PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MUSTAPHA RACHIDI

Transformation de Mellin et algèbres de Kac-Moody

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 4A
, p. 25-35
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985___4A_25_0>

TRANSFORMATION DE MELLIN ET ALGEBRES DE KAC-MOODY

par Mustapha Rachidi

I - Introduction.

Ce travail est une suite de [2]. On se propose ici d'établir les relations existant entre la représentation adjointe des algèbres de Lie de Kac-Moody affines et la transformation de Mellin algébrique. Plus précisément étant donnée une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple $\underline{\mathfrak{G}}$ (de dimension finie), on étudiera les relations existant entre les opérateurs $(T_\zeta^{ad})_{\zeta \in Q}$ où Q désigne le treillis des racines de $\underline{\mathfrak{G}}$ relativement à une sous-algèbre de Cartan $\underline{\mathfrak{h}}$, et la transformation de Mellin algébrique et, plus généralement, les relations avec l'action du groupe de Weyl $\hat{W} = W \times Q$ [1] sur les différents types d'espaces de Mellin-Lie [2], et cette transformation.

Dans un premier temps on obtient une famille importante de relations de commutation, grâce aux propriétés des systèmes de racines de $\underline{\mathfrak{G}}$, et des résultats de [2]. Dans un second temps on donnera une caractérisation explicite des opérateurs $(T_\zeta^{ad})_{\zeta \in Q}$, qui auront une action analogue à celle de la représentation adjointe de l'algèbre de Kac-Moody réduite $\hat{\underline{\mathfrak{G}}} = \underline{\mathfrak{G}}[t,t^{-1}]$ sur les algèbres de Mellin-Lie. Il en découle aussi que la seule sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Mellin-Lie $\hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{G}})$ [2] invariante par les opérateurs $(T_\zeta^{ad})_{\zeta \in Q}$, est la sous-algèbre de Lie $\hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{h}})$ où $\underline{\mathfrak{h}}$ est la sous-algèbre de Cartan de $\underline{\mathfrak{G}}$. D'où l'intérêt important que revêt la représentation fondamentale de l'algèbre de Lie affine associée à $\underline{\mathfrak{G}}$, sur l'espace fondamental $\hat{V} = \mathrm{Sym}(\hat{S}_-) \otimes \mathbb{C}(\Gamma)$ [1] où Γ est un réseau d'une base orthonormée de $\underline{\mathfrak{h}}$, et S_- est la sous-algèbre de Heisenberg.

II - Notations et rappels.

2.1. Soit $\underline{\mathfrak{G}}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de type auto-dual i.e. A_n, D_n, E_6, E_7, et E_8.

Soit $\Delta = \{\alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ une base de racines simples du système de racines Φ de $\underline{\mathfrak{G}}$, par rapport à une sous-algèbre de Cartan (S.A.C.) $\underline{\mathfrak{h}}$. Soit $\underline{\mathfrak{G}}$ l'algèbre de Kac-Moody affine construite sur $\underline{\mathfrak{G}}$ par extension centrale de l'algèbre de Kac-Moody réduite $\hat{\underline{\mathfrak{G}}} = \underline{\mathfrak{G}}[t,t^{-1}]$ [1] et [3]. :

$$\bar{\underline{\mathfrak{G}}} = \underline{\mathfrak{G}}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}.c \tag{2.1}$$

où c est un élément central de $\underline{\mathfrak{G}}$. Soit $<.|.>$ une forme bilinéaire symétrique sur $\underline{\mathfrak{G}}$, par $k = \mathbb{C}[t,t^{-1}]$-linéarité elle s'étend en une forme $<.|.>$, sur $\hat{\underline{\mathfrak{G}}}$ à valeurs dans $K = \mathbb{C}[t,t^{-1}]$, qui est bilinéaire symétrique invariante. Et la forme :

$$<x|y> = \mathrm{Res}\ t^{-1} <x|y>_t \tag{2.2}$$

où $x,y \in \hat{\underline{\mathfrak{G}}}$, est une forme bilinéaire symétrique sur $\hat{\underline{\mathfrak{G}}}$, qui est Z -graduée. Elle est non-dégénérée si et seulement si sa restriction à $\underline{\mathfrak{G}}$ l'est [1].
Soit $d = t\frac{d}{dt}$ l'opérateur dérivation degré, en prenant d.c = 0, l'opérateur d s'étend d'une façon naturelle à $\bar{\underline{\mathfrak{G}}}$. Et l'extension essentielle :

