PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

YVES PERAIRE

Une théorie générale des infinitésimaux

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1986, fascicule 5A
« Une théorie générale des infinitesimaux », , p. 1-60
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1986___5A_A1_0>

UNE THEORIE GENERALE DES INFINITESIMAUX

Yves PERAIRE

INTRODUCTION :

L'usage des infinitésimaux, c'est bien connu, remonte au début du XVII$^{\text{ième}}$ siècle avec les premiers pas du calcul infinitésimal inventé séparément par Leibnitz et Newton. Dans l'optique de Leibnitz, la dérivée en un point d'une fonction réelle de la variable réelle était le quotient de deux infiniment petits. Il n'a pu être donné une définition correcte de ces infinitésimaux; toutefois, Leibnitz se faisait une certaine image de ces éléments et les décrivait comme des nombres idéaux obéissant aux mêmes lois que les nombres ordinaires. L'absence d'une définition rigoureuse conduit à des paradoxes ; dans [2] Pierre Cartier donne l'exemple suivant :

"Dans le calcul de la dérivée de la fonction $y=x^2$, si l'on donne un accroissement "infiniment petit" dx à x on trouve:

$y+dy = (x+dx)^2 = x^2+2x(dx)+(dx)^2$ et finalement,

$dy/dx = 2x+dx = 2x$. Le résultat $dy/dx = 2x$ est bien conforme à l'orthodoxie, mais le paradoxe est que l'on doit supposer dx non nul pour faire la division alors que l'on doit le supposer nul pour écrire l'égalité finale $2x+dx = 2x$."

Par la suite les idées de Weirstrass, Abel, Dirichlet et Kronecker qui centrent toute l'analyse sur la notion de limite définie par la périphrase rituelle : " $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta$ ......" se sont imposées.

Remarquons que les physiciens et mécaniciens continuent à faire des raisonnements infinitésimaux qui, bien que jugés non rigoureux par les mathématiciens, fonctionnent dans la plupart des cas.

On peut trouver aussi sous la plume de V. Arnold les formulations heuristiques suivantes:

"...Soit un transport parallèle le long du bord d'un "petit" domaine D de cette surface. Ilest clair que le résultat de ce transport est une rotation d'un "petit" angle...." ([1] p.302)

Les guillemets nefigurent pas dans le texte original.Plus loin encore ontrouve:

" La forme de courbure prend sur un couple de vecteurs tangents "infiniment petits" une valeur égale à l'angle de rotation sous l'effet du transport parallèle le long du parallélogramme "infiniment petit" construit sur ces vecteurs..."

Le but d'une théorie des infinitésimaux est de permettre l'élimination des guillemets dans les énoncés précédents.

On peut considérer que cet objectif a été atteint par les travaux d'Abraham Robinson, prenant pour point de départ la découverte par Skolem dans les années 30 des modèles non standard de l'arithmétique de Péano. (Voir [6]).

La mise en oeuvre de la méthode de Robinson présente quelques difficultés du fait de l'intrusion de la logique dans la pratique mathématiques, et on sait bien que les mathématiciens n'aiment pas la logique.

Heureusement l'article de Edward Nelson ([5])qui relègue les problèmes logiques dans la Théorie des ensembles, qu'il désigne sous lenom de théorie des ensembles internes, ramène l'utilisation des infinitésimaux à trois règles simples : les axiomes de transfert, d'idéalisation et de standardisation.

Pourtant les théories actuelles des infinitésimaux présentent des insuffisances, mises en avant dans [9]

A partir d'une situation simple, essayons de dégager une théorie des infinitésimaux permettant la plus large application possible.

Soit (u_n) une suite numérique telle que $\lim_{n\to\infty}(u_n) = 0$. Intuitivement on peut exprimer ce fait en disant que u_n est aussi petit que l'on veut à condition de prendre n assez grand. La manie propre au mathématicien de créer des objets idéaux nous pousse irrésistiblement à écrire : si n est infiniment grand alors u_n est infiniment petit. A première vue, il semble bien difficile de donner un sens rigoureux à ces deux termes. Que signifie ω infiniment grand si ω est un entier? Surement pas plus grand que tout entier car, dans ce cas , une contradiction apparait immédiatement: ω serait strictement supérieur à lui même!

Si l'on désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels une possibilité est d'essayer de construire un ensemble ${}^*\mathbb{N}$ contenant $\mathbb{N}$ auquel on pourrait prolonger la relation $>$ en une relation ${}^*>$ définie sur ${}^*\mathbb{N}$. On sait le faire depuis la découverte de Skolem; cette démarche a été poursuivie systématiquement par Robinson.

On peut aussi dire : infiniment grand signifie plus grand que tout entier naif (ou intuitif) et admettre que ceux ci ne remplissent pas $\mathbb{N}$. En effet, reprenons la célèbre provocation de Georges Reeb et écrivons: $\mathbb{N} \neq \{0,1,2,\ldots.n,\ldots\}$ dans laquelle 0,1,2,.. sont assimilés aux entiers naifs. Une telle affirmation, choquante pour un mathématicien classique (non habitué à observer la théorie des ensembles de l'exterieur), n'est pas démontrable, pas plus que son contraire, dans le cadre de la théorie des ensembles de

Zermelo- Fraenkel. Pire, elle n'est pas formulable dans le langage de Z.F. Il faudrait pour cela une formule infinininiment longue:

$\exists\ \omega \in \mathbb{N}\ \omega \neq 0$ et $\omega \neq 1$ et $\omega \neq 2$ et .... $\omega \neq n$ ....

Si l'on veux une formulation plus courte il nous faut un vocabulaire plus riche. L' idée de Nelson consiste à enrichir le langage de Z.F d'un mot nouveau, un prédicat, noté st (lire: standard).Ceci étant fait, on peut écrire la formule bien formée:

$\exists\ \omega \in \mathbb{N}\ (\forall\ n \in \mathbb{N}\ (\ n \text{ st} \Rightarrow \omega \neq n)).$

Si l'on assimile les naifs aux entiers standard, l'entier ω de la formule précédente peut être considéré comme infiniment grand. On n'aura aucune difficulté à définir dans $\mathbb{R}$ des infiniment grands ni des infiniment petits (inverses d'infiniment grands).

Il nous semble important d'observer que ces notions sont des idéalités mathématiques traduisant les notions intuitives : très petit, (autant qu'il est nécessaire) négligeable,très grand etc..

On observera également leur caractère relatif. Infiniment petit signifie en fait infiniment petit si on le compare aux standard. Soit par exemple la suite $(u_n)=(\frac{1}{\varepsilon n}(-1)^n)$ avec ε infiniment petit. Il est clair que u_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, pourtant, si n est infiniment grand mais inférieur à $1/\varepsilon$ alors $|u_n| \geqslant 1$; u_n n'est donc pas infiniment petit.

Ainsi se dégage la necessité d'entiers infiniment-infiniment grands (Infiniment grands comparés à $1/\varepsilon$), ou, infiniment grands d'ordre 2 . Cet objectif est atteint dans ce travail. Parmi les applications, nous verrons que si $(x_n(t))$ est une suite de fonctions continues convergent simplement vers une fonction x(t), et si l'on pose $P_m(\varepsilon)=\{t/|x_m(t)-x(t)|<\varepsilon\}$ alors, l'ensemble des points de continuité de x(t) peut être approché,(en un sens que nous préciserons) par l'ensemble $\overset{o}{P}_m(\varepsilon)$ avec ε très petit (infiniment petit) et m très-très grand

Pour construire en toute rigueur des infiniment petits ou infiniment grands (et bien d'autre choses encore) de tous ordres il est clair qu'il nous faudra un vocabulaire encore plus riche.

I.UNE THEORIE DES ENSEMBLES INTERNES.

Nous nous placerons dans le cadre formel de la théorie des ensembles ainsi constituée:

Le language est celui de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, avec son unique prédicat binaire " $\in$" , enrichi d'une série de nouveaux prédicats, indexés par la suite intuitive des entiers et notés: "st", "stl/2", ..."stl/p"...(Lire: standard, standard 1/2 ou 1/2-standard etc...).

Parmi les formules bien formées définies de la manière habituelle (Voir [3]), on dis tingue celles dans lesquelles n'intervient aucun prédicat st, stl/p; on les appelle des <u>formules internes</u>

Les axiomes sont :

a/ Les axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix (Z.F.C.), relativisés aux formules internes

b/ Trois schémas d'axiomes, équivalents gradués des axiomes de Nelson:

<u>Schéma d'axiome de tansfert</u>: (T)

Si $\emptyset$ est une formule interne avec toutes ses constantes $a_1, a_2, \ldots a_n$, stl/p alors:

$$\forall^{stl/p}_x \emptyset(x,a_1,\ldots a_n) \Longleftrightarrow \forall x\, \emptyset(x,a_1,\ldots a_n)$$

Schéma d'axiome d'idéalisation: (I)

Si ϕ est une formule interne à deux variables libres x et y et toutes ses constantes stl/p alors:

$$\forall^{stl/p\ fin} z\ \exists y\ \forall x \in z\ \phi(x,y) \Rightarrow \exists^{stl/p+1} \xi\ \forall^{stl/p} x\ \phi(x,\xi).$$

Schéma d'axiome de standardisation: (S)

Si ϕ est une formule quelconque alors:

$$\forall^{st} z\ \exists^{st} x\ \forall^{st} t\ t \in x \Leftrightarrow (t \in z \text{ et } \phi(z)).$$

c/ Un nouvel axiome.

Schéma d' axiome de graduation: (G)

pour chaque entier naif p :

$\forall x\ x\ stl/p \Rightarrow x stl/p+1$.

Il est prouvé dans l'annexe que notre théorie des ensembles est une extension conservative de Z.F.C.

On peut démontrer comme dans [5] l' existence d'un ensemble fini contenant tous les ensembles stl/p. Le lecteur n'aura pas de mal à vérifier que le produit, la somme, le quotient de deux réels stl/p est stl/p ou, plus généralement que l'image d'un élément stl/p par une fonction stl/p est stl/p.

L'axiome d'idéalisation nous fournit des infiniment petits d'ordre p. Il suffit de l'appliquer à la formule:

$$\phi(x,y) = (x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R} \text{ et } |y| < x).$$

On obtient de même des infiniment grands d'ordre p.

On remarque qu'il n'a pas été donné d'équivalent gradué du principe de standardisation de Nelson. En voici la justification. (S) postule que pour toute formule pas forcément interne, $\emptyset$, il existe un ensemble standard dont les éléments standard sont exactement les standard du référentiel z qui satisfont $\emptyset$. Dans notre théorie des ensembles nous n'avons pas le droit d'écrire $E = \{t \in z \ / \ \emptyset(t)\}$, car le schéma de compréhension ne s'applique qu'aux formules internes. Nous nous permettrons tout de même de telles expressions; ce ne sont pas des ensembles de I.S.T.G.; nous dirons que ce sont des ensembles externes.

L'ensemble x de (S) sera appelé le standardisé de E. On le notera stE .Si E est un ensemble externe il n'existe pas toujours un ensemble stl/p ayant les mêmes éléments stl/p que E comme nous le verrons dans les exemples qui suivent. Dans le cas ou il existe nous le noterons $st_{1/p}E$ et l'appellerons le standardisé d'ordre p de E . Quand il existe, le standardisé d'ordre p est unique car l'axiome de transfert nous permet de dire que si deux ensembles ont les mêmes éléments stl/p alors ils ont les mêmes éléments.

Voici quelques exemples de standardisés:

1- Si $E = \{n \in \mathbb{N} / \ \neg(n \ st)\}$.

$stE = \emptyset$

$st_{1/2}E$ n'existe pas car alors, il serait une partie non vide de $\mathbb{N}$ sans plus petit élément. En effet, il existe des stl/2 qui ne sont pas standard (idéalisation) donc $st_{1/2}E \neq 0$; d'autre part, son plus petit élément est stl/2 (transfert). Si on le note a il est clair que a-1 est stl/2 et qu'il n'est pas standard, il est donc dans $st_{1/2}E$ ce qui contredit la minimalité de a.

