E. COMBET

Introduction aux méthodes euclidiennes en théorie quantique des champs

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 5B
« Séminaire de géométrie », , p. 21-34
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985___5B_21_0>

INTRODUCTION AUX METHODES EUCLIDIENNES EN THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

par E. COMBET

Introduction.

Par une lecture des ouvrages courants de physique quantique, on se rend compte que l'une des préoccupations fondamentales de cette théorie est de *quantifier un système géométrique lagrangien.*

Un système géométrique lagrangien est une famille $\{E ; N , G ; M , P ; L\}$ où E est une variété fibrée de base M, de fibre-type N, P est un groupe de Lie qui opère sur M, G opère sur N et L est une fonction (un "lagrangien") définie sur les sections de E. Le problème est de *quantifier* ce système c'est-à-dire de lui associer un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ où l'on puisse trouver un élément distingué Ω (le "vide"), représenter P ainsi que "l'hamiltonien" H et représenter aussi les "opérateurs de création et annihilation", les "fonctions de Green-Wightman" W_k etc.

Dans ce problème, il y a essentiellement deux cas :

(a) $M = \mathbb{R}_t$ (la droite temporelle), P est le groupe des translations de $\mathbb{R}$ (on pourra aussi considérer le cas où M est une extension supersymétrique de $\mathbb{R}$).

(b) $M = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d$ (l'espace-temps de dimension $1+d \geqslant 2$), P est le groupe de Poincaré (on pourra aussi considérer le cas où M est une extension de l'espace-temps : relativité générale, espace de Kaluza-Klein, extension supersymétrique etc).

Pour résoudre la question on a recours à diverses méthodes, algébriques, géométriques, fonctionnelles etc.

Les *méthodes fonctionnelles* de la physique quantique sont de plusieurs types :

- méthodes hilbertiennes classiques,
- méthodes spécifiques de perturbation et de régularisation,
- méthodes d'intégration fonctionnelle.

Ces techniques d'*intégration fonctionnelle* font intervenir des principes supplémentaires :

- les grandeurs "physiques" et en particulier les distributions W_k se calculent à l'aide d'une "mesure"

$$\exp(i \int_M L) d\varphi$$

définie sur les "champs classiques" - c'est-à-dire les sections de E - (Feynmann) ;

- on impose à cette "mesure" des règles de calcul ad hoc ou bien on passe à une formulation rigoureuse en changeant t en it c'est-à-dire en passant à une *mesure euclidienne*

$$\exp (- \int_M L_{eucl.}) d\varphi .$$

Ce sont ces méthodes euclidiennes que nous nous proposons d'esquisser dans cet exposé, en considérant successivement le cas (a) de la mécanique quantique et celui, (b), de la théorie quantique des champs.

Le premier paragraphe concerne les propriétés de l'hamiltonien H d'un système élémentaire de mécanique quantique. La méthode repose sur le noyau élémentaire de l'équation de la chaleur associée à H et consiste à exprimer ce noyau à l'aide d'une mesure définie sur l'ensemble des "chemins classiques".

Γ. Mécanique quantique.

A. MESURE DE WIENER ET NOYAU DE L'EQUATION DE LA CHALEUR

(B. SIMON : Functional integration and Quantum Physics Ac. Press.).

On considère l'espace $\Gamma = \mathbb{C}^{\circ}_{x,y}([0,T],\mathbf{R}^n)$ des applications continues $\gamma:[0,T] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ telles que $\gamma(0) = x$, $\gamma(T) = y$; on le munit de la topologie induite par la norme "sup".

Une partie cylindrique C de Γ est définie par des points $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{m+1} = T$ et des parties boréliennes $I_1,\ldots,I_m$ de $\mathbf{R}^n$, m étant un entier quelconque $\geqslant 1$; on pose

$$C = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(t_j) \in I_j \ , \ j = 1,\ldots,m\} .$$

La mesure de Wiener $W^T_{x,y}$ est définie pour cette partie C en posant :

$$W^T_{x,y}(C) = \int_{I_1} dX_1 \ldots \int_{I_m} dX_m \prod_{j=1}^{m+1} (2\Pi(t_j-t_{j-1}))^{-\frac{m}{2}} e^{-\|X_j-X_{j-1}\|^2/2(t_j-t_{j-1})}$$

avec $X_0 = x$, $X_{m+1} = y$.