$$\tilde{\underline{\mathfrak{G}}} = \hat{\underline{\mathfrak{G}}} \oplus \mathbb{C}.c \oplus \mathbb{C}.d \tag{2.3}$$

est dite algèbre de Lie de Frenkel-Kač associée à $\underline{\mathfrak{G}}$. Et la forme

$$<x_1+\alpha_1 c+\beta_1 d | x_2+\alpha_2 c+\beta_2 d> = <x_1|x_2>+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1 \tag{2.4}$$

où $x_1, x_2 \in \hat{\underline{\mathfrak{G}}}$ et $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ et $\beta_2 \in \mathbb{C}$, **définit** une forme bilinéaire symétrique, invariante et non-dégénérée sur $\tilde{\underline{\mathfrak{G}}}$.

2.2. Considérons la sous-algèbre abélienne de $\tilde{\underline{\mathfrak{G}}}$:

$$\tilde{\underline{\mathfrak{h}}} = \underline{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}.c \oplus d \quad .$$

Soit δ la forme linéaire sur $\tilde{\underline{\mathfrak{h}}}$ duale de d, alors pour toute racine α de Φ:

$$\tilde{\alpha} = n\,\delta + \alpha$$

est une racine de $\underline{\tilde{\mathfrak{G}}}$. Le fait que $\underline{\tilde{\mathfrak{h}}}$ soit prise en tant que sous-algèbre de Cartan de $\underline{\tilde{\mathfrak{G}}}$, celui-ci admet un système infini de racine $\tilde{\Phi}$, dont $\tilde{\Delta} = \{\delta-\alpha_c ; \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$; où α_o est la racine maximale de Φ, est une base de racines simples [1] . Toute racine $n\delta$ (où $n \in \mathbb{Z}$) est dite "isotrope", et, toute racine $\tilde{\alpha} = n\delta + \alpha$, où $\alpha \in \Phi$ et $n \in \mathbb{Z}$, est dite réelle. Les racines isotropes et réelles épuisent les racines de $\underline{\tilde{\mathfrak{G}}}$ relativement à $\underline{\tilde{\mathfrak{h}}}$. Soit α dans Φ , et p dans $\mathbb{Z}$, on définit les réflexions suivantes :

$$\begin{cases} r_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle\lambda|\check{\alpha}\rangle\, \alpha \\ r_{\alpha+p\delta}(\lambda) = r_\alpha(\lambda) - p\,\langle\lambda|\check{\alpha}\rangle\, \delta \end{cases} \qquad (2.4)$$

Sur l'espace $\bar{\underline{\mathfrak{h}}} = \underline{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}.c$; où $\check{\alpha} = \frac{\alpha}{\langle\alpha|\alpha\rangle}$, la forme $\langle .|.\rangle$ est la restriction à $\bar{\underline{\mathfrak{h}}}^*$ de la forme duale, de la forme canonique de $\underline{\tilde{\mathfrak{h}}}$. On a aussi la relation.

$$r_{\alpha+p\delta} \circ r_{\alpha+q\delta} = \mathbb{1}_d + (p-q)(\check{\alpha} \otimes \delta) \qquad (2.5)$$

En particulier :

$$T_{\check{\alpha}} = r_{\alpha-\delta} \circ r_\alpha = \mathbb{1}_d - \check{\alpha} \otimes \delta \qquad (2.6)$$

2.3. Soit $ad : \underline{\tilde{\mathfrak{G}}} \to \underline{\mathfrak{gl}}(\underline{\mathfrak{G}})$ la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\underline{\mathfrak{G}}$. Pour cette représentation, on a la décomposition spectrale :

$$\underline{\tilde{\mathfrak{G}}} = \underline{\tilde{\mathfrak{h}}} \oplus \sum_{\substack{(n,\alpha) \\ \alpha+n\delta \in \tilde{\Phi}}} \underline{\mathfrak{G}}_\alpha \otimes t^n \qquad (2.7)$$

où tous les sous-espaces poids sont de dimension finie. Les opérateurs :

$$r_i^{ad} = e^{-ad(e_i)}\, e^{ad(f_i)}\, e^{-ad(e_i)} \qquad (2.8)$$

sont bien définis car $ad(e_i)$ et $ad(f_i)$ sont nilpotents $(o \leqslant i \leqslant n)$. De plus, les $r_i^{ad} (1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des automorphismes de l'algèbre de Lie $\underline{\tilde{\mathfrak{G}}}$, qui préservent sa forme bilinéaire canonique. Notons que

$$r_i^{ad}(\underline{\tilde{\mathfrak{G}}}_\zeta) = \underline{\tilde{\mathfrak{G}}}_{r_i(\zeta)} \qquad (r_i^{ad})^r = \pm\, \mathbb{1}_d \qquad (2.9)$$

