JEAN PRADINES

Variétés d’orbites

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 2A
, p. 63-70
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___2A_63_0>

VARIETES D'ORBITES

par Jean PRADINES [1]

(1) Département de Mathématiques - Bât. 1R2
Université Paul SABATIER
118, route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cedex

VARIETES D'ORBITES

par Jean PRADINES

L'étude des systèmes complètement intégrables en Géométrie ou en Mécanique conduit à introduire, sur l'espace des feuilles, des orbites, ou des mouvements, une structure plus riche qu'une topologie, mais en général plus faible qu'une structure de variété régulière. Plusieurs structures de ce type ont été considérées par différents auteurs, mus par des motivations diverses, et s'ignorant souvent mutuellement. D'une façon non exhaustive (notamment on ne parlera pas de topos), on se propose ici de **comparer** ces structures, en examinant si certaines se déduisent des autres par un **appauvrissement des données** (relation notée $\rightarrow$), ou par un **affaiblissement des conditions** (relation notée $\hookrightarrow$) ; ces relations sont transitives. Les structures envisagées vérifient toutes :

$$\text{variétés régulières} \hookrightarrow \; ? \; \rightarrow \text{topologies.}$$

Pour simplifier, nous n'envisageons pas ici les morphismes entre ces structures (ce qui permettrait de considérer ces flèches comme des foncteurs d'**inclusion** ou d'**oubli**, et de préciser s'ils sont pleins ou fidèles).

On notera Q l'ensemble support de la structure à définir.

Le fil directeur sera de voir ces différentes structures comme procédant de différentes généralisations de la définition élémentaire d'une variété régulière à l'aide d'un **atlas** et d'une notion convenable, soit de **maximalité**, soit d'**équivalence** entre atlas.

Ainsi, dans la définition d'une structure difféologique, au sens de J.M. SOURIAU [15] , ou brièvement **D-variété**, la donnée des cartes, ou plutôt des **co-cartes**, de l'atlas maximal (qui sont des injections dans Q d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec n fixé) est remplacée par celle des "**plaques**", non nécessairement injectives, et pour lesquelles n varie, et le **pseudogroupe des changements de cartes** (qui est formé des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$, n fixé) par la **catégorie locale** des applications différentiables locales entre les $\mathbb{R}^n$, avec n variable.

Un deuxième point de vue consiste à considérer la donnée d'un atlas comme équivalente à celle de la variété X somme des domaines des cocartes, munie de sa projection q sur Q ; le pseudogroupe des changements de cartes s'identifie ici au **graphe** R de la relation d'équivalence sur X définie par q. (Nous identifions tout pseudogroupe avec le groupoïde de ses germes, muni de la topologie étale). Suivant VAN EST [17], un **S-atlas** consistera plus généralement en la donnée d'une variété (à base dénombrable) X munie d'une surjection q sur Q et d'un **pseudogroupe** G sur X tel que q induise une bijection entre l'ensemble des orbites de G et Q. Deux S-atlas (X_i,q_i,G_i) $(i=1,2)$ seront dits équivalents et définiront sur Q la même structure de **S-variété** s'ils sont induits par un même S-atlas défini sur la variété somme des X_i.

Le pseudogroupe G est contenu dans un pseudogroupe H "**saturé**", qui est le plus grand pseudogroupe admettant les mêmes orbites.

Le cas particulier G=H a été considéré dans [11] sous le nom de **H-atlas** et de **H-variété**. Les H-atlas sont définis par la seule donnée de $q : X \to Q$, la relation d'équivalence définie par q étant assujettie à être "Homogène".

On a donc les deux flèches :

$$\text{H-variétés} \hookrightarrow \text{S-variétés} \to \text{H-variétés}.$$

Par ailleurs tout H-atlas définit une difféologie sur Q, dont les plaques sont définies par la condition d'être différentiablement relevables sur X, et cette difféologie ne dépend que de la H-variété, d'où la flèche :

$$\text{H-variété} \to \text{D-variété}.$$

Pour préciser la comparaison, on dira qu'un H-atlas est **régulier** si toute application différentiable $f : U \to X$ (où U est un ouvert de X) vérifiant $q_\circ f = q_{|U}$ est un difféomorphisme local. On justifie alors sans peine le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \text{H-variétés régulières} \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \text{H-variétés} \arrow[d] \\ & \text{D-variétés.} \end{tikzcd}$$

