

RENÉ OUZILOU

**Chapitre IV Sous-algèbres de Cartan I**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1988, fascicule 1B  
« Séminaire Sud-Rhodanien 1ère partie », , p. 103-130

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1988\\_\\_1B\\_103\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__1B_103_0)

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SOUS-ALGÈBRES DE CARTAN I

René OUZILOU

*Si au bout de ces lignes, le lecteur crie à l'évidence, l'auteur aura atteint son but. En dehors de quelques lueurs d'originalité (comme le critère de compacité d'une algèbre de Lie qu'on pourra comparer au critère habituel [2,2]) et quelques remarques sur des résultats élémentaires plus ou moins bien exploités (tel le lemme de pénétration dans une chambre de Weyl au paragraphe 6 du chapitre II). Ce texte n'a qu'une seule ambition : aboutir au plus vite à la description des orbites de la représentation adjointe d'un groupe de Lie compact.*

*Le chapitre I est un aide mémoire sur les algèbres de Lie. Le chapitre II, consacré aux sous-algèbres de Cartan des algèbres de Lie compactes, est un dosage de résultats choisis pour l'essentiel dans les ouvrages de J. Frank ADAMS et O. LOOS. Au chapitre III, on montre comment on peut construire les sous-algèbres de Cartan classiques, et leurs racines, en partant du seul cas  $\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})$ , grâce à des décompositions de Cartan convenablement choisies.*

# I. PANORAMA SUR LES ALGÈBRES DE LIE

## 1. ALGÈBRES NILPOTENTES :

(1.1) Soient  $V$  un  $K$ -espace vectoriel et  $\mathfrak{A} \in \text{End}_K(V)$ . Parmi les sous-espaces vectoriels de  $V$  sur lesquels tous les éléments de  $\mathfrak{A}$  s'annulent (resp. sont nilpotents) il en existe un plus grand  $V_{\mathfrak{A}}$  (resp.  $V^{\mathfrak{A}}$ ) :

$$V_{\mathfrak{A}} = \bigcap_{a \in \mathfrak{A}} \ker a \subset V^{\mathfrak{A}} = \bigcap_{a \in \mathfrak{A}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker a^n$$

Le théorème d'Engel affirme que, si  $A$  est une **sous-algèbre de dimension finie** de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}_K(V)$ ,  $V_{\mathfrak{A}} = \{0\} \Rightarrow V^{\mathfrak{A}} = \{0\}$ .

### (1.2) Critère de nilpotence ;

Une  $K$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est dite nilpotente s'il existe un  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{g}^n$ ,  $\text{adx}_1 \circ \dots \circ \text{adx}_n = 0$ . Le plus petit entier  $n$  assurant cette condition est appelé l'ordre de (nilpotence) de  $\mathfrak{g}$ .

Si  $\mathfrak{g}$  est de dimension finie (ou plus généralement si  $\dim(\mathfrak{g}/\mathcal{C}\mathfrak{g})$  est finie) alors elle est nilpotente dès que tous les  $\text{adx}$ ,  $x \in \mathfrak{g}$ , sont des opérateurs nilpotents sur  $\mathfrak{g}$ . (C'est une conséquence du théorème d'Engel).

Toute sous-algèbre, toute algèbre-quotient, d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  nilpotente d'ordre  $n$  sont nilpotentes d'ordre  $\leq n$ .

Toute extension centrale

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow 0, \quad \mathfrak{a} \subset \mathcal{Z} \mathfrak{g}$$

d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  nilpotente d'ordre  $n$  est nilpotente d'ordre  $\leq n+1$ .

Tout produit cartésien d'algèbre nilpotente  $\mathfrak{g}_i$  d'ordres respectifs  $n_i, 1 \leq i \leq k$ , est nilpotent d'ordre :  $\max(n_1, \dots, n_k)$ .

Le meilleur critère de nilpotence d'une algèbre de Lie de dimension finie  $\mathfrak{g}$  est sans doute celui-ci :  $\mathfrak{g}$  est nilpotente si, et seulement si, sa représentation adjointe est strictement trigonalisable (i.e. il existe une suite croissante  $\mathfrak{g}_0, \dots, \mathfrak{g}_n$  de sous-espaces vectoriels de  $\mathfrak{g}$  telle que

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\}, \quad \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}, \dim \mathfrak{g}_i = i, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \text{et} \quad [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Le théorème d'Ado (dans la version revue et corrigée de Harish-Chandra) assure que toute algèbre de Lie nilpotente de dimension finie admet une **nilreprésentation fidèle** et, par conséquent, les seules algèbres de Lie nilpotentes de dimension finie sont, à isomorphisme près, les sous-algèbres des algèbres de Lie  $\mathfrak{tr}(n)$  des matrices strictement triangulaires à coefficients dans  $K$ .

**Exemple de Heisenberg :**

$$\mathfrak{h}(n) = \begin{bmatrix} 0 & a & \alpha \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in K, \quad (a, b) \in K^n \times K^n$$

est l'extension centrale de l'algèbre commutative  $K^n \times K^n$  qu'on obtient par le cocycle additif

$\sigma : V \times V' \rightarrow K, \quad V = K^n \times K^n$ , que constitue la forme symplectique canonique :

$$\sigma \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\} = \langle x, y' \rangle - \langle y, x' \rangle$$

## 2.- RESOLUBILITE - SEMI-SIMPLICITE.

### (2.1) Critère de Lie :

Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie. Parmi les idéaux co-commutatifs  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{g}$  (i.e.  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  est commutatif) il en existe un plus petit :

$$\mathfrak{D}^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

On définit  $\mathfrak{D}^n\mathfrak{g}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , par  $\mathfrak{D}^{n+1}\mathfrak{g} = \mathfrak{D}(\mathfrak{D}^n\mathfrak{g})$ .

$\mathfrak{g}$  est dite **résoluble** s'il existe  $n \geq 1$  tel que  $\mathfrak{D}^n\mathfrak{g} = \{0\}$ .

Toute sous-algèbre, toute sous-algèbre quotient, d'une algèbre résoluble sont résolubles. Toute extension d'une algèbre résoluble par une algèbre résoluble est résoluble. De ceci il résulte que la somme d'une sous-algèbre résoluble et d'un idéal résoluble d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre résoluble de  $\mathfrak{g}$ . Par conséquent, si  $\mathfrak{g}$  est de dimension finie, elle possède un plus grand idéal résoluble qu'on appelle le **radical résoluble** de  $\mathfrak{g}$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Le radical résoluble de  $\mathfrak{g}$  est réduit à 0.
- ii) Tout idéal commutatif de  $\mathfrak{g}$  est réduit à 0.

