

PHILIPPE ADDA

Contrôlabilité des systèmes bilinéaires dans le plan

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 3A
, p. 1-56

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985__3A_1_0

© Université de Lyon, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONTROLABILITE DES SYSTEMES BILINEAIRES DANS LE PLAN

par Philippe ADDA

U.A. 399

Université de METZ

TABLE DES MATIERES

Introduction

I. Propriétés des familles de champs de vecteurs linéaires.

II. Stabilité des propriétés d'accessibilité et de contrôlabilité pour une famille de champs de vecteurs linéaires.

III. Contrôlabilité des couples de champs de vecteurs linéaires sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

IV. Mariage de champs linéaires sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

V. Généralisation du théorème de Gauthier-Bornard au cas de familles de champs de vecteurs homogènes.

Introduction

L'étude des systèmes guidables bilinéaires, i.e. du type

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(A + \sum_{i=1}^p u_i B_i \right) x & x(t) &\in \mathbb{R}^n \\ & & A, B_i &\in M_n(\mathbb{R}) \\ & & u(t) &\in \Omega \subset \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

est l'objet d'une importante littérature mathématique. Ces systèmes cumulent en effet un intérêt pratique, - ils modélisent de nombreux problèmes physiques (circuits électriques, par exemple, cr. [9] , [22]) - et un intérêt théorique - Sussurann [28] et Fliess [11] ont montré qu'ils constituent une "bonne approximation" de systèmes plus généraux -. Il est donc naturel, et c'est le but de cette seconde partie, d'étudier les propriétés et de chercher des critères de contrôlabilité pour les FCV linéaires.

On introduit dans ce but les notions de locale contrôlabilité et de contrôlabilité directionnelle ; la conjonction de ces deux propriétés est une CNS de contrôlabilité.

On reprend ensuite, avec une motivation géométrique, un critère de contrôlabilité dû à Gauthier et Bornard [12] . En s'appuyant sur les résultats démontrés précédemment, ainsi que sur un article plus ancien de Sussmann [29] , on s'intéresse à la stabilité des propriétés d'accessibilité de contrôlabilité et de contrôlabilité directionnelle. On est alors amené à se poser le problème de la contrôlabilité des couples de champs de vecteurs linéaires sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Une série de remarques élémentaires d'ordre pratique, permettent de mettre en oeuvre le critère théorique de Gauthier-Bornard. On obtient, par une approche géométrique et en utilisant de façon très simple l'outil informatique, un algorithme de détermination de la contrôlabilité pour de tels couples.

Ce résultat est modeste de par la faible dimension de l'espace d'état ($n=2$) et le nombre d'éléments de la FCV considérée (2). Son intérêt

réside - d'une part, dans le fait que c'est le seul critère qui soit une CNS de controlabilité (on ne connaît que des CN, Boothby [7] , Wilson [8] et des CS obtenues par la voie des groupes de Lie, Jurdjevic-Kuplea [16],[17] ou d'autres méthodes, Hirschom [14]), - d'autre part dans le choix de la méthode utilisée (informatique utilisée non comme mise en oeuvre pratique à titre d'illustration (Hermes [13]), ni comme moyen d'investigation (Schmitt [26]), mais comme outil de démonstration mathématique et "d'aide à la décision".

Enfin, on résout également de façon géométrique, le problème du mariage de champs linéaires sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, puis on étend à une FCV homogène le critère de Gauthier-Bornard.

Vocabulaire et conventions de notation propres à cette partie.

1°) On appelle champ linéaire sur \mathbb{R}^n , un champ du type

$$x \rightarrow Ax, \quad A \in M_n(\mathbb{R})$$

(on assimilera souvent un tel champ à sa matrice A).

On appelle champ affine sur \mathbb{R}^n , un champ du type

$$x \rightarrow Ax + a, \quad A \in M_n(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^n.$$

2°) Soit \mathcal{F} famille de champs de vecteurs (en abrégé FCV) sur une variété M.

$$\mathcal{F} = \{X^i\}_{i \in I}.$$

On note :

- . $G(\mathcal{F})$ le groupe de difféos de M, engendré par les X_t^i , $t \in \mathbb{R}$;
pour $x \in M$, $G(\mathcal{F}).x$ s'appelle l'orbite de x.
- . $S(\mathcal{F})$ le semi-groupe de difféos de M, engendré par les X_t^i , $t \in \mathbb{R}^+$
pour $x \in M$, $S(\mathcal{F}).x$ s'appelle orbite positive de x.
- . $A(x) = S(\mathcal{F}).x$ ensemble des points accessibles depuis x.
- . $A(x, t)$: ensemble des points accessibles depuis x en temps $\leq t$.
- . $A(x, t)$: ensemble des points accessibles depuis x en temps t.
- . $\mathcal{F}(x_0) = \{X_i(x_0)\}_{i \in I}$.
- . $K(\mathcal{F}(x_0))$ le cône convexe engendré par les vecteurs $X^i(x_0)$, $i \in I$.
- . $Co(\mathcal{F}(x_0))$ l'enveloppe convexe des mêmes vecteurs.

(les 3 derniers ensembles sont dans $T_{x_0} M$).

I - Propriétés des familles de champs de vecteurs linéaires.

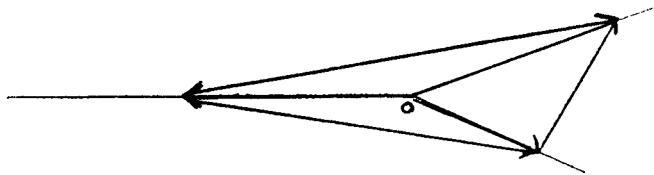
1°) PROPRIETES LOCALES

Dans ce premier paragraphe, on s'intéresse aux propriétés locales de contrôlabilité d'une famille de champs de vecteurs sur une variété. Puis on applique les résultats obtenus au cas particulier d'une FCV linéaires sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

a) Locale contrôlabilité stricte.

DEFINITION 1 : Une FCV \mathcal{F} sur une variété M de dimension n est localement strictement contrôlable, depuis x_0 si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathcal{V}(x_0)$, voisinage de x_0 tel que $\mathcal{V}(x_0) \subset \mathcal{A}(x_0, \varepsilon)$.

. On sait (voir par exemple Sussmann [30]) qu'une CS de locale contrôlabilité stricte est que $K(\mathcal{F}(x_0)) = T_{x_0}M$, (ou en d'autres termes $\text{Co}(\mathcal{F}x_0)$) contient 0 (origine de $T_{x_0}M$) dans son intérieur).



On appellera cette propriété la "condition du cône en x_0 ".

Elle est ouverte ; en effet elle est réalisée si et seulement si il existe $n+1$ champs $X_1 \dots X_{n+1} \in \mathcal{F}$ tels que

- . le rang des vecteurs $X_1(x_0) \dots X_n(x_0)$ est n .
- . X_{n+1} s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients strictement négatifs de ces n vecteurs.

Or ces 2 conditions sont évidemment ouvertes.

PROPRIETE : Si \mathcal{F} vérifie la condition du cône en tout point de M connexe alors \mathcal{F} est contrôlable.

DEMONSTRATION

Soit x_0 quelconque de M .

$K(\mathcal{F}(x_0)) = T_{x_0} M \implies \exists \mathcal{V}(x_0)$ voisinage de $x_0 \subset \mathbb{A}(x_0)$.

(xy)

Soit $y \in \mathbb{A}(x_0)$; par définition, $\exists g \in S(\mathcal{F})$ tel que $y = g(x_0)$
 g est un difféo et transporte donc le voisinage de $\mathcal{V}(x_0)$ sur un
 voisinage de $\mathcal{V}(y) \subset \mathbb{A}(x_0)$.

$\nearrow y$

$\mathbb{A}(x_0)$ est donc ouvert

(x_0)

Soit $z \in \overline{\mathbb{A}(x_0)}$.

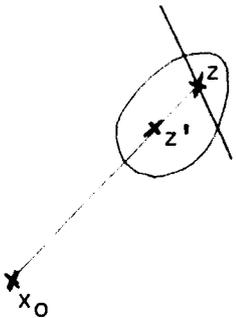
Par hypothèse $K(\mathcal{F}(z)) = T_z M$; on a donc également $K(-\mathcal{F}(z)) = T_z M$
 c'est-à-dire la condition du cône en z pour la famille $-\mathcal{F}$.

donc $\exists \mathcal{V}(z)$ voisinage de z de points recallables en z . Or
 puisque $z \in \overline{\mathbb{A}(x_0)}$, $\exists z' \in \mathcal{V}(z) \cap \mathbb{A}(x_0)$.

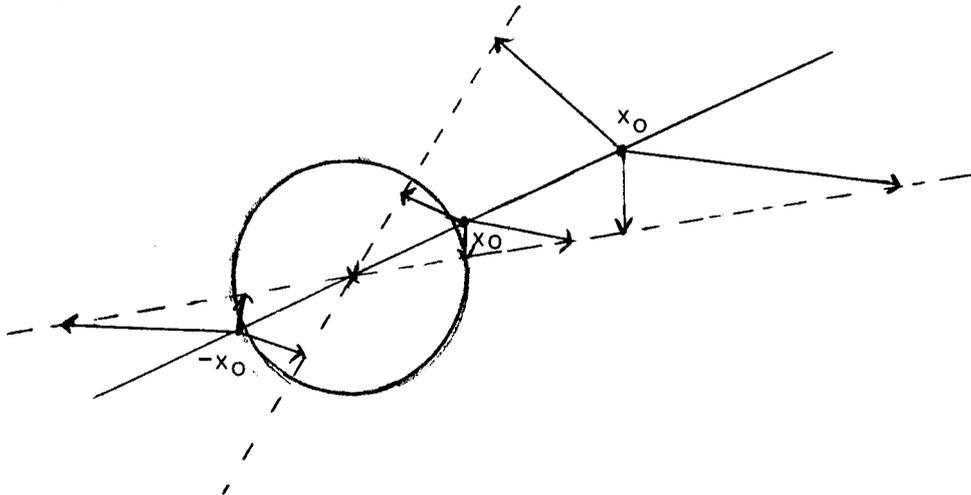
z' est donc accessible depuis x_0 et recalable en z , d'où
 $z' \in \mathbb{A}(x_0)$

$\mathbb{A}(x_0)$ est donc fermé.

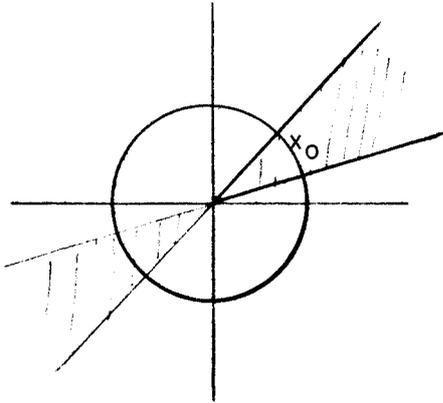
M étant connexe, on conclut que $\mathbb{A}(x_0) = M$.



Dans le cas d'une famille de champs de vecteurs linéaires, il est évident
 que si on a la condition du cône en un point x_0 , on l'a sur toute la droite
 vectorielle pointée $\mathbb{R}^* x_0$ (cf. dessin). En effet les champs étant linéaires, si
 $\alpha > 0$, $K(\mathcal{F}(\alpha x_0)) = K(\alpha \mathcal{F}(x_0)) = \alpha K(\mathcal{F}(x_0)) = K(\mathcal{F}(x_0))$ (1 cône est invariant
 par homothétie de rapport $\cdot > 0$) si $\alpha < 0$ $K(\mathcal{F}(\alpha x_0)) = -K(\mathcal{F}(x_0))$, donc si
 $K(\mathcal{F}(x_0)) = T_{x_0} M$, il en est de même pour $K(\mathcal{F}(\alpha x_0))$ pour tout $\alpha < 0$.



D'autre part, cette condition étant ouverte, elle reste vraie sur tout un voisinage cône pointé de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.



On peut donc déterminer des zones (secteurs ouverts pointés) de locale controlabilité stricte, en examinant le cône convexe engendré par $\mathcal{F}(x_0)$ dans $T_{x_0}(\mathbb{R}^n - \{0\})$, en chaque point x_0 de la demi-sphère unité fermée.

D'après la propriété ci-dessus, on a controlabilité sur chacune de ces zones ; en effet une telle zone est une sous-variété ouverte connexe de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

DEFINITION : On appellera une telle zone "cône de controlabilité" de la famille \mathcal{F} . Du point de vue géométrique l'existence d'un cône de controlabilité permet les déplacements radiaux. On dira dans ce cas qu'on a controlabilité radiale.

b) Locale controlabilité.

DEFINITION 2 : Une FCV \mathcal{F} sur une variété M de dimension n est localement controlable depuis x_0 , s'il existe un voisinage de x_0 $\mathcal{V}(x_0)$ inclus dans $\mathcal{A}(x_0)$.

(Rem. à la différence de la définition 1, le temps n 'intervient pas).

Le but de ce paragraphe est de caractériser pour une FCV \mathcal{F} le fait d'être localement controlable depuis un point x_0 . On en donnera en particulier une CNS pour une classe très large de familles : les FCV dénombrables et auto-invariantes.

DEFINITION (Sallet [24], [25]) : Une FCV \mathcal{F} est dite auto-invariante, si en chaque point x , l'espace tangent à la variété-orbite $G(\mathcal{F}) \cdot x$ est donné par $\text{Lie}(\mathcal{F})(x)$.

Les FCV analytiques entrent dans cette catégorie, ainsi que les FCV de rang constant et les FCV localement de type fini. Il est évident d'après la définition, que pour une telle famille le rang est constant le long d'une trajectoire.

Faisons maintenant quelques rappels sur la notion de normale accessibilité introduite par Sussmann [29] .