On peut alors montrer que $W^T_{x,y}$ admet une extension unique sur les parties boréliennes de Γ.

On note $\Delta = \Sigma \dfrac{\partial^2}{(\partial x_1)^2}$ le laplacien usuel dans $\mathbf{R}^n$ et

$$P_t(x,y) = \frac{1}{(2\ t)^{n/2}} e^{-\|x-y\|^2/2t}$$

le noyau élémentaire $e^{\frac{t}{2}\Delta}(x,y)$ de l'équation de la chaleur.

On a les égalités bien connues :

$$\int_{\mathbf{R}^n} P_t(x,y)dy = 1 \qquad , \qquad P_{t+s}(x,z) = \int_{\mathbf{R}^n} P_t(x,y)\ P_s(y,z)dy$$

et, pour une fonction f convenable (par exemple continue bornée),

la fonction $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x,y)\, f(y)\, dy$ est solution de l'équation

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\, \Delta u(x,t)$ pour $t > 0$, avec $u(x,0) = f(x)$.

Si l'on revient maintenant à la mesure de Wiener $W^T_{x,y}$ on obtient, en prenant tous les $I_j = \mathbb{R}^n$, l'égalité:

$$W^T_{x,y}(\Gamma) \overset{\text{déf}}{=} \int_\Gamma dW^T_{x,y}(\gamma) = P_T(x,y) = e^{\frac{1}{2} T\Delta}(x,y) \ ,$$

en posant $t_j = j\,\frac{T}{m+1}$ pour $j = 0, \dots, m+1$ on voit aussi que

$$P_T(x,y) = \int \dots \int \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m+1} \left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t_j} \right)^2 \Delta t_j \right] \frac{1}{\left(\frac{2\pi T}{m+1} \right)^{\frac{n(m+1)}{2}}} \prod_{j=1}^{m} dX_j \ ,$$

ce qui conduit à l'écriture symbolique de Feynman

$$P_T(x,y) = \int_\Gamma e^{-\int_0^T \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2(t)dt}\, \delta(\gamma(0)-x)\delta(\gamma(T)-y) \quad \text{"}D\gamma\text{"} \quad .$$

B. <u>FORMULE DE FEYNMAN-KAC</u>.

On revient à l'ensemble cylindrique

$$C = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(t_j) \in I_j \ , \ j = 1, \dots, m\} .$$

Au point de vue des fonctions caractéristiques d'ensembles on a :

$$\chi_C = \prod_{j=1}^{m} \chi_{I_j}(\gamma(t_j)) \qquad ;$$

ce qui permet d'écrire :

$$W^T_{x,y}(C) \overset{\text{def}}{=} \int_\Gamma \prod_{j=1}^{m} \chi_{I_j} \; (\gamma(t_j)) \; dW^T_{x,y}(C)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{I_1} \, dX_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{I_m} \, dX_m \prod_{j=1}^{m+1} \frac{e^{-\| X_j - X_{j-1} \|^2 / 2(t_j - t_{j-1})}}{(2\pi(t_j - t_{j-1}))^{n/2}}$$

Cette formule s'étend sans difficulté à des fonctions intégrables a_j bornées sur $\mathbb{R}^n$:

$$\int_\Gamma \prod_{j=1}^{n} a_j(\gamma(t_j)) \; dW^T_{x,y}(\gamma) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} a_1(X_1) dX_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^n} a_m(X_m) dX_m \prod_{j=1}^{m+1} \frac{e^{-\| X_j - X_{j-1} \|^2 / 2(t_j - t_{j-1})}}{(2\pi(t_j - t_{j-1}))^{n/2}} \; .$$

On considère maintenant a_j comme définissant un opérateur borné A_j sur $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$: $A_j(f) = a_j f$; on obtient alors

$$\int_\Gamma \prod_{j=1}^{m} a_j(\gamma(t_j)) dW^T_{x,y}(\gamma) = \left[\operatorname{Ker}\left(e^{\frac{t_1}{2}\Delta} A_1 \, e^{\frac{t_2 - t_1}{2}\Delta} A_2 \cdots e^{\frac{t_m - t_{m1}}{2}\Delta} A_m \, e^{\frac{T - t_m}{2}\Delta}\right) \right] (x,y)$$

C'est cette expression que l'on utilise pour prouver la formule de Feynman-Kac.

Soit V une fonction réelle continue et bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^n$.

