

M. BOUCETTA

**Chapitre VII Systèmes hamiltoniens complètement intégrables
non commutatifs Étude locale**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 1B
« Séminaire Sud-Rhodanien 1ère partie », , p. 185-195

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__1B_185_0

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SYSTEMES HAMILTONIENS COMPLETEMENT INTEGRABLES
NON COMMUTATIFS
ETUDE LOCALE**

M. BOUCETTA

Résumé : Etant donné un système hamiltonien complètement intégrable non commutatif $(M, \omega, H, f^1, \dots, f^m)$ [M-F], on considère l'algèbre de Lie \mathfrak{g}^* engendrée par les champs de vecteurs hamiltoniens associés aux (f^1, \dots, f^m) . On considère, alors, l'application moment associée $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$.

On étudie une situation dans laquelle, transversalement à une orbite de la représentation coadjointe régulière et réductive, l'isotropie infinitésimale agit à la façon du groupe \mathbb{R}^n dans les modèles d'action-angle avec singularités. On arrive alors, compte tenu du caractère presque canonique des coordonnées actions-angle, à dégager des invariants qui classifient complètement le modèle.

I. INTRODUCTION.

Dans ce travail, la différentiabilité est entendue, sauf mention expresse du contraire, au sens C^∞ .

Soient (M, Ω, H) un système hamiltonien de dimension $2n$ et (f^1, \dots, f^m) une famille d'intégrales premières telle que :

pour $i, j = 1, \dots, m$ $\{f^i, f^j\} = \sum_{k=1}^m C_{ij}^k f^k$ où les C_{ij}^k sont des constantes réelles et $\{ \}$ désigne le crochet de Poisson usuel sur (M, Ω) .

I.1. Quelques rappels :

Pour le crochet de Poisson, la famille (f^1, \dots, f^m) engendre une algèbre de Lie \mathfrak{A} . On notera \mathfrak{g} l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens correspondants et on désignera par G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On définit l'application $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ (dual de \mathfrak{g}) par $\langle J(x), X_f \rangle = f(x)$, pour tout $x \in M$ et tout $X_f \in \mathfrak{g}$.

On a, immédiatement, pour tout $X_f, X_g \in \mathfrak{g}$ et tout $x \in M$:

$$(1) \quad \Omega(X_f, X_g)(x) = - \langle J(x), [X_f, X_g] \rangle .$$

Lemme I.1. [S] . *J est une application différentiable , tout champ de vecteurs hamiltonien X_f élément de \mathfrak{g} est J-projetable et son projeté est le champ de vecteurs fondamental sur \mathfrak{g}^* , associé à X_f , pour l'action co-adjointe de G sur \mathfrak{g}^* .*

Preuve. Pour tout $X_f \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs fondamental sur \mathfrak{g}^* associé à X_f , pour l'action co-adjointe de G sur \mathfrak{g}^* noté $X_{f\mathfrak{g}^*}$ est défini par :

$$X_{f\mathfrak{g}^*}(\mu) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(-tX_f)}^* \mu /_{t=0} , \mu \in \mathfrak{g}^*$$

Pour tout $X_g \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle X_{f\mathfrak{g}^*}(\mu) , X_g \rangle &= \langle \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(-tX_f)}^* \mu , X_g \rangle /_{t=0} \\ &= \langle \mu , [X_f, X_g] \rangle . \end{aligned}$$

En vertu de la relation (1), on a :

$$\begin{aligned} \langle X_{f\mathfrak{g}^*}(\mu), X_g \rangle &= \Omega(X_f, X_g)(x) \quad \text{pour tout } x \in J^{-1}(\mu) \\ &= dg_x(X_f(n)) \\ &= \frac{d}{dt} g(\varphi_t) /_{t=0} \quad \text{où } \varphi_t \text{ est le flot de } X_f \text{ passant par } x \\ &= \frac{d}{dt} \langle J(\varphi_t), X_g \rangle /_{t=0} \\ &= \langle T_x J(X_f(x)), X_g \rangle \end{aligned}$$

d'où $T_x J(X_f(x)) = X_{f\mathfrak{g}^*}(\mu)$ pour tout $x \in J^{-1}(\mu)$ C.Q.F.D. ♦