2- Si $E = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n < \omega\}$ avec ω st1/2 alors,

$stE = \mathbb{N}$

$st_{1/p}E = E$ pour tout $p \geqslant 2$

3- Soit (Y_n) une suite standard croissante d'ensembles et $E = \cup Y_n$ alors, pour tout entier N infiniment grand d'ordre p, on a:
$E = st_{1/p}Y_N$ car, pour tout t st1/p dans E, il existe n st1/p tel que $t \in Y_n$ (Transfert). Comme $n < N$, $Y_n \subset Y_N$ donc: $t \in Y_N$.
Y_N et E ont donc les mêmes éléments st1/p.

4- Soit $E = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ \forall^{st} s \in \mathbb{R}_+^* \quad |x| < s \}$.

* $stE = \{0\}$.

* $st_{1/p}E$ n'existe pas si $p \geqslant 2$.

Supposons l'existence de $S = st_{1/p}E$ on a alors:

(1) $\forall^{st1/p} x \in S, -x \in S$ d'où, par transfert,

$\forall x \in S, -x \in S$.

(2) $\forall^{st1/p} x \in S \quad \forall^{st1/p} y \in S \quad \forall^{st1/p} z \in \mathbb{R} \ (x < z < y \quad \Rightarrow \ z \in S)$ d'où :

$\forall x \in S \quad \forall y \in S \quad \forall z \in \mathbb{R} \ (x < z < y \quad \Rightarrow \ z \in S)$

(3) On déduit de l'axiome d'idéalisation que $S \neq \{0\}$.

(4) $\forall^{st1/p} x \in S$, $x \in E$ donc $|x| < 1$ on en déduit par transfert que

$\forall x \in S \ |x| < 1$.

Des propriétés précédentes on tire que S est un intervalle symétrique non réduit à $\{0\}$.

S n'est pas un intervalle ouvert. En effet, si $S =]-a \ a]$ avec a positif, l'axiome de transfert implique que a est st1/p. D'autre part, $a \in E$ car dans le cas contraire, il existerait un standard positif x tel que $a > x$ et on aurait :

x st1/p , $x \in]-a \ a[= S$ et $x \notin E$, c'est impossible donc: $a \in S$.

$st_{1/p}E$ est donc nécessairement de la forme $S = [-a \ a]$ avec a st1/p positif. Soit x dans E st1/p et positif (obtenu par idéalisation), il est clair que a+x est dans E et donc, dans $S = [-a \ a]$. C'est une contradiction.

II. L'ANALYSE NON STANDARD.

II.1 La relation de proximité infinitésimale:

Dans la suite (X,O) désigne un espace topologique séparé admettant X comme ensemble sous-jacent et O comme ensemble d'ouverts.

Définition 1:

Si X est stl/p et si $a \in X$ est un point stl/p , nous dirons que x est infiniment proche d'ordre p de a si:

$$\forall^{stl/p}\ U \in O\ (a \in U \Rightarrow x \in U).$$

Notations:

On écrira $x \overset{p}{\mapsto} a$ (x infiniment proche d'ordre p de a).

Nous écrirons $x \mapsto a$ (x infiniment proche de a), s'il existe un entier p tel que $x \overset{p}{\mapsto} a$.

Si X est R muni de la topologie usuelle alors,

$x \overset{p}{\mapsto} a$ équivaut à $\forall^{stl/p}\ s \in \mathbb{R}_+^*\quad |x-a| < s$.

Définition 2:

Si $x \in \mathbb{R}$ et $x \overset{p}{\mapsto} 0$, nous dirons que x est un infiniment petit d'ordre p. Si de plus x est non nul, nous dirons que 1/x est un infiniment grand d'ordre p.

Examinons de plus près les propriétés de la relation $\mapsto$.
Il est clair que c'est une relation externe, puisque sa définition exige l'utilisation du prédicat stl/p.

Propriété 1:

Si a est stl/p et si $p' > p$ alors; $x \overset{p'}{\mapsto} a \Rightarrow x \overset{p}{\mapsto} a$.

Preuve:

On applique l'axiome de graduation.

Propriété 2:

Si a stl/p et b stl/p alors, $b \xrightarrow{p} a \Rightarrow b = a$.

Preuve:

On écrit la propriété de séparation de a et b puis on applique l'axiome de transfert.

Propriété 3:

Si X est un espace métrique, d la distance sur X alors:

$x \rightarrow a$ équivaut à d(x,a) infiniment petit.

$x \xrightarrow{p} a$ équivaut à d(x,a) infiniment petit d'ordre p.

Preuve:

Laissée en exercice.

Définition 3:

Soit x un ensemble stl/p pour un certain entier p. On posera:

$p(x) = \min \{p \ / \ x \text{ stl}/p\}$,

$S(x) = 1/p(x)$. S(x) sera la standardité de x .

Remarque:

On ne peut pas dire dans le language de notre théorie des ensembles que tout ensemble possède un degré de standardité: Il faudrait pour cela quantifier sur les prédicats. Cependant on ne risque rien à l'affirmer, comme une propriété externe à I.S.T.G, à cause de la propriété 2 du paragraphe III de l'annexe.

Notations:

On pourra écrire : $x \xrightarrow{a} b$ à la pla ce de $x \xrightarrow{p(a)} b$,

$x \underset{p}{\rightarrow} b$ à la place de $x \xrightarrow{p(b)+p-1} p$, (p entier $\geqslant 1$).

$x \overset{k}{\underset{p}{\rightarrow}} p$ à la place de $x \xrightarrow{k+p-1} p$ (k et p entiers $\geqslant 1$)

Remarque:

Si $X = \overline{\mathbb{R}}$ est la droite réelle achevée et si $x \in \mathbb{R}$ alors,
$x \xrightarrow{k} +\infty$ si et seulement si x est un infiniment grand d'ordre k.

Dans le cas où X est un espace métrique on écrira:

$x \sim y$ pour $d(x,y) \to 0$

$x \overset{p}{\sim} y$ pour $d(x,y) \xrightarrow{p} 0$.

$x \overset{k}{\underset{p}{\sim}} y$ pour $d(x,y) \underset{p}{\xrightarrow{k}} 0$.

Nous laisserons le soin au lecteur d'établir que, si x et y sont des ensembles alors $S((x,y)) = \mathrm{Min}\{S(x),S(y)\}$.

Propriété 3:

$x \to y \iff x \xrightarrow{y} y$.

Preuve:

C'est une application directe des définitions.

Propriété 4:

$x \to y \Rightarrow S(x) \leqslant S(y)$.

Preuve:

Supposons $S(x) > S(y)$, on aura x stl/$p(y)$, y stl/$p(y)$ et $x \xrightarrow{p(y)} b$ ors, d'aprés la propriété 2 cela implique $x = y$ donc $S(x) = S(y)$, on aboutit à une contradiction.

Propriété 5:

La relation $\to$ est une relation d'ordre.

Preuve:

i) il est clair que pour tout x dans X : $x \to x$.

ii) Pour tous x, y et z dans X, $(x \to y$ et $y \to z) \Rightarrow x \to z$.

En effet si $y \to z$ alors, $p(z) \geqslant p(y)$ d'aprés la propriété 4.
Soit U un ouvert stl/$p(z)$; comme $y \to z$, $y \in U$, comme $p(y) \geqslant p(z)$, U est stl/$p(y)$ et comme $x \to y$: $x \in U$.

iii) Pour tous x et y dans X, ($x \to y$ et $y \to x$) $\Rightarrow x = y$.

Il suffit de remarquer que ($x \to y$ et $y \to x$) implique $p(x) \geqslant p(y)$ et $p(y) \geqslant p(x)$ donc : $p(x) = p(y)$. On conclut en utilisant les propriétés 2 et 3.

Propriété 6:

Si (X,O) est régulier alors : ($x \to a$ et $x \to b$)$\Rightarrow$($a \to b$ ou $b \to a$).

Preuve:

Soit $O(a) = \{U \in O \ / \ a \in U\}$.

Supposons $p(a) \leqslant p(b)$ et soit U stl/p(a) dans O(a). D'après la propriété de régularité, il existe un ouvert V de O(a) tel que $\overline{V} \subset U$. Grace à l'axiome de transfert on peut le prendre stl/p(a). Si $b \notin U$ alors $b \in X - \overline{V}$ qui est un ouvert stl/p(a) et donc: stl/p(b) comme $x \to b$ on doit avoir $x \in X - \overline{V}$, d'autre part, comme $V \in O(a)$ et $x \to a$ on doit avoir aussi $x \in V$ donc: $b \in U$ pour tout $U \in O(a)$ et on a $b \to a$.

Par un raisonnement symétrique on montre que si $p(b) \leqslant p(a)$ alors $a \to b$. Il est clair que si $p(a) = p(b)$ alors $a = b$ (Propriété 5) .

Problème : Etudier la réciproque de la propriété 6

On a aussi les propriétés évidentes suivantes:

* $\sim$ est une relation d'équivalence.
* $x \overset{a}{\sim} y$ et $y \to a$ = $x \to a$.

Par contre ilest faux que:

* $x \sim y$ et $y \to a$ $\Rightarrow$ $x \to a$.
* $x \to y$ et $y \sim z$ = $x \to z$.

Propriété 7:

Si X est stl/p , si E est une partie stl/p de X et si $x \in X$ alors:

$$(\forall^{1/p+1}_{y} \in E \quad y \xrightarrow{p} x) \Longleftrightarrow (\forall y \in E \quad y \xrightarrow{p} x) .$$

Preuve:

Il suffit de remarquer que pour tout x stl/p et tout U stl/p dans O(x),

$$(\forall^{1/p+1}_{y} (y \in E \Rightarrow y \in U)) \Longleftrightarrow (\forall y (y \in E \Rightarrow y \in U)).$$

(On a appliqué les axiomes de graduation aux constantes E et U puis, l'axiome de transfert.)

Propriété 8:

Si X est un espace métrique stl/p, F et G des parties stl/p de X alors:

$$(\forall^{stl/p+1}_{x} \in F \quad \forall^{stl/p+1}_{y} \in G \quad x \overset{p}{\sim} y) \Leftrightarrow (\forall x \in F \, \forall y \in G \quad x \overset{p}{\sim} y) .$$

Preuve:

Faire une démonstration analogue à celle de la propriété 7 ou appliquer la propriété 7 avec $X = \mathbb{R}$ et $E = d(F \times G)$.

II.2 Quelques applications élémentaires à la topologie et à l'analyse:

Théorème 1:

Si (X,O) est stl/p et si $a \in X$ est stl/p alors, il existe $V \in O(a)$ tel que V stl/p+1 et tous les points de V sont infiniment proches de a d'ordre p.

Preuve:

Appliquer l'axiome d'idéalisation à la relation d'inclusion définie sur $O(a)$.

Théorème 2:

Soit $A \subset X$ et $a \in X$ tels que $S(X) \geqslant S(A) \geqslant S(a)$ alors :

i) $x \in \overset{o}{A}$ si et seulement si $(x \to a \Rightarrow x \in A)$.

ii) $x \in \overline{A}$ si et seulement si $\exists\, x \in X \; (x \to a$ et $x \in A)$.

Preuve:

i) Pour établir la nécessité, donnons nous un $x \to a$.

$$a \in \overset{o}{A} \iff \exists\, U \in O(a) \; (U \subset A)$$

$$\iff \exists^{stl/p(a)}\, U \in O(a) \; (U \subset A) \quad \text{(Transfert)}.$$

D'autre part $(x \to a$ et U_o stl/p(a) $) \Rightarrow x \in U_o$

donc: $x \in A$.

La réciproque découle du théorème 1.

ii) La condition est nécessaire: En effet,

soit V, dont l'existence est assurée par le théorème 1 ayant tous ses points infiniment proches de a, $a \in \overline{A}$ donc: il existe $x \in V \cap A$. C'est l'élément cherché.