Pour toute racine simple α_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ de $\underline{\mathfrak{G}}$, on pose

$$T_i^{ad} = r_{\delta-\alpha_i}^{ad} \circ r_{\alpha_i}^{ad} \tag{2.10}$$

Pour toute racine β et tout $x_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta$, on a :

$$T_i^{ad}(t^k \otimes x_\beta) = t^{k-<\beta|\alpha_i>} \otimes x_\beta \tag{2.11}$$

où $t^k \otimes x_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta \otimes t^k$. Et pour tout $h \in \tilde{\underline{h}}$ on a :

$$T_i^{ad}(h) = h - [\alpha_i(h) + 1/2 <\alpha_i|\alpha_i> \delta(h)]c + \delta(h)h \tag{2.12}$$

Pour tout élément ζ du treillis des racines de $\tilde{\underline{\mathfrak{G}}}$:

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \quad \text{où} \quad k_i \in \mathbb{Z}$$

on pose :

$$T_\zeta^{ad} = (T_1^{ad})^{k_1} \circ \ldots \circ (T_n^{ad})^{k_n} .$$

D'après les relations (2.11) et (2.12) on aura :

$$T_\zeta^{ad}(t^k \otimes x_\beta) = t^{k-<\beta|\zeta>} \otimes x_\beta \quad \text{où} \quad x_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta \qquad (2.11)'$$

$$T_\zeta^{ad}(h) = h-[\zeta(h)+1/2<\zeta|\zeta>\delta(h)]\ c + \delta(h)h \text{ où } h \in \tilde{\underline{h}} \qquad (2.12)'$$

Et on déduit de (2.12) que :

$$T_\zeta^{ad} = r_{\delta-\zeta}^{ad} \circ r_\zeta^{ad} \qquad (\forall\ \zeta \in \tilde{\Phi}) \tag{2.13}$$

Et l'application $\zeta \to T_\zeta^{ad}$ est une représentation de Q dans $\tilde{\underline{\mathfrak{G}}}$. Les opérateurs T_ζ^{ad} sont appelées <u>opérateur de transvection</u> de $\tilde{\mathfrak{G}}$. Et le groupe T engendré par les T_ζ^{ad}, $\zeta \in \tilde{\Phi}$ est appelé groupe des transvections de $\tilde{\underline{\mathfrak{G}}}$.

III - Opérateurs T^{ad} et transformation de Mellin algébrique.

Soit $\underline{\mathfrak{G}}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de dimension finie, et de type autoduale. Soit Φ le système de racine de $\underline{\mathfrak{G}}$ relativement à la sous-algèbre de Cartan $\underline{h}$.

3.1. Soit $x \in \underline{\mathfrak{G}}$ et $Z \in \mathbb{C}^*$. Considérons la transformée de Mellin algébrique de x

$$\hat{x}(Z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} t^{-k}(t^k \otimes x). \tag{3.1}$$

La relation immédiate établie entre les opérateurs T^{ad} et la transformée de Mellin algébrique (en abrégé T.M.A.] est donnée par :

PROPOSITION 3.1. [1] [2].

Soient $h \in \underline{\mathfrak{h}}$, $k \in Z$ *et* $x_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}$, *où* $\alpha \in \Phi$. *Alors*

i) $[t^k \otimes h \,;\, \hat{x}_\alpha(Z)] = \alpha(h)\, Z^k\, \hat{x}_\alpha(Z)$, (3.2)

ii) $T_\zeta^{ad}[\hat{x}_\alpha(Z)] = Z^{-\langle\alpha|\zeta\rangle}\, \hat{x}_\alpha(Z)$, (3.3)

où ζ *est un élément du treillis des racines* Q *de* Φ.