On notera désormais JX_f le champ de vecteurs fondamental sur \mathfrak{g}^* associé à X_f pour l'action co-adjointe de G sur \mathfrak{g}^* . On a la relation :

$$(2) \quad \text{pour tous } X_f, X_g \in \mathfrak{g} \quad \langle JX_f(\mu), X_g \rangle = \langle \mu, [X_f, X_g] \rangle .$$

Le lemme précédent nous permet de définir pour tout $\mu \in \mathfrak{g}^*$:

$$\mathfrak{g}_\mu = \{ X_f \in \mathfrak{g} / JX_f(\mu) = 0 \}$$

On a alors le lemme élémentaire suivant :

Lemme I.1.2. \mathfrak{g}_μ est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} et si on désigne par $G.\mu$ l'orbite passant par μ pour la représentation co-adjointe, on aura :

i) $T_\mu(G.\mu) = \mathfrak{g}_\mu^\perp$ (annulateur de \mathfrak{g}_μ dans \mathfrak{g}^*) .

ii) Pour tout élément $\mu' = \text{Ad}_g^* \mu$ de l'orbite $G.\mu$ ($g \in G$) $\mathfrak{g}_{\mu'} = \text{Ad}_{g^{-1}} \mathfrak{g}_\mu$.

Preuve. Le fait que \mathfrak{g}_μ est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} découle de la relation (2) et de l'identité de Jacobi.

Pour le (i) il suffit de remarquer que $T_\mu(G.\mu) = \{JX_r(\mu)/X_r \in \mathfrak{g}\}$ et la relation (2) permet de conclure. ii) évident . \blacklozenge

\mathfrak{g}_μ est appelée l'isotropie infinitésimale au point μ .

I.2. Enoncé du problème : Soient $x_0 \in M$, $\mu = J(x_0)$, $G.\mu_0$ l'orbite passant par μ_0 pour la représentation co-adjointe, G_{μ_0} le groupe d'isotropie en μ_0 et \mathfrak{g}_{μ_0} l'isotropie infinitésimale au point μ_0 .

$G.\mu_0$ est une sous-variété symplectique de dimension nécessairement paire $2p$ [S] . La dimension de \mathfrak{g}_μ est alors $m - 2p$.

On suppose que :

a) $G.\mu_0$ est une orbite régulière (de dimension maximale). Le théorème de Duflo-Vergne [D,V] affirme alors que \mathfrak{g}_{μ_0} est abélienne.

b) μ_0 est un point réductif en ce sens que :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mu_0} \oplus \mathfrak{m}_{\mu_0} \text{ et } \text{Ad}_g^* \mathfrak{m}_{\mu_0} = \mathfrak{m}_{\mu_0} \text{ pour tout } g \in G_{\mu_0} .$$

D'après le ii) du lemme I.1.2, tout point μ de l'orbite $G.\mu_0$ est réductif. Il suffit de prendre $\mathfrak{m}_\mu = \text{Ad}_{g^{-1}} \mathfrak{m}_{\mu_0}$ si $\mu = \text{Ad}_g^* \mu_0$ ($g \in G$).

En plus \mathfrak{m}_μ ne dépend pas du choix de g . On dira alors que $G.\mu_0$ est réductive.

On pose $V_\mu = \mu + \mathfrak{m}_\mu^\perp$ pour tout $\mu \in G.\mu_0$. En vertu du lemme I.1.2, V_μ est un sous-espace affine de \mathfrak{g}^* transverse à $G.\mu_0$ au point μ .

Lemme I.2.1. Il existe un voisinage ouvert \bar{U}_{μ_0} de $G.\mu_0$ tel que pour tout μ élément de $G.\mu_0$ l'isotropie infinitésimale est invariante le long de $\bar{U}_{\mu_0} \cap V_\mu$.