Réciproquement, si il existe $x \in A$ tel que $x \to a$ alors, par définition de la relation $\to$:

$\forall^{st1/p(a)} U \in O(a)\ U \cap A \neq 0$ d'où après transfert,

$\forall U \in O(a)\ U \cap A \neq 0$.

Donc, $x \in \overline{A}$.

On voit que le théorème précédent permet une formulation directe des propriétés : $x \in \overline{\overset{o}{A}}$, $x \in \overset{o}{A}$, $x \in \overset{o}{\overline{A}}$,... etc.... Ceci est une nouveauté car , dans les théorie des infinitésimaux de Robinson où de Nelson , on avait , pour a et A standard $a \in \overset{o}{\overline{A}}$ ssi pour tout $x \sim a$ $x \in \overline{A}$ mais, comme x n'est pas standard, on n'avait d'autre recours que d'utiliser une définition classique des points adhérents pour dire $x \in \overline{A}$.

Nous pouvons par exemple écrire:

$$x \in \overline{\overset{o}{A}} \Leftrightarrow \exists y\ (\ y \rightarrow x \text{ et } (z \rightarrow y \Rightarrow z \in A\ )\ ).$$

$$x \in \overset{o}{\overline{A}} \Leftrightarrow \forall y\ (\ y \rightarrow x \Rightarrow \exists z\ (z \rightarrow y \text{ et } z \in A)\ ).$$

Il ne nous est pas possible, sous peine d'allonger considérablement cet article, de reprendre toutes les applications développées dans [10] . Nous nous bornerons donc aux situations où la graduation est nécessaire; pour les autres cas nous laisserons le lecteur faire lui même l'adaptation.

Le théorème suivant donne une définition de la notion de limite en un point, utilisant la relation $\rightarrow$.

Soient $E = (X,O)$ et $E' = (X',O')$ deux espaces topologiques, a un point de X, a' un point de X' et f une application de X dans X'. On posera $k = p((E,E',f,a,a'))$

Théorème 3:

Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $\lim_{x \to a} f(x) = a'$.

ii) Si $x \overset{k}{\to}_p a$ alors $f(x) \overset{k}{\to} a'$.

iii) Si $x \overset{k}{\to}_p a$ alors $f(x) \overset{k}{\to}_p a'$

Ici p est un entier quelconque, supérieur à 1.

Preuve:

iii) $\Rightarrow$ ii): C'est une évidence.

ii) $\Rightarrow$ i): La condition i) s'écrit,

$\forall U \in O(a') \quad \exists V \in O(a) \ f(V) \subset U$ ce qui équivaut à

$\forall^{stl/k} U \in O(a') \quad \exists V \in O(a) \ f(V) \subset U$. Pour démontrer cette dernière assertion, donnons nous U stl/k dans O(a')et choisissons $V \in O(a)$ tel que pour tout $x \in V$ $x \overset{k}{\to}_p a$. c'est possible grace à l'axiome de graduation et au théorème 1. La condition ii) implique $f(x) \overset{k}{\to} a'$ d'autre part U stl/k implique U stl/p(a') et comme $a' \in U$, $f(x) \in U$ donc: $f(V) \subset U$.

i) $\Rightarrow$ iii): Posons $q = k + p - 1$ .i) s'écrit,

$\forall U \in O(a') \quad \exists V(U) \in O(a) \ f(V(U)) \subset U$.

Dans cette formule, toutes les constantes sont stl/q d'après l'axiome de graduation on a donc la formule équivalente, obtenue par transfert,

$\forall^{stl/q} U \in O(a') \exists^{stl/q} V(U) \in O(a) \ f(V(U)) \subset U$.

Si $x \overset{k}{\to}_p a$ alors $x \overset{q}{\to} a$, $\forall^{stl/q} U \quad x \in V(U)$ donc: $f(x) \in U$ d'où $f(x) \overset{q}{\to} a'$ ce qui s'écrit aussi : $f(x) \overset{k}{\to}_p a'$.

Remarques :

* Si $\lim_{x \to a} f(x) = a'$ on a nécessairement $S(a') \geqslant S((E,E',f,a))$.

Cela découle de l'unicité de la limite et du théorème de transfert.

* On peut for bien avoir $S(a') > S((E,E',f,a))$.

Exemple :

$X = X' = \mathbb{R}$, a un réel non standard $f(x) = x - a$.

$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad S(0) > S(a)$.

La démonstration des théorèmes suivants (Théorèmes 4 à 7) est laissée au lecteur. Remarquons seulement que le théorème 4 peut être vu comme un corollaire du théorème 3.

Soit (x_n) une suite dans X muni de sa topologie O , $E = (X,O)$, $a \in X$, $k = p((a,E,(x_n)))$. On a alors:

Théorème 4:

Pour tout entier p supérieur ou égal à 1, les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $\lim_{n \to \infty}(x_n) = a$

ii) Si $n \xrightarrow[p]{k} +\infty$ alors $x_n \xrightarrow{k} a$.

iii) Si $n \xrightarrow[p]{k} +\infty$ alors $x_n \xrightarrow[p]{k} a$.

Avec les mêmes notations que précédemment on a:

Théorème 5:

Pour tout entier p supérieur ou égal à 1, les conditions suivantes sont équivalentes:

i) a est un point d'accumulation de (x_n).

ii) il existe un entier n tel que $n \xrightarrow[p]{k} +\infty$ et $x_n \xrightarrow{k} a$.

iii) Il existe un entier n tel que $n \xrightarrow[p]{k} +\infty$ et $x_n \xrightarrow[p]{k} a$.

Si E et E' sont des espaces métriques, f une application de X dans X' et k = p((E,E',f)) on a:

Théorème 6:

Pour tout entier p supérieur ou égal à 1, les conditions suivantes sont équivalentes.

i) f est uniformément continue.

ii) Si $x \overset{k}{\sim}_p y$ alors $f(x) \overset{k}{\sim} f(y)$.

iii) Si $x \overset{k}{\sim}_p y$ alors $f(x) \overset{k}{\sim}_p f(y)$.

Soient (f_n) une suite de fonctions de X dans X', f une fonction de X dans X' et $k = p((E,E',(f_n),f))$; on a alors:

Théorème 7:

Pour tout entier p supérieur ou égal à 1 les conditions suivantes sont équivalentes:

i) (f_n) converge uniformément vers f sur X.

ii) Si $n \overset{k}{\to}_p +\infty$ alors, pour tout x dans X, $f_n(x) \overset{k}{\sim} f(x)$.

iii) Si $n \overset{k}{\to}_p +\infty$ alors, pour tout x dans X, $f_n(x) \overset{k}{\sim}_p f(x)$.

A titre d'illustration, nous allons utiliser les caractérisations précédente pour établir le théorème classique:

Toute limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue.

Grace à l'axiome de transfert, il suffit de l'établir pour E, E', (f_n) et f standard. Pour la même raison, la continuité de f sera étudiée seulement en des points standard.

Soit donc a un poit standard et $x \to_2 a$. Il suffit de montrer que $f(x) \to f(a)$ (Théorème 3).

La démonstration peut se résumer dans le diagramme suivant, où l'entier n est stl/2 et infiniment grand:

$$\begin{array}{ccccc} & & & (\text{Th } 7) & \\ & & f_n(x) & \sim & f(x) \\ (\text{Th } 3) & 2 & \downarrow & & \\ & & f_n(a) & \rightarrow & f(a) \\ & & & (\text{Th } 4) & \end{array}$$

Il découle du diagamme que $f(x) \rightarrow f(a)$, C.Q.F.D.

Si l'on compare cette démonstration à celle de Robinson, [8] p.117, on constate qu'elle va plus loin dans l'usage des infinitésimaux car, comme il le dit lui même, sa preuve ne fait pas usage des conditions non-standard de convergence uniforme.

Pour qui n'est pas familiarisé avec les infinitésimaux la démonstration ci-dessus peut sembler aussi compliquée que la preuve classique et ne présenter qu'un intérêt théorique. L'exemple suivant devrait faire évoluer ce point de vue.

Dans ce qui suit, nous supposerons que la suite (f_n) converge <u>simplement</u> vers f et allons montrer que l'analyse non-standard (généralisée) permet une description agéable de l'ensemble des points de continuité de f.

Soient donc $\{f_n\}_{n \in N}$ et f des fonctions de X dans X', d une métrique sur X'. Pour chaque réel positif et chaque entier m on pose $P_m(\varepsilon) = \{ x \in X \ / \ d(f_m(x), f(x)) < \varepsilon \}$. Nous supposerons encore que tout est standard. Si les f_n sont continues et si (f_n) converge simplement vers f on a:

Théorème 8:

Pour tout réel positif ε tel que $\varepsilon \to 0$ et tout entier $m \xrightarrow{\varepsilon} +\infty$, l'ensemble des points de continuité de f est:

$$E = st(\overset{\circ}{P}_m(\varepsilon)).$$

Preuve:

Soit x standard, un point de continuité de f et soit $y \xrightarrow{\varepsilon} x$. On a le diagramme suivant: (On pose $p = p(m)$)

$$\begin{tikzcd}
f(y) \arrow[r, "p", "(Th\ 3)"'] & f(x) \\
f_m(y) \arrow[r, "p", "(Th\ 3)"'] & f_m(x) \arrow[u, "p", "(Th\ 4)"']
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $f_m(y) \overset{p}{\sim} f(y)$ donc: $d(f_m(y), f(y)) < \varepsilon$ car ε stl/p

Ceci étant vrai pour tout $y \xrightarrow{p} x$;

$$x \in \overset{\circ}{P}_m(\varepsilon).$$

Pour la réciproque, donnons nous un standard x dans $\overset{\circ}{P}_m(\varepsilon)$; si $y \xrightarrow{p} x$ on a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
f(y) & f(x) \\
f_m(y) \arrow[u, dash, "(y \in P_m(\varepsilon) \text{ et } \varepsilon \to 0)\ \wr"] \arrow[r, "p", "(Th\ 3)"'] & f_m(x) \arrow[u, "p", "(Th\ 4)"']
\end{tikzcd}$$

On déduit du diagramme que $f(y) \to f(x)$, et du théorème 3, condition ii), que f est continue en x. En conclusion: E et $\overset{\circ}{P}_m(\varepsilon)$ ont les mêmes points standard donc, $E = st(\overset{\circ}{P}_m(\varepsilon))$, C.Q.F.D.

On voit que la démonstration est extrèmement simple et naturelle, comparée à celle que l'on peut trouver par exemple dans [11] 13, où Yosida obtient pour E l'expression :

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \overset{o}{P}_m(1/n).$$

Avant d'aborder l'application suivante, voici encore des définitions.

1- $y \in X$ est dit presque-standard si il existeun standard x tel que $y \to x$.

2-Si X est un espace métrique, l'élément x de X est dit limité si il existe un ensemble borné standard B tel que $x \in B$.

Nous aurons besoin du critère non-standard de compacité suivant:

Une partie standard K de X est compacte si et seulement si, pour tout $x \in K$, il existe un standard s dans K tel que $x \to s$.

Rappellons aussi qu'une application f de X dans X' est dite compacte si l'image par f de tout borné est relativement compacte.

Le théorème suivant est démontré dans [8] par Robinson toutefois, sa démonstration reste partiellement classique.

Nous supposerons X' régulier.

Théorème 9:

f est compacte si et seulement si pour tout x limité, f(x) est presque standard.

Preuve:

Pour la nécessité: donnons nous un x limité dans X. Par définition, il existe un borné standard B contenant x. Comme $f(x) \in \overline{f(B)}$ et que $\overline{f(B)}$ est compact, le critère non-standard de compacité nous permet de conclure.

Pour la suffisance, il suffit d'établir la propriété "$f(B)$ relativement compact" pour B standard.

Soit donc B un borné standard et $x \in \overline{f(B)}$. D'après le théorème 2, il existe $y \in f(B)$ tel que : $y \to x$. D'autre part, y est presque-standard par hypothèse; il existe donc un standard z tel que: $y \to z$.