α) y est normalement accessible depuis x (au moyen de \mathcal{F}) si

$$\exists h \geq n, \exists X^1 \dots X^h \in \mathcal{F}, \exists t_1^0 \dots t_h^0 > 0$$

tels que $y = X_{t_1^0}^1 \circ \dots \circ X_{t_h^0}^h(x)$, le rang maximal = n en (t_1^0, \dots, t_h^0) .

β) on sait alors que si y est normalement accessible depuis x , il existe 1 voisinage $\mathcal{V}(y)$ de points normalement accessibles depuis x . (faire varier $(t_1^0 \dots t_h^0)$ au vois. de $(t_1^0 \dots t_h^0)$).

γ) si y est normalement accessible depuis, z accessible depuis y alors z est normalement accessible depuis x .

On notera $n.A(x)$, l'ensemble des points normalement accessibles depuis x .

On va dans un premier temps caractériser l'intérieur de $A(x)$, parfois dénommé région d'accessibilité (cf. Hunt [15]).

PROPOSITION : Pour une FCV \mathcal{F} dénombrable et auto-invariante, $n.A(x)$ est égal à l'intérieur de $A(x)$.

DEMONSTRATION : La démonstration s'appuie sur une technique utilisée par Suttman pour montrer que :

accessibilité depuis $x \iff$ normale accessibilité depuis x

i.e. $\text{Int}(A(x)) \neq \emptyset$

i.e. $\text{Int}(n.A(x)) \neq \emptyset$

on obtiendra ce résultat comme conséquence triviale de la proposition ci-dessus.

Pour simplifier la démonstration on supposera les champs de \mathcal{F} complets.

Soit $\xi \in \mathcal{F}^k$, $\xi = (X^1, \dots, X^k)$
 pour $t = (t_1 \dots t_k) \in (\mathbb{R}_*^+)^k$, on note $\phi_\xi(t)(x) = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_k}^k(x)$
 alors on peut écrire $A(x) = \{x\} \cup \left(\bigcup_{h \geq 1} \bigcup_{\xi \in \mathcal{F}^k} \phi_\xi(\mathbb{R}_*^+)(x) \right)$

(les temps t_i sont donc supposés > 0).

L'image de l'ensemble des points $t_0 \in (\mathbb{R}_*^+)^k$ tels que la matrice jacobienne $D \phi_{\xi_0}(t_0)(x)$ soit de rang $< n$, i.e. l'ensemble des valeurs critiques de $\phi_{\xi_0}(\cdot)(x)$, est de mesure nulle d'après le théorème de Sard.

Donc si l'on pose :

$A_{\xi_0}(x) =$ ens. des points accessibles avec le k-uple ordonné $\xi_0 \in \mathcal{F}^k$

$n.A_{\xi_0}(x) =$ ens. des points accessibles normal avec le k-uple ordonné $\xi_0 \in \mathcal{F}^k$.

et $C_{\xi_0}(x) =$ ens. des valeurs critiques de $\phi_{\xi_0}(\cdot)(x)$.

On a $A_{\xi_0}(x) = n.A_{\xi_0}(x) \cup C_{\xi_0}(x) \cup \{x\}$.

(la réunion n'étant pas nécessairement disjointe).

Par définition $n.A(x) = \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{\xi_0 \in \mathcal{F}^k} n.A_{\xi_0}(x)$.

D'autre part

$$A(x) = n.A(x) \cup \left(\left(\bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{\xi_0 \in \mathcal{F}^k} C_{\xi_0}(x) \right) \cup \{x\} \right) \cap \left(n.A(x) \right)$$

la réunion est disjointe ;

le second membre est de mesure nulle. En effet \mathcal{F} étant dénombrable, \mathcal{F}^k l'est aussi pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a alors une réunion dénombrable d'ensembles $C_{\xi_0}(x)$, de mesure nulle.

On a donc "décomposé" $A(x)$ en (union disjointe de) :

- . $n.A(x)$: {points que l'on peut atteindre avec le rang n en t }
- . $C_{\mathcal{F}}(x)$: {points que l'on ne peut atteindre qu'avec 1 rang $< n$ en t }

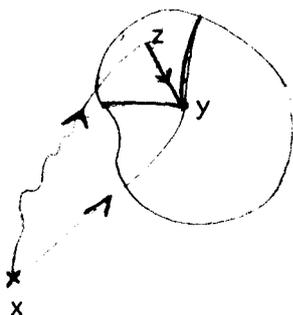
on appellera ce dernier l'ensemble des valeurs critiques de \mathcal{F} .

D'après le rappel b) $n.A(x)$ est ouvert donc $n.A(x) \subset \overset{\circ}{A(x)}$.

Montrons que $\overset{\circ}{A(x)} \subset n.A(x)$.

On suppose que $\text{rg}(\mathcal{F})$ en $x = n$ (sinon, puisque \mathcal{F} est auto-invariant $\overset{\circ}{A(x)} = \emptyset$ et donc $n.A(x) = \emptyset$).

Soit $y \in \overset{\circ}{A(x)}$ quelconque ; il existe donc V_y , voisinage ouvert de y , inclus dans $A(x)$.



Puisque \mathcal{F} est auto-invariante, on a aussi $\text{rg}(\mathcal{F})$ en $y = n$ et donc $\text{rg}(-\mathcal{F})$ en $y = n$ (car $\text{Lie}(\mathcal{F}) = \text{Lie}(-\mathcal{F})$). Alors d'après Krener [19] (dem. du classique th. de Sussmann), on peut affirmer l'existence d'un ouvert R de points recalables en y , R étant arbitrairement près de y .

Comme $n.A(x)$ est dense dans $A(x)$, il existe $z \in n.A(x)$ tel que $z \in R$.

Donc y est normalement accessible depuis x (rappel c)).

REMARQUE 1 : Le résultat $A(x) = n.A(x) \dot{\cup} C_{\mathcal{F}}(x)$ est vrai pour toute famille dénombrable ; on a donc aussi " si $n.A(x) \neq \emptyset$, c'est un ouvert dense dans $A(x)$ " L'hypothèse d'auto-invariance n'intervient que pour montrer que $\overset{\circ}{A(x)} \subset n.A(x)$.

Il est naturel de formuler la conjecture suivante :

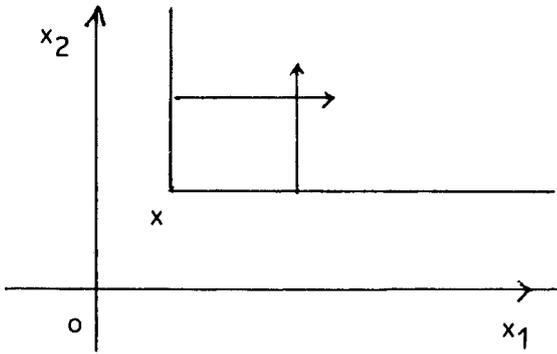
pour toute FCV dénombrable $\overset{\circ}{A(x)} = n.A(x)$?

REMARQUE 2 : Essayons d'éclairer la démonstration précédente par l'exemple élémentaire suivant :

Sur \mathbb{R}^2 on considère $X^1 = \frac{\partial}{\partial k_1}$ et $X^2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$; X^1 et X^2 commutent.

Identifions pour tout y de \mathbb{R}^2 , l'espace tangent $T_y \mathbb{R}^2$ et \mathbb{R}^2 lui-même ; notons (e_1, e_2) la base canonique

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{\partial}{\partial t_1} (X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2)(x) &= X^1((X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2)(x)) = e_1 \\ \frac{\partial}{\partial t_2} (X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2)(x) &= X^2((X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2)(x)) = e_2 \end{aligned}$$



Donc $\mathbb{A}(x) =$ quadrant fermé
 $n.\mathbb{A}(x) =$ quadrant ouvert
 $C_{\mathcal{F}}(x) =$ union des 2 demi-axes.

COROLLAIRE 1 : Pour une FCV dénombrable et auto-invariante, accessibilité depuis $x \iff$ normale accessibilité depuis x .

En effet $\overset{o}{\mathbb{A}(x)} = n.\mathbb{A}(x) = \overset{o}{n.\mathbb{A}(x)}$.

Notons que l'on peut caractériser la frontière accessible depuis x (c'est-à-dire les points de $F_2(\mathbb{A}(x))$ que l'on peut atteindre depuis a) : c'est l'ensemble $C_{\mathcal{F}}(x)$.

COROLLAIRE 1 BIS : Pour une FCV dénombrable, on a la même propriété. (cf. Sussmann [29]).

En effet comme $\mathbb{A}(x) = \overset{o}{n.\mathbb{A}(x)} \cup \overset{o}{C_{\mathcal{F}}(x)}$
↑ ouvert ↑ de mesure nulle

non normale accessibilité i.e. $\overset{o}{n.\mathbb{A}x} = \emptyset = n.\mathbb{A}(x) \implies \mathbb{A}(x) = C_{\mathcal{F}}(x)$ de mesure nulle donc $\overset{o}{\mathbb{A}(x)} = \emptyset$.

COROLLAIRE 2 - CNS de locale controlabilité.

Pour une FCV dénombrable et auto-invariante, on a locale controlabilité depuis x_0 si et seulement si x_0 est normalement auto-accessible.

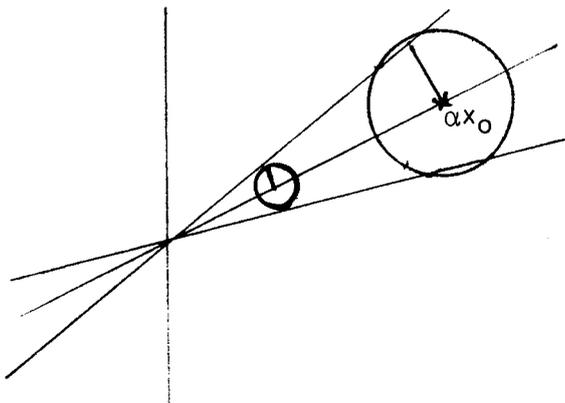
DEMONSTRATION : On sait que x_0 normal auto-accessible \implies loc.controlabilité depuis x_0 .

Réciproquement si on a locale controlabilité depuis x_0 , $\exists \mathcal{V}(x_0)$ voisinage de x_0 inclus dans $\mathbb{A}(x_0)$; donc $\mathbb{A}(x_0)$ est ouvert, d'où $\overset{o}{\mathbb{A}(x_0)} = \overset{o}{\mathbb{A}(x_0)} = n.\mathbb{A}(x_0)$. Or $x \in \overset{o}{\mathbb{A}(x_0)} = n.\mathbb{A}(x_0)$ i.e. x_0 est normalement auto-accessible.

Comme précédemment, dans le cas d'une famille de champs de vecteurs linéaires, si la propriété de locale controlabilité est vraie en un point x_0 , elle est vraie sur toute la droite vectorielle pointée $\mathbf{R}^* x_0$.

En effet $S(\mathcal{F})$ est un ensemble de matrices (si l'on note A_i les éléments de \mathcal{F} , c'est le semi-groupe engendré par les e^{tA_i} , $t \geq 0$) ; c'est pourquoi les ensembles d'états accessibles $\mathbb{A}(x)$ ($= S(\mathcal{F}).x$) vérifient la relation

$$\mathbb{A}(\lambda x_0) = \mathbb{A}(x_0), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$



Si par hypothèse on a locale contrôlabilité en x_0 , il existe $\epsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B(x_0, \epsilon)$ soit incluse dans $\mathbb{A}(x_0)$.

Alors d'après la relation ci-dessus, pour $\alpha > 0$ quelconque, la boule ouverte $B(\alpha x_0, \alpha \epsilon)$ sera incluse dans $\mathbb{A}(\alpha x_0)$.

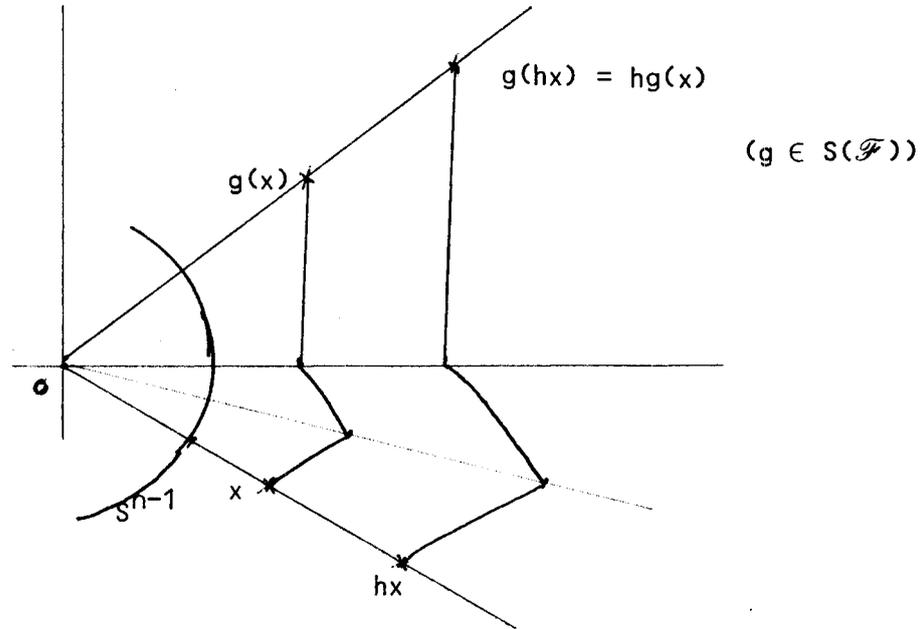
On a donc de nouveau affaire à des cônes de contrôlabilité (la réunion des boules ouvertes $B(\alpha x_0, \alpha \epsilon)$, $\alpha \in \mathbb{R}_x^+$, d'où sans l'hypothèse de locale contrôlabilité en 1 point, contrôlabilité radiale de la famille \mathcal{F}).