Dans ces conditions, on dit que  $\mathfrak{g}$  est **semi-simple**.

**Définition** : On dit que  $\mathfrak{g}$  est **réductive** si  $\mathfrak{g}/\mathcal{C}\mathfrak{g}$  est semi-simple.

### **Théorème [ 5 ]**

Si  $K$  est de caractéristique nulle alors, pour toute représentation semi-simple  $\rho$  de  $\mathfrak{g}$  de dimension finie,  $\rho(\mathfrak{g})$  est réductive.

### **Corollaire 1 :**

Si  $\mathfrak{g}$  est **résoluble**, alors  $\rho(\mathfrak{g})$  est **commutative**.

### **Corollaire 2 :**

Si  $K$  est **algébriquement clos**, toute représentation **simple** de dimension finie d'une algèbre de Lie **résoluble** est de dimension 1.

### Corollaire 3 (Lie).

Si  $\rho$  est une représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie résoluble  $\mathfrak{g}$  telle que tous les  $\rho(x)$ ,  $x \in \mathfrak{g}$ , soient trigonalisables alors  $\rho$  est trigonalisable (i.e. il existe une base dans laquelle tous les  $\rho(x)$  sont trigonalisables).

### Corollaire 4.

Si  $\rho$  est une représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie résoluble  $\mathfrak{g}$  telle que les  $\rho(x)$ ,  $x \in \mathfrak{g}$ , soient semi-simples (i.e. leur polynôme minimal n'a que des racines simples) alors  $\rho(\mathfrak{g})$  est commutative.

**Preuve :** Sous réserve d'une extension de corps des scalaires (ce qui conserve la semi-simplicité des  $\rho(x)$ ) on peut supposer le corps  $K$  algébriquement clos. Alors, d'après le critère de Lie,  $\rho$  est trigonalisable mais, comme les  $\rho(x)$  sont semi-simples, cette trigonalisation est en fait une diagonalisation.

c.q.f.d.

Voici, pour clore ce panorama, un critère de compacité des algèbres de Lie.

### Théorème ( $K = \mathbb{R}$ ) :

Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de dimension finie telle que, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\text{ad}(x)$  soit **semi-simple** alors  $\mathfrak{g}$  est de type compact (i.e. c'est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact).

**Preuve :** D'après un critère de semi-simplicité ([2] ch.I § 6) sous la seule hypothèse "ad(x) semi-simple, pour tout x dans le radical résoluble de  $\mathfrak{g}$ ", la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, ce qui fait que  $\mathfrak{g}$  est réductive.

Soit  $\mathfrak{k}$  un sous-algèbre compacte maximale de  $\mathfrak{g}$ ; il existe alors une involution  $\varphi$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g}; \varphi(x) = x\}$ . Posons  $\mathfrak{p} = \{x \in \mathfrak{g}; \varphi(x) = -x\}$ . Alors  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$  et  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ . Soit  $\mathfrak{a}$  un élément maximal de l'ensemble des sous-algèbres commutatives incluses dans  $\mathfrak{p}$  et à éléments semi-simples (cf[4]). Il existe alors une sous-algèbre  $\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{g}$  telle que les  $\text{ad}(x)$ ,  $x \in \mathfrak{n}$  soient nilpotents sur  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  (cf[3]).

Mais, si les  $\text{ad}(x)$  sont tous semi-simples, il s'ensuit que  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{Cg} \subset \mathfrak{k}$  d'où  $\mathfrak{n} = \{0\}$ , d'où  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$  du fait que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ . Ainsi  $\mathfrak{a}$  est un idéal commutatif de  $\mathfrak{g}$ , d'où  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{k}$ . C'est-à-dire  $\mathfrak{a} = \{0\}$ , de sorte que :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}$ .

## II.- ORBITES DE LA REPRESENTATION ADJOINTE D'UN GROUPE COMPACT

### 1.- GENERATEURS TOPOLOGIQUES :

Si  $G$  est un groupe topologique, on dit qu'un élément  $z \in G$  est un générateur topologique de  $G$ , si le groupe qu'il engendre est dense dans  $G$ . Si un tel élément  $z$  existe, on dit que  $G$  est **topologiquement monogène** ou encore **monothétique**. Un tel groupe  $G$  est commutatif et, s'il est compact, il est métrisable.

Un célèbre théorème de Krönecker affirme que tout  $T^n$  est monothétique.  
Voici un exemple important de groupe monothétique.

#### **Proposition :**

Si dans une suite exacte  $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$  de groupes topologiques abéliens  $H$  est un groupe **fini monogène d'ordre  $p$**  et si  $K$  est monothétique et **divisible par  $p$**  (i.e. :  $x \mapsto x^p$  est surjective) alors  $G$  est **monothétique**.

(Preuve en appendice).

#### **Corollaire :**

Si  $G = T^n$  et si  $K$  est un sous-groupe fermé (non nécessairement connexe) de codimension 1 dans  $G$ , alors  $K$  est monothétique. (En effet,  $K^0$  est un tore et  $K/K^0$  est un sous-groupe fini du cercle).

## 2.- EXPONENTIELLE D'UN GROUPE DE LIE COMPACT.

### **Théorème :**

Si  $G$  est un groupe de Lie compact connexe, son exponentielle est une application surjective de  $T_e G$  dans  $G$ .

**Preuve :** Par moyennisation suivant la mesure de Haar de  $G$  on obtient à partir d'un produit scalaire euclidien sur  $T_e G$  un produit Ad-invariant d'où, par translation à gauche, une métrique bi-invariante sur  $G$ , et il est aisé de montrer que les géodésiques issues de  $e$  pour cette métrique sont les sous-groupe à un paramètre de  $G$ , d'où le résultat par application du théorème de Hopf-Pinow.

### **Corollaire :**

Tout groupe de Lie compact, connexe, commutatif  $G$  est isomorphe à un tore.

(L'exponentielle de  $G$  est alors un morphisme étal surjectif de  $(T_e G, +)$  dans  $G$ , ce qui fait que  $G$  est isomorphe au quotient de  $T_e G$  par un réseau de cet espace vectoriel réel).

## 3.- TORES MAXIMAUX ET SOUS-ALGÈBRES DE CARTAN.

### **(3-1) Définition.**

Un tore maximal d'un groupe de Lie compact  $G$  est un élément maximal dans l'ensemble des sous-groupes fermés, connexes et commutatifs, de  $G$ .

### **Lemme :**

Les algèbres de Lie des tores maximaux de  $G$  sont les sous-algèbres commutatives maximales de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ .

**Preuve :** Il suffit de montrer que toute sous-algèbre de Lie commutative maximale  $\mathfrak{h}$  est l'algèbre de Lie d'un tore maximal. Or, d'après la théorie générale des groupes de Lie, il existe un groupe de Lie connexe  $H$ , immergé dans  $G$ , dont l'algèbre de Lie est  $\mathfrak{h}$ . Alors  $\overline{H}$  est un sous-groupe de Lie



fermé dans  $G$  mais, puisque  $\overline{H}$  est commutatif,  $H$  est commutatif compact connexe; c'est donc un tore dont l'algèbre de Lie est commutative et contient  $\mathfrak{h}$ .

**Corollaire :**

- ◆ Tout élément de  $G$  appartient à un tore maximal.
- ◆ Tout tore est contenu dans un tore maximal.

**(3-2) Structure des sous-algèbres de Cartan d'un groupe de Lie compact.**

Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie compacte, on appelle sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  toute sous-algèbre commutative maximale de  $\mathfrak{g}$ .

**Proposition :**

Pour toute sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  d'une algèbre de Lie compacte  $\mathfrak{g}$  il existe  $x \in \mathfrak{h}$  tel que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^x$ .

( $\mathfrak{g}^x$ , centralisateur de  $x$  est l'ensemble des  $y \in \mathfrak{g}$  tels que  $[y,x] = 0$ )

**Preuve :** Soient  $G$  un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et  $T$  un tore maximal d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . Si  $z$  est un générateur topologique de  $T$  il existe  $x \in \mathfrak{h}$  tel que  $\text{Exp } x = z$ .

Ainsi  $\text{Exp } \mathbb{R}x = T$ , de sorte que, si  $y \in \mathfrak{g}^x$  on a  $(\text{Exp } t \text{ ad } x)y = y$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , puis  $\text{Ad } T.y = y$  et, par conséquent,  $[\mathfrak{h},y] = \{0\}$ .

Ainsi l'inclusion  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^x$  est une égalité.

**Remarque :**

Le centralisateur  $\mathfrak{g}^x$  d'un  $x \in \mathfrak{g}$  est un sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  dès qu'il est commutatif.

**(3.3) Eléments réguliers :**

**Lemme 1 :**

Si  $G$  est un groupe compact d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ , pour tout couple  $(x,y)$  d'éléments de  $\mathfrak{g}$  il existe  $z_0 \in G$  tel que :

$$[\text{Ad}(z_0).x,y] = 0.$$

**Preuve :** Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $\mathfrak{g}$  invariant par la représentation adjointe. Alors  $z \mapsto \langle \text{Ad}(z)x|y \rangle$  atteint son minimum en un point  $z_0 \in G$ . Ainsi, si l'on pose, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$

$$Z(\tau) = \langle \text{Ad}(\exp \tau \zeta \cdot z_0)x|y \rangle, \quad \zeta \in \mathfrak{g}$$

on a

$$\frac{dZ}{d\tau}(0) = 0, \text{ donc } 0 = \langle [\zeta, \text{Ad}(z_0)x]|y \rangle$$

et, par invariance

$$0 = \langle \zeta | [\text{Ad}(z_0)x, y] \rangle$$

### Lemme 2 :

Pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}^x$  est la réunion des sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}$  qui contiennent  $x$ .  
(évident).

### Théorème :

Pour un élément  $x$  d'une algèbre de Lie compacte  $\mathfrak{g}$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Il existe une seule sous-algèbre de Cartan contenant  $x$ .
- ii)  $\mathfrak{g}^x$  est commutatif.
- iii)  $\dim \mathfrak{g}^x = \text{Min} \{ \dim \mathfrak{g}^y, y \in \mathfrak{g} \}$

### Preuve :

i)  $\Leftrightarrow$  ii). C'est le lemme 2.

ii)  $\Rightarrow$  iii). D'après le lemme 1 il existe  $z_0 \in G$  tel que  $\text{Ad}(z_0)y \in \mathfrak{g}^x$  qui est commutatif.

Donc  $\mathfrak{g}^x \subset \mathfrak{g}^{\text{Ad}(z_0)y}$  et, par conséquent :

$$\dim \mathfrak{g}^x \leq \dim \mathfrak{g}^y.$$

iii)  $\Rightarrow$  ii) Considérons l'opérateur  $A = \text{adx}$ ; il est semi-simple (à spectre imaginaire pur) d'où une décomposition :

$$\mathfrak{g} = \ker A \oplus \text{im } A.$$

Soit  $\mathcal{U} = \{y \in \mathfrak{g}^x; \text{ad}_y|_{\text{im } A} \text{ soit inversible} \}$ . C'est un ouvert de Zariski de  $\mathfrak{g}^x$  qui contient  $x$ . Soit  $\mathcal{V} = \{y \in \mathfrak{g}^x; \text{ad}_y|_{\ker A} \neq 0 \}$ ; C'est un ouvert de Zariski. Si  $\mathcal{V}$  était non vide il

couperait  $\mathcal{U}$ , or pour tout  $y_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ , on a, du fait que  $\ker A \oplus \text{im } A$  est  $\text{ad } y_0$ -stable (car  $[\text{ad } y_0, \text{ad } x] = 0$ ) :

$$\mathfrak{g}^{y_0} \subsetneq \mathfrak{g}^x$$

Ainsi  $\mathcal{V}$  est vide, i.e.  $\mathfrak{g}^x$  est commutatif.

**Corollaire :**

Tous les tores maximaux d'un groupe de Lie compact  $G$  sont conjugués.

**Définition :** On dit qu'un élément  $x$  d'une algèbre de Lie compacte est régulier s'il vérifie les conditions équivalentes du théorème précédent. Un élément d'un groupe de Lie compact est régulier si c'est l'image exponentielle d'un élément régulier de l'algèbre de Lie de ce groupe.

**(3-4) Centralisateurs :**

**Proposition :**

Le centralisateur d'un sous-groupe abélien connexe  $H$  de  $G$  est la réunion de tous les tores maximaux contenant  $H$ .

**Preuve :** Il suffit de montrer que tout  $z \in G$  qui centralise  $H$  est inclus dans un tore maximal contenant  $H$ . Soit  $K$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $H$  et  $z$ ; il est commutatif;  $\bar{K}$  est donc un sous groupe de Lie commutatif de  $G$ . Mais alors la composante neutre  $\bar{K}_0$  est un tore et  $\bar{K}/\bar{K}_0$  est un groupe fini qui, du fait que  $H \subset K_0$ , est engendré topologiquement par la seule classe  $zK_0$ ; Mais alors, d'après la proposition de 1,  $\bar{K}$  est monothétique et, par conséquent, inclus dans un tore maximal.