On a donc le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccc} y & \longrightarrow & x \\ \downarrow & & \\ z & & \end{array}$$

On tire de la proposition 6 et du fait que z est standard, que $x \to z$. D'autre part, $z \in \overline{f(B)}$ (Proposition 2); la conclusion découle du critère non-standard de compacité.

Nous invitons le lecteur à chercher en quoi notre démonstration diffère de celle de Robinson.

II. 3 Application aux équations différentielles:

Ce qui suit est un début d'application de la méthode des infinitésimaux aux équations différentielles presque-périodiques. Cette étude sera poursuivie et approfondie dans un autre article toutefois, les premiers résultats présentés ici sont originaux.

Une notion de presque-période:

Dans [7] T. Sari montre que l'analyse non-standard permet d'introduire une notion de presque-période, absente dans la théorie classique des fonctions presque-périodiques.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans un espace normé E, nous poserons avec Sari:

Définition 4:

On dit que τ est une presque-période de f si pour t dans $\mathbb{R}$, $f(t+\tau) \sim f(t)$. On note P(f) l'ensemble des presque-périodes de f.

Remarquons que l'ensemble P(f) est externe (c'est un inconvénient).

Si ε est un réel positif on pose :

$P(f, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R} \ \|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon\}$.

On dit classiquement que la fonction continue f est presque-périodique (P.P.) si, pour tout ε, $P(f,\varepsilon)$ est relativement dense (R.D.) dans $\mathbb{R}$. Rappellons qu'un ensemble E est R.D. si pour tout réel positif ε il existe un réel $l(\varepsilon)$ tel que, pour tout réel a, $E \cap [a \ a+l(\varepsilon)]$ est non vide.

Dans 7 Sari établit le théorème:

Théorème 10:

la fonction continue f est P.P. si et seulement si P(f) est R.D.

Remarques:

* Soit ε un infiniment petit quelquonque mais fixé (d'ordre suffisant) alors, il est clair que $P(f,\varepsilon)$ est contenu dans $P(f)$, on en déduit que f est P.P ssi $P(f,\varepsilon)$ est R.D.

* $P(f)$ possède une structure de groupe (analogue du groupe des période d'une fonction périodique) par contre, ce n'est pas le cas pour $P(f,\varepsilon)$

Soit $(f_x)_{x\in K}$, une famille standard de fonctions P.P. On notera K_s l' ensemble externe des standard de K on a alors:

Théorème 11:

L'ensemble externe $P_s(f) = \bigcap_{x\in K_s} P(f_x)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve:

Soit ε un infiniment petit , soit $P_s(f_x,\varepsilon) = \bigcap_{x\in K_s} P(f_x,\varepsilon)$, et considérons la formule à deux variables:

$\emptyset(x,L) = (\forall a \in \mathbb{R} \quad P(f_x,L)\cap [a \; a+L] \neq \emptyset)$.

On sait ([12] p. 19) que toute intersection finie d'ensembles de la forme $P(f_x,\varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$, il suffit donc d'appliquer l'axiome d'idéalisation à la formule $\emptyset$ pour établir que $P_s(f,\varepsilon)$ est R.D. Comme $P_s(f,\varepsilon)$ est contenu dans $P_s(f)$, la démonstration est terminée.

Fonctions uniformément presque-périodiques:

Soit $f : K\times R \quad E$ une fonction continue ; posons $f_x = f(x, \;)$. On dit classiquement que f est uniformément presque-périodique (U.P.P.) sur K si pour tout réel positif ε , $P(f,\varepsilon) = \bigcap_{x\in K} P(f_x,\varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

On a la caractérisation non-standard suivante de l'uniforme presque-périodicité:

Théorème 12:

f est presque-périodique uniformément sur K si et seulement si $P(f) = \bigcap_{x \in K} P(f_x)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve:

Laissée au lecteur.

Le théorème suivant établit un lien entre la presque-périodicité des f_x et l'uniforme presque-périodicité de f.

Théorème 13:

Si K est un espace topologique compact et si toutes les f_x sont presque-périodiques alors:

f est U.P.P. sur K si et seulement si f est continue en x uniformément par rapport à t.

Preuve:

Pour la suffisance, il suffit de montrer que $P_s(f)$ est contenu dans P(f) et d'utiliser le théorème 11.

Supposons toutes les constantes du théorème standard et donnons nous τ dans $P_s(f)$.

Pour tout y dans K il existe un standard x dans K (son ombre), telque $y \to x$ (On applique le critère non-standard de compacité).

La condition de continuité uniforme par rapport à t (U.C./t) peut s'écrire: si $y \to x$ alors, pour tout t $f(y,t) \overset{x}{\sim} f(x,t)$.

on a donc le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc} & f(y,t+\ ) & & f(y,t) & \\ (U.C./t) & \wr & & \wr & (U.C./t) \\ & f(x,t+\ ) & \sim & f(x,t) & \\ & & (\ \in P(f_x)) & & \end{array}$$

Il découle clairement du diagramme que $\tau \in P(f)$.

Pour la réciproque, supposons $P(f)$ R.D. et soit L tel que pour tout a, $P(f)$ rencontre $[a\ a+L]$. On peut démontrer que L n'est généralement pas standard (L st ssi f est périodique).

Il suffit de montrer que si x est standard et si $y \xrightarrow{L} x$ alors, pour tout réel t, $f(y,t) \sim f(x,t)$; cela découle du diagramme:

$$\begin{cases} y \xrightarrow{L} x \\ \tau(t) \in [-t\ \ -t+L] \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} & f(x,t+\tau(t)) & \overset{(U.P.P.)}{\sim} & f(x,t) \\ (U.C./K\times[0\ L]) & \wr & & \\ & f(y,t+\tau(t)) & \underset{(U.P.P.)}{\sim} & f(y,t) \end{array} .$$

Equations différentielles presque-périodiques:

Considérons l'équation différentielle,

(E) $\quad \dot{x} = f(x,t)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, f presque périodique.

(E) admet-elle une solution presque-périodique? La réponse est en général non, si on ne fait pas d'autres hypothèses. Nous allons tenter en utilisant la notion de presque-période de trouver des conditions suffisantes d'existence de telles solutions.

Avant d'aller plus loin, introduisons une famille auxiliaire d'équations différentielles.

$(E_\tau) \quad \dot{x} = f^\tau(x,t)$ avec $\tau \in \mathbb{R}$ et $f^\tau(x,t) = f(x,t+\tau)$.

On supposera que pour tout τ et pour tout $x_o \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy:
$$\begin{cases} \dot{x} = f^\tau(x,t) \\ x(t_o) = x_o \end{cases},$$

admet une unique solution définie pour tout t.

On notera $F^\tau_{t,t_o}.x_o$ cette solution et on écrira F_{t,t_o} sans indice supérieur, quand $\tau = 0$.

On rappelle les propriétés classiques suivantes, dont la démonstration est évidente.

* Pour tous t, t_o, t_1, $F_{t,t_o} = F_{t,t_1}.F_{t_1,t_o}$.

** Pour tout τ et tous t, t_o, $F^\tau_{t,t_o} = F_{t+\tau,t_o+\tau}$.

Le théorème suivant est une propriété des trajectoires d'équations différentielles presque-périodiques.

Nous supposerons f et t_o standard pour simplifier l'énoncé toutefois, la généralisation ne présente aucune difficulté.

Théorème 14:

Si f est lipschitzienne (de constante k) et uniformément presque-périodique alors, il existe un réel stl/2 S tel que $S \to +\infty$ et un ensemble relativement dense P contenu dans P(f) tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \tau \in P, \forall t \in [t_o - S\ t_o + S] \ , \ F_{t,t_o}.x \sim F^{\tau}_{t,t_o}.x \ .$$

Preuve:

Donnons nous $\varepsilon \to 0$, ε stl/2 et prenons $P = P(f,\varepsilon)$. L'ensemble P est clairement stl/2.

Pour tout entier standars n et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a, pour chaque $\tau \in P(f)$ et pour tout t ; $\| f(x,t) - f^{\tau}(x,t)\| < 1/n$. On en déduit l'inégalité:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \tau \in P, \forall t \in \mathbb{R} \ , \ \| F_{t,t_o}.x - F^{\tau}_{t,t_o}.x \| < |t-t_o|.1/n.\ e^{k|t-t_o|}.$$

Soit A l'ensemble des entiers n tels que pour tout entier $m \leqslant n$, l'inégalité ci-dessus est vraie. A est un ensemble interne contenant tous les standard ors, ceux-ci ne constituent pas un ensemble interne donc : A contient un infiniment grand, N. Il est clair que l'on peut choisir N stl/2.

Posons $g(s) = s.e^{k.s}$; g est croissante pour s positif et quand s tend vers $+\infty$ g(s) tend vers plus l'infini; comme g est standard, il existe S stl/2 tel que, si $0 \leqslant s \leqslant S$, alors $g(s) \leqslant \sqrt{N}$

On conclut en remarquant que si $|t-t_o| \leqslant S$ alors,

$|t-t_o| . 1/N . e^{k|t-t_o|} \leq 1/N \sim 0$. Ceci achève la démonstration.

Le théorème qui suit est un pas de plus vers l'existence d'une solution presque-périodique . Soit h une telle solution

Nous savons que toute solution presque périodique est nécessairement bornée de plus, si $t \to +\infty$, on doit avoir, pour toute presque-période : $h(t+\tau) \sim h(t)$.(C'est même vrai pour tout t par définition.) L'existence d'une solution bornée vérifiant à l'infini la condition précédente n'assure pas de l'existence d'une solution presque-périodique cependant nous avons: pour f standard,

<u>Théorème</u> 15:

Si f est de classe C^1, lipschitzienne et uniformément presque-périodique; s'il existe une solution h(t) telle que:

i) h(t) est bornée,

ii) Si $t \to +\infty$ alors, pour tout $\tau \in P(f)$ $h(t+\tau) \sim h(t)$,

alors il existe une solution k(t), un infiniment grand S et un ensemble relativement dense P contenu dans P(f) tels que,

$\forall \in P$, $\forall t \in [t_o - S\ t_o + S]$, $k(t+\tau) \sim k(t)$. (t_o est le temps initial).

<u>Preuve</u>:

Donnons nous un $\varepsilon \to 0$, stl/2 et prenons pour S celui qui nous est fourni par le théorème 14. On peut écrire $h(t) = F_{t,t_o} . x_o$ avec t_o et x_o standard. De l'hypothèse i) et de la caractérisation non-standard des points d'accumulation (Théorème 5), on déduit l'existence d'une presque-période $\bar{\tau} \in P = P(f,\varepsilon)$ et d'un stl/2,

x_1 tels que $F_{t_0+\bar{\tau},t_0}.x_0 \xrightarrow{2} x_1$ et $-\ 2\ +$

Pour tout stl/2 $t \in [t_0-S\ \ t_0+S]$ et tout stl/2 $\tau \in P$, on a les équivalences suivantes:

$$F_{t+\tau\, t_0}.x_1$$

$\wr$ (Continuité/conditions initiales)

$$F_{t+\tau,t_0}.F_{t_0+\bar{\tau},t_0}.x_0$$

$\wr$ (Théorème 14)

$$F_{t+\tau+\bar{\tau},t_0+\bar{\tau}}.F_{t_0+\bar{\tau},t_0}.x_0 = F_{t+\tau+\bar{\tau},t_0}.x_0$$

$\wr$ ($\tau+\bar{\tau} \rightarrow +\infty$, condition ii).)

$$F_{t+\bar{\tau},t_0}.x_0 = F_{t+\bar{\tau},t_0+\bar{\tau}}.F_{t_0+\bar{\tau},t_0}.x_0$$

$\wr$ (Théorème 14)

$$F_{t,t_0}.F_{t_0+\bar{\tau},t_0}.x_0$$

$\wr$ (Continuité/conditions initiales)

$$F_{t,t_0}.x_1$$

On conclut en appliquant la propriété 8 du I/ .