Preuve. L'orbite $G \cdot \mu_0$ étant régulière, il existe un voisinage ouvert \bar{U}_{ν_0} de $G \cdot \mu_0$ dans lequel toutes les orbites de la représentation co-adjointe sont régulières.

Soient $\mu \in G \cdot \mu_0$ et $\mu + \beta \in V_\nu$. Pour tout $X_r \in \mathfrak{g}_\nu$ on a :

$$\begin{aligned} \langle JX_r(\mu+\beta), X_g \rangle &= \langle \mu+\beta, [X_r, X_g] \rangle \\ &= \langle JX_r(\mu), X_g \rangle + \langle \beta, [X_r, X_g] \rangle \\ &= \langle \beta, [X_r, X_g] \rangle \end{aligned}$$

Or, $[X_r, X_g] \in \mathfrak{m}_\nu$ du fait que \mathfrak{g}_ν est abélienne et μ est réductif d'où $\langle \beta, [X_r, X_g] \rangle = 0$.
On a montré alors que $\mathfrak{g}_\nu \subset \mathfrak{g}_{\nu+\beta}$. Sur $V_\nu \cap \bar{U}_{\nu_0}$ on aura l'égalité. ♦

Pour simplifier, on notera V_ν au lieu de $V_\nu \cap \bar{U}_{\nu_0}$.

Proposition I.2.1. $S_{\nu_0} = J^{-1}(V_{\nu_0})$ est une sous-variété symplectique de M . Les éléments de \mathfrak{g}_{ν_0} sont des champs de vecteurs tangents à S_{ν_0} et pour tout $x \in S_{\nu_0}$, l'espace tangent en x à S_{ν_0} est l'orthogonal symplectique de $\mathfrak{m}_{\nu_0}(x) = \{X_r(x), X_r \in \mathfrak{m}_{\nu_0}\}$.

Pour montrer cette proposition on aura besoin du lemme classique suivant :

Lemme I.2.2. Pour tout $x \in M$, $T_x J(T_x M) = \mathfrak{g}_x^\perp$ où $\mathfrak{g}_x = \{X_r \in \mathfrak{g}, X_r(x) = 0\}$.

Preuve. Voir Guillemin-Sternberg [G-S].

Preuve de la proposition. D'après le lemme précédent, il est facile de voir que J est transverse à V_{ν_0} , donc d'après le lemme de transversalité [G-P], S_{ν_0} est une sous-variété de M et pour tout $x \in S_{\nu_0}$

$$T_x S_{\nu_0} = (T_x J)^{-1}(\mathfrak{m}_{\nu_0}^\perp).$$

La relation (1) donne facilement que $(T_x J)^{-1}(\mathfrak{m}_{\nu_0}^\perp) = \text{orth } \mathfrak{m}_{\nu_0}(x)$. La même relation plus l'hypothèse de réductivité entraîne que $\mathfrak{m}_{\nu_0} \cap \text{orth } \mathfrak{m}_{\nu_0}(x) = \{0\}$ sur S_{ν_0} . S_{ν_0} est donc symplectique les éléments de \mathfrak{g}_{ν_0} étant verticaux, ils sont tangents aux fibres de J donc tangents à S_{ν_0} . ♦

On note A_{ν_0} l'algèbre de Lie abélienne de fonctions associées aux champs de vecteurs de \mathfrak{g}_{ν_0} , Ω_{ν_0} la restriction de Ω à S_{ν_0} et H_{ν_0} la restriction de H .

$(S_{\nu_0}, \Omega_{\nu_0}, H_{\nu_0}, A_{\nu_0})$ est alors un système hamiltonien muni d'intégrales premières en involution. On suppose désormais que $(M, \Omega, H, f^1, \dots, f^m)$ est un système hamiltonien complètement intégrable non commutatif au sens de [M-F] et Marle [M]. Soit $\dim \text{Ker } \Lambda = \dim M - \dim \mathfrak{g} = p$, où Λ est le tenseur de Poisson usuel sur \mathfrak{g}^* . On a alors :

$$\begin{aligned} m - 2p &= 2n - m & \text{soit } m &= n+p \\ \dim S_{\nu_0} &= 2(n-p) & \text{et } \dim A_{\nu_0} &= n-p. \end{aligned}$$