**Corollaire :**

La composante neutre  $\Gamma$  du centralisateur d'un élément  $x \in G$  est la réunion des tores maximaux contenant  $x$ .

**Preuve :** Soit  $y \in \Gamma$ . Il existe un tore maximal  $S$  de  $\Gamma$  contenant  $y$ . Ainsi  $x$  centralise  $S$  et il existe donc un tore maximal de  $G$  contenant  $S$  et  $x$  donc  $y$  et  $x$ .

**Remarque :** Pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$ , le centralisateur  $G^\xi$  est identique au centralisateur de  $\text{Exp } t\xi$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; il est donc connexe. Par contre le centralisateur d'un élément  $x$  de  $G$  peut ne pas être connexe. Ainsi, soit  $x \in \text{SO}(3)$  une rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\alpha$ ; si  $\alpha = 0$  le centralisateur de  $x$  est  $\text{SO}(3)$ ; si  $\alpha \neq 0$  et  $\pi$ , le centralisateur de  $x$  est l'ensemble des rotations d'axe  $\Delta$ ; si  $\alpha = \pi$ , le centralisateur de  $x$  a deux composantes connexes : la composante neutre formée des rotations coaxiales à  $x$  et l'autre composante formée de toutes les symétries d'axe orthogonal à  $\Delta$ .

#### 4. GROUPE DE WEYL :

**(4-1) Définition :** Soient  $G$  un groupe de Lie compact connexe et  $T$  un tore maximal de  $G$ . Le groupe de Weyl  $W(T)$  est l'ensemble des automorphismes de  $T$  qui sont induits par les automorphismes intérieurs de  $G$  stables sur  $T$ .

**Proposition 1 :**  $W(T) = N(T)/T$ .

**Preuve :** Ces automorphismes intérieurs constituent le normalisateur  $N(T)$  de  $T$  dans  $G$ . Deux éléments  $g_1$  et  $g_2$  de  $N(T)$  fournissent le même automorphisme de  $T$  si, et seulement si,  $g_1 g_2^{-1} \in Z(T)$ ; comme ce centralisateur est la réunion de tores maximaux contenant  $T$ , il est égal à  $T$ , tore maximal.

**Proposition 2 :**  $W(T)$  est fini.

**Preuve :** L'algèbre de Lie de  $N(T)$  est l'ensemble des  $y \in \mathfrak{G}$ , algèbre de Lie de  $G$ , tels que  $[y, \mathbf{T}] \subset \mathbf{T}$ . Si  $x$  est un élément régulier de  $\mathbf{T}$ , on sait que  $\mathbf{T} = \mathfrak{G}^x$  et, la seule commutativité de  $\mathbf{T}$  assure que  $\mathbf{N}(\mathbf{T}) = [y \in \mathfrak{G}; (\text{ad } x)^2 y = 0]$ . Mais alors la semi-simplicité de  $\text{ad } x$  assure que  $\mathbf{N}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ . Ainsi le groupe  $N(T)/T$  est compact et discret, donc fini.

#### (4-2) Réduction :

**Proposition :** Soient  $T$  un tore maximal de  $G$  et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$  inclus dans  $T$ . Alors :

- i)  $N(T/H) \simeq N(T)/H$
- ii)  $T/H$  est un tore maximal de  $G/H$ .
- iii)  $W_G(T) \simeq W_{G/H}(T/H)$ .

**Preuve :**

i) est évident.

ii) il suffit de montrer que  $\underline{T}/\underline{H}$  est un sous-algèbre de Cartan de  $\underline{G}/\underline{H}$ . Or si  $x$  est un élément régulier de  $\underline{T}$ , on a  $\underline{T} = \underline{G}^x$ . Désignons par  $\varphi$  la surjection canonique  $\underline{G} \rightarrow \underline{G}/\underline{H}$ . Tout élément de  $\underline{G}/\underline{H}$  qui commute avec  $\varphi(x)$  s'écrit sous la forme  $\varphi(u)$ ,  $u \in \underline{G}$  et  $[u, x] \in \underline{H}$ , d'où  $(\text{adx})^2 u = 0$  par conséquent  $u \in \underline{T}$ , de sorte que  $\underline{T}/\underline{H}$  est le centralisateur de  $\varphi(x)$  dans  $\underline{G}/\underline{H}$ .

$$\text{iii) } W(T/H) = N(T/H)/T/H \simeq (N(T)/H)/(T/H) \simeq N(T)/T.$$

#### (4-3) Représentation canonique :

$N(T)$  est aussi le fixateur de  $\underline{T}$  pour la représentation adjointe de  $G$  dans  $\underline{G}$ , ce qui permet de représenter canoniquement  $W(T)$  dans  $\underline{T}$  plus précisément :

**Lemme (P.Dazard) :**

Pour tout  $\xi \in \underline{T}$  et tout  $g \in G$  tels que  $\text{Ad}g.\xi \in \underline{T}$ , il existe  $u \in G_\xi$  et  $n \in N(T)$  tels que  $g = n.u$ . Un tel  $n$  est déterminé modulo  $G_\xi$ .

**Preuve :**

$$[\text{ad}(g).\xi, \underline{T}] = 0 \Leftrightarrow [\xi, \text{Ad}(g^{-1})\underline{T}] = 0 \Leftrightarrow \text{Ad}(g^{-1}).\underline{T} \subset G_\xi \Leftrightarrow \text{Ad}(g^{-1}).T \subset G_\xi$$

Ainsi  $T$  et  $\text{Ad}(g^{-1})T$  sont deux tores maximaux de  $G_\xi$ . Il existe donc  $u \in G_\xi$  tel que

$$\text{Ad}(u^{-1})T = \text{Ad}(g^{-1})T \quad \text{d'où } g^{-1}u \in N(T).$$

**Corollaire 1 :**

Les orbites de la représentation adjointe de  $G$  s'identifient canoniquement aux orbites de  $W(T)$  dans  $\underline{T}$ .

**Corollaire 2 :**

Si  $\xi \in \underline{T}$  est un élément régulier et si un  $w \in W(T)$  fixe  $\xi$ , alors  $w = \text{id}_T$ .

(L'élément  $n$  du lemme appartient alors lui aussi à  $G_\xi$ , or  $G_\xi$  est alors égal à  $T$ ).

**(4-4) Cas d'un groupe de rang 1 :**

Le rang d'un groupe de Lie compact est la dimension de ses sous-algèbres de Cartan.

**Théorème :**

Si  $G$  est un groupe de Lie compact connexe de rang 1, si  $T$  est un tore maximal de  $G$  et si  $G \neq T$  alors  $\dim G = 3$  et  $W(T) = \{+1, -1\}$ .