2°) CONTROLABILITE DIRECTIONNELLE D'UNE FCV LINEAIRE SUR $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

a) Première définition.

Une CN évidente de contrôlabilité sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est le fait de "contrôler suivant les directions, c'est-à-dire de pouvoir passer d'un rayon vecteur à l'autre.

Ceci revêt une importance particulière dans le cas d'une FCV linéaire. En effet, les trajectoires d'un champ linéaire sont homothétiques par rapport à 0. Pour une FCV linéaire \mathcal{F} les trajectoires homologues (i.e. issues d'un même rayon-vecteur et correspondant aux mêmes commutations) le sont également. (cf. dessin ci-après).



Donc tout difféomorphisme g de $S(\mathcal{F})$ transporte un rayon vecteur sur un rayon vecteur. Ceci nous conduit à donner la :

DEFINITION 1 : Une FCV linéaire \mathcal{F} est dite contrôlable suivant les directions si $\forall (y, z) \in (\mathbb{R}^n - \{0\})^2$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\alpha z \in \mathbb{A}(y)$.

REMARQUE : On pourrait se limiter à $y \in S^{n-1}$ (sphère unité) et $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

b) Projection sur S^{n-1} .

D'après ce qui a été dit ci-dessus, tous les éléments d'une famille de trajectoires homologues, ont même projection conique de centre 0 sur S^{n-1} .

On va maintenant montrer que les projections sur S^{n-1} des trajectoires de \mathcal{F} (FCV linéaires), ne sont autres que les trajectoires d'une famille $\hat{\mathcal{F}}$, "projetée de \mathcal{F} " de champs sur S^{n-1} .

$$\text{Posons } \varphi_t(y_0) = \frac{e^{At} y_0}{\|e^{At} y_0\|} \quad A \in \mathcal{F}, y_0 \in S^{n-1}, t \in \mathbb{R}$$

c'est la projection sur S^{n-1} de la trajectoire du champ A issue de y_0
 (et donc de toutes les trajectoires de A issues des points αy_0 , $\alpha > 0$).

Montrons que la famille $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à 1 paramètre de difféos de S^{n-1} .

En effet $y_0 \in S^{n-1}$, $\varphi_t(y_0) \in S^{n-1}$ par construction

$$\begin{aligned} \cdot \varphi_0(y_0) &= y_0 \\ \cdot \varphi_s \circ \varphi_t(y_0) &= \frac{e^{As} \frac{e^{At} y_0}{\|e^{At} y_0\|}}{\left\| e^{As} \left(\frac{e^{At} y_0}{\|e^{At} y_0\|} \right) \right\|} = \frac{e^{A(t+s)} y_0}{\|e^{A(t+s)} y_0\|} = \varphi_{t+s}(y_0). \end{aligned}$$

On sait que l'on peut alors définir 1 champ \hat{A} sur S^{n-1} dont le groupe à 1 paramètre est φ_t , en posant

$$\hat{A}(y_0) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(y_0) \right|_{t=0}.$$

Calculons donc cette dérivée

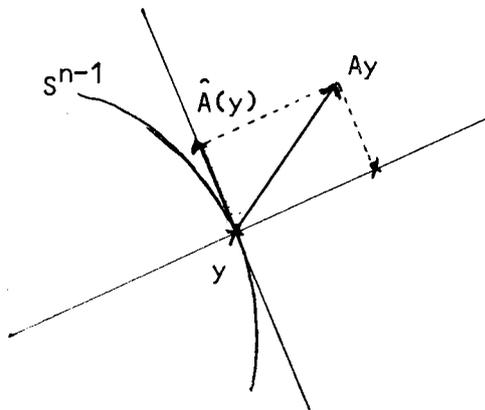
$$\text{on a } \frac{d}{dt} e^{At} y_0 = A e^{At} y_0 \text{ et } \frac{d}{dt} \|e^{At} y_0\| = \frac{d}{dt} ((e^{At} y_0))^{1/2} = \frac{2 \langle A e^{At} y_0, e^{At} y_0 \rangle}{2 \|e^{At} y_0\|}$$

$$\text{d'où } \frac{d}{dt} \varphi_t(y_0) = \frac{A e^{At} y_0 \times \|e^{At} y_0\| - e^{At} y_0 \times \frac{\langle A e^{At} y_0, e^{At} y_0 \rangle}{\|e^{At} y_0\|}}{\|e^{At} y_0\|^2}$$

$$= A \left(\frac{e^{At} y_0}{\|e^{At} y_0\|} \right) = \left\langle A \frac{e^{At} y_0}{\|e^{At} y_0\|}, \frac{e^{At} y_0}{\|e^{At} y_0\|} \right\rangle \times \frac{e^{At} y_0}{\|e^{At} y_0\|}$$

On obtient donc $\hat{A}(y_0) = Ay_0 - \langle Ay_0, y_0 \rangle \times y_0$.

INTERPRETATION GEOMETRIQUE.



$$y \in S^{n-1}$$

Le terme $\langle Ay, y \rangle xy$ est tout simplement la projection orthogonale du vecteur Ay sur le rayon h^+y . On peut donc interpréter le vecteur $\hat{A}(y)$ comme "partie tangente" à S^{n-1} du vecteur Ay .

REMARQUE : Notons que cette propriété n'est pas vraie pour tout champ X sur \mathbb{R}^n i.e. en général, les projections sur S^{n-1} les trajectoires de X ne sont pas courbes intégrales d'un champ sur S^{n-1} (considérer par exemple le champ affine $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur \mathbb{R} les projections coniques sur S^1 des trajectoires se recourent).

On est maintenant en mesure de donner une seconde définition de la contrôlabilité directionnelle (équivalente à la première)

DEFINITION 2 : Une FCV linéaire \mathcal{F} est dite contrôlable suivant les directions si la famille projetée $\hat{\mathcal{F}}$ est contrôlable sur S^{n-1} .

c) Lien entre \mathcal{F} et $\hat{\mathcal{F}}$.

Nous allons d'abord établir par le calcul le lien entre le rang de la famille \mathcal{F} et celui de sa projetée $\hat{\mathcal{F}}$, en même point de S^{n-1} , d'où la relation entre les propriétés d'accessibilité des 2 familles.

PROPOSITION : La projection conserve le crochet, i.e. si A et $B \in \mathcal{F}$ on a $[\hat{A}, \hat{B}] = [A, B]$.

DEMONSTRATION : \hat{A} est défini sur S^{n-1} par $\hat{A}(y) = Ay - \langle Ay, y \rangle \times y$ considérons cette application comme de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n et calculons sa différentielle en 1 point y quelconque

$$\begin{aligned}\hat{A}(y+h) &= Ay + Ah - \langle Ay + Ah, y+h \rangle \times (y+h) \\ &= Ay + Ah - [\langle Ay, y \rangle + \langle Ay, h \rangle + \langle Ah, y \rangle + \langle Ah, h \rangle] \times y \\ &\quad - [\langle Ay, y \rangle + \langle Ay, h \rangle + \langle Ah, y \rangle + \langle Ah, h \rangle] \times h\end{aligned}$$

donc $\hat{A}(y+h) - \hat{A}(y) = Ah - [\langle Ay, h \rangle + \langle Ah, y \rangle] \times y - \langle Ay, y \rangle \times h + o(h)$.

en effet $|\langle Ah, h \rangle| \leq \|Ah\| \cdot \|h\|$ Cauchy-Schwartz
 $\leq \|A\| \|h\|^2$

$$\begin{aligned}\|\langle Ay, h \rangle \times h\| &\leq |\langle Ay, h \rangle| \times \|h\| \\ &\leq \|A\| \|y\| \|h\|^2.\end{aligned}$$

On montre de même que tous les termes où h apparaît 2 fois sont en $\|h\|^2$.

Rappelons que si l'on note A^* la transposée de A , on a

$$\langle Ah, y \rangle = \langle h, A^* y \rangle = \langle A^* y, h \rangle.$$

On obtient donc :

$$D \hat{A}_{(y)} \cdot h = Ah - \langle (A+A^*)y, h \rangle \times y - \langle Ay, y \rangle \times h.$$

Evaluons le crochet de \hat{A} et \hat{B} considérés comme champs sur \mathbb{R}^n , \hat{A} et \hat{B} induisent des champs sur S^{n-1} , il en sera de même pour $[\hat{A}, \hat{B}]$

$$\begin{aligned}[\hat{A}, \hat{B}](y) &= D \hat{B}_{(y)} \cdot \hat{A}(y) - D \hat{A}_{(y)} \cdot \hat{B}(y) \\ &= B(Ay - \langle Ay, y \rangle \cdot y) - \langle (B+B^*)y, (Ay - \langle Ay, y \rangle \cdot y) \rangle \times y - \langle By, y \rangle (Ay - \langle Ay, y \rangle \cdot y) \\ &\quad - [A(By - \langle By, y \rangle \cdot y) - \langle (A+A^*)y, (By - \langle By, y \rangle \cdot y) \rangle \times y - \langle Ay, y \rangle (By - \langle By, y \rangle \cdot y)] \\ &= BAy - \langle Ay, y \rangle \cdot By - [\langle (B+B^*)y, Ay \rangle - \langle Ay, y \rangle \langle (B+B^*)y, y \rangle] \times y - \langle by, y \rangle \cdot Ay + \langle By, y \rangle \langle Ay, y \rangle \cdot y \\ &\quad - ABy + \langle By, y \rangle \cdot Ay + [\langle (A+A^*)y, By \rangle - \langle By, y \rangle \langle (A+A^*)y, y \rangle] \times y + \langle Ay, y \rangle \cdot By - \langle Ay, y \rangle \langle By, y \rangle \cdot y \\ &= [A, B]y - [\langle By, Ay \rangle + \langle B^* y, Ay \rangle - \langle Ay, y \rangle \langle By, y \rangle - \langle Ay, y \rangle \langle B^* y, y \rangle] \times y \\ &\quad + [\langle Ay, By \rangle + \langle A^* y, By \rangle - \langle By, y \rangle \langle Ay, y \rangle - \langle By, y \rangle \langle A^* y, y \rangle] \times y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [A, B]y - [\langle y, BAy \rangle - \langle y, ABy \rangle + \langle Ay, y \rangle \langle y, By \rangle - \langle By, y \rangle \langle y, A^*y \rangle]y \\
&= [A, B]y - \langle [A, B]y, y \rangle \times y \\
&= \widehat{[A, B]}(y).
\end{aligned}$$

CONSEQUENCE : Si \mathcal{F} est accessible, $\widehat{\mathcal{F}}$ l'est aussi.

En effet par hypothèse, puisque \mathcal{F} est analytique, on a $\forall y \in S^{n-1}$, $\text{Lie}(\mathcal{F})(y) = \mathbb{R}^n$ (en fait $T_y \mathbb{R}^n - \{0\}$, i.e. \mathbb{R}^n avec origine en y). D'après la proposition ci-dessus $\text{Lie}(\mathcal{F})(y)$ n'est autre que la projection orthogonale de \mathbb{R}^n (avec origine en y) sur $T_y S^{n-1}$ (i.e. l'hyperplan affine passant par y et $\perp y$) : c'est donc tout $T_y S^{n-1}$, i.e. $\widehat{\mathcal{F}}$ est de rang maximal $n-1$, en y et est donc accessible.

Le résultat ci-dessus peut être obtenu par une approche plus géométrique, qui met en lumière le lien profond qui existe entre \mathcal{F} et $\widehat{\mathcal{F}}$.

Notons $P : \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$

$$x \rightarrow \frac{x}{\|x\|} = y, \text{ la projection conique de centre } 0.$$

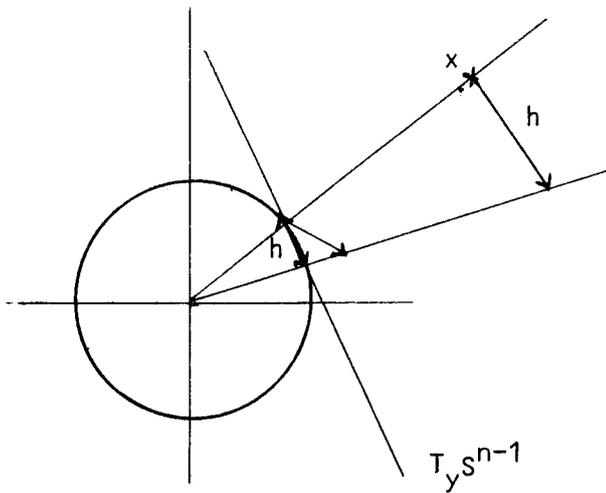
Différencions P , considérée comme fonction $\mathbb{R}_*^n \rightarrow \mathbb{R}_*^n$ on obtient

$$DP_x \cdot h = \frac{h}{\|x\|} - \langle y, \frac{h}{\|x\|} \rangle \times y \text{ le vecteur obtenu appartient à } T_y S^{n-1} \text{ (il est } \perp y \text{);}$$

la différentielle ci-dessus est donc l'application linéaire tangente en x à P ; considérée comme fonction $\mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ (ceci provient du fait que P est homogène).

$$\begin{aligned}
\text{On a donc } P_{*x}(h) &= \frac{h}{\|x\|} - \langle y, \frac{h}{\|x\|} \rangle \times y \quad h \in T_x(\mathbb{R}^n - \{0\}) \\
&= \frac{1}{\|x\|} \times P_{\perp}(h)
\end{aligned}$$

(où P_{\perp} désigne la projection orthogonale sur $T_y S^{n-1}$).



P_{*x} est donc la composée de P_{\perp} et de l'homothétie de rapport $1/||x||$.