On suppose alors que le système hamiltonien $(S_{\nu_0}, \Omega_{\nu_0}, H_{\nu_0}, A_{\nu_0})$ est équivalent au modèle des variables action-angle avec singularités d' Eliasson [E] au voisinage de x_0 . Quitte à restreindre S_{ν_0} , il existe sur S_{ν_0} un système de coordonnées action-angle avec singularités $(e_1, \dots, e_k, \varphi_1, \dots, \varphi_k, q_1, \dots, q_r, \theta_1, \dots, \theta_r)$ tel que :

1°) $S_{\nu_0} = D(0, r_1) \times \dots \times D(0, r_k) \times \mathbb{T}^r \times \hat{\Omega}$ où $D(0, r_i)$ est le disque de centre 0 et de rayon r_i dans \mathbb{R}^2 , \mathbb{T}^r le tore de dimension r et $\hat{\Omega}$ un ouvert de \mathbb{R}^r .

2°)
$$\Omega_{\nu_0} = \sum_{i=1}^k e_i de_i \wedge d\varphi_i + \sum_{j=1}^r dq_j \wedge d\theta_j.$$

3°) Pour tout $f \in A_{\nu_0}$, $f(e, \varphi, q, \theta) = \phi(e^2, q)$.

4°) $q_1, \dots, q_r, e_1^2, \dots, e_k^2$ sont des intégrales premières du système.

On définit, pour tout $f \in A_{\nu_0}$, l'application :

$$\begin{aligned} \hat{f} : D^k \times D^r &\longrightarrow \pi^k \times \pi^r \\ (e_i, q_i) &\longmapsto \left(\frac{1}{e_i}, \frac{\partial f}{\partial e_i}(q, e), \frac{\partial f}{\partial q_i}(q, e) \right) \end{aligned}$$

En prenant sur $\mathbb{T}^k \times \mathbb{T}^r$ le système de coordonnées (φ_i, θ_i) correspondant aux coordonnées action (e_i, q_i) où D est un domaine de \mathbb{R} .

Il est relativement facile de voir que \hat{f} est bien définie et ne dépend pas des variables action-angle avec singularités choisies.

On observera aussi, que les \hat{f} caractérisent entièrement le système $(S_{\nu_0}, \Omega_{\nu_0}, A_{\nu_0})$ sous les hypothèses ci-dessus.

Définition I.2.1. On appelle invariants caractéristiques du système (M, Ω, A) au point x_0 , sous les hypothèses ci-dessus, l'ensemble $\hat{A}_{\nu_0} = \{\hat{f}, f \in A_{\nu_0}\}$.

Problème : Ces invariants classifient-ils complètement le modèle (localement) sous les hypothèses ci-dessus ?

Les 2 théorèmes suivants donnent une réponse affirmative à cette question.

Théorème 1. Soient (M, Ω, H, A) et (M', Ω', H', A') deux systèmes hamiltoniens complètement intégrables non commutatifs où A et A' sont deux algèbres de Lie non commutatives d'intégrales premières respectivement sur (M, Ω, H) et (M', Ω', H') . On notera \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' les algèbres de Lie de champs de vecteurs hamiltoniens associées respectivement à A et A' , G et G' les groupes de Lie connexes et simplement connexes respectivement associés. Soient J et J' les moments respectifs de (M, Ω, A) et (M', Ω', A') . Soient x un point de M et x' un point de M' . On notera $\mu = J(x)$ et $\mu' = J'(x')$. On suppose que :

i) Les orbites $G \cdot \mu$ et $G' \cdot \mu'$ pour la représentation co-adjointe passant respectivement par μ et μ' sont réductives et régulières.

ii) Soient $(S_\nu, \Omega_\nu, H_\nu, A_\nu)$ et $(S'_{\nu'}, \Omega'_{\nu'}, H'_{\nu'}, A'_{\nu'})$ les systèmes hamiltoniens munis d'intégrales premières associés respectivement à μ et μ' , définis dans la proposition 1.2.1. On suppose qu'ils sont équivalents aux modèles action-angle avec singularités respectivement aux points x et x' . On note \hat{A}_ν et $\hat{A}'_{\nu'}$ leurs invariants caractéristiques respectifs.