Soit α dans Φ et x_α dans $\underline{\mathfrak{G}}_{-\alpha}$, et soit :

$$\hat{x}_\alpha^{+}(Z) = \sum_{k \geq 0} Z^{-k}(t^k \otimes x_\alpha) \quad \text{et} \quad \hat{x}_\alpha^{-}(Z) = \sum_{k<0} Z^{-k}(t^k \otimes x_\alpha) .$$

Les T.M.A. de "type positif" et de "type négatif" respectivement de x_α . A partir des relations (2.11) et (2.11)' on tire :

PROPOSITION 3.2 .

$$T_\zeta^{ad}\,[\hat{x}_\alpha^{+}(Z)] = Z^{-\langle\zeta|\alpha\rangle} \sum_{p \geq \langle\alpha|\zeta\rangle} Z^{-p}(t^p \otimes x_\alpha) , \qquad (3.4)_+$$

$$T_\zeta^{ad}\,[\hat{x}_\alpha^{-}(Z)] = Z^{-\langle\zeta|\alpha\rangle} \sum_{p < \langle\alpha|\zeta\rangle} Z^{-p}(t^p \otimes x_\alpha). \qquad (3.4)_-$$

Si $\langle\alpha|\zeta\rangle = o$, en d'autres termes si α est dans l'hyperplan $\{\beta \in \Phi ;\ \langle\beta|\zeta\rangle = 0\}$ les relations $(3.4)_+$ et $(3.4)_-$ deviennent :

$$T_\zeta^{ad}[\hat{x}_\alpha^{+}(Z)] = \hat{x}_\alpha^{+}(Z) \quad \text{et} \quad T_\zeta^{ad}[\hat{x}_\alpha^{-}(Z)] = \hat{x}_\alpha^{-}(Z) \tag{3.5}$$

En d'autres termes, l'opérateur T_ζ^{ad} laisse invariant $\hat{x}_\alpha^{+}(Z)$ et $\hat{x}_\alpha^{-}(Z)$, et plus généralement les espacex $M^+(\underline{\mathfrak{G}}_{-\alpha})$ et $M^-(\underline{\mathfrak{G}}_{-\alpha})$ si $\langle\alpha|\zeta\rangle = 0$.

Soit $\underline{\mathfrak{G}}^+$ (respectivement $\underline{\mathfrak{G}}^-$) l'espace des séries formelles à coefficients dans $\underline{\mathfrak{G}}$ limitées à gauche (resp. à droite). Pour tout α dans Φ posons :

$$M_n^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha) = \{ \sum_{p \geq n} Z^{-p}(t^p \otimes x_\alpha) \; ; \; x_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}_\alpha \text{ et } Z \in \mathbb{C}^* \}$$

$$M_n^-(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha) = \{ \sum_{p < -n} Z^{-p}(t^p \otimes x_\alpha) \; ; \; x_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}_\alpha \text{ et } Z \in \mathbb{C}^* \} \; .$$

La relation $(3.4)_+$ montre que pour tout $\zeta \in Q$ et tout $\alpha \in \Phi$ on a $T^{ad} \in \mathrm{End}(M^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha), M_n^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha))$ et la relation $(3.4)_-$ montrent que $T^{ad} \in \mathrm{End}(M^-(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha), M_n^-(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha))$. Plus généralement, $T_\zeta^{ad} \in \mathrm{End}(M^+(\underline{\mathfrak{G}}), \underline{\mathfrak{G}}^+)$, d'après $(3.4)_+$, et $T_\zeta^{ad} \in \mathrm{End}(M^-(\underline{\mathfrak{G}}), \underline{\mathfrak{G}}^-)$.

3.2. Soit $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ la base de racines simples de Φ ; comme $\underline{\mathfrak{G}}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de type auto-dual, la matrice de Cartan $A = (\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle)$ $1 \leq i,j \leq n$ est non dégénérée, et par conséquent [Appendice] , il existe un élément unique h_o dans $\underline{h}$, tel que :

$$\alpha_i(h_o) = 1 \qquad \forall \;\; \alpha_i \in \Delta.$$

appelé "<u>élément hauteur</u>" du système de racines Φ. Soit α dans Φ, comme $\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} k_i \alpha_i$ $k_i \in \mathbb{Z}^+$ ou $k_i \in \mathbb{Z}^-$ $(1 \leq i \leq \ell)$ (respectivement) [4] , on a :

$$\alpha(h_o) = \sum_{i=1} k_i = h^+(\alpha) \qquad (3.6)$$

D'où l'existence d'éléments de $\underline{h}$ tel que $\alpha(h) \neq o$, pour tout α dans Φ .
Considérons $(t^{+\langle\alpha|\zeta\rangle} \otimes h)$ avec $\alpha(h) \neq 0$ pour tout α dans Φ. Alors :

$$[t^{+\langle\alpha|\zeta\rangle} \otimes h, \hat{x}_\alpha^+(Z)] = \alpha(h) Z^{+\langle\alpha|\zeta\rangle} \sum_{p \geq \langle\alpha|\zeta\rangle} Z^{-p}(t^p \otimes x_\alpha) \qquad (3.7)_+$$

$$[t^{+\langle\alpha|\zeta\rangle} \otimes h \; ; \; \hat{x}_\alpha^-(Z)] = \alpha(h) Z^{+\langle\alpha|\zeta\rangle} \sum_{p < +\langle\alpha|\zeta\rangle} Z^{-p}(t^p \otimes x_\alpha) \qquad (3.7)_-$$