Donnons à h , la valeur du champ $A \in \mathcal{F}$, en $x : Ax$, on a

$$\begin{aligned} P_{*x}(Ax) &= \frac{1}{||x||} \times P_{\perp}(Ax) = \frac{1}{||x||} (Ax - \langle y, Ax \rangle \times y) \\ &= Ay - \langle y, Ay \rangle \times y \\ &= \hat{A}(y) = \hat{A}(P(x)). \end{aligned}$$

\hat{A} est donc le transporté du champ A par P ; en fait, puisque P n'est pas un difféo, mais simplement une application différentiable de $\mathbf{R}^n - \{0\}$ dans S^{n-1} , le terme exact est :

" A et \hat{A} sont P -liés " .

On note $\hat{A} = P_*A$. Ceci nous permet de retrouver le résultat précédent ; en effet soient A et $B \in \mathcal{F}$, on a $\hat{A} = P_*A$ et $\hat{B} = P_*B$ d'où

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [P_*A, P_*B] = P_*[A, B] = \widehat{[A, B]} .$$

d) Equivalence directionnelle.

Il est naturel de se demander quelle relation existe entre 2 champs linéaires ayant même projeté sur S^{n-1} .

La réponse est très simple et se démontre de façon élémentaire :

2 champs linéaires ont même projeté si et seulement si ils diffèrent de αId ($\alpha \in \mathbf{R}$).

En effet

$$\text{si } B = A + \alpha \text{ Id} \\ \forall y \in S^{n-1} \quad \widehat{B}(y) = Ay + \alpha y - \langle Ay, y \rangle \times y - \alpha \langle y, y \rangle \times y = \widehat{A}(y).$$

récioproquement

soient A et B tels que $\widehat{A} = \widehat{B}$ (sur S^{n-1}).

i.e. $\forall y \in S^{n-1} : Ay - \langle Ay, y \rangle \times y = By - \langle By, y \rangle \times y$

donc $(A-B)y = \langle (A-B)y, y \rangle \times y$

i.e. $(A-B)|_{S^{n-1}}$ est radial

par homogénéité, A-B est radial sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$

(i.e. $\forall x, \exists \mu_x \in \mathbb{R}$ i.q. $(A-B)x = \mu_x \times x$).

Or les seules applications linéaires ayant cette propriété sont les homothéties, i.e. $A-B = \alpha \text{ Id}$.

On dira de 2 tels champs qu'ils sont équivalents du point de vue directionnel.

En combinant les propriétés étudiées ci-dessus avec les critères connus de contrôlabilité, nous allons obtenir 2 critères (CS) simples de contrôlabilité directionnelle pour une FCV linéaire.

CRITERE 1 .

Si une FCV linéaires \mathcal{F} accessible se projette sur une famille $\widehat{\mathcal{F}}$ symétrique de champs sur S^{n-1} , alors elle est contrôlable suivant les directions. Une telle famille vérifie nécessairement : si $X_i \in \mathcal{F}$ alors il existe $\bar{X}_i = -X_i + \alpha \text{ Id}$ dans \mathcal{F} . Le résultat est alors une simple application du critère de Chow.

CRITERE 2 .

Si une FCV linéaires \mathcal{F} accessible a pour éléments des champs de la forme $R + \alpha \text{ Id}$, où R est une matrice antisymétrique, alors elle est contrôlable suivant les directions.

DEMONSTRATION.

\mathcal{F} est accessible, donc $\hat{\mathcal{F}}$ aussi.

$R + \alpha \text{ Id}$ est équivalent à R , du point de vue directionnel.

R est Poisson-stable et donc se projette sur 1 champ Poisson-stable donc d'après le théorème de Lobry, $\hat{\mathcal{F}}$ est transitif sur S^{n-1} .

REMARQUE. On vérifie dans \mathbb{R}^3 , que seules les matrices du type ci-dessus donnent 1 champ projeté Poisson-Stable.

3°) CRITERES DE CONTROLABILITE SUR $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

On présente ici 2 critères (CNS) de controlabilité sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ pour une FCV linéaires.

Le premier utilise les notions introduites en 1° et 2°.

Le second, dû à Gauthier et Bornard [12] sera exploité aux paragraphes III et IV.

CRITERE 1.

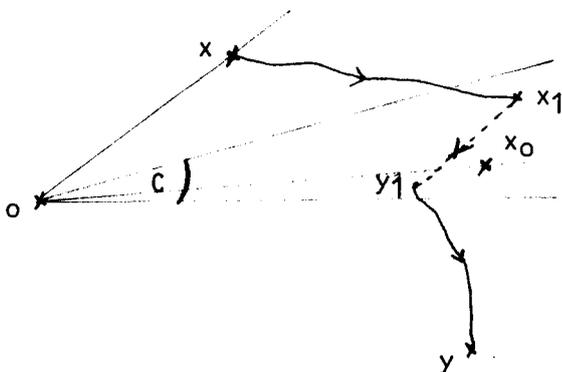
Une FCV linéaires \mathcal{F} est controlable sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ si et seulement si

i) \mathcal{F} est controlable suivant les directions

ii) il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tel que \mathcal{F} soit localement controlable depuis x_0 .

DEMONSTRATION.

La démonstration est très simple et essentiellement géométrique.



Soient x et y quelconques dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$

Puisque \mathcal{F} est localement controlable

depuis x_0 il existe un voisinage conique

C du rayon $\mathbb{R}^+ x_0$ sur lequel on a contro-

labilité \mathcal{F} est controlable suivant les

directions donc $\exists x_1 \in C$ accessible depuis

x .

\mathcal{F} est également contrôlable suivant les directions. (\mathcal{F} se projette sur $\hat{\mathcal{F}}$ qui est contrôlable sur S^{n-1} puisque $\hat{\mathcal{F}}$ l'est). Donc $\exists y_1 \in C$ recalable en y . Enfin, comme on a contrôlabilité sur le cône C , on peut relier x_1 à y_1 .

CRITERE 2 - Gauthier-Bornard. [12].

On exprime ici le critère de Gauthier-Bornard au moyen de vocabulaire déjà employé jusqu'ici.

Une FCV linéaires \mathcal{F} est contrôlable sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ si et seulement si

- i) \mathcal{F} est accessible
- ii) \mathcal{F} est contrôlable suivant les directions
- iii) \mathcal{F} admet une direction rentrante et une direction sortante.

Précisons le sens de la condition iii) :

" \mathcal{F} admet une direction rentrante " signifie que

$$\exists x_0 \neq 0 \text{ et } \exists g \in S(\mathcal{F}) \quad g(x_0) = \lambda x_0 \quad \text{avec } 0 < \lambda < 1$$

de même, on dira que " \mathcal{F} admet une direction sortante " si

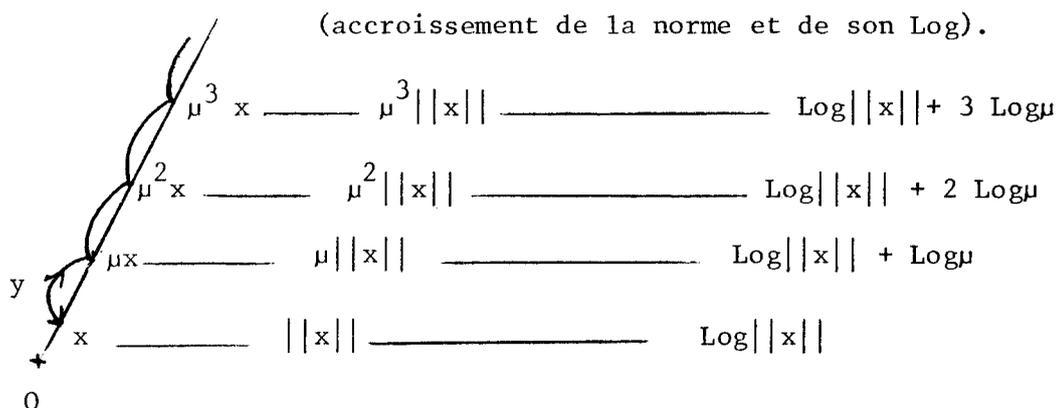
$$\exists x_1 \neq 0 \text{ et } \exists h \in S(\mathcal{F}) \quad h(x_1) = \mu x_1 \quad \text{avec } \mu > 1.$$

DEMONSTRATION.

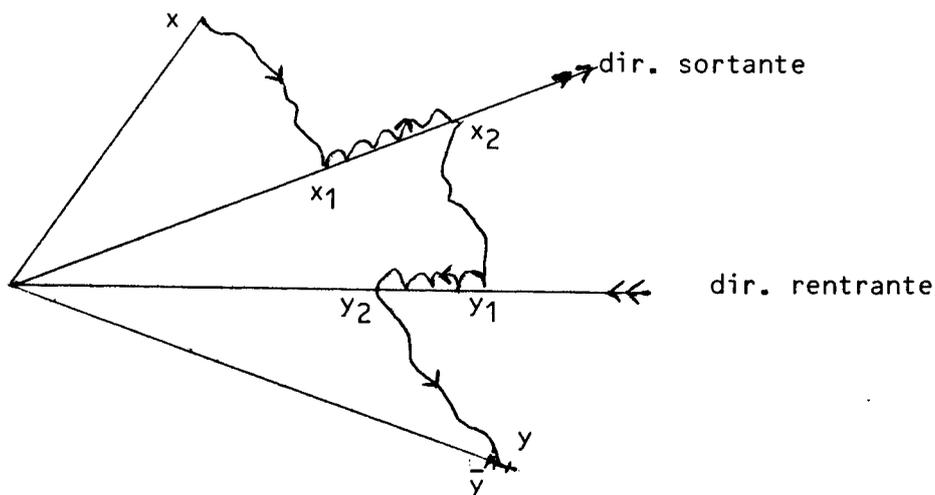
On ne donne ici que quelques éléments de démonstration.

La contrôlabilité directionnelle signifie que l'on peut transporter par $S(\mathcal{F})$ tout rayon-vecteur sur tout autre.

L'existence d'une direction sortante se traduit par la figure suivante



Soient x et y quelconques $\in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Montrons que $y \in \mathcal{A}(x)$. On sait ii) qu'on peut atteindre le rayon $\mathbb{R}^+ y$. On montre que le chemin dessiné ci-après joint x à un point arbitrairement près de y .



L'évolution du Log de la norme du point courant de ce chemin est la suivante :

$$\begin{array}{ll}
 x & \text{Log} \|x\| \\
 x_1 & \text{Log} \|x\| + d_1 \\
 x_2 & \text{Log} \|x\| + d_1 + p \text{Log} \mu \quad (p \in \mathbb{N}) \\
 y_1 & \text{Log} \|x\| + d_1 + p \text{Log} \mu + d_2 \\
 y_2 & \text{Log} \|x\| + d_1 + p \text{Log} \mu + d_2 + q \text{Log} \lambda \quad (q \in \mathbb{N}) \\
 y & \text{Log} \|x\| + d_1 + p \text{Log} \mu + d_2 + q \text{Log} \lambda + d_3
 \end{array}$$

x, y étant fixés, d_1, d_2, d_3 étant des constants, par hypothèse $\text{Log} \mu > 0$ et $\text{Log} \lambda < 0$, $\text{Log} \|\bar{y}\|$ s'écrit donc $p \text{Log} \mu + q \text{Log} h + \text{etc.}$
 si le rapport $\frac{\text{Log} \lambda}{\text{Log} \mu} \notin \mathbb{Q}$, en faisant varier (p, q) dans \mathbb{N}^2 ou parcourt l'ensemble dense du rayon $\mathbb{R}^+ y$.

Des arguments d'ouverture, utilisant la normale accessibilité permettent

- de supposer que le rapport $\frac{\text{Log} \lambda}{\text{Log} \mu}$ est irrationnel
- de montrer que l'on peut effectivement atteindre y .

Le fait de passer au Log est un artifice de calcul qui, en transformant les homothéties de \mathbb{R}^+ en translation de \mathbb{R} , permet d'utiliser la densité des sous-groupes de \mathbb{R} de la forme $p\alpha + q\beta$ ($(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{R}$).

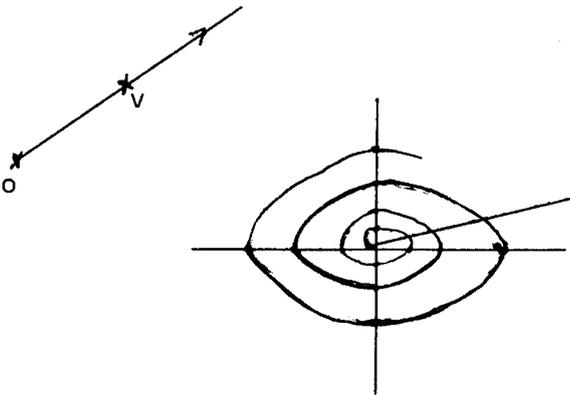
REMARQUE 1 (d'ordre partique).

Si un des éléments de \mathcal{F} a une valeur propre de partie réelle > 0 et si un des éléments de \mathcal{F} a une valeur propre de partie réelle < 0 alors la condition iii) est vérifiée.

En effet, soit h valeur propre réelle > 0 , alors il existe un vecteur

propre v tel que la droite vectorielle contenant v soit direction sortante.

• Soit λ valeur propre complexe de $\text{Re} > 0$, alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre et il existe un plan propre dans lequel les trajectoires sont des spirales se déroulant. Pour tout vecteur v de ce plan, la droite $\mathbb{R}v$ est donc direction sortante.



Le raisonnement est bien sûr identique pour des valeurs propres de partie réelle < 0 .

REMARQUE 2.

Les conditions i) et ii) sont redondantes ; on peut se limiter à

i)' \mathcal{F} vérifie la condition du rang en 1 point

ii)' \mathcal{F} est contrôlable suivant les directions.