**Preuve (Loos) :** On se donne une structure euclidienne sur  $\underline{G}$  invariante par la représentation adjointe. Soit  $u \in \underline{T}$  de norme 1. Alors  $g \rightarrow \text{Ad}(g).u$  est une application de  $G$  dans  $S^{n-1}$  ( $n = \dim G$ ). Or le fixateur de  $u$  dans  $G$  est égal à  $T$ , ce qui fait de  $G/T$  une sous-variété compacte connexe de  $S^{n-1}$  de dimension  $n-1$ , d'où  $G/T \simeq S^{n-1}$ . En particulier l'application antipodale  $x \rightarrow -x$  de  $S^{n-1}$  provient d'un élément de  $W(T)$  et comme le groupe de Weyl est un sous-groupe d'isométries de la droite  $\underline{T}$ , c'est le groupe  $\{+1, -1\}$  tout entier.

Soit  $\gamma$  le générateur positif de  $\Pi_1(T) = \mathbb{Z}$ . (Par hypothèse  $T \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ). Alors  $\gamma^{-1}$

n'est pas homotope à  $\gamma$  dans  $T$  mais il l'est dans  $G$ , compte-tenu de la non-trivialité du groupe de Weyl de  $T$ ; en effet, il existe  $g_0 \in G$  tel que :

$$\text{Ad}(g_0)u = -u$$

de sorte que si on choisit  $\xi_0 \in \underline{G}$  tel que  $\text{Exp } \xi_0 = g_0$ ,  $\text{Ad}(\text{Exp } t \xi_0)$  est une homotopie de  $\gamma$  à  $\gamma^{-1}$  dans  $G$ .

Mais alors, dans la suite exacte d'homotopie :

$$\rightarrow \Pi_2(S^{n-1}) \rightarrow \Pi_1(T) \xrightarrow{\alpha} \Pi_1(G) \rightarrow$$

l'application  $\alpha$  n'est pas injective, ce qui donne  $\Pi_2(S^{n-1}) \neq 0$  et, par conséquent  $n-1 = 2$ .

## 5. RACINES :

### (5-1) Poids d'une représentation :

Soient  $G$  un groupe compact et  $\rho$  une représentation de  $G$ , dans un espace vectoriel complexe  $W$  de dimension finie. Moyennant une forme hermitienne invariante sur  $W$  on s'assure que  $\rho$  est semi-simple et  $W$  se décompose donc en facteurs simples  $W_1, \dots, W_r$ . Si  $G$  est commutatif, ces facteurs sont de dimension 1 de sorte que s'il existe des caractères  $\chi_1, \dots, \chi_r$  de  $G$  tels que :

$$1 \leq i \leq r \text{ et } u \in W_i \text{ et } x \in G \Rightarrow \rho(x)u = \chi_i(x)u.$$

**Définition :** Si  $G$  est un groupe de Lie et si  $T$  est un tore maximal de  $G$ , les caractères de  $\rho|_T$  sont appelés les poids de la représentation  $\rho$  relatifs à  $T$ . Chacun de ces poids  $\chi$  est déterminé par une forme linéaire  $\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  au moyen de :

$$\chi(\exp h) = e^{2\pi i \alpha(h)} \quad , h \in \mathbb{T}$$

Si  $\rho = \text{Ad}^{\mathbb{C}}$  (Représentation adjointe complexifiée) les poids de  $\rho$  sont appelés les racines de  $G$  (relatives à  $T$ ).

Le résultat suivant se démontre aisément.

### **Théorème 1 :**

Soit  $R$  l'ensemble des racines de  $G$  relatif à  $T$ .

Pour tout  $\alpha \in R$ , on pose :

$$W_\alpha = \{X \in \mathfrak{G}^{\mathbb{C}}; [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{T}\}$$

Alors  $\overline{W}_\alpha = W_{-\alpha}$  et il existe donc un sous-espace vectoriel réel  $V_\alpha$  de  $\mathfrak{G}$  tel que

$$V_\alpha^{\mathbb{C}} = W_\alpha + W_{-\alpha}.$$

Ces espaces  $V_\alpha$  sont de dimension 2 et :

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} V_\alpha$$

(Sur chaque  $V_\alpha$ , la racine  $\alpha$  est une rotation infinitésimale)

### Corollaire 1 :

Pour tout  $h \in \mathfrak{T}$ , le centralisateur de  $h$  dans  $\mathfrak{G}$  est égal à :

$$\mathfrak{T} \oplus \bigoplus_{\alpha(h)=0} V_\alpha$$

### Corollaire 2 :

Un élément  $h$  de  $\mathfrak{T}$  est régulier si, et seulement si, il n'est annulé par aucune racine  $\alpha$ .

### Théorème 2 :

Soit  $U_\alpha$  le noyau dans  $\mathfrak{T}$  du caractère  $\chi$  défini par

$$\chi(\exp h) = e^{2\pi i \alpha(h)}, \quad h \in \mathfrak{T}$$

Alors il existe un élément non trivial du groupe de Weyl de  $\mathfrak{T}$  qui fixe chaque point de  $V_\alpha$ .

### Corollaire 1 :

Il existe un élément non trivial du groupe  $W(\mathfrak{T})$  qui fixe chaque point de l'hyperplan  $\alpha = 0$ .

### Corollaire 2 :

Si on se donne sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$  un produit scalaire euclidien invariant pour la représentation adjointe, le groupe de Weyl de tout tore maximal  $\mathfrak{T}$  de  $\mathfrak{G}$  contient les réflexions orthogonales par rapport aux hyperplans de  $\mathfrak{T}$  constitués par les noyaux des racines de  $\mathfrak{G}$  relatives à  $\mathfrak{T}$ .



## Preuve du théorème 2 :

$U_\alpha$  étant de codimension 1 dans  $T$  possède un générateur topologique  $u$  (II;1 cor.). Alors  $T$  est un tore maximal de la composante neutre  $Z(u)^\circ$  du centralisateur de  $u$ . Par passage au quotient  $T/U_\alpha$  est un tore maximal de dimension 1 de  $Z(u)^\circ/U_\alpha$  (cf.4.2). Ainsi, d'après (4-4),  $\dim Z(u)^\circ/U_\alpha = 1$  ou 3. Mais, grâce au corollaire 2 du théorème 1,  $\dim Z(u)^\circ/U_\alpha \geq 3$ . Ainsi cette dimension est égale à 3, ce qui implique la non-trivialité du groupe de Weyl de  $Z(u)^\circ/U_\alpha$  par rapport à  $T/U_\alpha$ .