Alors (M, Ω, A) et (M', Ω', A') sont équivalents en (x, x') si et seulement si il existe un isomorphisme $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ tel que

- 1) $\varphi^* \mu' = \mu$ où φ^* désigne la transposée de φ .
- 2) $\hat{A}_\nu = \hat{A}'_{\nu'}$.

Théorème 2. Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie, G le groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant, $\mu \in \mathfrak{g}^*$ et \mathfrak{g}_μ l'isotropie infinitésimale au point μ . On suppose que l'orbite du point μ pour la représentation co-adjointe est régulière et réductrice. On considère, si $p = \dim \mathfrak{g}_\mu$, le système modèle $(S_\nu = D(0, r_1) \times \dots \times D(0, r_k) \times \hat{\Omega} \times \mathbb{T}^r, \omega_0, q_i, e_i^2)$ avec $k+r = p$ et p fonctions, de variables q_i et e_i^2 , soient f^1, \dots, f^p , nulles en 0, et dont les différentielles sont de rang r en 0.

Alors il existe une variété symplectique M de dimension $2n = m+p$ si $m = \dim G$ et une algèbre de Lie A de fonctions pour le crochet de Poisson, isomorphe à \mathfrak{g} , de manière que, en

un point $x_0 \in M$, les invariants caractéristiques de A soient définis par f^1, \dots, f^p et que, si J désigne le moment du système ainsi défini, on ait $J(x_0) = \mu$.

II. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

Si (M, Ω, A) et (M', Ω', A') sont équivalents en (x, x') , il existe un difféomorphisme symplectique Ψ d'un voisinage ouvert U \mathfrak{g} -invariant de x sur un voisinage ouvert U' , \mathfrak{g}' -invariant de x' qui applique x en x' et tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (U, x) & \xrightarrow{\Psi} & (U', x') \\ J \downarrow & & \downarrow J' \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{(\Psi_*^{-1})^*} & \mathfrak{g}'^* \end{array}$$

soit commutatif.

Si on note $\varphi = \Psi_* / \mathfrak{g}$, on a évidemment $\varphi^* \mu' = \mu$, ce qui entraîne que l'image par φ de l'isotropie infinitésimale \mathfrak{g}_μ au point μ est l'isotropie infinitésimale au point μ' . On a aussi $\mathfrak{m}'_\mu = \varphi(\mathfrak{m}_\mu)$, soit $\Psi(S_\mu) = S'_{\mu'}$. En identifiant S_μ et $S'_{\mu'}$ au modèle action-angle avec singularités et en utilisant le fait que $\text{rg } Jx = \text{rg } J'x'$, on a 2).

. Supposons maintenant qu'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ tel que 1) et 2) soient vérifiés.

On identifie \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' à l'aide de φ ce qui entraîne, en vertu de 1), que $\mathfrak{g}_\mu = \mathfrak{g}'_{\mu'}$. La relation 2) nous permet de trouver un difféomorphisme symplectique $\varphi_\mu : (S_\mu, \Omega_\mu) \rightarrow (S'_{\mu'}, \Omega'_{\mu'})$ qui échange A_μ et $A'_{\mu'}$.