En effet i)' et ii)' $\implies \mathcal{F}$ vérifie la condition du rang en tout point.

\mathcal{F} est une FCV linéaires, donc aussi $\text{Lie}(\mathcal{F})$.

Donc par linéarité si \mathcal{F} vérifie la condition du rang en 1 point y , elle la vérifie sur toute la droite pointée $\mathbb{R}^* y$.

Soit donc y , tel que $\text{rg}(\mathcal{F})$ en $y = n$ et soit z quelconque $\in S^{n-1}$. Puisqu'on a contrôlabilité directionnelle, $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que αy soit accessible depuis z .

$\mathcal{A}(\alpha y)$ est d'intérieur non vide et est inclus dans $\mathcal{A}(z)$.

$\mathcal{A}(z)$ est donc d'intérieur non vide, ce qui équivaut (puisque \mathcal{F} est analytique) à la condition du rang en z , et donc sur $\mathbb{R}^* z$. Enfin z ayant été choisi quelconque dans S^{n-1} , on a la condition du rang en tout point de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

II - Stabilité des propriétés d'accessibilité et de contrôlabilité pour une FCV linéaire.

La plupart des résultats suivants ne sont qu'une reformulation des résultats de Sussmann [29], dans un cas particulier. Cependant, de par le choix des champs linéaires, les démonstrations sont en général différentes et toujours plus simples.

L'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre n est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel normé. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on munit l'ensemble des familles de p matrices $(M_n(\mathbb{R}))^p$ de la topologie produit.

1°) ACCESSIBILITE.

PROPOSITION 1. *L'ensemble des familles \mathcal{F} de champs linéaires ayant la propriété d'accessibilité est ouvert.*

DEMONSTRATION. \mathcal{F} est une FCV linéaire, donc $\text{Lie}(\mathcal{F})$ également ; donc, on a :
 \mathcal{F} accessible $\forall x \in S^{n-1}$, $\dim \text{Lie}(\mathcal{F})(x) = n$.

Supposons \mathcal{F} accessible et soit x_1 quelconque $\in S^{n-1}$ il existe donc $M_1^1, M_2^1 \dots M_n^1$, matrices $\in \text{Lie}(\mathcal{F})$ tel que les vecteurs $M_1^1 x_1, M_2^1 x_1 \dots M_n^1 x_1$ soient libres. Ces vecteurs restent libres surtout 1 voisinage ouvert de x_1 dans \mathbb{R}^n , donc (par intersection avec S^{n-1}) également sur 1 voisinage ouvert U_1 de x_1 sur S^{n-1} . On recouvre S^{n-1} , compacte, par un nombre fini de tels ouverts U_i , voisinages de points x_i . Pour chaque ouvert U_i , il existe un nombre fini de champs $X_i^j \in \mathcal{F}$, qui engendrent, (au sens algèbre de Lie) les matrices $M_1^i \dots M_n^i$ et donc $\bigcup_{i,j} \{X_i^j\}$ est une famille finie, accessible, incluse dans \mathcal{F} .

Soit $\bar{\mathcal{F}}$ arbitrairement voisine de \mathcal{F} , les opérations d'algèbre de Lie étant continues, les matrices \bar{M}_k^i , homologues aux M_k^i (i.e. construites de la même manière) en sont arbitrairement proches. Donc, quitte à réduire U_i , les n vecteurs $\bar{M}_1^i x_i \dots \bar{M}_n^i x_i$ sont libres sur U_i . $\bar{\mathcal{F}}$ est donc accessible.

PROPOSITION 2 : L'ouvert défini ci-dessus est dense.

DEMONSTRATION. \mathcal{F} accessible contient au moins 2 éléments. Or, l'ensemble des couples de matrices qui engendrent comme algèbre de Lie $GL(n, \mathbb{R})$ est dense dans $(Mn(\mathbb{R}))^2$ (cf. [7]).

2°) CONTROLABILITE DIRECTIONNELLE.

L'ensemble $\widehat{M}_n(\mathbb{R})$ des projections sur S^{n-1} de champs linéaires sur \mathbb{R}^n , peut être muni d'une structure d'espace vectoriel normé.

En effet, la projection est linéaire :

- . $\widehat{\lambda A} = \lambda \widehat{A} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- . $\widehat{A+B} = \widehat{A} + \widehat{B}$.

D'autre part $||\widehat{A}|| = \max_{y \in S^{n-1}} ||\widehat{A}(y)||$ est une norme sur $\widehat{M}_n(\mathbb{R})$:

- . $||\widehat{A}|| = 0 \iff \widehat{A} = 0$
- . $||\lambda \widehat{A}|| = |\lambda| ||\widehat{A}||$
- . $||\widehat{A+B}|| \leq ||\widehat{A}|| + ||\widehat{B}||$

En effet, $\forall y \in S^{n-1} \quad ||\widehat{A}(y) + \widehat{B}(y)|| \leq ||\widehat{A}(y)|| + ||\widehat{B}(y)||$ d'où

$$\max_{y \in S^{n-1}} ||\widehat{A}(y) + \widehat{B}(y)|| \leq \max_{y \in S^{n-1}} (||\widehat{A}(y)|| + ||\widehat{B}(y)||) \leq \max_{y \in S^{n-1}} ||\widehat{A}(y)|| + \max_{y \in S^{n-1}} ||\widehat{B}(y)||$$

PROPOSITION : La propriété de controlabilité directionnelle, pour les FCV linéaires, est ouverte.

DEMONSTRATION. Soit \mathcal{F} une FCV linéaire, controlable suivant les directions. Cela signifie par définition que $\widehat{\mathcal{F}}$ est controlable sur S^{n-1} .

Soit $\widetilde{\mathcal{F}}$ arbitrairement proche de \mathcal{F} la projection : $Mn(\mathbb{R}) \rightarrow \widehat{Mn}(\mathbb{R})$
 $A \rightarrow \widehat{A}$

est une application linéaire, de $Mn(\mathbb{R})$ ev. de dimension finie dans $\widehat{Mn}(\mathbb{R})$; elle est donc continue. $\widehat{\widetilde{\mathcal{F}}}$ est donc arbitrairement proche de $\widehat{\mathcal{F}}$. Or, on sait, d'après Sussmann [29], que la controlabilité sur une variété compacte est ouverte, $\widehat{\widetilde{\mathcal{F}}}$ est donc controlable sur S^{n-1} .

3°) CONTROLABILITE.

PROPOSITION : *La propriété de controlabilité, pour les FCV linéaires est ouverte.*

DEMONSTRATION. On sait (cf. Jurdjevic-Sallet [18]) que si une FCV linéaire est controlable, on peut en extraire une sous-famille finie controlable. Par ailleurs, on a vu (I,3)) qu'une CNS de controlabilité (pour une FCV linéaire) est que

- \mathcal{F} soit controlable suivant les directions
- \mathcal{F} soit localement controlable en 1 point x_0 .

La première condition est ouverte.

La seconde est équivalente (cf. I, 1° b₁) (pour une famille dénombrable, donc, en particulier finie) à " x_0 normalement auto-accessible". Cette dernière condition est ouverte (cf; Sussmann [29]). Ce résultat nous permet d'exhiber un système de matrices sur \mathbb{R}^2 dont toutes les valeurs propres ont une $\text{Re} > 0$ et cependant transitif sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

En effet, intuitivement, les trajectoires d'un tel système ne peuvent que croître en norme, d'où impossibilité de "revenir vers 0". L'étude de ces systèmes sur le plan pointé, est l'objet du paragraphe suivant. L'exemple ci-dessous en est une motivation.

Considérons d'abord $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres sont respectivement $\neq i$ et $\pm \sqrt{3} i$.

Ce système est controlable :

- . condition du rang en un point
 - + controlabilité directionnelle
 - . A_1 et A_2 sont périodiques, donc Poisson-stables
- } \Rightarrow condition du rang en tout point.

d'où la controlabilité d'après le théorème de Lobey sur la Poisson-stabilité.

Perturbons A_1 et A_2 de façon que les Re des valeurs propres des matrices obtenues soient > 0 :

Par exemple

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -1 \\ 1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{v.p.} \quad \varepsilon_1 \pm i$$

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 & -z \\ 1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{v.p.} \quad \varepsilon_2 \pm i \quad z$$

puisque la propriété de controlabilité est ouverte, pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ suffisamment petits, $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2\}$ est encore transitif sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

REMARQUE. En fait un calcul numérique montre que le système reste controlable, même pour des perturbations assez importantes (jusqu'à $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,2$).

III - Controlabilité des couples de champs de vecteurs linéaires sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$

On se propose dans ce paragraphe, de mettre en oeuvre pratiquement le critère de Gauthier-Bornard pour déterminer la controlabilité de couples de champs de vecteurs linéaires sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Sous l'hypothèse de controlabilité directionnelle, la condition du rang se réduit au fait que les 2 champs soient libres en un point.

La propriété de controlabilité directionnelle, équivalente à la controlabilité sur S^1 du couple de champs projetés est facile à vérifier.

L'existence ou la non-existence de directions rentrante et sortante est déterminée soit de façon triviale, soit à l'aide d'un algorithme numérique de décision.

1°) CONDITION DU RANG.

Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire en dimension 2 et avec \mathcal{F} réduite à 2 champs A et B, les conditions i) et ii) du critère de Gauthier-Bornard sont équivalentes à :

- i) A et B sont libres en 1 point
- ii) \mathcal{F} est controlable suivant les directions

En effet, supposons A et B liés sur \mathbb{R}^2 . Alors $\forall x$, A et B sont tangents à la courbe intégrale de A, issue de x, donc $[A,B]$ également, ainsi que les crochets d'ordre supérieur, donc $\text{Lie}(\mathcal{F})(x)$ est de dimension 1, $\forall x$ on a donc contradiction.

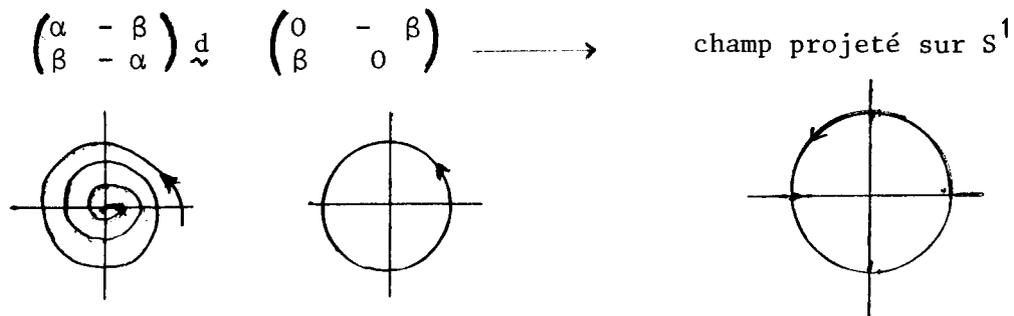
(D'autre part, on a vu que : condition du rang en 1 point + controlabilité directionnelle \Rightarrow condition du rang en tout point).

2°) POINT DE VUE DIRECTIONNEL.

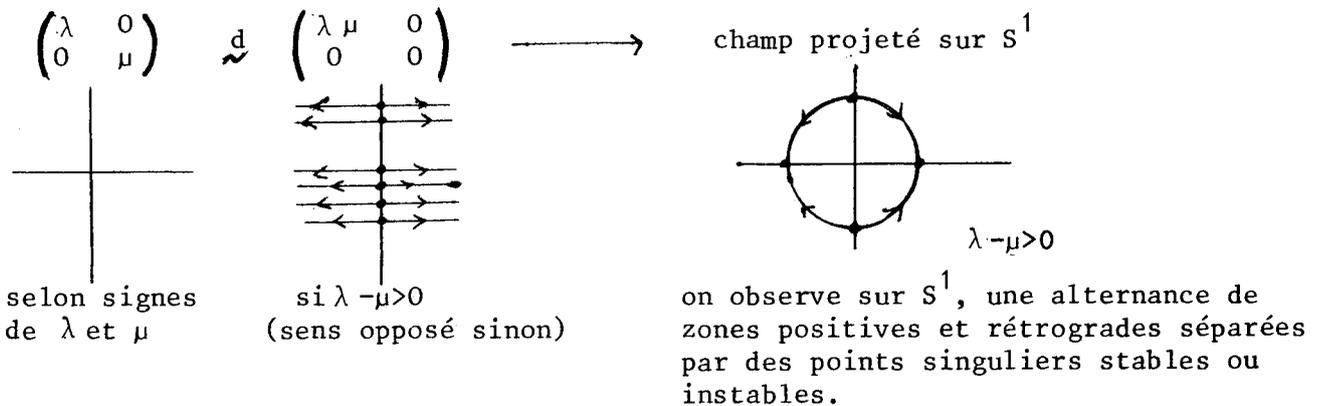
Rappelons que 2 champs linéaires sont directionnellement équivalents (noté \sim), s'ils diffèrent de αId , $\alpha \in \mathbb{R}$; Ils ont alors même projeté.

Du point de vue directionnel on distingue 2 types génériques et 1 type non générique de champs linéaires sur \mathbb{R}^2 .