## 6.- CHAMBRES DE WEYL :

**(6-1) Généralités :** Soient  $E$  un espace affine euclidien et  $\mathcal{H}$  un ensemble d'hyperplans de  $E$ , localement fini. la réunion de ces hyperplans est donc fermée dans  $E$  et les composantes connexes du complémentaire de cette réunion sont des ouverts de  $E$  qu'on appelle **chambres de Weyl** du système  $\mathcal{H}$ .

**Définitions :** Un  $H \in \mathcal{H}$  est appelé un mur d'une chambre  $C$  si  $\bar{C} \cap H$  a un intérieur non vide dans  $H$ ; cette intersection est alors l'adhérence dans  $H$  d'une chambre de Weyl  $C'$  de

$$\mathcal{H}_H = K \cap H; K \in \mathcal{H} \setminus \{H\}.$$

Les intersections de  $C$  avec les murs de  $C$  sont appelées les faces de  $C$ .

### Remarques :

1/ Toute chambre de Weyl  $C$  est un ouvert convexe; elle est déterminée entièrement par ses murs et un de ces points  $x \in C$  (resp.  $\bar{C}$ ) est l'intersection des demi-espaces ouverts (resp. fermés) de  $E$  contenant  $x$  et limités aux murs de  $C$ .

2/ Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux chambres de  $\mathcal{H}$  et si  $C_1 \cap \bar{C}_2 \neq \emptyset$  alors  $C_1 = C_2$ .

### (6-2) Lemme de pénétration :

Si  $C$  est une chambre de Weyl, on désignera par  $W_C$  le groupe d'isométries engendré par les réflexions orthogonales de  $E$  sur les murs de  $C$ . Si  $p \in \bar{C}$  on désignera par  $W_{C,p}$  le sous-groupe de  $W_C$  engendré par les réflexions sur les murs de  $C$  passant par  $p$ .

**Théorème :** i) Si  $W_C$  est fini, toute orbite de ce groupe coupe  $\bar{C}$ .

ii) De plus, si  $p \in \bar{C}$  et si  $x$  est un point suffisamment voisin de  $p$ , alors l'orbite de  $x$  suivant  $W_{C,p}$  coupe aussi  $\bar{C}$ .

**Preuve :** i) Tout point  $y$  de l'orbite  $W_C \cdot x$  situé à une distance minimale d'un point  $c$  fixé dans  $C$  est dans  $\bar{C}$ ; sinon il existerait un mur  $H$  de  $C$  séparant  $c$  et  $y$  et, par symétrie de  $y$  par rapport à ce mur, on obtiendrait un point de l'orbite de  $x$  plus proche de  $c$  que  $y$ .

ii) Si  $x$  se trouve à une distance de  $p < \inf d(p,H)$ ,  $H \in \mathcal{M}$  et  $p \notin H$ , alors l'orbite réduite  $W_{C,p} \cdot x$  se trouve du même côté que  $p$  des murs de  $C$  qui ne contiennent pas  $p$  de sorte que, pour montrer qu'un point  $y$  de  $W_{C,p} \cdot x$  à distance minimale de  $c$  est dans  $\bar{C}$ , il suffit de raisonner par l'absurde, comme précédemment, en se limitant aux murs de  $C$  passant par  $p$ .

**Corollaire :**

- 1)  $W_C$  opère transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl.
- 2)  $W_{C,p}$  opère transitivement sur l'ensemble des chambres adhérent à  $p$ .

### (6-3) Retour au groupe de Weyl.

**Théorème 1 :**

On suppose l'existence d'un groupe fini  $W$  contenant  $W_C$  et tel que pour tout  $c \in C$ ,  $\text{id}_E$  soit le seul élément de  $W_C$  fixant  $c$ . Alors :

- i)  $W$  opère librement sur l'ensemble des chambres de  $\mathcal{H}$ , d'où  $W = W_C$ .
- ii) Pour tout  $p \in C$ ,  $W_{C,p}$  est le groupe d'isotropie de  $p$  dans  $W$ .

**Preuve :** Soit  $w \in W$  tel que  $w(C) = C$ . Si  $n$  est l'ordre de  $W$ , on a par convexité, en prenant un point quelconque  $c$  de  $C$  :

$$(c_0 =) \frac{c + w(c) + \dots + w^{n-1}(c)}{n} \in C \quad \text{et} \quad w(c_0) = c_0$$

### **Théorème fondamental :**

L'adhérence  $\bar{C}$  d'une chambre  $C$  est un domaine fondamental pour  $W = W_C$  (i.e. toute orbite de  $W$  coupe  $\bar{C}$  en un point et en un seul).

**Preuve :** D'après le lemme de pénétration : i) il suffit de démontrer que, si  $(p,q) \in \bar{C} \times \bar{C}$  et s'il existe  $w \in W$  tel que  $p = w(q)$  alors  $p = q$ . Soit  $C' = w(C)$ . Alors  $p \in \bar{C} \cap \bar{C}'$ . Mais d'après le lemme de pénétration : ii) il existe  $w' \in W_p$  tel que  $w'(C') = C$ , de sorte que  $w' \circ w(C) = C$  d'où  $w' \circ w = \text{id}_E$  d'après le théorème précédent. Ainsi :

$$p = w'(p) = w'(w(q)) = q.$$

**Application :** En prenant pour  $\mathfrak{H}$  l'ensemble des hyperplans noyaux des racines associées à un sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{T}$  d'une algèbre de Lie compacte  $\mathfrak{G}$  et en constatant que, grâce à l'étude faite au paragraphe 5 (Th.2, cor.2) et au paragraphe 4 (cor.2), le groupe de Weyl  $W_{\mathfrak{T}}$  vérifie les hypothèses du théorème 1, on peut affirmer le résultat bien connu :

*" L'ensemble des orbites de la représentation adjointe d'un groupe de Lie compact connexe  $G$  s'identifie canoniquement à l'adhérence d'une chambre de Weyl d'un sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie de  $G$  "*

### III.- SOUS-ALGÈBRES DE CARTAN CLASSIQUES.

#### 1. GROUPE LINEAIRES CONFORMES :

##### (1.1) Cas euclidien :

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace euclidien. Une transformation linéaire  $A \in GL(E)$  préserve les angles à l'origine si, et seulement si, on a l'identité :

$$(1) \quad \frac{\langle Au | Av \rangle}{\|Au\| \cdot \|Av\|} = \frac{\langle u | v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

et, pour que les angles soient conservés en tout point il faut et il suffit que l'on ait de plus l'identité :

$$(2) \quad \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \frac{\|Av\|}{\|v\|} (=k)$$

Le conjunction de (1) et (2) se traduit par l'existence d'une constante  $k > 0$  telle qu'on ait l'identité :

$$\langle Au | Av \rangle = k^2 \langle u | v \rangle$$

c'est-à-dire :

$$A^* A = k^2 \text{id}_E.$$

##### Définition .

Un opérateur  $A \in \text{End}(E)$  est dit **conforme** s'il existe une constante réelle  $C(A)$  telle que :

$$A^* A = C(A) \text{id}_E.$$

##### Remarques :

1) Une telle constante est positive et, suivant une base orthonormale, les lignes de  $A$  sont orthogonales et leurs carrés scalaires sont égaux à  $C(A)$ .