Soient X_{r1}, \dots, X_{r2p} une base de \mathfrak{m}_μ et $(\varphi^1_1), \dots, (\varphi^{2p}_1)$ les flots associés. On définit alors deux applications différentiables :

$$\begin{aligned} \chi_1 : \bar{\Omega} \times S_\mu &\rightarrow M \\ (t_1, \dots, t_{2p}, y) &\mapsto \varphi^1_{t_1} \circ \dots \circ \varphi^{2p}_{t_{2p}}(y) \end{aligned}$$

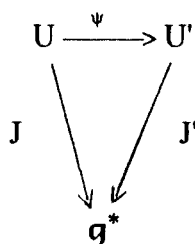
$$\begin{aligned} \chi_2 : \bar{\Omega} \times S'_{\mu'} &\rightarrow M' \\ (t_1, \dots, t_{2p}, y') &\mapsto \varphi^1_{t_1} \circ \dots \circ \varphi^{2p}_{t_{2p}}(y') \end{aligned}$$

Les orbites respectives de x et x' pour l'action de g_ν étant compactes, \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 induisent deux difféomorphismes locaux respectivement de $\bar{\Omega} \times S_\nu$ sur un voisinage ouvert U , \mathfrak{g} -invariant, de x et de $\bar{\Omega} \times S'_\nu$ sur un voisinage ouvert U' , \mathfrak{g}' -invariant, de x' .

On définit, alors, un difféomorphisme local $\Psi : U \rightarrow U'$ par

$$\Psi(\varphi_{l_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{l_{2p}}^{2p}(y)) = \varphi_{l_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{l_{2p}}^p(\varphi_\nu(y)).$$

Il est clair que $\Psi(x) = x'$ et $\Psi|_{S_\nu} = \varphi_\nu$ et que le diagramme suivant est commutatif :



Pour conclure, il suffit de montrer que Ψ est symplectique.

Ψ est symplectique en restriction à S_ν .

Pour tout $x \in S_\nu$ $T_x M = T_x S_\nu \oplus m_\nu(x)$. Ceci entraîne que Ψ est symplectique le long de S_ν et donc (par équivariance) partout. ♦

III. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.

La donnée de f^1, \dots, f^p définit sur le modèle $D(0, r_1) \times \dots \times D(0, r_k) \times \hat{\Omega} \times \mathbb{T}^r$ muni de coordonnées action-angle avec singularités $(e_i, \varphi_i, \theta_i, q_i)$ et de la forme fondamentale

$$\omega_o = \sum_{i=1}^k e_i de_i \wedge d\varphi_i + \sum_{j=1}^r dq_j \wedge d\theta_j, \text{ une algèbre abélienne de champs de vecteurs hamiltoniens}$$

à savoir X_{r_1}, \dots, X_{r_p} . Comme les fibres sont compactes, ces champs sont complets et déterminent donc une action verticale hamiltonienne de $\mathbb{R}^p \simeq g_\nu$.

On considère la fibration principale $\Pi : G \rightarrow G \cdot \mu$ de groupe structural G_ν . Soit G_ν^o la composante connexe de l'élément neutre. C'est en général un cylindre $\mathbb{T}^h \times \mathbb{R}^{p-h}$. Soit φ_ν une trivialisatation locale de G au-dessus d'un disque D_ν centré en μ . On a :

$$\begin{aligned} \varphi_\nu : G_\nu^o \times D_\nu &\rightarrow \Pi^{-1}(D_\nu)^o \\ (g, \mu') &\mapsto s_\nu(\mu')g \end{aligned}$$

où s_ν est une section locale du fibré $\Pi : G \rightarrow G/\mu$ et $\Pi^{-1}(D_\nu)^0$ une composante connexe de $\Pi^{-1}(D_\nu)$.

On considère la projection canonique $q : \mathbb{R}^p \rightarrow G_\nu^0$, on définit alors une projection $P : \mathbb{R}^p \times D_\nu \rightarrow \Pi^{-1}(D_\nu)^0$ par $P(\tilde{g}, \mu') = s_\nu(\mu')q(\tilde{g})$. $(\mathbb{R}^p \times D_\nu, P)$ est le revêtement universel de $\Pi^{-1}(D_\nu)^0$.

Les champs fondamentaux de l'action à gauche de G sur lui-même, c'est-à-dire les champs invariants à droite, se relèvent en une algèbre de Lie \mathfrak{g} de champs simplement transitive sur $\mathbb{R}^p \times D_\nu$. En particulier, \mathfrak{g}_ν se relève en une algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}_\nu$ abélienne verticale pour la fibration $\tilde{\Pi} : \mathbb{R}^p \times D_\nu \rightarrow D_\nu$.