On voit comment on peut obtenir des conditions suffisantes d'existence de solutions presque-périodiques. En effet remplaçons la condition ii) du théorème 15 par la condition plus générale

ii)' Si $t \rightarrow +\infty, \tau \in P(f)$ et $\tau' \in P(f)$ alors $F_{t+\tau\, t_0}.h(t_0+\tau') \sim F_{t,t_0}.h(t_0+\tau')$

on aura pour tout t stl/2 à l'extérieur de $[t_0-S\ \ t_0+S]$ et tout τ stl/2 dans P le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} F_{t+\tau,t_o}.h(t_o+\bar{\tau}) & \sim & F_{t,t_o}.h(t_o+\bar{\tau}) \\ {\scriptstyle 2}\downarrow & & {\scriptstyle 2}\downarrow \\ F_{t+\tau,t_o}.x_1 & & F_{t,t_\tau}.x_1 \end{array}$$

On en déduit, par transfert, que :

$$\forall t \ / \ |t-t_o| > S, \quad \forall \tau \in P, \quad F_{t,to}.x_1 \sim F_{t+\tau,t_o}.x_1 \ .$$

Ce dernier résultat, joint à la conclusion du théorème 15 nous permet d'affirmer que $F_{t,t_o}.x_1$ est une solution presque-périodique.

ANNEXE

Dans une première partie donnons une description détaillée de la théorie de A. ROBINSON.

I - L'ANALYSE NON STANDARD VUE PAR A. ROBINSON

Rappelons brièvement la définition de l'ensemble T des types.

Un type est un objet construit à partir d'un objet arbitraire noté o et en un nombre fini d'étapes par application des règles suivantes :

i) o est un type

ii) si n est un entier positif et si τ_1, τ_2,... $_n$ sont des types alors $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n)$ est un type.

Un ensemble A étant donné, on peut maintenant définir le type d'une relation sur A. On procède comme suit :

On dit qu'un élément de A est une realtion de type o. Soit $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n)$ un type, supposons défini l'ensemble des relations de type τ_1, l'ensemble des relations de type τ_2,..... l'ensemble des relations de type τ_n sur A, notons A_{τ_1}, A_{τ_2},....A_{τ_n} ces différents ensembles de relations. appellera relation de type sur A toute partie de

$A_{\tau_1} \times A_{\tau_2} \times \dots \times A_{\tau_n}$

On notera A_τ l'ensemble des relations de type τ sur A. On voit que de proche en proche on peut définir A_τ pour tout $\tau \in T$. En fait :

$A_o = A$, $A_{(o)} = \mathscr{P}(A)$, $A_{(o,o)} = \mathscr{P}(A \times A)$,

$A_{(o,(o))} = \mathscr{P}(A \times \mathscr{P}(A))$ etc...

POur tout τ , $A_\tau \in A_{(\tau)}$ (n=1)

I 1 . Structures d'ordre supérieur

Un ensemble A étant donné on appellera structure d'ordre supérieur sur A un ensemble $M = \{B_\tau\}_{\tau \in T}$ tel que :

i) $B_o = A$

ii) B_τ est une partie de A_τ

iii) si $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, si $R \in B_\tau$

et $(R_1, R_2, \ldots R_n) \in R$ alors,

$R_i \in B_{\tau_i}$ pour chaque i

I 2 . Langage d'ordre supérieur :

Un langage d'ordre supérieur Λ est défini par la donnée de symboles atomiques qui sont :

i) Des constantes individuelles en nombre arbitraire mais fixé.

ii) Des variables en nombre infini mais dénombrable.

iii) Un symbole de relation n+1-aire pour chaque type

$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ noté $\emptyset_\tau$ et aucun autre symbole de relation.

iv) Les connecteurs logiques usuels :

$\neg$ (négation), $\vee$ (disjonction), $\wedge$ (conjonction),

$\Rightarrow$ (implication).

v) Les quantificateurs $(\forall)$ et $(\exists)$.

vi) Les crochets [et] .

On définit ensuite les formules bien formées de la manière habituelle.

Les formules du type $\phi_{\tau_o}(x_o, x_1, \dots x_n)$ avec $\tau_o = (\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n)$ sont destinées par la suite à "désigner" des relations du type $(X_1, X_2, \dots X_n) \in X_o$ où chaque X_i est une relation du type τ_i sur un ensemble donné A.

Aussi dirons-nous que, dans la formule $\phi_{\tau_o}(x_o, x_1, \dots x_n)$, chaque x_i occupe la place du type τ_i.

Grâce à cette précision terminologique, nous allons pouvoir assigner sans ambiguité un type à chaque constante de certaines parties de Λ : les ensembles stratifiés de formule.

Une partie K de Λ sera dite <u>stratifiée</u> si chaque variable ou constante de K apparaît à la place d'un type et d'un seul dans les formules de K où elle intervient. Une constante de K sera dite de type τ si elle apparaît à la place du type τ.

<u>I 3 . Interprétation de Λ dans une structure</u>

Ce qui suit est une quasi-traduction de [6] p.22.

Soit $M = \{B_\tau\}$ une structure (d'ordre supérieur) bâtie sur un ensemble A et soit C une <u>injection</u> d'un ensemble de constantes de Λ sur la <u>totalité</u> des relations de M.

Si r est dans le domaine de C et si C(r) = R nous dirons que r est le <u>nom</u> de R dans le langage Λ ou que R est <u>l'interprétation</u> de r dans la structure M.

Soit $X = [\phi_\tau(a, b_1, \dots b_n)]$ avec $\tau = (\tau_1, \dots \tau_n)$ une formule atomique entre crochets, nous dirons que X est <u>admissible</u> dans M (relativement à C) si a, $b_1, \dots, b_n$ sont dans le domaine de C et désignent des relations R, $R_1, \dots R_n$ de types respectifs $\tau, \tau_1, \dots \tau_n$.

Si $(R_1, R_2, \ldots R_n) \in R$ nous dirons que X est <u>vraie</u> dans M. Si X est admissible mais non vraie dans M on dira que X est <u>fausse</u> dans M relativement à C.

Plus généralement, une sentence stratifiée X étant donnée, on dit que X est admissible (relativement à C) dans M si chaque constante a apparaissant dans X est dans le domaine de C et si C(a) est une relation de M dont le type est celui de la place de a dans X.

Si $X = [\neg Y]$ est une structure admissible, on dit que X est vraie dans M si Y est fausse dans M.

Si $X = [Y \wedge Z]$ on dit que X est vraie dans M si Y et Z sont vraies dans M.

Si $X = [(\exists\ y)\ Z]$ est une formule stratifiée admissible dans M; si y n'apparaît pas dans Z on dira que X est vraie si Z est vraie dans M. Si y apparaît dans Z on dira que X est vraie dans M si il existe une constante r dans le domaine de C telle que R = C(r) est une relation dans M dont le type est le type de la place de r dans Z et si Z(r) est vraie dans M.

De même, si $X = [(\forall\ y)\ Z]$ et si y n'apparaît pas dans Z on dira que X est vraie dans M si Z est vraie dans M. Si y apparaît dans Z on dira que X ets vraie dans M si Z(r) est vraie pour toute constante r du domaine de C telle que le type de C(r) est le type de la place de r dans Z.

Soit K un ensemble stratifié de sentences de Λ.

On dit que M est un <u>modèle</u> de K si il existe une injection C pour laquelle toutes les sentences de K sont vraies dans M.

On dit que K est <u>consistant</u> s'il admet un modèle.

I 4 . Les agrandissements

Soit K un ensemble stratifiéde sentences de Λ et soit Γ l'ensemble des constantes qui apparaissent dans K. Parmi les constantes de K certaines présentent un intérêt central, ce sont les constantes dites concurrentes.

Une constante b de K sera dite <u>concurrente</u> si

i) elle désigne une relation binaire. Son type sera donc de la forme $\tau = (\tau, \tau')$

ii) pour toute partie finie de son <u>domaine</u> (définition immédiate sinon voir [6]), $\{g_1, g_2, \dots g_n\}$, la sentence $X = (\exists y) \ [\phi_\tau(b, g_1, y) \wedge \dots \wedge \phi_\tau(b, g_n, y)]$ est déductible de K ($K \cup \{\neg X\}$ inconsistant).

Soit Γ_o l'ensemble des relations concurrentes de Γ . A chaque b de Γ_o Robinson associe une constante a_b (on suppose que Λ contient suffisamment de constantes pour cela) de telle sorte que :

i) les a_b sont toute distinctes

ii) les a_b ne sont pas déjà dans Γ.

L'idée est d'agrandir K en l'augmentant de l'ensemble H_2 de toutes les sentences : $\phi_\tau(b,g,a_b)$ où b est une constante concurrente, g une constante du domaine de b, et τ le type de b.

Posons $K_2 = K \cup H_2$ on a alors l'important théorème suivant:

<u>Théorème I 1</u>

Si K est consistant alors K_2 est consistant.

On appelle K_2 un agrandissement de K

Si C est une application injective d'un ensemble de constantes de Γ sur la totalité des relations d'une structure donnée $M = [B_\tau]$, on prendra pour K l'ensemble des sentences de Γ qui sont vraies dans M.

Une relation binaire de M sera dite concurrente si elle est désignée (modulo C) par une constante concurrente de Γ .

Exemples :

Prenons pour ensemble de base $A = \mathbb{R}$, les relations de type (o,o) notées usuellement $<$, $\geqslant$, $\neq$ sont concurrentes, ainsi que la relation de type (o,(o)) notée $\in$, et que la relation de type ((o),(o)) notée $\subset$.

Ainsi si σ est le nom de la relation $<$ dans K et si on lui associe la constante a_σ , la phrase "$(\forall g)$ dans le domaine de σ $\emptyset_{(o,o)}(\sigma, g, a_\sigma)$" peut légitimement s'énoncer :
" Pour tout nombre réel g a_σ est supérieur à g ".
Cette dernière affirmation est fausse si l'on suppose que a_σ est un réel car chacun sait qu'il n'existe pas un réel supérieur à tous les autres, toutefois, elle est vraie dans un modèle ${}^2M$ de K_2.

Si l'on note ω l'interprétation de a_σ dans ${}^2M$ ω mérite donc le qualificatif d'infiniment grand.

Soit donc ${}^2M = \{{}^2B_\tau\}$ un modèle de K_2.

Posons ${}^2B_o = {}^2A$ on dit alors que ${}^2M$ est un agrandissement de M
${}^2A$ est un agrandissement de A

Plus généralement, si R est une relation de M désignée par r dans K la réinterprétation de r dans ${}^2M$ sera notée ${}^2R$ et on dira que ${}^2R$ est un agrandissement de R.

Parmi les relations de tout type définies sur ${}^2A$ certaines sont des réinterprétations dans M_2 de relations de M. On dit qu'elles sont <u>standard</u>. Par exemple, l'élément ω présenté plus haut est non standard.

Les relations de ${}^2M$ sont dites <u>internes</u>, les relations sur ${}^2A$ qui ne sont pas dans ${}^2M$ sont dites <u>externes</u>.
L'existence de relations externes est l'une des difficultés que nous rencontrerons dans la suite.

I 5 . Propriétés des agrandissements d'une structure :

La propriété essentielle des agrandissements est la suivante:

<u>Propriété d'idéalisation</u> :

Si R est une relation concurrente dans M de type $\tau_o = (\tau, \tau')$ alors il existe $\xi \in {}^2B_{\tau'}$, tel que pour tout x du domaine de R, $({}^2x, \xi) \in {}^2R$.

<u>Exemples</u> :

1. Prenons $A = \mathbb{R}$ $M = \{B_\tau\}$ une structure bâtie sur A et ${}^2M = \{{}^2B_\tau\}$ un agrandissement de M alors il existe $\xi \in {}^2\mathbb{R}$ / $\forall x \in \mathbb{R}$ $\xi \;{}^2\!\geq {}^2x$.

Un tel ξ est dit infiniment grand.

