $f^{-1}(U_i)$ une 2-forme Σ_i en posant

$$\Sigma_i = f^* \sigma_i - \psi_i^* \beta$$

(où β est la 2-forme définie en 9).

Alors $\Sigma_j - \Sigma_i = f^*(\sigma_j - \sigma_i + d\mu_{ij}) = 0$ et on peut définir une 2-forme fermée Σ sur M par $\Sigma|_{f^{-1}(U_i)} = \Sigma_i$. Son écriture locale montre qu'elle est de rang maximum.

Soient ν et ν' deux éléments de $H^2(P, \mathfrak{R})$ tels que $\check{d}\nu = \check{d}\nu' = [\mathcal{A}]$ (1). On peut, sans restreindre la généralité, supposer qu'on a réalisé les deux classes en

construisant une même variété M et une submersion $f : M \rightarrow P$ et que, dans le recouvrement distingué (U_i) de P sur lequel on a fait la construction, ν (resp. ν') est représenté par un cocycle μ_{ij} (resp. μ'_{ij}). Si ψ_i (resp. ψ'_i) est le difféomorphisme de $f^{-1}(U_i)$ sur $(\nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R})_{U_i}$ construit comme précédemment à l'aide de ν (resp. ν'), l'application

$$\psi'_i \circ \psi_i^{-1} : (\nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R})_{U_i} \rightarrow (\nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R})_{U_i}$$

commute à la projection sur U_i et est donc définie par un élément $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i, \nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R})$.

On a $\mu'_{ij} = \alpha_i + \mu_{ij} - \alpha_j$ et (1) montre que

$$\sigma_i - \sigma'_i + \tilde{d}\alpha_i = \sigma_j - \sigma'_j + \tilde{d}\alpha_j \quad \text{sur } U_i \cap U_j.$$

Par conséquent on peut recoller les $\sigma_i - \sigma'_i + \tilde{d}\alpha_i$.

On définit ainsi une 2-forme η , section globale de $Z(\nu_2^* \mathcal{A})$ telle que, si Σ et Σ' sont les formes symplectiques définies sur M à l'aide respectivement des ψ_i et des ψ'_i , on ait $\Sigma - \Sigma' = f^* \eta$.

Si $\eta = \tilde{d}\gamma$ où γ est une section globale de $\mathcal{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R})$, il résulte de 9, ii) qu'on a un difféomorphisme symplectique de (M, Σ) sur (M, Σ') .

Réciproquement, si (M, S) et (M, S') sont symplectiquement difféomorphes au-dessus de P par h , posons $c_i = \psi'_i \circ h \circ \psi_i^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U_i, \nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R})$.

$\psi'_i \circ h$ et ψ_i sont associés au même cocycle, donc les c_i se recollent en une section globale γ de $\mathcal{C}^\infty(\nu^* \mathcal{A}/\mathcal{R})$ et la relation $S = h^* \Sigma'$ s'écrit

$$h^* \psi'_i{}^* (-\beta + \tilde{\pi}^* \Sigma'_i) = \psi_i^* (-\beta + \tilde{\pi}^* (\Sigma'_i - \tilde{d}c_i)).$$

Par conséquent $\eta = \tilde{d}\gamma$.

On a donc montré que les réalisations de P associées à \mathcal{R} sont classifiées par $H^2(P, \mathcal{A})/\tilde{d}H^1(P, \mathcal{R})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **P. DAZORD** : *Stabilité et linéarisation des variétés de Poisson*, Travaux en Cours, J.P. Dufour, Hermann, 1985.
- [2] **P. DAZORD** : *Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages lagrangiens*, Annales Sc. de l'E.N.S., 14, 1981, p. 464-480.
- [3] **P. DAZORD et T. DELZANT** : *Classe de Chern de certaines fibrations isotropes*, C.R.A.S., 300, série I, 1985, p. 137-140.
- [4] **P. DAZORD et T. DELZANT** : *Le problème général des variables actions-angles* , Journal of Diff. Géom. 26 (1987), 223-251.
- [5] **T. DELZANT** : Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Chap. III.
- [6] **J.J. DUISTERMAAT** : Comm. Pure Appl. Math., 33, 1980, p. 687-706.
- [7] **J.J. DUISTERMAAT et G.J. HECKMANN** : Invent. Math., 69, 1982, p. 259-268.
- [8] **R. GODEMENT** : *Théorie des faisceaux* , Hermann, 1964.
- [9] **A. GROTHENDIECK** : *A general theory of fiber bundles with structure sheaf*, 2ème édition, Univ. of Kansas, 1958.
- [10] **I. VAISMAN** : *Cohomology and Differential forms*, Marcel Dekker Inc., 1973.
- [11] **A. WEINSTEIN** : *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds* Advances in Math., 6, 1971, p. 329-346.