Considérons la projection $\tilde{P} : \mathbb{R}^p \times D_\nu \times S_\nu \Rightarrow D_\nu \times S_\nu$ définie par

$$\hat{P}(\tilde{g}, \mu', e, \varphi, q, \theta) = (\mu', \tilde{g}(e, \varphi, q, \theta)).$$

Lemme III.1. *L'action infinitésimale de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur le facteur $\mathbb{R}^p \times D_\nu$ de $\mathbb{R}^p \times D_\nu \times S_\nu$ se projette par \tilde{P} en une action infinitésimale de \mathfrak{g} sur $M = D_\nu \times S_\nu$.*

Preuve du lemme. Soient $(\tilde{g}_0, \mu_0, (e_0, \varphi_0, q_0, \theta_0))$ et $(\tilde{g}'_0, \mu'_0, (e'_0, \varphi'_0, q'_0, \theta'_0))$ se projetant par \tilde{P} au même point. Ceci veut dire que

$$\tilde{g}'_0 = \tilde{g}_0 \cdot y_0 \text{ et } (e'_0, \varphi'_0, q'_0, \theta'_0) = \tilde{g}_0^{-1} \cdot (e_0, \varphi_0, q_0, \theta_0)$$

Soient $(\tilde{g}(t), \mu(t), (e_0, \varphi_0, q_0, \theta_0))$ la trajectoire du premier point par $\exp(t\tilde{X})$ où $\tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{g}}$ et $(\tilde{g}'(t), \mu'(t), (e'_0, \varphi'_0, q'_0, \theta'_0))$ celle du second. Comme le champ fondamental \tilde{X} est un automorphisme de fibré principal, il vient $\mu'(t) = \mu(t)$ et $\tilde{g}'(t) = \tilde{g}(t)y_0$. Donc les projections par \tilde{P} de ces 2 courbes coïncident. On a donc une action de \mathfrak{g} sur $M = D_\nu \times S_\nu$.

Suite de la démonstration du théorème 2 :

On définit une projection $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ de la façon suivante : f^1, \dots, f^p définissent une projection de S_ν sur $\mathfrak{g}_\nu^* \simeq \mathfrak{m}_\nu^\perp$ soit J_ν . On en déduit une projection $J : S_\nu \rightarrow \mu + \mathfrak{m}_\nu^\perp$ en posant $J(x) = \mu + J_\nu(x)$. On étend cette projection à M de la façon suivante : soit $\mu' = g \cdot \mu$ ($g \in G$). On pose : $J(\mu', e, \varphi, q, \theta) = g \cdot J_\nu(e, \varphi, q, \theta) + \mu'$ ce qui assure que J est équivariante du point de vue infinitésimal.

On définit maintenant une forme fondamentale ω de la façon suivante : on la définit le long de S_ν , puis on l'étend par équivariance [relativement à l'action infinitésimale de G]. Pour cela, on observe que l'ensemble des champs de vecteurs fondamentaux associés aux éléments de \mathfrak{m}_ν définit en tout point de $S_\nu \hookrightarrow M$ un supplémentaire de TS_ν . On va décider que ces 2 sous-espaces sont orthogonaux du point de vue symplectique, donc on a :

$$\begin{cases} \omega|_{S_\nu} = \omega_0, \\ \omega(Y_M(m), Y'_M(m)) = \langle J(m), [Y, Y'] \rangle, Y, Y' \in \mathfrak{m}_\nu \end{cases}$$

On observe que la forme $\omega|_{S_\nu}$, ainsi définie le long de S_ν , est invariante pour les champs $X_M, X \in \mathfrak{g}_\nu$, puisque ceux-ci sont hamiltoniens, et que l'action de G_ν laisse invariante les projections J et J_* .

Par suite, le long de chaque fibre $D_\nu \times \{e, \phi, q, \theta\}$, ω s'étend de manière que la forme obtenue soit équivariante.

Par construction, ω est de rang $2n$ le long de S_ν , donc partout [par équivariance].