Si pour tout groupoïde G de base X, on note $\pi_G = (\alpha_G, \beta_G) : G \to X \times X$ l'application (but, source), les **Q-atlas** (et **Q-variétés** de BARRE [1]) peuvent être caractérisés parmi les H-atlas par la condition que π_G soit un plongement faible (c'est-à-dire une immersion vérifiant la propriété universelle des sous-structures). On peut montrer aussi que les **V-variétés** de SATAKE [14] ou **orbifolds** de THURSTON [16] sont caractérisées par la propriété que π_G soit une application propre. D'après [18] (p. 139, exemple 2 et p. 141, prop. 14), on a :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Q-variétés}\\[2ex] \text{V-variétés}\end{array}\right\} \hookrightarrow \text{H-variétés régulières} \hookrightarrow \text{D-variétés},$$

d'où le fait intéressant que l'étude des Q-variétés et des V-variétés **équivaut** à celle de la difféologie sous-jacente.

Une S-variété sera **de type dénombrable** (resp. **séparable**) si elle admet un atlas dont le pseudogroupe est engendré par une famille dénombrable de difféomorphismes locaux (resp. contient un sous-ensemble dénombrable dense pour la topologie étale). (Noter que ces notions se confondent pour une variété régulière **séparée**.)

En utilisant une variété transverse aux feuilles, VAN EST [2] et HAEFLIGER [7] ont muni **l'espace des feuilles** d'un feuilletage régulier d'une structure canonique de S-variété de type dénombrable ; la H-variété sous-jacente est alors séparable. Réciproquement il résulte d'une construction non publiée d'Hector qu'une S-variété (resp. une H-variété) est un espace de feuilles si et seulement si elle est de type dénombrable (resp. séparable). Les H-variétés séparables s'identifient donc aux **QF-variétés** de [13], [18] qui sont séparables, et on peut prouver que les S-variétés de type dénombrable **s'identifient** aux **F-variétés** de [10], évoquées ci-après. Comme on voit aisément que les Q-variétés et les V-variétés sont de type dénombrable, on a (en englobant une partie des résultats précédents) le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\left.\begin{array}{l}\text{Q-variétés}\\[2ex] \text{V-variétés}\end{array}\right\} \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \text{F-variétés} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \text{S-variétés} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
& \text{QF-variétés séparables} \arrow[r, hook] & \text{H-variétés} \arrow[r] & \text{D-variétés.}
\end{tikzcd}$$

Tous les "atlas" considérés jusqu'ici sont "étales". Si maintenant, dans la définition des H-atlas, on oublie la condition d'homogénéité, on est amené à considérer plus généralement comme "**atlas**" (non étale) la donnée de (X,q) où q est une surjection de la variété X sur Q, vérifiant éventuellement certaines conditions spécifiques. Pour avoir une notion de structure sur Q, il reste à préciser la notion d'**équivalence** entre atlas (X_i,q_i) (i = 1,2). Dans le cas des H-atlas, la condition ci-dessus peut se retraduire par l'existence d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X_1 \arrow[dr, "q_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "q_2"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

où Z est une variété et les f_i des étalements surjectifs.

Par divers choix des conditions imposées à q et aux f_i, on obtient une riche gamme de "structures" généralisées. La définition des **QF-atlas** (non étales) de [13] rentre dans ce schéma, et conduit à la même notion de QF-variété que dans le cadre étale.

La définition des **F-variétés** de MOLINO [10] revient à imposer que les fibres de q soient les feuilles d'un feuilletage, et que les f_i soient des submersions à fibres connexes.

Certaines propriétés importantes sont invariantes par l'équivalence "rigide" (resp. "propre"), que l'on obtiendrait en remplaçant cette dernière condition par celle d'être une fibration (resp. une application propre), et qui mériterait d'être explorée plus systématiquement.

De façon analogue, les S-atlas ont une généralisation "non étale" obtenue en remplaçant les pseudogroupes par des **groupoïdes** différentiables généraux [5]. La notion convenable d'équivalence est discutée dans [7], et dans [11 bis], où elle conduit à la notion de "**variété orbitale**". Ici encore, pour les espaces de feuilles des feuilletages réguliers, on n'obtient pas de structure nouvelle, mais seulement des atlas non étales, qui ne sont autres que les **groupoïdes d'holonomie** [6], appelés "**graphes**" dans [3] . En revanche, les atlas non étales semblent indispensables pour les **feuilletages avec singularités** [12] .