On pose $H = \frac{1}{2}\Delta + V$ et on suppose que H soit essentiellement self-adjoint (par exemple V est polynomiale).

Alors on a l'égalité de Feynman-Kac :

$$e^{-TH}(x,y) = \int_\Gamma e^{-\int_0^T V(\gamma(s)) ds} \; dW^T_{x,y}(\gamma) \; ;$$

ceci découle de l'égalité :

$$\left[\mathrm{Ker}\left(e^{\frac{T}{2}\Delta/m}\, e^{-TV/m}\right)^m \right](x,y) = \int_\Gamma e^{-\frac{T}{m}\sum_{j=1}^{m} V(\gamma(\frac{jT}{m}))}\, dW^T_{x,y}(\gamma)$$

ainsi que de l'expression :

$$\lim_{m \to +\infty} -\frac{T}{m} \sum_{j=1}^{m} V(\gamma(\frac{jT}{m})) = \int_0^T V(\gamma(s))ds ,$$

sachant que l'on a l'égalité de Trotter :

$$e^{-TH} = \lim_{m \to +\infty} \left(e^{\frac{T}{2}\Delta/m}\, e^{-TV/m}\right)^m .$$

On peut écrire, ici aussi, la formule symbolique de Feynman

$$e^{-TH}(x,y) = \int_\Gamma e^{-\int_0^T (\frac{1}{2}\dot{\gamma}^2(s) + V(\gamma(s)))ds}\, \delta(\gamma(o)-x)\delta(\gamma(T)-y)\, \text{"}D\gamma\text{"} .$$

C. <u>APPLICATIONS.</u>

Considérons un point matériel de masse unité soumis dans $\mathbb{R}^n$ à une force qui dérive du potentiel V. Son mouvement classique suit les lois de Newton :

$$\dot{\gamma}_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j} \quad , \quad j = 1,\dots,n ,$$

et ce mouvement est une extrémale de la fonctionnelle d'action

$$\int_{t_o}^{t} (\frac{1}{2}\dot{\gamma}^2(s) - V(\gamma(s))ds.$$

En mécanique quantique on associe à cette particule une fonction d'onde ψ solution de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

où H est l'hamiltonien du système

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V.$$

Le problème fondamental est l'étude du spectre de H et en particulier du spectre de l'opérateur

$$H(\lambda) = -\frac{1}{2}\Delta + \lambda^2 V$$

quand $\lambda \to +\infty$ (approximation semi-classique). Reprenant la formule de Feynman Kac, notamment dans l'écriture formelle de Feynman :

$$e^{-T\frac{H(\lambda)}{\lambda}}(x,y) = \int_\Gamma e^{-\lambda\int_0^T (\frac{1}{2}\dot{\gamma}^2(s)+V(\gamma(s)))ds} \delta(\gamma(o)-x)\ \delta(\gamma(T-y)\text{"}D\gamma\text{"}$$

on voit apparaître en exposant l'action euclidienne (obtenue en remplaçant t par it) dont les propriétés extrémales jouent un rôle déterminant dans l'étude des propriétés asymptotiques - voir par exemple l'article de B. SIMON : Annals of Mathematics, 120 (1984) 89-118.

2. Méthodes euclidiennes en T.Q.C.

Références essentielles
- [C.J] J.GLIMM, A. JAFFE : Quantum Physics- Springer-Verlag 1981.
- [G.V] I.M. GUELFAND, N.Y. VILENKIN : Les distributions (4) . Dunod 1967.

Les méthodes euclidiennes sont introduites à travers la quantification du champ $\phi : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ soumis au lagrangien

$$\mathscr{L}(\phi) = \frac{1}{2}\left[(\phi_t')^2-(\phi_{x_1}')^2 - \dots - (\phi_{x_{d-1}}')^2\right] - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - P(\phi).$$

A. Mesures cylindriques [GV]. , [GJ] .

1. Définitions-

On pose $\mathscr{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ et on désigne par $\mathscr{D}'$ le dual topologique réel de $\mathscr{D}$.

A chaque entier N, à toute suite $f_1,\dots,f_N \in \mathscr{D}$ et à toute partie borélienne A de $\mathbb{R}^N$ on associe l'ensemble cylindrique Γ de $\mathscr{D}'$:

$$\Gamma = \{\phi \in \mathscr{D}' \mid (\phi(f_1),\dots,\phi(f_N)) \in A\}.$$

On note $\mathscr{A}$ la tribu engendrée par ces ensembles Γ dans $\mathscr{D}'$.