2. Si est un ensemble infini quelconque il existe $\xi \in {}^2A$ / $\forall x \in A$ $\xi \;{}^2\!\neq {}^2x$

<u>Propriété de Transfert</u> :

Une propriété (P) étant donnée dans M, on obtient une propriété équivalente $({}^2P)$ dans ${}^2M$ en remplaçant toutes les constantes de l'énoncé de (P) par leur réinterprétation dans ${}^2M$.

Exemples :

1. Si $A = \mathbb{R}$, la propriété : " $\leqslant$ est une relation d'ordre" équivaut à " ${}^2\!\leqslant$ est une relation d'ordre" (vérification immédiate)

2. Si $A = \mathbb{N}$, la propriété :

(P) $\forall W \in \mathbb{N}_{(o)} \quad \exists n \in W \quad \forall x \in W \quad n \leqslant x$ équivaut à

(${}^2P$) $\forall W \in {}^2\mathbb{N}_{(o)} \quad \exists n \in W \quad \forall x \in W \; n \;{}^2\!\leqslant\; x$ qui peut aussi s'énoncer :

" Toute partie interne de ${}^2\mathbb{N}$ admet un plus petit élément "

Ceci nous donne l'occasion de présenter des relations externes; en effet, si on note $\underline{\mathbb{N}}$ l'ensemble des ${}^2n$, $n \in \mathbb{N}$ et $W = {}^2\mathbb{N} - \underline{\mathbb{N}}$, W est forcément externe car si $w \in W$, $w - 1$ (en toute rigueur :$w \,{}^2(-)\, {}^2 1$) est dans W. W n' donc pas de plus petit élément.

Il est aussi facile de prouver que $\underline{\mathbb{N}}$ est une partie externe de ${}^2\mathbb{N}$.

3. Soient E et F deux parties de E alors $E \subset F$ équivaut à ${}^2E \subset {}^2F$.

Applications à la topologie .

Soit (A,O) un espace topologique, A étant l'ensemble sous-jacent supposé infini et O l'ensemble des ouverts; on a $O \in A_{((o))}$

A partir de maintenant M sera la structure pleine bâtie sur A. Ceci signifie que pour chaque τ, $B_\tau = A_\tau$.

Soit ${}^2M = \{{}^2B_\tau\}$ un agrandissement de M, on voit que ${}^2O$ engendre une topologie sur ${}^2A$, en effet,

i) L'ensemble vide et ${}^2A$ sont dans ${}^2O$

ii) ${}^2O$ est stable pour les intersections finies.

Il suffit, pour établir i) et ii) de transférer dans ${}^2M$ les propriétés analogues de O.

Notons que ${}^2O$ est standard et donc, interne. On en déduit que tous ses éléments sont internes. Remarquons que si $U \in O$ et si $\underline{U}$ est l'ensemble des ${}^2x$ tels que ${}^2X \in U$ alors l'ensemble standard ${}^2U$ contient $\underline{U}$.

Autre propriété importante : ${}^2O$ est stable pour les réunions <u>internes</u>.

Dans ce qui suit on identifiera A à une partie de ${}^2A$, on écrira donc A pour $\underline{A}$, p pour ${}^2p$ quand $p \in A$

Si p est un point standard de ${}^2A$, Robinson définit ce qu'il appelle la monade de p et que nous nommerons le halo de p, par:

$$h(p) = \bigcap_{\substack{U \in O \\ p \in U}} {}^2U$$, qui est généralement un ensemble externe

h(p) est donc l'intersection des ouverts standard contenant p.

De la propriété d'idéalisation on tire facilement que h(p) contient un ouvert de ${}^2O$ puis, les caractérisations topologiques suivantes :

<u>Proposition I.1</u> :

Un point standard p est intérieur à l'ensemble standard S si et seulement si $h(p) \subset {}^2S$.

<u>Proposition I.2</u> :

Un point standard p est adhérent à l'ensemble standard S si et seulement si $h(p) \cap {}^2S \neq \emptyset$.

Nous apprécions le coté "direct" de ces caractérisations; toutefois, une question surgit : Comment écrire $p \in \overset{o}{\overline{S}}$ sans faire appel à une caractérisation classique des points adhérents ? Il est clair que $p \in \overset{o}{\overline{S}}$ équivaut à $h(p) \subset {}^2(\overline{S})$ mais comment écrire $q \in {}^2(\overline{S})$ pour $q \in h(p)$?
Une des difficultés réside dans le fait que q n'est pas généralement standard.
Ces considérations nous conduisent tout naturellement à l'idée d'agrandissements successifs.

II - ETUDE DES AGRANDISSEMENTS SUCCESSIFS

II 1 . Agrandissements successifs d'un ensemble de sentences

Soit K un ensemble de sentences, Γ l'ensemble des constantes qui apparaissent dans K que nous supposerons infini et Γ_2 l'ensemble obtenu en adjoignant à Γ toutes les constantes a_b définies dans le chapitre I.

Désignons par $\Gamma_{2,o}$ l'ensemble des constantes concurrentes de Γ_2 . A chaque constante b de $\Gamma_{2,o}$ on associera une constante $a_{2,b}$ de Λ distincte et ne figurant pas déjà dans Γ_2; on supposera pour cela que Λ contient des constantes en nombre suffisant.

Considérons l'ensemble H_2 de toutes les sentences de la forme $\emptyset_\tau(b,g,a_{2,b})$ où b est une constante concurrente de Γ_2 de type τ et g une constante du domaine de b.

Si l'on pose $K_3 = K_2 \cup H_2$ on a alors

Théorème II.1

Si K est consistant alors K_3 est consistant.

Preuve:

Il suffit d'appliquer deux fois le théorème I 1 de la même manière que l'on a construit K_2 à partir de K, K_3 à partir de K_1 on voit que l'on peut construire une suite d'ensemble de sentences (K_p) telle que K_{p+1} soit un agrandissement de K_p.

Considérons maintenant l'ensemble K_ω réunion de tous les K_p en convenant que $K_1 = K$, on a alors :

Théorème II.2

Si K est consistant alors K_ω est consistant.

Preuve:

Le théorème de compacité de la théorie des modèles nous dit qu'il suffit d'établir la consistance d'un ensemble fini de sentences de K_ω .

Un tel ensemble étant contenu dans un K_p il suffit d'établir la consistance de K_p pour tout p. C'est immédiat par induction.

Remarque :

Dans tout le II.1 les termes:ensemble, réunion, sont pris dans leur sens intuitif; les entiers sont les entiers naifs.

II.2 . Agrandissements successifs d'une structure d'ordre supérieur

Soit $M = \{B_\tau\}$ une structure complète bâtie sur $B_o = A$, supposé infini. Soit K l'ensemble stratifié des sentences de Λ vraies dans M pour une certaine injection C sur la totalité des relations de M.

Par définition, l'ensemble K est consistant; on en déduit que ses agrandissements succéssifs, K_2, K_3,.....K_p,... K_ω, sont des ensembles consistants de sentences.

Notations:

* Si R est une relation de type quelconque de la structure M, on écrira: $R \in M$.

* Si $R \in {}^pM$ et si q est, soit ω, soit un entier supérieur à p, on notera ${}^qR$ la réinterprétation de R dans ${}^qM$.

Théorème II.3

Si R est une relation concurrente alors, pour tout entier p, ${}^pR$ est une relation concurrente de ${}^pM$.

Preuve:

Il suffit de réinterpréter dans ${}^pM$ l'affirmation que R est une relation concurrente de M.

Corollaire:

Les inclusions, $K \subset K_2 \subset \ldots\ldots \subset K_p \subset \ldots\ldots \subset K_\omega$ sont strictes.

Preuve:

Il suffit de montrer que chaque K_p contient an moins une constante concurrente, d; la constante $a_{p,d}$ du language Λ qui lui est associée est, par définition dans K_{p+1} mais pas dans K_p.

Pour cela, il suffit d'observer que A est infini et que la relation D sur A définie par "$(a,b) \in D$ ssi a est différent de b", est une relation concurrente.

Notons par d le nom de D dans K. C'es aussi le nom de ${}^{p}D$ pour tout entier p. ${}^{p}D$ étant concurrente d'après le théorème précédent, d est bien une constante concurrente de ${}^{p}K$ et la démonstration est terminée.

Les agrandissements ${}^{p}K$, avec p éventuellement ω , étant consistants, ils admettent des modèles. soient:

$$\begin{array}{lll} {}^{2}M = \{{}^{2}B_{\tau}\} & \text{un modèle de } {}^{2}K, \\ \vdots & \\ {}^{p}M = \{{}^{p}B_{\tau}\} & \text{un modèle de } {}^{p}K, \\ \vdots & \\ {}^{\omega}M = \{{}^{\omega}B_{\tau}\} & \text{un modèle de } {}^{\omega}K. \end{array}$$

On posera:

Définition II.1:

Si p = 2, 3,....p,...., ω , et si R est une relation de type quelconque sur ${}^{p}A$, on dira que R est interne sur ${}^{p}A$ si $R \in {}^{p}M$.

Dans le cas contraire, on dira que R est externe.

Notations:

Soient les types: $\tau = (\tau_1, \ldots\ldots, \tau_m, \tau_{m+1}, \ldots \tau_n)$,

$\tau' = (\tau_1, \ldots\ldots, \tau_m)$,

et $R \in {}^{p}M$ une relation de type τ.

On notera:

$\pi_{\tau'}(R)$ la projection de R sur ${}^{p}B_{\tau_1} \times \ldots \times {}^{p}B_{\tau_m}$,

$$R^c = {}^{p}B_{\tau_1} \times \ldots \times {}^{p}B_{\tau_n} - R .$$

Théorème II.4:

Si R et R' sont des relations internes sur ${}^{p}A$ de type τ alors, $R \cap R'$, R^c et $\pi_{\tau}(R)$ sont internes sur ${}^{p}A$.

Preuve:

Nous donnerons la démonstration seulement dans le cas de la projection.

$\forall R \in B_{\tau}\ \exists S \in B_{\tau'}$, tel que $\forall a_1 \in B_{\tau_1}, \ldots, \forall a_m \in B_{\tau'_m}$

$(a_1, \ldots, a_m) \in S = \exists a_{m+1} \in B_{\tau_{m+1}}, \ldots, \exists a_n \in B_{\tau_n}$ tels que,

$(a_1 \ldots, a_n) \in R$ donne après réinterprétation dans ${}^pM$:

$\forall R \in {}^pB\ \exists S \in {}^pB_{\tau'}$, tel que....etc....

S est donc $\pi_{\tau'}(R)$ et il appartient à ${}^pB_{\tau'}$, il est donc interne

C.Q.F.D.

Remarques:

* Il découle du précédent corollaire que pour tout type τ ${}^pB_{\tau} \subsetneq {}^{p+1}B_{\tau}$.

* Aucune des structures ${}^2M, \ldots, {}^pM, \ldots$, M n'est complète engénéral (Il existe des relations externes). Par exemple, si A contient $\mathbb{N}$, ${}^p\underline{\mathbb{N}} = \{{}^pa \ / \ a \in \mathbb{N}\}$ est externe .

* Toute partie finie de ${}^pA$ est interne.

Dans le chapitre suivant nous allons tâcher de dégager des rèles pratiques simples d'utilisation des agrandissements succéssifs.

III. PREFORMALISATION DE LA THEORIE DES AGRANDISSEMENTS SUCCESSIFS:

Soit M une structure complète bâtie sur A et soient, pour $p = 1, 2, \ldots$ et $q = 1, 2, \ldots$, tels que $q \geq p$, les applications:

$$f_{q,p} : {}^{p}M \longrightarrow {}^{q}M \quad \text{avec } {}^{1}M = M .$$
$$R \longrightarrow {}^{q}R$$

Il est clair que pour tous p,q et r pour lesquels elle a un sens, nous avons la relation:

$$f_{q,p} \circ f_{p,r} = f_{q,r} \quad \text{aussi,}$$

si l'on pose:

$${}^{p}\underline{B}_{\tau} = \{ f_{\omega,p}(R) \; / \; R \in {}^{p}B_{\tau} \},$$

on a les inclusions:

$${}^{1}\underline{B}_{\tau} \subset {}^{2}\underline{B}_{\tau} \subset \ldots\ldots {}^{p}\underline{B}_{\tau} \subset \ldots \subset {}^{\omega}\underline{B}_{\tau}$$ que l'on peut résumer par,

$${}^{1}\underline{M} \subset {}^{2}\underline{M} \subset \ldots\ldots {}^{p}\underline{M} \subset \ldots \subset {}^{\omega}\underline{M}.$$

Définition III.1:

Une relation R sur ${}^{\omega}A$ sera dite interne si $R \in {}^{\omega}M$. Dans le cas contraire, elle sera dite externe.