2) La multiplicativité du déterminant implique :

$$C(A)^n = (\det A)^2 \quad (n = \dim E)$$

d'où

$$C(A) = |\det A|^{2/n}.$$

3) Les transformations conformes positives (i.e. conservant l'orientation de l'espace)

sont les  $A \in GL(E)$  telles que  $\det A > 0$  et

$$A^* A = (\det A)^{2/n} \text{id}_E.$$

Ces transformations forment un cône homogène ouvert dont l'adhérence est l'ensemble de tous les endomorphismes conformes positifs.

4) Le groupe linéaire conforme positif  $GL^+(E)$  est canoniquement isomorphe à

$$SO(E) \times \mathbb{R}_+^*.$$

5) Dans le cas  $n=2$ ,  $A$  est un endomorphisme conforme positif  $\Leftrightarrow A^* A = (\det A) \text{id}_E$ ,

c'est-à-dire si

$${}^t A = {}^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est égal à la matrice associée à  $A$  :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces matrices :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad ; (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

est un corps isomorphe à  $\mathbb{C}$ .

## (1-2) Cas hermitien.

Soit  $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace hermitien.

### Définition :

Par analogie avec le cas euclidien, un  $A \in \text{End}(H)$  est dit conforme s'il existe une constante  $c(A)$  telle que :

$$A^* \cdot A = c(A) \text{id}_{\mathbb{H}} \quad (A^* = {}^t \bar{A})$$

Il est clair que cette constante est :

$$c(A) = |\det A|^{2/n}.$$

**Proposition :** L'espace des endomorphismes linéaires conformes de  $\mathbb{C}^2$  est un corps. Il est constitué par les matrices du type :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

**Définition :** Ce corps est le corps  $\mathbb{H}$  des **quaternions**.

La conjugaison de  $\mathbb{H}$  est la transposition conjuguée

$$A \mapsto A^*$$

La norme d'un élément  $A$  de  $\mathbb{H}$  est la racine carrée de son déterminant i. e. :

$$A^* \cdot A = A \cdot A^* = \|A\|^2 = \|A^*\|^2.$$

Les quaternions purs ( $A + A^* = 0$ ) forment une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$  isomorphe à  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ .

**Génération abstraite de  $\mathbb{H}$  :** Il existe une injection canonique de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{H}$  :

$$(1) \quad \alpha \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

Si, par ailleurs, on pose :

$$j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a, alors, modulo l'identification canonique (1) :

$$\mathbb{H} = \{ \alpha + \beta j; (a, b) \in \mathbb{C}^2 \}$$

avec les deux relations fondamentales :

$$j^2 = -1, \quad \beta j = j \bar{\beta}, \quad \forall \beta \in \mathbb{C}$$

(Il est aisé de montrer que cette définition abstraite fournit un corps isomorphe au corps que nous avons noté  $\mathbb{H}$ ).

**Définition :** L'ensemble des matrices quaternioniques  $A$  d'ordre  $n$  telles que :

$$A^* A = I \quad (A^* = {}^t A)$$

est un groupe qu'on note  $U(n, \mathbb{H})$  ou  $Sp(n)$ .

Ce groupe est la forme compacte du groupe  $Sp(n, \mathbb{R})$ .

## 2. GROUPE $U(n, \mathbb{C})$ .

C'est l'ensemble des matrices  $A \in M(n, \mathbb{C})$  telles que :

$$A^* \cdot A = I.$$

L'algèbre de Lie de  $U(n, \mathbb{C})$  est l'ensemble des matrices  $B \in M(n, \mathbb{C})$  telle que :

$$B + B^* = 0.$$

De façon explicite toute matrice de  $\mathfrak{u}(n; \mathbb{C})$  s'écrit sous la forme :

$$\text{diag}(ix_1, \dots, ix_n) + \sum_{\alpha < \beta} x_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}^{(a)} + iy_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}^{(s)}$$

avec

$$E_{\alpha\beta}^{(a)} = e_{\alpha\beta} - e_{\beta\alpha}$$

( $e_{\alpha\beta}$  est la matrice à éléments nuls sauf à la ligne  $\alpha$  et à la colonne  $\beta$  où l'élément vaut 1)

$$E_{\alpha\beta}^{(s)} = e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha}$$

(Les  $x_\gamma, x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta}$  sont des nombres réels).

Il est alors aisé de se rendre compte que les matrices diagonales de  $\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})$  forment une sous-algèbre de Cartan et que les formes linéaires  $\pm(x_\alpha - x_\beta)$ ,  $\alpha < \beta$ , en sont les racines, les espaces radiciels associés étant engendrés respectivement par  $(E_{\alpha\beta}^{(a)}, i E_{\alpha\beta}^{(s)})$ .

La connaissance des racines permet d'avoir le centre du groupe de Lie  $U(n, \mathbb{C})$  : c'est l'image diagonale de  $U(1)$ .

## 3.- GROUPE $SU(n, \mathbb{C})$ .

**Remarque :** Si  $\mathfrak{a}$  est une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre compacte  $\mathfrak{g}$  et si une sous-algèbre  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  contient un élément régulier de  $\mathfrak{a}$ , alors  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{h}$ .

## Application à $su(n, \mathbb{C})$

C'est l'algèbre de Lie des éléments  $A$  de  $u(n, \mathbb{C})$  à trace nulle. Parmi les  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $x_1 + \dots + x_n = 0$  on peut toujours trouver des vecteurs à composantes toutes distinctes, de sorte que, compte-tenu de la remarque précédente :

### Proposition :

Les  $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_1 + \dots + x_n = 0$ , constituent une sous-algèbre de Cartan de  $su(n, \mathbb{C})$  avec les mêmes racines que précédemment.

### Corollaire :

Le centre de  $Su(n, \mathbb{C})$  est l'image diagonale du groupe des racines  $n^{\text{ième}}$  de l'unité.