En prenant $h = h_o$ dans $(3.7)_+$ et $(3.7)_-$ on a :

THEOREMME 3.3.

Pour tout ζ *dans* Q, *et tout* α *dans* Φ, *on a :*

$$T_\zeta^{ad}[\hat{x}_\alpha^+(Z)] = \frac{Z^{-2<\alpha|\zeta>}}{ht(\alpha)} [t^{+<\alpha|\zeta>} \otimes h_o , \hat{x}_\alpha^+(Z)] \qquad (3.8)_+$$

$$T_\zeta^{ad}[\hat{x}_\alpha^-(Z)] = \frac{Z^{-2<\alpha|\zeta>}}{ht(\alpha)} [t^{+<\alpha|\zeta>} \otimes h_o , \hat{x}_\alpha^-(Z)] \qquad (3.8)_- .$$

Ainsi, les opérateurs T_ζ^{ad} ($\zeta \in Q$), ont une action analogue à celle de la représentation aejointe de $\hat{\underline{\mathfrak{G}}} = \underline{\mathfrak{G}}[t,t^{-1}]$ sur les espaces de Mellin-Lie $M_Z^+(\underline{\mathfrak{G}})$ et $M_Z^-(\underline{\mathfrak{G}})$ [2]. Via les relations (3.5) , $(3.8)_+$, et la proposition 1 du I-1.2 de [2] tout opératuer T_ζ^{ad} ($\zeta \in Q$) se décompose comme suit :

$$T_\zeta^{ad} = \mathbb{1}_{M_\zeta^+} + \sum_{\substack{\alpha \in \Phi \\ <\alpha|\zeta>\neq o}} \frac{Z^{-2<\alpha|\zeta>}}{ht(\alpha)} ad(t^{+<\alpha|\zeta>} \otimes h_o)_{|M^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha)} \qquad (3.9)_+$$

$$T_\zeta^{ad} = \mathbb{1}_{M_\zeta^-} + \sum_{\substack{\alpha \in \Phi \\ <\alpha|\zeta>\neq 0}} \frac{Z^{-2<\alpha|\zeta>}}{ht(\alpha)} ad(t^{+<\alpha|\zeta>} \otimes h_o)_{|M^-(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha)} \qquad (3.9)_-$$

où $\overline{M}_\zeta^+ = \{ \hat{x}_\alpha^\pm(Z) \ ; \ <\alpha|\zeta> = 0 \}$, et l'opérateur T_α^{ad} étant considérée comme élément de $End(M^+(\underline{\mathfrak{G}}),\underline{\mathfrak{G}}^+)$ et $End(M^-(\underline{\mathfrak{G}}), \underline{\mathfrak{G}}^-)$ respectivement . Et l'extension de l'action des opérateurs T_ζ^{ad}($\zeta \in Q$) aux algèbres de Mellin-Lie $\hat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}})$ et $\hat{M}^-(\underline{\mathfrak{G}})$, se fait grâce à la composition de ces opérateurs avec les dérivations degrés $d_Z^k = (Z\frac{d}{dt})^k$ [2] (proposition 2 I. 1.3). D'après la proposition 3.2, on remarque que l'action des opérateurs T_ζ^{ad} ($\zeta \in Q$) est indépendante de la variation infinitésimale de Z dans $\mathbb{C}^*$, ainsi :

$$T_\zeta^{ad} \circ d_Z [\hat{x}_\beta(Z)] = d_Z \circ T_\zeta^{ad} [\hat{x}_\beta(Z)]$$

et (3.10)

$$T_\zeta^{ad} \circ d_Z [\hat{x}_\beta^+(Z)] = d_Z \circ T_\zeta^{ad} [\hat{x}_\beta^+(Z)]$$

où $\beta \in \Phi$, $x_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta$ et $\zeta \in Q$. Plus précisément, on a :

PROPOSITION 3.4.