Définition III.2:

On dira que R est 1/p-standard, ou standard d'ordre 1/p, si $R \in {}^{p}\underline{M}$. On écrira : R st1/p.

Propriétés:

1- Pour tout entier p, R st1/p => R st1/p+1 .

2- ${}^{\omega}M$ est réunion (intuitive) de tous les ${}^{p}\underline{M}$ aussi, peut-on dire que toute relation interne possède un degré de standardité.

Dans la suite de ce travail, nous supprimerons l'indice supérieur ω partout où il apparait au dessus d'une constante.

Nous écrirons par exemple $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $=$, π, etc au lieu de ${}^{\omega}\mathbb{R}$, ${}^{\omega}\mathbb{N}$, ${}^{\omega}=$, ${}^{\omega}\pi$ etc.

Pour justifier cette hardiesse, remarquons seulement que dans le langage Λ, $\mathbb{R}$ et ${}^{\omega}\mathbb{R}$ par exemple, portent le même nom.

Apprenons maintenant à reconnaitre les relations internes. Nous savons déjà que toute relation standard est interne, ainsi que les relations obtenues par idéalisation à partir d'une relation concurrente.

A partir de ces relations, aisément identifiables, il est possible de décrire toutes les relations internes.

Pratiquement, une relation sur A est définie au moyen d'une formule sur A. Par exemple, la formule:

ϕ (x) = ($\forall$ U $\in$ O ((U $\in$ ${}^{p}\underline{B}_{(o)}$ et a $\in$ U) $\Rightarrow$ x $\in$ U))), nous

donne la relation de type (o):

$$H = \{x \in M : \phi(x)\} .$$

Nous appellerons <u>formule</u> <u>interne</u> sur M une formule dans laquelle toutes les constantes sont internes. La formule ϕ (x) ci-dessus n'est pas interne car la constante ${}^{p}\underline{B}_{(o)}$ est externe.

Dans la suite on écrira x stl/p pour x $\in$ ${}^{p}\underline{M}$ ou pour x $\in$ ${}^{p}\underline{B}_{\tau}$.

Une formule est donc interne si toutes les constantes sont internes et si n'apparait nulle part aucune expression "stl/p" .

Nous conviendrons désormais d'écrire:

$\forall^{st l/p}_{x \in M} \not{0}(x)$ pour $\forall x \in M \ (x \text{ st}l/p \Rightarrow \not{0}(x))$

$\exists^{st l/p}_{x \in M} \not{0}(x)$ pour $\exists x \in M \ (x \text{ st}l/p \text{ et } \not{0}(x))$.

Avec ces notations la formule de l'exemple précédent s'écrit:

$\forall^{st l/p}_{x \in M} ((U \in O \text{ et } a \in U) \Rightarrow x \in U)$ ou, plus simplement,

$\forall^{st l/p}_{x \in O} (a \in U \Rightarrow x \in U)$.

Proposition III.1:

Une relation $R \in M$ est interne si et seulement si on peut la définir à l'aide d'une formule interne.

Preuve:

La nécessité est évidente car, si R est une relation interne, elle peut être définie à l'aide de la formule interne : $\not{0}(x) = (x \in R)$.

Pour établir que la condition est suffisante, il suffit d'exprimer les connecteurs logiques à l'aide des opérations de l'algèbre de Boole, tandis que les quantificateurs universels seront exprimés au moyen des projections. On utilise ensuite le théorème II.4 avec $p = \omega$.

Théorème III.1 : (Transfert)

Soit $\not{0}$ une formule interne avec toutes ses constantes $a_1, \ldots, a_n$, stl/p et une variable libre x alors :

$$\forall^{st l/p}_{x \in M} \not{0}(x, a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow \forall x \in M \ \not{0}(x, a_1, \ldots, a_n) .$$

Preuve:

Soient $b_i \in {}^pM$ tels que $a_i =^{\omega} b_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\forall^{stl/p} x \in M \quad \phi(x, a_1, \ldots, a_n) \iff$$

$$\forall x \in {}^p\underline{M} \quad \phi(x, b_1, \ldots, b_n) \iff$$

$$\forall x \in {}^p\underline{M} \quad \phi(x, b_1, \ldots, b_n) \iff$$

$$\forall x \in M \quad \phi(x, b_1, \ldots, b_n) \iff \text{(Réinterprétation dans M)}$$

$$\forall x \in M \quad \phi(x, a_1, \ldots, a_n) \ .$$

Théorème III.2: (Idéalisation)

Soit ϕ une formule interne à deux variables libres x et y, évoluant dans un domaine V stl/p, avec toutes ses constantes $a_1, \ldots, a_n$ stl/p on a alors :

$$\forall^{stl/p\ fin} z \subset V \ \exists y \in V \ \forall x \in z \ \phi(x,y) \Rightarrow \exists^{stl/p+1} \xi \in V \ \forall^{stl/p} x \in V \ \phi(x, \xi) \ .$$

Preuve:

ϕ interne $\Rightarrow$ $R = \{(x,y) \in V \times V \ / \ \phi(x,y)\}$ est une relation interne. Le fait que les constantes de ϕ sont stl/p implique que R est stl/p.

Soient $S \in {}^pM$ tel que $R = {}^{\omega}S$,

$W \in {}^pM$ tel que $V = {}^{\omega}W$.

Il est évident (utiliser la propriété de transfert), que S est une relation concurrente sur W. Il existe donc $x \in {}^{p+1}W$ tel que:

$$\forall z \in W \ (x, {}^{p+1}z) \in {}^{p+1}S.$$

posons $\xi = {}^{\omega}x$. C'est l'élément cherché, en effet:

a) $\forall z \in W \ ((x, {}^{p+1}z) \in {}^{p+1}S \iff (\xi, {}^{\omega}z) \in {}^{\omega}S)$ et $x \in {}^{p+1}W \Rightarrow \xi = {}^{\omega}x$ est stl/p+1 .

b) $z \in W$ et $W \in {}^{p}M \Rightarrow z \in {}^{p}M$ donc, quand z parcours W, z parcours tous les éléments stl/p de V.

Les théorèmes précédents sont l'équivalent gradué des schémas d'axiomes (T) et (I) de Nelson. L'ntroduction de la graduation n'a pas causé de grandes difficultés; il en va tout autrement pour la standardisation!

Posons le problème: Soit ϕ une formule sur M a priori externe, avec une variable libre x et des constantes quelconques; existe t-il, pour chaque entier p, une relation interne R stl/p dont les éléments stl/p sont exactement ceux qui vérifient la formule ϕ ?

La réponse est oui si p=1.Dans le cas contraire la réponse est, généralement, non.

<u>Exemple</u> :

$\phi(x) = (x \in \mathbb{N}$ et $\forall^{st} y \in \mathbb{N} \quad x > y)$, $p = 2$.

Supposons que notre problème admette une solution R; R doit admettre un plus petit élément,comme toute partie interne et non vide de N .(La non vacuité de R provient du fait que le théorème III.2 s'applique à la relation $>$). Soit donc x le plus petit élément de R, à cause du théorème de transfert et de l'unicité du plus petit élément, x doit être stl/2. D'autre part x - 1 est stl/2 et il vérifie la formule ϕ , il est donc dans R et cela contredit la minimalité de x.

R est donc un ensemble externe.

Pour p = 1 on a le théorème suivant qui, exprimé d'une autre manière, figure déjà dans les travaux de Robinson.

Théorème III 3:(Standardisation)

Si $\emptyset$ est une formule quelconque sur M alors,

$$\forall^{st} z \in M \ \exists^{st} y \in M \ \forall^{st} x \in M \ (x \in y \iff x \in z \text{ et } \emptyset(x)).$$

Preuve:

Soit $E = \{ x \in {}^{1}M \ / \ x \in z \text{ et } \emptyset({}^{\omega}x) \}$. Il est clair que $y = {}^{\omega}E$ répond à la question.

On voit d'où vient la difficulté à obtenir un théorème gradué de standardisation: La structure ${}^{p}M$ n'est pas complête pour $p \neq 1$, aussi, si l'on pose $E_p = \{ x \in {}^{p}M \ / \ x \in z \text{ et } \emptyset(x) \}$, ce dernier ensemble est généralement externe.

Toutefois, on peut établir l'existence de "standardisés d'ordre 1/p" pour certaines formules.

La théorie que nous venons de développer, répond assez largement aux problèmes soulevés dans l'introduction ou dans [9]. C'est ainsi que l'on peut définir dans $\mathbb{R}$ (${}^{\omega}\mathbb{R}$) des infiniment petits (plus petits en valeur absolue que tout standard positif), des infiniment petits d'ordre 2 (plus petits en valeur absolue que tout 1/2-standard positif),.... ,des infiniment grands de tous ordres etc....

Nous pourrions donc en rester là de la théorie et passer aux applications . Toutefois, il peut être génant pour l'utilisateur d'avoir à préciser à chaque application dans quelle structure il se place aussi, allons nous allons nous proposer une théorie formalisée dans laquelle les propriétés "st1/p" sont remplacées par des prédicats à une place et les théorèmes de transfert, d'idéalisation et de standardisation par des schémas d'axiomes.

IV- THEORIE DES ENSEMBLES INTERNES AVEC GRADUATION:

IV-1. Description de la théorie:

C'est la théorie axiomatique constituée comme suit:

a) Le langage : ($\mathscr{L}$)

C'est celui de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, enrichi de nouveaux prédicats à une place :

st, stl/2, ... stl/p, ...

On définitensuite de la manière habituelle les formules bien formées du langage. Parmis celles-ci nous distinguerons celles dans lesquelles n'intervient aucun prédicat st ou stl/p: On dira que ce sont des formules internes.

b) Les axiomes :

Ce sont:

1°/ Les axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix (Z.F.C.), relativisés aux formules internes.

L'axiome de fondation ([4] p.51) sera considéré comme un faisant partie de Z.F.C.

2°/ Trois nouveaux schémas d'axiomes, dont la formulation rappelle fortement celle des théorèmes III.1, III.2 et III3.

Schémas d'axiome de transfert: (T)

Si $\emptyset$ est une formule interne avec toutes ses constantes a_1, $\dots,a_n$ stl/p et une variable libre x alors,

$$\forall^{stl/p}_{x}\ \emptyset(x,a_1,\dots,a_n) \iff \forall x\ \emptyset(x,a_1,\dots,a_n)\ .$$

Schémas d'axiome d'idéalisation: (I)

Si $\emptyset$ est une formule interne à deux variables libres x et y et toutes ses constantes stl/p alors,

$$\forall^{\mathrm{stl/p\ fini}}_{z} \ \exists y \ \forall x \in z \ \emptyset(x,y) \Rightarrow \exists^{\mathrm{stl/p+1}}_{\xi} \ \forall^{\mathrm{stl/p}}_{x} \emptyset(x,\xi).$$

Schémas d'axiome de standardisation: (S)

Si $\emptyset$ est une formule quelconque alors,

$$\forall^{\mathrm{st}}_{z} \ \exists^{\mathrm{st}}_{x} \ \forall^{\mathrm{st}}_{t} \ t \in x \Leftrightarrow (t \in z \text{ et } \emptyset(t)) .$$

Dans ces énoncés,

$\forall^{\mathrm{stl/p}}_{x}$ est une abrévation pour: $\forall x \ x \ \mathrm{stl/p} \Rightarrow$

$\exists^{\mathrm{stl/p}}_{x}$ "....................": $\exists x \ x\mathrm{stl/p}$ et..