On appelle <u>mesure cylindrique</u> sur $\mathscr{D}'$ toute mesure de probabilité sur $(\mathscr{D}', \mathscr{A})$.

2. <u>Exemple fondamental</u> : Soit C une forme bilinéaire continue définie positive sur $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$. Le système $\{f_1,\ldots,f_N\}$ étant libre dans $\mathscr{D}$ on pose $C_{ij} = C(f_i,f_j)$ et on définit

$$\mu(\Gamma_{f_1,\ldots,f_N;A}) = \frac{(\det(C_{ij}))^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{N/2}} \int_A e^{-\frac{1}{2}\Sigma(C^{-1})_{ij}\, x_i\, x_j}\, dx_1 \ldots dx_N$$

On montre que l'on obtient de cette façon une mesure notée μ_C sur $\mathscr{D}'$, appelée <u>mesure gaussienne de covariance</u> C.

En particulier pour $f \neq o$ dans $\mathscr{D}$ et $\Gamma_a = \{\phi \in \mathscr{D}' \mid \phi(f) \leq a\}$ on a :

$$\mu_C(\Gamma_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C(f,f)}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2C(f,f)}\, dx$$

et l'on a bien $\mu_C(\mathscr{D}') = 1$.

On en déduit aussi l'expression de la transformée de Fourier S_C de μ_C :

$$\begin{aligned} S_C(f) &\overset{\text{def}}{=} \int_{\mathscr{D}'} e^{i\phi(f)}\, d\mu_C(\phi) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} \frac{1}{\sqrt{2\pi C(f,f)}} e^{-x^2/2C(f,f)} dx \\ &= e^{-\frac{1}{2} C(f,f)} . \end{aligned}$$

(C'est un cas particulier d'un théorème de Minlos; $S: \mathscr{D} \to C$ est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique μ sur $\mathscr{D}'$ si et seulement si $S(o) = 1$, S est continue et S est de type positif : $\forall f_1,\ldots,f_N \in \mathscr{D}$ et $z_1,\ldots,z_N \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{j,k=1}^{N} z_j\, \bar{z}_k\, S(f_j - f_k) \geq 0 \text{).}$$

3. Calculs d'intégrales.

a) Déterminant fonctionnel [G.J. ch. 9].

On note C un opérateur positif self-adjoint borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, μ_C la mesure gaussienne de covariance C sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

On considère un opérateur intégral réel symétrique borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, à noyau $v(x,y)$ et on pose, sur $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} \int \Phi(x)\, v(x,y)\, \Phi(y)\, dx\, dy \, .$$

Alors en posant $\hat{v} = C^{1/2}\, v\, C^{1/2}$ on obtient :

$$\int_{L^2(R^d)} e^{-V(\Phi)} d\mu_C(\Phi) = \text{dét}\, [I+\hat{v}]^{1/2}$$

à supposer que $I+\hat{v} > 0$ et que le second membre ait un sens.

On montre cela en prenant d'abord v de rang fini : $v(x,y) = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j f_j(x) f_j(y)$ où $f_j \in \mathcal{S}$ et on applique les propriétés élémentaires des intégrales gaussiennes en dimensions finies, puis on passe au cas général .

b) Moments ([GJ , ch. 8] ou J. DIMOCK, J. GLIMM, Adv. in Math. 12, 58-83 (1974)).

On note C une forme bilinéaire continue définie - positive sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ μ_C la mesure gaussienne de covariance C sur $\mathcal{S}'$; soient $f_1,\ldots,f_N \in \mathcal{S}$:

$$\int \phi(f_1)\ldots\phi(f_N)d\mu_C = i^{-N} \int \prod_j \frac{\partial}{\partial\lambda_j} (e^{i\phi(\Sigma \lambda_j f_j)}\, d\mu_C \,|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_N = o}$$

$$= i^{-N} \prod_j \frac{\partial}{\partial\lambda_j} (e^{-\frac{1}{2} C(\Sigma \lambda_j f_j \,, \Sigma \lambda_j f_j)})|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_N = o}$$

$$= \Sigma\, C(f_{i_1} , f_{i_2}) \ldots C(f_{i_{N-1}}, f_{i_N})$$

où Σ est étendue à tous les choix possibles des couples $\{ f_{i_j}, f_{i_{j+1}} \}$.