Soit β *dans* Φ *et* x_β *dans* $\underline{\mathfrak{G}}_\beta$, $\alpha \in \Phi$ *et* $x_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}_\alpha$, *et* $\zeta \in Q$. *Alors, on a :*

$$i)\quad T_\zeta^{ad} \circ d_Z[\hat{x}_\beta(Z)] = d_Z \circ T_\zeta^{ad}[\hat{x}_\beta(Z)] = \{Z^{-<\beta|\zeta>} d_Z - <\beta|\zeta>\, T_\zeta^{ad}\}\, \hat{x}_\beta(Z)$$

$$= Z^{-<\beta|\zeta>}\{d_Z - <\beta|\zeta>\}\hat{x}_\beta(Z) \tag{3.12}$$

$$ii)\quad T_\zeta^{ad}([\hat{x}_\alpha^+(Z),\hat{x}_\beta^+(Z)])-[T_\zeta^{ad}(\hat{x}_\alpha^+(Z)),T_\zeta^{ad}(\hat{x}_\beta^+(Z))] = 2<\alpha+\beta|\zeta> T_\zeta^{ad}(\widehat{[x_\alpha,x_\beta]}^+(Z)) \tag{3.13}$$

<u>PREUVE</u>.

i) Immédiat, en effet :

$$T_\zeta^{ad}[d_Z(\hat{x}_\beta(Z)] = d_Z[T_\zeta^{ad}(\hat{x}_\beta(Z))] = d_Z[Z^{-<\beta|\zeta>}\hat{x}_\beta(Z)]$$

$$= -<\beta|\zeta>\, Z^{-<\beta|\zeta>}\hat{x}_\beta(Z) \quad Z^{-<\beta|\zeta>} d_Z\hat{x}_\beta(Z)$$

$$= Z^{-<\beta|\zeta>}\, d_Z\hat{x}_\beta(Z) - <\nu|\zeta>\, T_\zeta^{ad}\, \hat{x}_\beta(Z)$$

D'où

$$T_\zeta^{ad} \circ d_Z(\hat{x}_\beta(Z)) = d_Z \circ T_\zeta^{ad}(\hat{x}_\beta(Z)) = Z^{-<\beta|\zeta>}\, \{d_Z - <\beta|\zeta>\}\, \hat{x}_\beta(Z)$$

$$= \{Z^{-<\beta|\zeta>}\, d_Z - <\beta|\zeta>\, T_\zeta^{ad}\}\hat{x}_\beta(Z)$$

ii) D'après [2] (proposition 2.I.1.3) on a :

$$T_\zeta^{ad}([\hat{x}_\alpha^+(Z),\hat{x}_\beta^+(Z)]) = T_\zeta^{ad}\{(-Z\frac{d}{dZ}+1)\,\widehat{[x_\alpha,x_\beta]}^+(Z)\}$$

D'après (3.10) $$= (-Z\frac{d}{dZ}+1)\, T_\zeta^{ad}(\widehat{[x_\alpha,x_\beta]}^+(Z))$$

D'après $(3.4)_+$ $$= (-Z\frac{d}{dZ}+1)\{Z^{-<\alpha+\beta|\zeta>} \sum_{m><\alpha+\beta|\zeta>} Z^{-m}(t^m \otimes [x_\alpha,x_\beta])\}$$

$$= Z^{-<\alpha+\beta|\zeta>}\{\sum_{m><\alpha+\beta|\zeta>} (m+<\alpha+\beta|\zeta>+1)Z^{-m}(t^m \otimes [x_\alpha,x_\beta])\}$$

D'après $(3.4)_+$ on a aussi :

$$[T_\zeta^{ad}\,\hat{x}_\alpha^+(Z),T_\zeta^{ad}(\hat{x}_\beta^+(Z))] = Z^{-<\alpha+\beta|\zeta>} \sum_{\substack{k><\alpha|\zeta>\\ s><\beta|\zeta>}} Z^{-(k+s)}(t^{(k+s)} \otimes [x_\alpha,x_\beta])$$

$$= Z^{-\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle} \sum_{m>\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle} \left(\sum_{k+s=m} 1.\right) Z^{-m}(t^m \otimes [x_\alpha, x_\beta])$$

Posons $p = m-\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle$
$$= Z^{-\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle} \sum_{p>o} (p+1)\, Z^{(p+\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle)}(t^{(p+\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle)} \otimes [x_\alpha, x_\beta])$$

$$Z^{-\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle} \sum_{m>\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle} (m-\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle+1) Z^{-m}\, t^m \otimes [x_\alpha, x_\beta]$$