ω est fermée :

On observe que $d\omega|_{S_\nu} = 0$. Pour conclure il suffit de montrer que $d\omega$ est nulle le long de S_ν , donc [par équivariance] partout.

En vertu de ce qui précède, on a, pour tout $m \in S_\nu$:

$$T_m M = T_m S_\nu \oplus \mathfrak{m}_\nu(m)$$

Un calcul relativement simple permet d'affirmer que

- $d\omega_m(Y_M^1(m), Y_M^2(m), Y_M^3(m)) = 0$ si $Y^1, Y^2, Y^3 \in \mathfrak{m}_\nu$
- $d\omega_m(Y_M^1(m), X_m, Y_m) = 0$ $X_m, Y_m \in T_m S_\nu$ et $Y^1 \in \mathfrak{m}_\nu$
- $d\omega_m(X_M, Y_M^1(m), Y_M^2(m)) = 0$ $X_m \in T_m S_\nu$ et $Y^1, Y^2 \in \mathfrak{m}_\nu$.

Finalement (M, ω) est symplectique. Si, maintenant, X est un champ fondamental, dans \mathfrak{g} , comme $\mathfrak{L}_X \omega = 0$, X est localement hamiltonien. Le long de S_ν , l'orthogonal de TS_ν est engendré par les champs fondamentaux de \mathfrak{m}_ν . L'orthogonal de $\text{Ker } J_*$ est l'espace des champs fondamentaux, donc les formes fermées duales des champs fondamentaux sont basiques le long de S_ν , donc partout par équivariance. Il en résulte, D_ν étant un disque, que les champs fondamentaux sont hamiltoniens et leurs hamiltoniens J -projetables.

On peut supposer que le "vrai" moment $J' : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ de l'action de \mathfrak{g} coïncide avec J en x_0 , donc sur l'orbite de ce point. La transversale sur laquelle \mathfrak{g}_ν est le noyau de $\text{Ker } J'_*$ coïncide avec V_ν et sa préimage coïncide avec S_ν . D'ailleurs J' et J coïncident sur S_ν et finalement [par équivariance] partout. ♦

BIBLIOGRAPHIE

- [A-M] **R. ABRAHAM - J.E. MARSDEN** : *Foundations of Mechanics*, (2nd edition). Benjamin-Cummings, Reading 1978.
- [D-V] **M. DUFLO - M. VERGNE** : *Une propriété de la représentation co-adjointe d'une algèbre de Lie*, C.R. Acad. Sci. Paris, série A, 268, 1969, 583-585.
- [E] **H. ELIASSON** : *Hamiltonian system with Poisson commuting integrals*, Thèse, Stockholm (1984).
- [G-P] **V. GUILLEMIN - A. POLLACK** : *Differential topology*, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [G-S] **V. GUILLEMIN - S. STERNBERG** : *Convexity Properties of the Moment Mapping*, Invent. Math. 67 (1982), 491-513.
- [M] **C.M. MARLE** : *Normal Forms generalizing action-angle coordinates for Hamiltonian action of Lie group*, Letters in Math. Phys. 7 (1983), p. 55-62.
- [M-F] **MISCHENKO - FOMENKO** : *Generalized Liouville method of integration of hamiltonian systems*, Funct. Anal. and Appl. 12 (1978), p. 113-121.
- [Mo] **P. MOLINO** : *Structure transverse aux orbites de la représentation co-adjointe : Le cas des orbites réductives*. Sémin. Géom. Diff. (1983-1984), Montpellier.
- [N] **NEHORSEV** : *Action-angle variable and their generalizations*, Trans. Moscow, Math. Soc. 26 (1972), p. 180-198.
- [S] **J.M. SOURIAU** : *Structure des systèmes dynamiques*, Paris, Dunod, 1970.
- [W] **A. WEINSTEIN** : *The local structure of Poisson manifolds*, J. of Diff. Geom. (1984).

M. BOUCETTA

Université des Sciences et Techniques du Languedoc

Place Eugène Bataillon

34060 MONTPELLIER

France