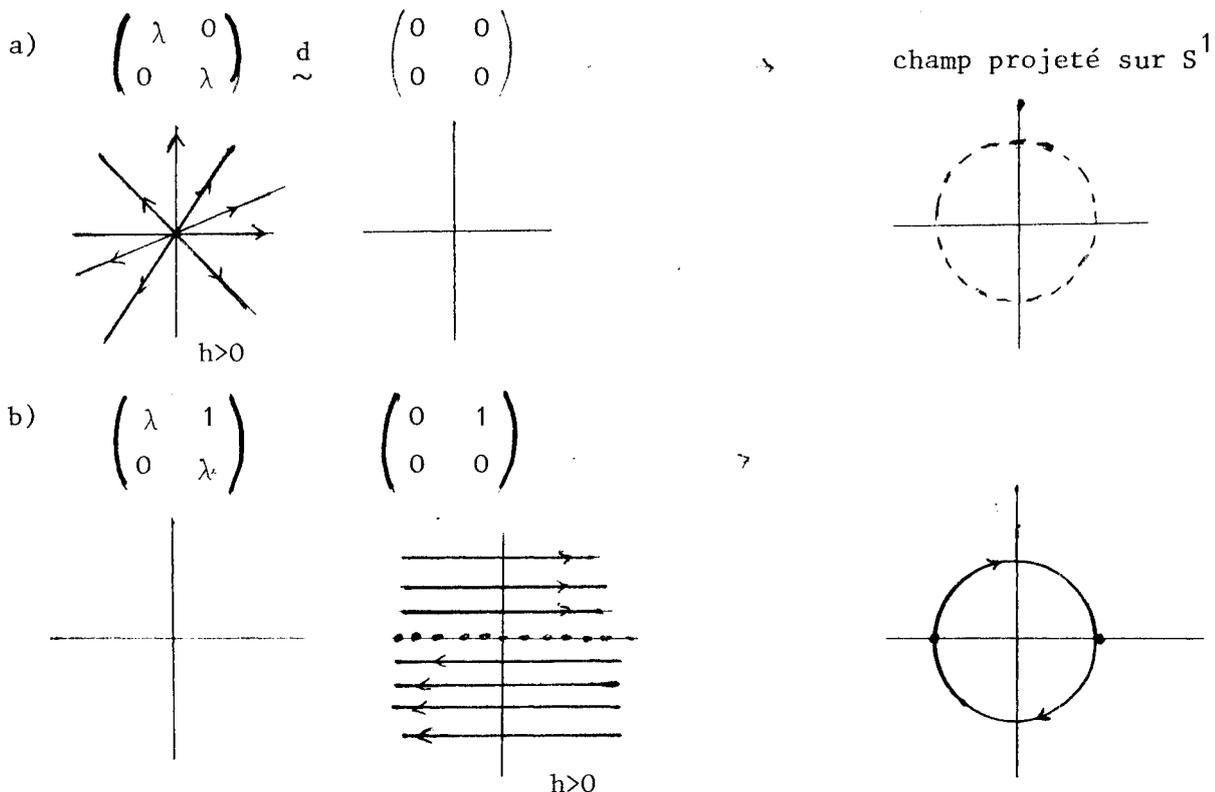
TYPE 1 . v.p. complexes conjugués



TYPE 2. 2 v.p. réelles différentes



TYPE 3 (non générique). 1 v.p. double



Un champ de type 3a) se projette sur le champ nul sur S^1 et ne peut donc donner lieu à contrôlabilité directionnelle pour 1 couple de champs. Les raisonnements appliqués dans la suite aux champs de type 2, peuvent parfaitement s'étendre aux champs de type 3b). On se limitera aux champs (génériques) de types 1 et 2.

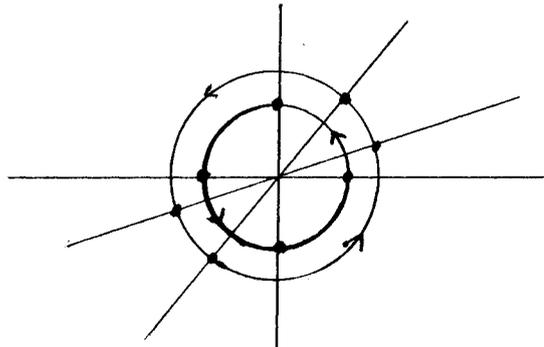
Critère de contrôlabilité directionnelle.

1 couple $\{A, B\}$ de champs linéaires sur \mathbb{R}^2 est contrôlable suivant les directions si et seulement si

- i) A ou B est de type 1.
- ii) la réunion des zones positives (ou rétrogrades) de A et B est égale à S^1 .
ou, on a alternance, sur S^1 , de points singuliers stables et instables.

On symbolise graphiquement la propriété ii), de la façon suivante :

Les champs projetés \hat{A} et \hat{B} sont figurés sur 2 cercles concentriques, \hat{A} sur le cercle intérieur, \hat{B} sur l'autre ; on obtient le schéma :



DEMONSTRATION DU CRITERE.

On a contrôlabilité directionnelle, si l'on peut au moyen des trajectoires de $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ parcourir le cercle S^1 entièrement.

i) évident.

ii) si l'une des 2 conditions (équivalentes) n'est pas vérifiée on constate l'existence d'"intervalles curvilignes" de S^1 dont on ne peut sortir avec les champs \hat{A} et \hat{B} .

CONSEQUENCE IMMEDIATE SUR LA CONTROLABILITE.

Si parmi les 4 valeurs propres de A et de B, il en existe une à $Re > 0$ et une autre à $Re < 0$, on est en mesure de conclure quasi-instantanément quant à la contrôlabilité du couple $\{A, B\}$.

En effet, on a alors les directions rentrante et sortante du théorème de Gauthier-Bornard ; il suffit donc de vérifier la condition du rang (cf. i)) et la contrôlabilité directionnelle, en utilisant le critère ci-dessus. Pour conclure, on procède la façon suivante :

- . vérifier que les champs A et B sont libres en 1 point.
- . calculer les valeurs propres de A et de B et vérifier que l'une est à $Re > 0$, et une autre à $Re < 0$.
- . si A ou B est de type 1, alors : contrôlabilité
- . sinon . situer sur S^1 et déterminer la nature des points singuliers de A et de B.
 - s'il y a alternance de points singuliers attractifs et répulsifs alors : contrôlabilité
 - sinon : non contrôlabilité.

Donc, dans le cas où les parties réelles des 4 valeurs propres de A et de B ne sont pas de même signe, on peut déterminer très aisément si le couple {A,B} est controlable ou non.

Restent donc à examiner les cas :

4 v.p. à $\text{Re} \geq 0$

4 v.p. à $\text{Re} \leq 0$.

On se limitera à l'étude du 1er cas. En effet dans le second cas, on s'intéressera à la controlabilité du système opposé, dont les 4 valeurs propres sont à $\text{Re} \geq 0$. (Un système et son opposé sont simultanément controlables).

On peut immédiatement régler le cas où les Re des 4 valeurs propres sont nulles : sans l'hypothèse de la condition du rang (ce qui exclut 1 champ nul), les champs A et B sont de type 1 et périodiques, on a donc controlabilité d'après le théorème de Lobry sur la Poisson-stabilité.

3°) ALGORITHME DE DETERMINATION DE LA CONTROLABILITE.

* Dans tout ce paragraphe, on étudie les cas où les 4 valeurs propres de A et de B sont à $\text{Re} \geq 0$; on suppose en outre que l'une (au moins) d'entre elles est à $\text{Re} > 0$.

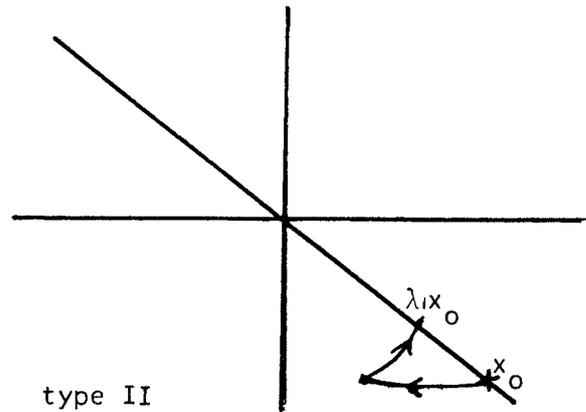
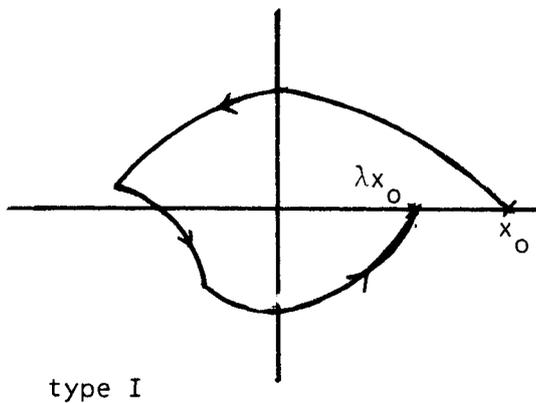
. On a donc immédiatement la direction sortante du critère de Gauthier-Bornard.

. On se place systématiquement dans la base propre de A et on munit \mathbb{R}^2 de la structure euclidienne associée à cette base c'est-à-dire que $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$, de coordonnées $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, on définit le produit scalaire :

$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$. On représentera donc la base propre de A orthonormée. Ceci ne restreint pas la généralité du raisonnement puisque un changement de base n'affecte pas la controlabilité. Dans ces conditions les trajectoires de A sont toujours croissantes en norme (v.p > 0).

* Ceci posé, le problème se résume donc (une fois vérifiée la condition du rang - cf 1/ , et une fois déterminée si l'on a controlabilité directionnelle au moyen du critère simple indiqué au 2/) à prouver l'existence ou la non-existence d'une direction rentrante.

On cherchera donc à former une "boucle rentrante", c'est-à-dire une trajectoire du système qui issue d'un point x_0 , revient sur le rayon $\mathbb{R}^+ x_0$, en $\lambda \cdot x_0$ d'un avec $0 < \lambda < 1$ (i.e. après décroissement de la norme). cf. dessins :



REMARQUE. On constatera, en étudiant tous les cas possibles, que si elle existe, la boucle rentrante est forcément d'un des deux types ci-dessus.

A/ Principe et premiers pas de l'algorithme.

* On développe une méthode, de type algorithme numérique, qui consiste grossièrement, à construire la "meilleure boucle" en ce sens qu'en tout point de cette boucle, la norme est le plus possible décroissante ou le moins possible croissante.

On prend alors la décision de la manière suivante :

. si cette meilleure boucle correspond à un décroissement en norme :
alors on a trouvé la direction rentrant du critère de Gauthier-Bornard d'où controlabilité

. sinon, il n'existe pas de direction rentrante d'où non controlabilité.

* En pratique, on mesure le caractère rentrant ou sortant (que l'on nommera rentrance ou sortance), ou tangent d'un champ linéaire M en un point x de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, par le cosinus de l'angle (Mx, x)

$$\text{i.e.} \quad \frac{\langle Mx, x \rangle}{\|Mx\| \|x\|} .$$

Cette fonction est homogène sur \mathbb{R}^2 , et donc $\forall x_0 \in S^1$, le caractère rentrant ou sortant de M sur le rayon $\mathbb{R}^+ \cdot x_0$ est constant et égal à

$$\frac{\langle M x_0, x_0 \rangle}{\|M x_0\|}$$

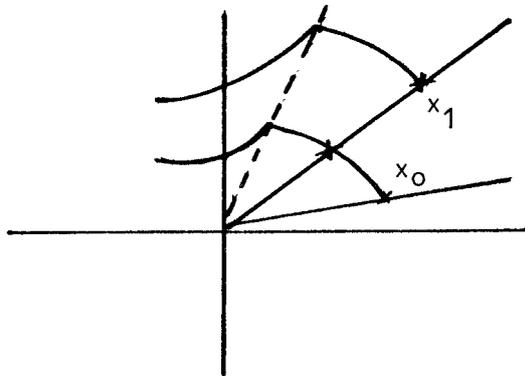
On dira que, (pour $x \in S^1$) :

. A est plus sortant que B sur $\mathbb{R}^+ \cdot x$ si $\frac{\langle Ax, x \rangle}{\|Ax\|} > \frac{\langle Bx, x \rangle}{\|Bx\|} > 0$

. A est plus rentrant que B sur $\mathbb{R}^+ \cdot x$ si $0 < \frac{\langle Bx, x \rangle}{\|Bx\|} < \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|Ax\|}$

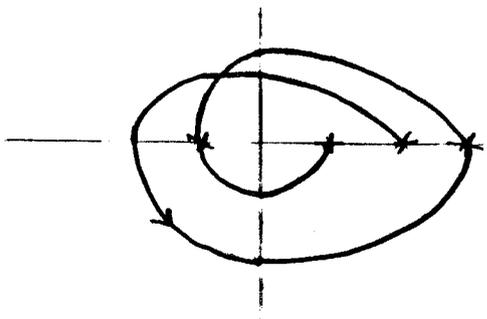
* Le sens de rotation, ainsi que le caractère rentrant ou sortant d'un champ linéaire sur \mathbb{R}^2 , sont constants sur chaque rayon vecteur, c'est pourquoi, lors de la construction d'une meilleure boucle, le contrôle optimal (i.e. le choix champ A ou champ B) ne dépend que de la coordonnée angulaire du point de la trajectoire.

. En particulier, lorsqu'on est amené, à construire une boucle de type I,



la coordonnée angulaire d'un point initial est sans importance. En effet, le choix du contrôle optimal, ne dépendant que de l'angle, les "meilleures boucles" issues de 2 points x_0 et x_1 , sont des trajectoires homologues du système et sont donc homothétiques.

. Pour la même raison, une boucle optimale ne peut "tourner plus d'une fois" autour de 0.



La figure ci-contre est impossible. Les 2 tronçons correspondant aux 2 tours successifs ne sont pas homothétiques.

* Les 2 premiers pas de l'algorithme seront invariablement les suivants

1 pas . Vérifier la condition du rang (qui assure que les 2 champs sont $\neq 0$) et la controlabilité directionnelle.

2 pas . Vérifier si le 2e champ B admet des zones rentrantes, i.e. s'il existe sur S^1 des points en lesquels B est rantrant. ($\langle Bx, x \rangle < 0$).

Dans le cas contraire, on ne peut former de boucle rentrante, donc non controlabilité.