En faisant la différence des expressions $T_\zeta^{ad}\, \hat{x}_\alpha^+(Z), T_\zeta^{ad}\, \hat{x}_\beta^+(Z)$ et $T_\zeta^{ad}([\hat{x}_\alpha^+(Z), \hat{x}_\beta^+(Z)])$ on obtient :

$$T_\zeta^{ad}([\hat{x}_\alpha^+(Z), \hat{x}_\beta^+(Z)]) - [T_\zeta^{ad}\, \hat{x}_\alpha^+(Z), T_\zeta^{ad}\, \hat{x}_\beta^+(Z)] = 2\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle\, T_\zeta^{ad}([x_\alpha, x_\beta]^+(Z)).$$

c.q.f.d.

D'après les relations $(3.4)_-$ et (3.10), on a aussi une relation analogue à (3.13), entre T_ζ^{ad} et $[\hat{x}_\alpha^-(Z), \hat{x}_\beta^-(Z)]$. Pour tout $\zeta \in Q$ et $x_\beta \in \mathfrak{G}_\beta (\beta \in \Phi)$, et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a la généralisation de la relation (3.10) :

$$T_\zeta^{ad} \circ d_Z^k [\hat{x}_\beta(Z)] = d_Z^k \circ T_\zeta^{ad} [\hat{x}_\beta(Z)]$$

Et
$$T_\zeta^{ad} \circ d_Z^k [\hat{x}_\beta^+(Z)] = d_Z^k \circ T_\zeta^{ad} [\hat{x}_\beta^+(Z)] \qquad (3.10)_k$$

où $d_Z^k = (Z \frac{d}{dZ})^k$ est la k-ème dérivation degré.

Par conséquent, l'homomorphisme d'espaces vectoriels T_ζ^{ad} de l'espace de Mellin-Lie $M^+(\mathfrak{G})$ (resp. $M^-(\mathfrak{G})$) à valeurs dans $\mathfrak{G}^+$ (resp. $\mathfrak{G}^-$) se prolonge en homomorphisme linéaire de l'algèbre de Mellin-Lie $\hat{M}^+(\mathfrak{G})$ (resp. $\hat{M}^-(\mathfrak{G})$) à valeur dans $\mathfrak{G}^+$ (resp. $\mathfrak{G}^-$). Et, la relation (3.13) montre que ce prolongement n'est pas un homomorphisme d'algèbres de Lie . Cependant, posons :

$$\Phi_\zeta = \{\alpha \in \Phi;\ \langle\alpha|\zeta\rangle = 0\} \cup \{0\}$$

Φ_ζ est stable pour l'addition. Si $\alpha, \beta \in \Phi_\zeta$, d'après (3.13) on a :

$$T_\zeta^{ad}([\hat{x}_\alpha^+(Z), \hat{x}_\beta^+(Z)]) = [T_\zeta^{ad}(\hat{x}_\alpha^+(Z)), T_\zeta^{ad}(\hat{x}_\beta^+(Z)] \qquad (3.14)_+$$

Posons : $\Phi_\zeta^c = \{\alpha \in \Phi,\ \alpha \in \Phi_\zeta\} \cup \{0\}$, on a : $\Phi_\zeta \cup \Phi_\zeta^c = \Phi \cup \{0\}$. Comme Φ_ζ est stable par addition ; alors :

$$\hat{M}^{\pm}_{S}(\underline{\mathfrak{G}}) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_{\zeta} \setminus \{o\}} \hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{G}}_{\alpha}) \oplus \hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{h}}) \qquad (3.15)$$

est une sous-algèbre de Lie de $\hat{M}^{+}(\underline{\mathfrak{G}})$, appelée "<u>algèbre de Mellin-Lie-(ζ)-stable</u>". De même, Φ^{c}_{ζ} est stable par addition, ainsi :

$$\hat{M}^{\pm}_{I}(\underline{\mathfrak{G}}) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^{c}_{\zeta} \setminus \{o\}} \hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{G}}_{\alpha}) \oplus \hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{h}}) \qquad (3.16)$$

est une sous-algèbre de Lie de $\hat{M}^{+}$'$\underline{\mathfrak{G}}$) appelée "algèbre de Mellin-Lie (ζ)-instable". Et on a la décomposition :

$$\hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{G}}) = \Big[\bigoplus_{\alpha \in \Phi^{c}_{\zeta} \setminus \{o\}} \hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{G}}_{\alpha}) \Big] \oplus \Big[\bigoplus_{\alpha \in \Phi_{\zeta} \setminus \{o\}} \hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{G}}_{\alpha}) \Big] \oplus \hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{h}}) \qquad (3.17)_1$$