## 4.- GROUPE $U(N, \mathbb{H})$ .

L'algèbre de Lie de  $U(n, \mathbb{H})$  est l'ensemble des matrices quaternioniques  $A$  d'ordre  $n$  telles que  $A + A^* = 0$ . On peut en donner une autre caractérisation ne faisant appel qu'aux nombres complexes; cette algèbre est l'ensemble :

$$\{A + Bj ; \quad A = -\bar{A}, \quad B = {}^t B, \quad (A, B) \in M(n, \mathbb{C})^2\}$$

La transformation  $\sigma$  (conjugaison de charge)

$$A + Bj \mapsto A - Bj$$

préserve le produit des matrices dans  $M(n, \mathbb{H})$  (Grâce à  $Aj = j\bar{A}$ ) ce qui permet d'avoir la décomposition de Cartan :

$$u(n, \mathbb{H}) = u(n, \mathbb{C}) + \text{sym}(n, \mathbb{C})j.$$

Pour obtenir la décomposition radicielle de  $u(n, \mathbb{H})$  suivant une sous-algèbre de Cartan, il suffira d'appliquer le principe suivant :

### Principe de permanence :

Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  est une décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie réductrice et  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{k}$  telle que le centralisateur de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{p}$  se réduit à  $0$ , alors  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ .



**Proposition :**

L'algèbre  $\text{diag}(ix_1, \dots, ix_n)$  reste une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{u}(n, \mathbb{H})$  avec comme racines supplémentaires (sur l'espace  $\text{sym}(n, \mathbb{C})$  des matrices symétriques complexes) les formes linéaires  $x_\alpha + x_\beta$  et les espaces radiciels correspondants sont engendrés par les matrices symétriques élémentaires.

**5.- SOUS-ALGÈBRES DE CARTAN DE  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ .**

**(5.1) Cas pair :**

**Lemme :**

L'injection de  $\mathfrak{u}(n)$  dans  $\mathfrak{so}(2n)$  :

$$A + Bi \rightarrow \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}, \quad A = -{}^tA, \quad B = {}^tB$$

est un morphisme d'algèbre de Lie.

**Proposition :**

i) Posons  $J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ . Alors l'application  $U \rightarrow J U J^{-1}$  est un automorphisme

de l'algèbre de lie  $\mathfrak{so}(2n)$  donnant la décomposition de Cartan :

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(n)$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & -A' \end{bmatrix} ; A' = -{}^tA', \quad B' = -{}^tB' \right\}$$

ii) Les sous-espaces radiciels de  $\mathfrak{p}$  sont les :

$$\left\{ \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} x E_{\alpha\beta}^{(a)} & y E_{\alpha\beta}^{(a)} \\ y E_{\alpha\beta}^{(a)} & -x E_{\alpha\beta}^{(a)} \end{bmatrix} & ; (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \neq \beta \end{array} \right\}$$

avec pour poids les  $x_\alpha + x_\beta$ ,  $\alpha \neq \beta$ .

## (5.2) Cas impair :

Pour  $\mathfrak{so}(2n+1)$  on utilise l'involution de Cartan :

$$U \rightarrow S U S^{-1}, \quad S = \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

### Proposition :

Cette involution donne pour décomposition de Cartan :

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; c \in \mathbb{R}^{2n} \right\}$$

$$\mathfrak{p}^- = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ -t_c & 0 \end{bmatrix} ; c \in \mathbb{R}^{2n} \right\}$$

Par restriction de  $\text{ad}$  à  $\mathfrak{u}(\mathfrak{n})$  (moyennant l'identification précédente de cette algèbre à une sous-algèbre de  $\mathfrak{so}(2n)$ ) on obtient la représentation naturelle de  $\mathfrak{u}(\mathfrak{n})$  sur  $\mathbb{C}^n$ .

Les racines nouvelles sont les  $x_\alpha$ .

## APPENDICE

### 1.- Générateurs topologiques d'un tore :

Un élément  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit **irrationnel** s'il n'existe pas de relations affines :

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$

à coefficients entiers (i.e.  $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ ).

L'ensemble de ces éléments est **dense** dans  $\mathbb{R}^n$  (c'est une conséquence du théorème de catégorie de Baire).

#### **Théorème (Krönecker )**

L'image canonique dans  $\mathbb{T}^n$  de tout élément irrationnel  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  est un générateur topologique de  $\mathbb{T}^n$ .

#### **Preuve :**

Compte-tenu du fait bien connu que les caractères d'un groupe commutatif localement compact séparent les points de ce groupe, il suffit de montrer que toute forme linéaire  $\eta$  sur  $\mathbb{R}^n$  qui prend les valeurs entières sur la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  ainsi qu'en  $(x_1, \dots, x_n)$  prend des valeurs entières partout; or, cette hypothèse se traduit par l'existence de nombres entiers

$$a_1, \dots, a_n \quad (a_i = \langle \eta, e_i \rangle)$$

tels que :

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \in \mathbb{Z}.$$

## 2.- Générateurs topologiques d'une extension :

### **Théorème :**

Si dans une suite exacte

$$O \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow O$$

de groupes topologiques commutatifs,  $K$  est un groupe fini cyclique d'ordre  $n$ , si  $H$  est **divisible** par  $n$  et admet un **générateur topologique**  $u$ , alors  $G$  est **monothétique**.

### **Preuve :**

Soit  $v$  un élément de  $G$  se projetant sur un générateur de  $K$ . Alors  $nv \in H$  et, puisque  $H$  est divisible par  $n$ , il existe  $s \in H$  tel que :

$$ns = u - nv$$

Mais alors l'ensemble  $L$  des multiples de

$$g = s + nv$$

est dense dans  $H$ , ce qui fait que pour tout entier  $k \in [1, n]$ ,  $L$  est dense dans  $H + kg$ : or ces translatés de  $H$  sont toutes les classes de  $G$  modulo  $H$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] **J. Frank ADAMS** : Lectures on Lie Groups (1969), Benjamin
  
- [2] **N. BOURBAKI** : Groupes et Algèbres de Lie :  
1) Chapitre I, paragraphe 6 n°5 (1960) Hermann.  
2) Chapitre IX, paragraphe 1 n°3 (1982) Masson.
  
- [3] **J. DIEUDONNE** : Eléments d'analyse T.5 ch.XXI.21 (1975), Gauthier-Villars.
  
- [4] **J. DIXMIER** : Algèbres enveloppantes (1974). Gauthier-Villars.
  
- [5] **G. HOCHSCHILD** : Basic theory of algebraic Groups and Lie algebras (1981), Springer-Verlag.
  
- [6] **O. LOOS** : Symmetric Spaces II (1969), Benjamin.
  
- [7] **V.S.VARADARAJAN** : Lie groups, Lie algebras and their representations (1974), Prentice-Hall.