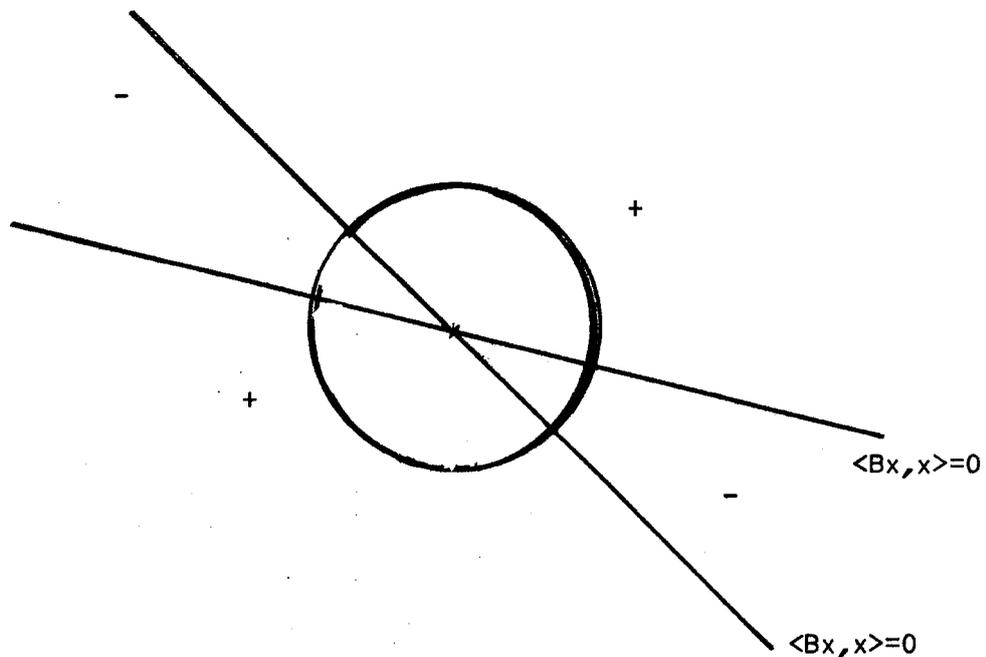
Cette dernière vérification revient à un calcul élémentaire.

Posons $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, d'où $\langle Bx, x \rangle = ax_1^2 + dx_2^2 + (b+c)x_1x_2$ considérant cette expression comme un trinôme en x_2 , on forme $\Delta x_1^2 = ((b+c)^2 - 4ad)x_1^2$.

. si $\Delta < 0$ le trinôme est de signe constant ; ce signe est + , puisque par hypothèse, les valeurs propres de B sont à $\text{Re} \geq 0$.

. si $\Delta \geq 0$, il existe 2 zones coniques rentrantes dans \mathbb{R}^2 , délimitées par les droites d'équation $\langle Bx, x \rangle = 0$.

$$\text{i.e. } x_2 = \frac{-(b+c) \pm \sqrt{\Delta}}{2d} x_1$$



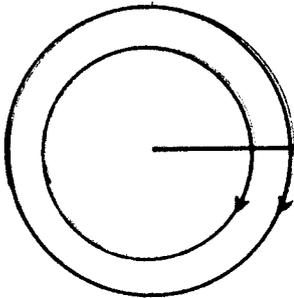
B/ Etude cas par cas.

Après ces 2 vérifications préliminaires, il convient de distinguer différents cas selon le type topologique des champs A et B.

Dans la suite, on symbolisera les champs par leurs projections sur S^1 , que l'on représentera sur 2 cercles concentriques (intérieur pour A, extérieur pour B), et on déterminera le contrôle optimal à l'aide du schéma obtenu.

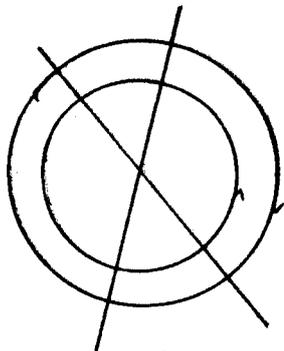
1 CAS - 2 champs spirales (type 1)

a) Les 2 champs ont même sens de rotation.



On cherche à former 1 boucle de type I.
On choisit à chaque instant le champ le plus rentrant, ou, à défaut, le moins sortant : "choix selon le meilleur cosinus".
(En particulier, on prendra systématiquement B, dans ses zones rentrantes).

b) Les 2 champs ont des sens de rotation opposés.



On cherche à former 1 boucle de type II.
On est dans la base propre de A.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

La sortance de A est constante sur \mathbb{R}^2 .

En effet la fonction homogène sur \mathbb{R}^2

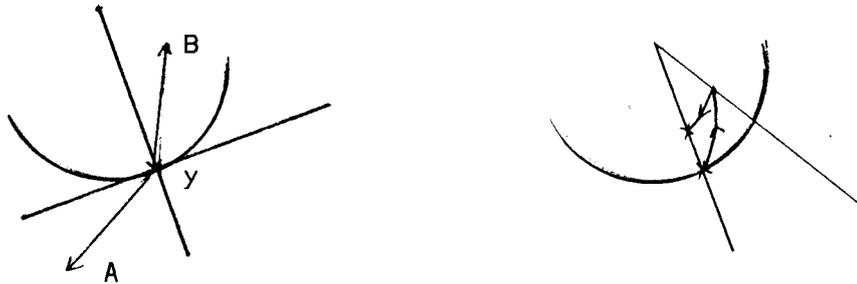
$$x \rightarrow \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|Ax\| \|x\|} \text{ est constante sur } S^1 ;$$

$$\text{Soit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \in S^1, \text{ on a } \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|Ax\| \|x\|} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = s(A).$$

On détermine alors numériquement, la maximum de rentrance de B : $\max |r(B)|$.
 Si $\max |r(B)| > s(A)$ (i.e. si il existe un point y d'une zone rentrante de B, tel que, en ce point, B soit strictement plus rentrant que A n'est sortant) alors il existe une boucle de type II.

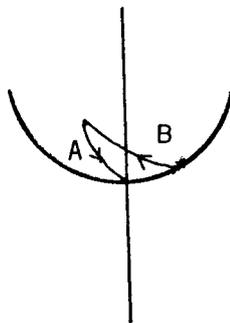
En effet, par continuité, il existe un voisinage conique ouvert de \mathbf{R}^+ y dans lequel cette propriété reste vraie.

On obtient la boucle en commutant une fois de façon quasi-instantanée (i.e. au bout d'un temps très court).

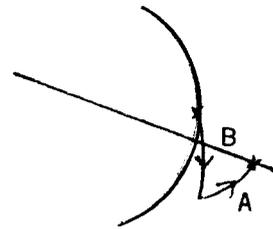


Si la condition $\max |r(B)| > s(A)$ n'est pas vérifiée, on est amené à former une boucle de type I.

- . sans commutation, on obtient par hypothèse un accroissement en norme (v.p. à $\text{Re} \geq 0$).
- . avec une ou plusieurs commutations (on choisit un sens global de rotation) :



commutation dans 1 zone rentrante de B.

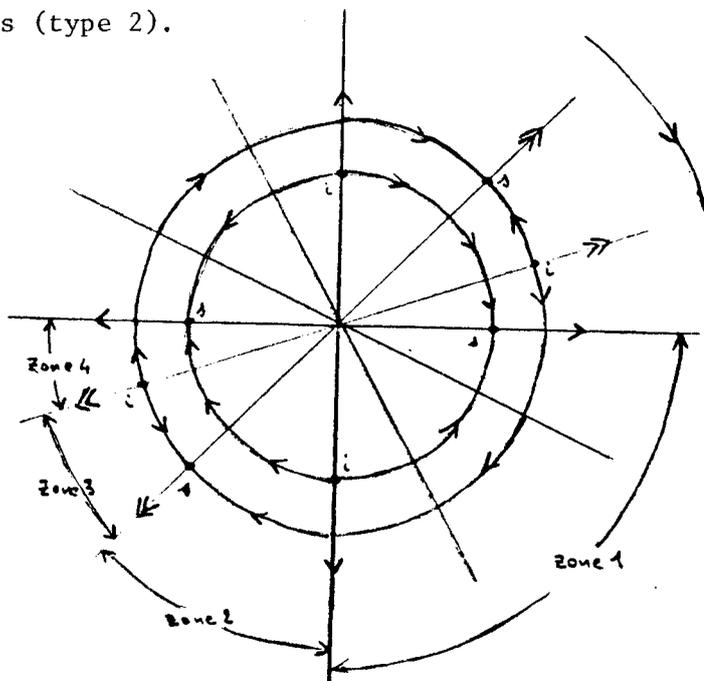


commutation hors des zones rentrantes de B.

Dans tous les cas une commutation ne peut entraîner qu'un accroissement de la norme (cf. dessus).

Il est donc impossible de former une boucle de type I rentrante.

2° CAS . 2 champs réels (type 2).



* Par hypothèse on a controlabilité directionnelle ; les axes propres de B ne sont donc pas entrelacés avec ceux de A. (On a, pour le système projeté sur S^1 , alternance de points singuliers stables (s) et instables (i)).

On constate qu'on ne peut faire un tour complet (i.e. parcourir S^1 pour le système projeté) que dans un sens, que l'on appellera sens de rotation du système.

* Zones rentrantes de B.

. Elles sont incluses dans les secteurs délimités par les directions propres ; en effet par hypothèse sur les directions propres $\langle Bx, x \rangle = h \|x\|^2 \geq 0$.

. Montrons qu'elles sont situées dans les secteurs obtus.

Soient v_1, v_2 les vecteurs propres de B, λ_1, λ_2 les v.p. correspondantes (≥ 0).

Soit $x \in$ a 1 secteur aigu de B

$$x = \alpha v_1 + \beta v_2 \quad \alpha, \beta \geq 0 \text{ (ou } \alpha, \beta \leq 0)$$

$$Bx = \alpha \lambda_1 v_1 + \beta \lambda_2 v_2$$

$$\text{donc } \langle Bx, x \rangle = \lambda_1 \alpha^2 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2 \beta^2 \langle v_2, v_2 \rangle + \alpha\beta(\lambda_1 + \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle.$$

$$\geq 0 \qquad \qquad \qquad \geq 0 \qquad \qquad \qquad \geq 0$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \|v_2\| \cos(\widehat{v_1, v_2}) \geq 0 \text{ car } (\widehat{v_1, v_2}) \text{ aigu}.$$

a) On cherche à former 1 boucle de type II.

La méthode s'apparente au 1er cas b).

On détermine numériquement si il existe un point d'une zone rentrante de B, tel que en ce point

- . A et B aient des sens de rotation opposés
- . B soit strictement plus rentrant que A n'est sortant.

On forme de nouveau la boucle, en commutant quasi-instantanément.

b) Si on ne peut former de boucle rentrante, à l'aide de la procédure ci-dessus, on cherche à former 1 boucle de type I.

On choisit bien sur le sens de rotation du système. On prend comme point initial (1,0).

Le contrôle est déterminé en fonction de la zone angulaire (cf. dessin).

- . zone 1 : champ B car sens de rotation correct et le champ A ramène sur l'axe Ox, avec accroissement en norme.
- . zone 2 : choix selon le meilleur cosinus.
- . zone 3 : champ A (cf. zone 1).
- . zone 4 : choix selon le meilleur cosinus.

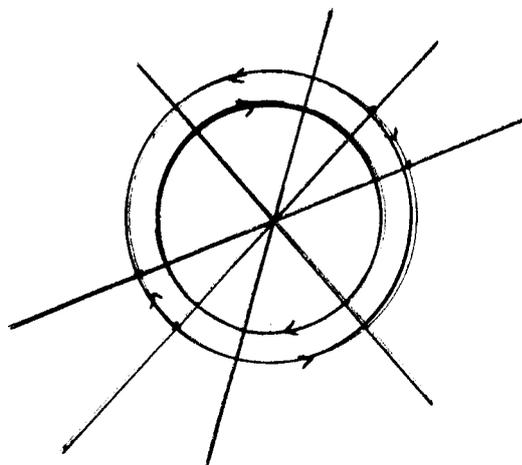
(même chose, par symétrie dans le 2° demi-espace).

En résumé . si sens de rotation opposés : choix du champ dont le sens de rotation est celui du système.

. si même sens de rotation : choix selon le meilleur cosinus.

3° CAS . 1 champ spirale + 1 champ réel (type 1 + type 2).

a) Dans les zones rentrantes de B, les sens de rotation sont opposés.

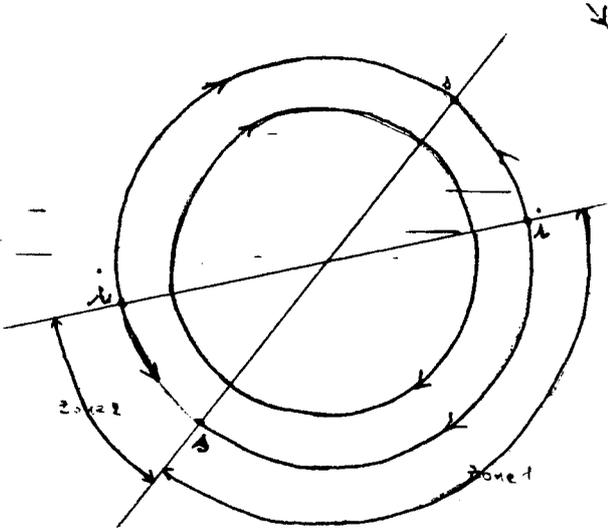


On cherche à former 1 boucle de type II.

La méthode est exactement la même qu'en 1er cas. b).

De la même manière qu'en 1er cas b) il est impossible de former 1 boucle de type I rentrante.

b) Dans les zones rentrantes de B, les champs ont même sens de rotation.



Le sens de rotation du système est celui du champ spirale A. On cherche à former 1 boucle de type I.