$\forall^{\mathrm{stl/p\ fini}}_{x}$ "................": $\forall^{\mathrm{stl/p}}_{x} \ x$ fini $\Rightarrow$

x fini signifie : il existe un entier m et une bijection de x sur l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à m.

3°/ Un nouveau schémas d'axiome qui relie entre eux les prédicats externes.

Schémas d'axiome de graduation: (G)

Pour tout entier naif p on a,

$\forall x \quad x \ \mathrm{stl/p} \ \Rightarrow \ x \ \mathrm{stl/p+1}.$

IV-2. PREUVE DE LA CONSISTANCE RELATIVE DE I.S.T.G.:

Il nous suffira de montrer que I.S.T.G. est une extension conservative de Z.F.C.

Le théorème de conservativité s'énonce ainsi:

Théorème:

Tout théorème interne de I.S.T.G. est un théorème de Z.F.C.

Nous utiliserons pour construire des modèles les ensembles $R(\beta)$ suivants, définis par induction sur les ordinaux par:

$$R(\emptyset) = \emptyset,$$

pourtout ordinal β ,

$$R(\beta) = \bigcup_{\mu \in \beta} (R(\mu))_{(o)} \quad .$$

Nous aurons besoin des propriétés suivantes des $R(\beta)$.

La preuve de la première série de propriétés est une conséquence directe des définitions.

Propriétés 1:

1- Si $\beta \in \beta'$ alors $R(\beta) \subset R(\beta')$

2- Si β est un ordinal limite $(\beta = \bigcup_{\mu \subset \beta} \mu)$ alors,

$R(\beta) = \bigcup_{\mu \in \beta} R(\mu)$.

3- Si $x \in R(\beta)$ et si $t \in x$ alors, $t \in R(\beta)$.

4- Si $x \subset z$ et $z \in R(\beta)$ alors $x \in R(\beta)$.

Propriété 2:

L'axiome de régularité équivaut à l'affirmation que tout ensemble est dans un $R(\beta)$.

Preuve:

Voir [4] p. 53.

Propriété 3:

Si A_1, A_2,.....A_n sont des sentences de Z.F.C., alors, il existe un ordinal limite β tel que:

$$(A_1 \Leftrightarrow A_1^{R(\beta)}) \text{ et.......et } (A_n \Leftrightarrow A^{R(\beta)}) .$$

$A_i^{R(\beta)}$ désigne la relativisée à $R(\beta)$ de la sentence A_i .

Preuve;

Voir [5] th.8.7.

Propriété 4:

Soient β un ordinal limite et ${}^*R(\beta)$ un agrandissement de $R(\beta)$. Si z est un ensemble fini et si $z \in {}^*R(\beta)_{(0)}$ alors $z \in {}^*R(\beta)$.

Preuve:

Il suffit d'établir que $z \in R(\beta)_{(0)}$ implique $z \in R(\beta)$ et d'appliquer le théorème de transfert.

Pour cela, posons $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$. β étant un ordinal limite, il découle du 2- des propriétés 1, que chaque z_i est dans un μ_i avec $\mu_i \in \beta$. Soit $\mu = \operatorname{Max} \mu_i$, il est clair que $z \in R(\mu)_{(0)}$ donc: par définition des $R(\beta)$, $z \in R(\beta)$. Ceci achève la démonstration.

Démonstration du théorème:

On suit presque pas à pas la démonstration de Powell telle qu'elle est présentée dans [3] p. 1196.

Soit A un théorème interne de I.S.T.G., sa démonstration utilise des axiomes de Z.F.C. en nombre intuitivement fini $A_1, \ldots A_n$ et, éventuellement, les schémas d'axiomes (I), (S), (T) ou (G).

Soit β un ordinal limite tel que:

$(A \Leftrightarrow A^{R(\beta)})$ et $(A_1 \Leftrightarrow A_1^{R(\beta)})$ et.......et $(A_n \Leftrightarrow A_n^{R(\beta)})$, et

soient $R(\beta) \subset {}^2R(\beta) \subset \ldots\ldots \subset {}^pR(\beta) \subset \ldots\ldots \subset {}^{\omega}R(\beta)$, des agrandissements succéssifs de $R(\beta)$.

Posons: $E(\beta) = \{(x,y) \in R(\beta) \times R(\beta) \,/\, x \in y\}$ et considérons la $\mathscr{L}$ - structure:

$$S_o = ({}^{\omega}R(\beta),\ E(\beta),\ R(\beta),\ {}^2R(\beta),\ldots.{}^pR(\beta)\ldots),$$

avec les interprétations:

$$(x,y) \in E(\beta) \text{ pour } x \in y,$$

$$x \in {}^pR(\beta) \text{ pour } x \text{ stl/p}.$$

Montrons que S est un modèle pour le système d'axiomes,

$\{A_1,\ldots\ldots, A_n, (I), (S), (T), (G)\}$.

<u>Consistance de (T)</u>:

Si $\emptyset$ est une formule interne ayant ses constantes stl/p, pour toute interprétation $\bar{a}_1,\ldots.\bar{a}_n$ des constantes dans ${}^pR(\beta)$, l'interprétation $\bar{\emptyset}(x,\bar{a}_1,\ldots.\bar{a}_n)$ de $\emptyset(a_1,\ldots..a_n)$ satisfait aux conditions du théorème de transfert donc, l'interprétation de T :

$$\forall x \in {}^pR(\beta)\ \bar{\emptyset}(x,\bar{a}_1,\ldots.,\bar{a}_n) \Leftrightarrow \forall x \in {}^{\omega}R(\beta)\ \bar{\emptyset}(x,\bar{a}_1,\ldots\ldots,\bar{a}_n),$$

est un théorème de Z.F.C. donc : (T) est vrai dans S_o

<u>Consistance de (I)</u>:

Pour toute interprétation dans ${}^pR(\beta)$ des constantes de $\emptyset$, si on note $\bar{\emptyset}$ l'interprétation correspondante de $\emptyset$ dans la structure S, I admet dans S l'interprétation:

$$\forall^{\text{fini}} z \in {}^pR(\beta)\ \exists y \in {}^{\omega}R(\beta)\ \forall x \in z\ \bar{\phi}(x,y) \Rightarrow \exists \xi \in {}^{p+1}R(\beta)\ \forall x \in {}^pR(\beta)\ \bar{\phi}(x,\xi)$$

Ors, toute partie finie de ${}^pR(\beta)$ est interne donc, d'après la propriété 4 des $R(\beta)$, (z fini et $z \subset {}^pR(\beta)) \Rightarrow z \in {}^pR(\beta)$.

Il suffit d'appliquer le théorème d'idéalisation avec $V = {}^{\omega}R(\beta)$, pour voir que (I) est vraie dans S_o.

Consistance de (S):

Pour toute formule ϕ et toute interprétation $\bar{\phi}$ de ϕ dans la structure S_o posons, pour $z \in R(\beta)$:

$$x = \{t \in z\ /\ \bar{\phi}(z)\} \qquad (*)$$

Par définition, x est contenu dans z donc (4-Propriétés 1), $x \in R(\beta)$. On a donc :

$$\forall z \in R(\beta)\ \exists x \in R(\beta)\ \forall t \in R(\beta)\ (t \in x \Leftrightarrow (t \in z \text{ et } \bar{\phi}(t)))\ . \quad (**)$$

Il suffit de prendre x défini dans (*).

(**) étant l'interprétation de S correspondant à l'interprétation $\bar{\phi}$ de ϕ, (S) est vrai dans S_o.

Consistance de (G):

Elle découle des inclusions ${}^pR(\beta) \subset {}^{p+1}R(\beta)$.

On termine la démonstration d'une manière analogue à Nelson dans [5].

Soit $\bar{A}$ l'interprétation dans S_o de A; interprétée dans S_o, la preuve de A à partir des axiomes $A_1, \ldots A_n$, (I), (S), (T) et (G), donne une démonstration de $\bar{A}$ à partir de $\bar{A}_1, \ldots . \bar{A}_n$, $\overline{(I)}$, $\overline{(S)}$, $\overline{(T)}$ et $\overline{(G)}$. Comme A est interne, $\bar{A} = A^{{}^{\omega}R(\beta)} \Leftrightarrow A^{R(\beta)}$ par transfert; comme d'autre part on a choisi β de telle sorte que $A \Leftrightarrow A^{R(\beta)}$, on a bien une démonstration de A à l'intérieur de Z.F.C.

Remarques finales:

La théorie des infinitésimaux qui vient d'être présentée ne doit pas être vue comme un système définitif, concurrent de Z.F.C. Il est clair que d'autres axiomes peuvent être choisis, en fonction desbesoins. Par exemple, nous avons choisi volontairement de ne pas inclure dans notre théorie l'assertion que tout ensemble possède un degré de standardité. On devrait pouvoir le faire en remplaçant la série de prédicats stl/p, indexée par les entiers naifs, par un un prédicat à deux places. Il est clair que l'on aurait pu également introduire des ensembles externes.

Nous avons été guidé dans notre choix par de nombreuses discussions avec les participants du congrès de Luniny,citées dans [9]; d'autre part, nous pensons que notre formalisme est assez facile à utiliser et permet de larges applications.

En réalité, autant que dans la théorie présentée,le véritable intérêt réside dans l'attitude qui consiste à introduire dans les fondements les éléments nécessaires en fonction des applications. (Voir [10]).

Pour toutes les raisons exposées plus haut, nous avons développé plus qu'il n'était apparemment nécessaire, dans l'annexe, le point de vue des agrandissements car nous pensons qu'il contient potentiellement un grand nombre de possibilités de formalisation.

Ce n'est pas délibérément que nous n'avons pas gradué le schéma d'axiome (S) : Nous n'avons pas trouvé d'axiome de standardisation gradué qui nous satisfasse. Toutefois, on peut montrer que si ϕ ne contient aucun prédicat stl/k pour $k < p$, et si toutes les constantes de ϕ ont un standardisé d'ordre 1/p alors, l'ensemble externe: $\{t \in z \ / \ \phi(t)\}$, admet un standardisé d'ordre 1/p.

Certains développements immédiats de la théorie ne sont pas exposés ici par exemple, il est évident que l'on peut établir des principes de permanence gradués.

Les applications aux équations différentielles données dans le chapitre II ne sont qu'une illustration; ceci explique leur côté un peu superficiel toutefois, des développements "sérieux" seront réalisés dans un autre travail.

Références bibliographiques:

[1] V.ARNOLD, Méthodes mathématiques de la mécanique classique Ed. M.I.R.

[2] P.CARTIER, Analyse non standard: nouvelles méthodes infinitésimales en analyse, application à la géométrie et aux probabilités (à paraitre).

[3] C.C.CHANG et H.J.KEISLER, Model theory. North Holland, Amsterdam (1978).

[4] J.L.Krivine, Théorie axiomatique des ensembles P.U.F.

[5] E.NELSON, Internal set theory: A new approach of non standard analysis B.A.M.S. 83 n°6 nov. 1977.

[6] A.ROBINSON, Non standard analysis, North Holland Amsterdam 1966.

[7] T.SARI, Fonctions presque-périodiques, actes de l'école d'été d'Oran-les andalouses 8-12 Sept.1984 Ed. CNRS (Paris). et OPU (Alger).

[8] K.HRBACEK, Non standard set theory, Am.Math.Month. vol 86 (1979) p.659-677.

[9] Y.PERAIRE, La relation de proximité infinitésimale dans les espaces topologiques, actes du congrès de mathématique finitaire et analyse non standard de luminy 13-18 Mai 1985 (A paraitre).

[10] R.LUTZ et M.GOZE, Non standard analysis: a practical guide with applications. Lecture notes in math. Springer, n° 881.

[11] K.YOSIDA, Functional analysis. Springer-Verlag (1974).

[12] A.M.FINK, Almost periodic differential equations. Lecture notes in math. Springer, n°377.

* Université de Metz
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Ile du Saulcy,
57045 METZ.CEDEX 1