Soit : $$\hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{G}}) = \hat{M}^{\pm}_{S}(\underline{\mathfrak{G}}) + \hat{M}^{\pm}_{I}(\underline{\mathfrak{G}}) \qquad (3.17)_2$$

Et on a le résultat :

<u>THEOREME 3.5.</u>

L'algèbre $\hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{h}})$ *est la seule sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Mellin-Lie* $\hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{h}})$ *qui est* (ζ)*-stable et* (ζ)*-instable.*

Soit $\hat{W} = W \times Q$ le groupe de Weyl de l'algèbre de Lie affine $\bar{\underline{\mathfrak{G}}} = \hat{\underline{\mathfrak{G}}} \oplus \mathbb{C}.c$, alors l'espace $\bar{V} = \mathrm{Sym}.(\hat{S}_{-})$ est $\hat{W}$-stable ainsi que $\mathbb{C}(\Gamma)$ (où Γ désigne le réseau de Φ), donc $V = \mathrm{Sym}(\hat{S}_{-}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\Gamma)$ est $\hat{W}$-stable, ainsi que son dual algébrique $\bar{V} = \bar{V}^{*} = \mathrm{Sym}^{*}(\hat{S}^{*}_{-}) \otimes \mathbb{C}(\Gamma)$, dont $\hat{M}^{+}(\underline{\mathfrak{h}})$ est un sous espace qui est $\hat{W}$-stable d'après le théorème 3.5. précédant. Ceci explique et justifie l'intérêt important que revêt la représentation fondamentale de l'algèbre de Lie de Frenkel-Kač sur l'espace fondamentale $V = \mathrm{Sym}(\hat{S}_{-}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\Gamma)$ dans [1] et [2].

Bibliographie.

[1] I.B. FRENKEL et V.G. KAC, *Basic representation of affine Lie algebras and dual resonance models,* Invent. Math. (62) 1980 (23-66).

[2] M. RACHIDI, *Transformation de Mellin algébrique et Algèbres de Mellin-Lie.* I.

[3] I.B. FRANKEL, *Two construction of affine Lie algebras representations and Boson-Fernion correspondance in Q uantum Field theory.*

[4] J.E. HUMPHREYS : *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Springer-Verlag. New-York - Heidelberg - Berlin.

Appendice.

Soit $\mathfrak{G}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de dimension finie, $\underline{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{G}$, et un système de racines de $(\mathfrak{G},\underline{h})$. Soit $\Delta = \{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$ une base de racines simples de Φ. Alors, il existe un élément unique h_o dans $\underline{h}$ tel que :

$$\alpha_i(h_o) = 1$$

pour tout $\alpha_i \in$ s. En effet :

Soit $h_o = \sum_{i=1}^{\ell} a_i\alpha_i$ où $\ell = \text{rang}(\mathfrak{G}) = \dim \underline{h}$

Il s'agit de déterminer $a_1,\dots,a_\ell$ tel que $\alpha_i(h_o) = 1$ $(1<i<\ell)$ or :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1(h_o) = \sum_{p=1}^{\ell} a_p\langle\alpha_1|\alpha_\ell\rangle = 1 \\ \alpha_2(h_o) = \sum_{p=1}^{\ell} a_p\langle\alpha_2|\alpha_\ell\rangle = 1 \\ \alpha_\ell(h_o) = \sum_{p=1}^{\ell} a_p\langle\alpha_\ell|\alpha_p\rangle = 1 \end{array}\right.$$

est un système linéaire de ℓ équations à ℓ inconnues $a_1,\dots,a_\ell$, qui est équivalent à l'équation matricielle :

$$A.a = I , \qquad (M)$$

où $a = {}^t(a_1,\dots,a\ )$ et $I = {}^t(1,\dots,1) \in \mathbb{C}^\ell$, et :

$$A = (\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle)\ 1 \leqslant i,j \leqslant \ell$$

qui n'est autre que la matrice de Cartan d'un système irréductible de racines [4] , qui est non-génégénée, par conséquent, (S) admet une solution unique.

L'élément h_o est appelé "élément hauteur" pour toute $\alpha \in \Phi$:

$$\alpha(h_\ell) = \text{ht}(\alpha) .$$