B) Théorie quantique des champs [GJ] .

1. Champ libre

On a :

$$L_o = \frac{1}{2} \left[(\phi'_t)^2 - (\phi'_{x_1}) - \dots - (\phi'_{x_{d-1}})^2 \right] - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 .$$

On choisit sur $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ la forme

$$C(f,g) = \int_{R^d} (- \Delta + m^2)^{-1} f.g$$

où $m > 0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{d-1}}$ est le laplacien usuel sur $\mathbb{R}^d$.

On associe à C la mesure gaussienne μ_C sur $\mathscr{D}$ '.

En passant à l'écriture symbolique on a (comme pour la mesure de Wiener) :

$$d\mu_C = Z^{-1} \quad e^{-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left[(\frac{\partial \phi}{\partial t})^2 + \dots + (\frac{\partial \phi}{\partial x_{d-1}})^2 + m^2 \phi^2 \right) dx} \quad \text{"} \prod_{x \in \mathbb{R}^d} d\phi(x) \text{"}$$

où Z est un coefficient qui "normalise cette mesure".

2. Cas général

$$L = L_o - P(\phi)$$

où P est généralement pris polynomial. Il faut donner un sens à

$$Z^{-1} \quad e^{-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} L_{\text{euclidien}} \, dx} \quad \text{"} \prod_{x \in \mathbb{R}^d} d\phi(x) \text{"}$$

c'est-à-dire, d'une façon rigoureuse, à la mesure

$$e^{- \int_{\mathbb{R}^d} P(\phi)} \, d\mu_C(\phi) \quad ,$$

dont il faut ensuite étudier les propriétés.

Voici par ordre de difficulté croissante, quelques indications sur ces problèmes.

(a) Reconstruction de la M.Q.

Soit μ une mesure cylindrique sur $\mathscr{D}'$, S sa transformée de Fourier :

$$S(f) = \int e^{i\phi(f)} d\mu(\phi) \ , \quad f \in \mathscr{D}.$$

Analyticité : On suppose que S est analytique entière c'est-à-dire que pour toute suite $f_1, \ldots, f_N \in \mathscr{D}$, la fonction

$$(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N \to S(\sum_{j=1}^{N} z_j \ f_j) \in \mathbb{C}$$

est analytique entière.

Ceci entraîne en particulier que les fonctions exponentielles $\phi \to e^{\phi(f)}$ sont intégrables.

Invariance : On suppose que μ (ou S) est invariante par les translations dans le temps: $(t,\vec{x}) \to (t+t_0,\vec{x})$ ainsi que par la symétrie θ : $(t,\vec{x}) \to (-t,\vec{x})$.

Positivité au sens de Osterwalder-Schrader : On définit l'algèbre :

$$\mathscr{A}_+ = \{A: \mathscr{D}' \to \mathbb{C} \mid A(\phi) = \sum_{j=1}^{N} C_j \ e^{\phi(f_j)}, N \in \mathbb{N}^*, C_j \in \mathbb{C}, \ f_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_{\vec{x}}^{d-1})\}$$

On suppose que μ est positive au sens suivant :

$$\forall A \in \mathscr{A}_+ \ , \quad \int \overline{\theta A}.A \ d\mu \geqslant 0$$

ou , ce qui revient au même, que la matrice symétrique

$$M_{ij} = S(f_i - \theta f_j)$$

est positive.

Cette condition est l'analogue de celle du théorème de Bochner (Minlos) elle permet classiquement de construire un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et une représentation du groupe des translations.

On note $\mathscr{E}_+$ l'adhérence de $\mathscr{A}_+$ dans $L^2(\mathscr{D}',d\mu)$ et on pose

$\mathscr{N} = \{ A \in \mathscr{E}_+ \mid \int \Theta\bar{A}.Ad\mu = o \}$, $\mathscr{H} = \overline{\mathscr{E}_+ \mid \mathscr{N}}$ pour la norme $\sqrt{\int \Theta\bar{A}.Ad\mu}$.

On a dans ces conditions les résultats suivants [GJ , §6.1] :

(i) $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\int \Theta\bar{A}.Bd\mu$

(ii) soit T le semi-groupe des translations positives dans le temps ; pour chaque $t > o$, $T(t)\,\mathscr{E}_+ \subset \mathscr{E}_+$, $T(t)\mathscr{N} \subset \mathscr{N}$; on note $R(t)$ l'opérateur induit par $T(t)$ dans $\mathscr{H}$; on montre que $R(t)$ est un semi-groupe que l'on peut mettre sous la forme

$$R(t) = e^{-tH}$$

où H est un opérateur self-adjoint positif.