Pour conclure, nous noterons que, bien sûr, le choix des bonnes structures à considérer est dicté par la **nature des problèmes** envisagés, et aussi par les **facilités techniques** qu'il apporte. De ce dernier point de vue, les D-variétés sont particulièrement agréables, puisque, avec la notion naturelle de morphisme difféologique, ou brièvement D-morphisme, on obtient une catégorie cartésienne fermée, complète et co-complète [9], et, de ce fait, particulièrement adaptée au traitement de l'homotopie [4], [8] . Si, par ailleurs, il est certain que les structures de S-variété (ou de F-variété) apportent une information plus fine, explicitement prise en compte dans certains problèmes géométriques, il faut noter, d'une part que beaucoup de problèmes (il n'est pas toujours facile de dire lesquels !) ne dépendent en fait que de la D-variété sous-jacente, d'autre part que, comme nous l'avons dit, dans des cas étendus (notamment Q-variétés, V-variétés), les deux structures coïncident.

*

REFERENCES

[1] **R. BARRE,** " *De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentiables et analytiques* ", Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23 (1973), 227-312.

[2] **L.C. BOUMA** et **W.T. VAN EST,** "*Manifold schemes and foliations on the 2-torus and the Klein bottle* ", Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., Amsterdam série A, 81, 3 (1978), 313-347.

[3] **A. CONNES,** "*A survey of foliations and operator algebras* ", I.H.E.S. 1981.

[4] **P. DONATO,** Thèse, Université de Provence, Octobre 1984.

[5] **C. EHRESMANN,** " *Catégories différentiables et catégories topologiques*", Coll. Géom. Diff. Globale, Bruxelles, CBRM (1959) ; Oeuvres Complètes, I, Amiens (1984), 237-250.

[6] **C. EHRESMANN,** " *Structures feuilletées*", Proc. 5th Canad. Math. Cong. Montréal (1961) ; Oeuvres Complètes, II-2, 563-626.

[7] **A. HAEFLIGER,** " *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*", Astérisque 116, (1984), 70-97.

[8] **P. IGLESIAS,** Thèse, Université de Provence, Septembre 1985.

REFERENCES

(suite)

[9] **S. MAC LANE,** " *Categories for the working Matematician*", Springer 1971.

[10] **P. MOLINO,** "Sur la géométrie transverse des feuilletages", Ann. Inst. Fourier, 25, (1975), 279-284.

[11] **J. PRADINES,** " *Un exemple de feuilletage sans holonomie dont l'espace des feuilles n'est pas une Q-variété*", C.R.A.S., 288 (1979), 245-248.

[11 bis] **J. PRADINES,** " *Caractérisation universelle du groupe fondamental d'un espace de feuilles* ", VIIème Cong. du G.M.E.L. , Coimbra, Sept. 1985.

[12] **J. PRADINES** et **B. BIGONNET,** "*Graphe d'un feuilletage singulier*", C.R.A.S. Paris, 300, 13, (1985), 439-442.

[13] **J. PRADINES** et **J. WOUAFO KAMGA,** "*Relations d'équivalence transversalement différentiables*", C.R.A.S. Paris, 283 (1976), 125-128.

[14] **I. SATAKE,** "*On a generalization of the notion of manifold*", Proc. NAS 42 (1956), 359-363.

[15] **J.M. SOURIAU,** " *Groupes différentiels et physique mathématique* ", in "Feuilletages et quantification géométrique", Coll. Travaux en Cours, Hermann, Paris (1984), 75-79.

[16] **W. THURSTON,** Notes polycopiées.

[17] **W.T. VAN EST,** Rapport sur les S-atlas, Astérisque n° 116, 235-292.

[18] **J. WOUAFO KAMGA,** Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse, Avril 1979.

Jean PRADINES
Université Paul Sabatier
Laboratoire d'Analyse sur les Variétés
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex

L'auteur remercie le Centre de Recerca Matemática de l'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS, dont l'hospitalité lui a facilité la rédaction de ce compte-rendu.