(iii) on a manifestement $T(t) = 1$ donc $e^{-tH}\,\tilde{1} = \tilde{1}$ et $H\,\tilde{1} = 0$ ainsi $\Omega = \tilde{1}$ est un état de base de H.

D'après ce qui vient d'être dit on voit que $\mathscr{H}$ est un candidat pour être l'espace "physique" des états, avec "l'hamiltonien" H et "l'état du vide" Ω. J'ignore s'il existe une justification <u>a priori</u> simple du choix de la condition de positivité OS sur l'algèbre particulière $\mathscr{A}_+$ considérée plus haut. On montre que pour un champ libre on retrouve l'espace $\mathscr{H} = L^2(\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{d-1}), \mu_{C^o})$ où C^o est la restriction à $\mathbb{R}^{d-1}$ de $2\sqrt{C}$, $C = (-\Delta + m^2)^{-1}$ [GJ § 6.2] ; en particulier [GJ § 6.4] ceci redonne $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R},(m/\Pi)^{1/2}\, e^{-mx^2} dx)$ pour l'oscillateur harmonique en mécanique quantique. Une autre justification a posteriori de la démarche que nous avons suivie provient de la reconstruction de la théorie quantique des champs.

(b) <u>Reconstruction de la TQC.</u>

Soit μ une mesure cylindrique sur $\mathscr{D}'$.

On garde l'hypothèse d'analyticité de S.

Alors on peut montrer que les fonctions $\phi \to \phi(f_1)\ldots\phi(f_N)$ sont intégrables et définir les distribution S_N :

$$S_N(f_1 \otimes \ldots \otimes f_N) = \int \phi(f_1)\ldots\phi(f_N)\, d\mu(\phi) ;$$

ces distributions S_N sont les moments de μ ; on les appelle les "fonctions de Schwinger".

Si l'on impose à μ la condition de positivité OS ainsi que l'invariance par les isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d_{t,\vec{x}}$ alors on peut montrer que les "fonctions" S_N se prolongent analytiquement de t à it en des distributions W_N qui, avec $\mathscr{H}$, H, Ω (supposé unique) vérifient les axiomes de Wightman (en ce qui concerne notamment les conditions d'invariance par rapport au groupe de Poincaré de l'espace minkowsien $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1}_{\vec{x}}$). La preuve de tout ceci n'est pas du tout triviale. On pourra se reporter, pour certains aspects théoriques des points (a) et (b) ci-dessus, à l'article suivant :

J. FRÖHLICH, K. OSTERWALDER, E. SEILER (On virtual representations of symmetric spaces ...) Annals of Math. 118 (1983), 461-489.

(c) Théorie constructive des champs

On n' a toujours pas abordé le problème fondamental : donner un sens et étudier les propriétés (notamment les points (a) et (b)) de la mesure
$$e^{-\int_{\mathbb{R}^d} P(\phi)} \, d\mu_C(\phi).$$

En fait l'ouvrage de J. Glimm et A. Jaffe est presque tout entier consacré aux très grandes difficultés rencontrées dans cette étude.

Nous devrons ici nous contenter d'énumérer quelques uns de ces problèmes :

(i) donner un sens par régularisation à $P(\phi)$ pour $\phi \in \mathscr{D}'$ ("problèmes ultra-violet").

(ii) remplacer $\int_{\mathbb{R}^d} P(\phi)$ par $\int_\Lambda P(\phi)\, d\phi$ avec Λ borné dans $\mathbb{R}^d$ puis faire tendre Λ vers l'infini ("problème du volume infini").

(iii) pour résoudre ces questions on est conduit à faire varier les paramètres et les coefficients de P ("problème de renormalisation").

(iv) remplacer les produits ordinaires par les "produits de Wick".

(v) pour A polynomiale, calculer les moments $\int A(\phi)\, e^{-\lambda \int P(\phi)}\, d\mu(\phi)$

par un calcul de perturbations c'est-à-dire en développant suivant les puissances de λ ; représenter ces calculs de moments (ordonnés au sens de Wick) par des diagrammes (graphes de Feyman) qui facilitent ces calculs etc... .