- . zone 1 : choix selon le meilleur cosinus.
- . zone 2 : champ A (spirale) car sens de rotation correct et le champ entraîne 1 retour avec accroissement en norme.

(même chose par symétrie dans le 2^o demi-espace).

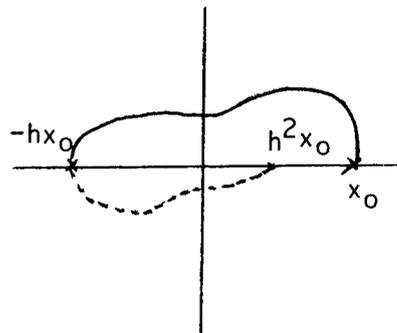
REMARQUE 1 (pratique).

Lorsque l'on construit une boucle de type I, il suffit en fait de former une demi-boucle. Ceci provient du fait que le contrôle optimal est symétrique par rapport à 0. (car les champs linéaires et donc leurs trajectoires le sont aussi). Donc la boucle optimale issue du point x_0 s'écrit

$$M^2 x_0 = h^2 x_0 \quad \text{avec } M \in S\{A_1, A_2\} \quad (M \text{ correspond au parcours d' } 1/2 \text{ tour)}$$

et x_0 vecteur propre pour M^2 , l'est aussi pour M et on a $M x_0 = -|h| x_0$

En particulier si $h^2 < 1$ (boucle rentrante) alors $|h| < 1$ (1/2 boucle rentrante) et réciproquement.



REMARQUE 2.

En pratique l'algorithme impose d'effectuer numériquement différents calculs tels que : intégration de systèmes différentiels (boucle de type I), recherche de maxima (boucle de type II). On est donc amené à procéder par discrétisation, d'où erreur, d'où risque d'erreur dans la décision. (Par exemple si l'on obtient une boucle optimale de type I, telle que $M^2 x_0 \quad x_0$, on ne peut conclure significativement). Pour remédier à cela on doit choisir des méthodes de calcul convergentes (i.e. dont l'erreur tend vers 0, quand le pas de discrétisation tend vers 0).

CONSEQUENCE IMPORTANTE.

La controlabilité du système bilinéaire sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$:

$$\dot{x} = (A + u B) x \quad \text{avec } u \text{ borné, } u(t) \in [\alpha, \beta]$$

équivalent, d'après les techniques d'extension à celle du couple de champs de vecteurs linéaires $\{A + \alpha B, A + \beta B\}$. On saura donc, par la méthode développée dans ce paragraphe déterminer la controlabilité d'un tel système, et on aura alors controlabilité bang-bang.

D'autre part, on sait, au moyen des schémas utilisés dans l'algorithme, contrôler le système suivant les directions et former des "boucles rentrante et sortante". On a donc rendu le théorème de Gauthier-Bornard constructif en dimension 2, puisqu'on sait effectivement construire une trajectoire reliant 2 points arbitrairement choisis dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

IV - Mariage de champs linéaires sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

Rappelons que le problème du mariage consiste, étant donné un champ A, à lui adjoindre un champ B, tel que la paire $\{A, B\}$ soit controlable.

On ne considérera ici que des champs linéaires génériques en 1 sens précisé plus bas. Ceci restreint peu l'intérêt du problème puisqu'on a vu que la propriété de controlabilité est ouverte.

Ce paragraphe constitue également une application du théorème de Gauthier-Bornard.

1°) POINT DE VUE DIRECTIONNEL.

On distinguera 2 types de champs.

* Type 1 (2 v.p. complexes conjuguées et 1 v.p. réelle)

Un tel champ a pour matrice dans sa base propre :

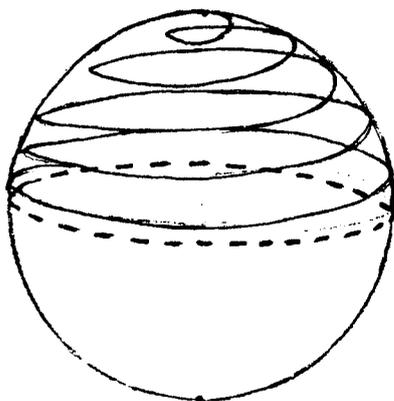
$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \\ & & \gamma \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \\ & & \gamma - \alpha \end{pmatrix}$$

Du point de vue directionnel un champ de type 1 est donc caractérisé par la donnée de sa base propre et des réels β et $\gamma - \alpha$. On le dira générique si ces 2 réels sont non nuls.

Allure des trajectoires du champ projeté sur S^2 .

L'axe propre correspondant à la valeur propre réelle γ donne naissance à 2 points singuliers aux pôles). Les trajectoires spirales dans le plan propre associé aux valeurs propres complexes conjuguées se projettent sur l'équateur.

Les autres trajectoires sont des spirales de S^2 , dont le sens et la vitesse de translation verticale sont déterminés par $\gamma - \alpha$, le sens et la vitesse de rotation par β . Les points singuliers sont attractifs et l'équateur répulsif si $\gamma - \alpha > 0$, et vice versa si $\gamma - \alpha < 0$.



La base propre est représentée orthonormée.

* Type 2 (3 v.p. réelles).

Un tel champ a pour matrice dans sa base propre

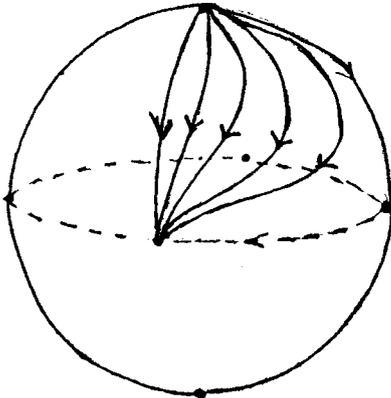
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & & \\ & \lambda_2 - \lambda_3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose les 3 valeurs propres différentes.

Du point de vue directionnel, un champ de type 2 est donc caractérisé, par la donnée de sa base propre et des réels $\lambda_1 - \lambda_3$ et $\lambda_2 - \lambda_3$. On le dira générique si ces 2 réels sont distincts (et les λ_i différentes).

Allure des trajectoires du champ projeté sur S^2 .

Chaque axe propre donne naissance à 2 points singuliers. Le couple de points singuliers attractifs correspond à la plus grande valeur propre.



La base propre est représentée orthonormée.

2°) MARIAGE POUR LA CONTROLABILITE DIRECTIONNELLE

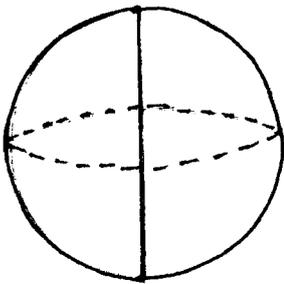
PROPOSITION : Etant donné 1 champ générique linéaire A , de type 1 ou 2, on sait lui associer un champ B de type 2 tel que la paire {A,B} obtenue soit controlable suivant les directions.

Nous allons démontrer cette proposition de façon essentiellement géométrique.

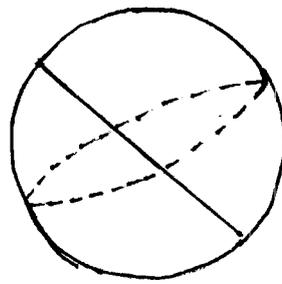
DEMONSTRATION.

Dans tous les cas, on se place dans la base propre du 1er champ A, que l'on représente orthonormée. En d'autres termes, on munit \mathbb{R}^3 de la structure euclidienne associée à la base propre de A. Ceci ne restreint pas la généralité de la démonstration puisque un changement de base n'affecte pas la contrôlabilité.

1er cas. Le champ A est de type 1.



champ A



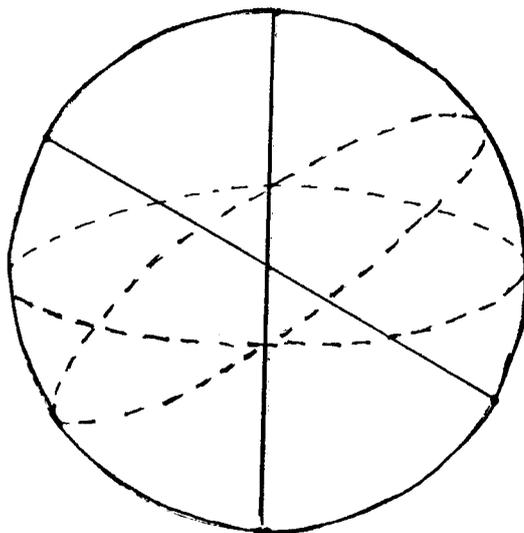
champ B

Le champ B est tel que

- ses éléments singuliers (équateur et points singuliers) sont de nature opposée à ceux de A.

- les 4 points singuliers (de A et de B) sont de part et d'autre de la réunion des 2 équateurs.

(cf. dessin).



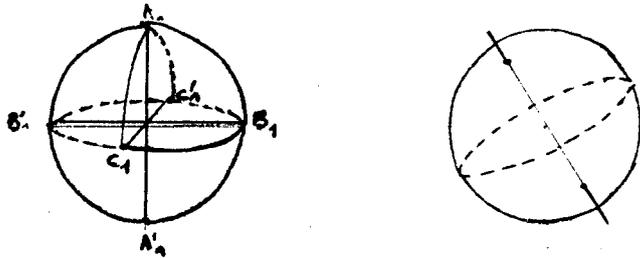
Soit E la réunion des 2 équateurs.

La paire $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ obtenue est contrôlable car :

- . on a contrôlabilité sur E .
- . tout point de S^2 peut être recalé sur E . (lun des 2 équateurs est attractif ; toute spirale tendant vers cet équateur, coupe l'autre).
- . depuis E , on peut atteindre tout point de S^2 . En effet il suffit de considérer le système opposé et de lui appliquer le raisonnement ci-dessus.

On note que les points singuliers n'étant pas communs aux 2 champs, ils peuvent être recalés et atteints.

2ème Cas. Le champ A est de type 2.



A_1 et A_1' sont attractifs.

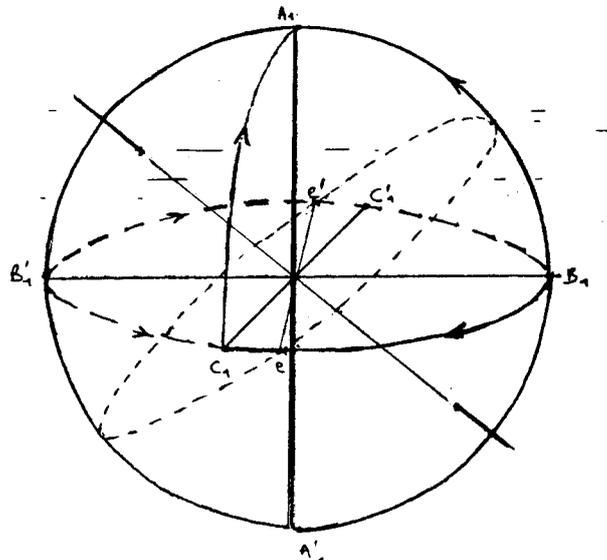
On choisit le champ B de telle sorte que :

- . points singuliers et équateur de B soient de part et d'autre de l'équateur horizontal (cf. dessin)
- . l'équateur de B soit attractif.

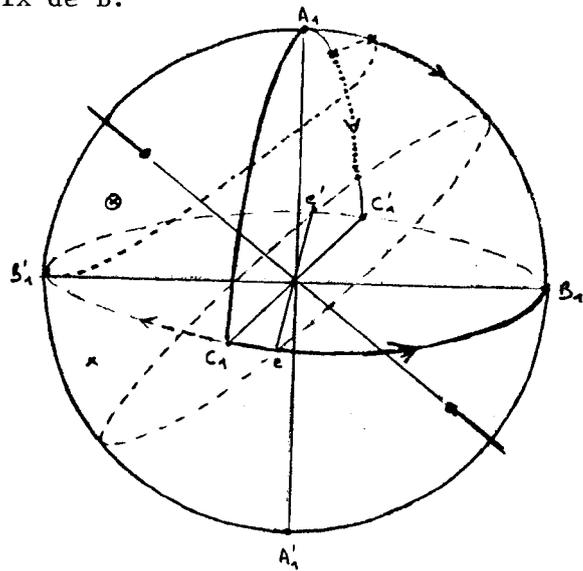
Notons E l'équateur de B .

La paire $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ est contrôlable car

- . tout point de S^2 peut être recalé sur E .



En effet toute spirale de \hat{B} en tendant vers E vient couper l'arc $\overrightarrow{B'_1, e'}$ si elle est issue d'un point au-dessus de E , l'arc $\overrightarrow{B_1, e}$ sinon.
 . pour le système opposé, tout point peut également être recalé sur E , moyennant un bon choix de B .



Il suffit, outre les caractéristiques géométriques déjà citées, de choisir B suffisamment tournant (i.e. $|\beta|$ suffisamment grand) pour que la spirale (montante, de \hat{B}) issue de B'_1 coupe un des deux arcs $\overrightarrow{A_1 C'_1}$ ou $\overrightarrow{A_1 B_1}$, i.e. passe "strictement sous A_1 " (cf. dessin).

En effet, plaçons-nous sur la demi-sphère "au-dessus" de E.

. Toute spirale de $-\hat{B}$ issue d'un point du secteur sphérique sous l'équateur horizontal (symbole \otimes sur le dessin) coupe nécessairement cet équateur.

Les trajectoires de A sur l'équateur horizontal amènent alors le point d'intersection en e ou au voisinage de B_1' .

. Tout point du secteur sphérique au-dessus de l'équateur horizontal (symbole \otimes sur le dessin) peut être recalé par $-\hat{A}$ au voisinage de B_1' (puisque B_1' et B_1 sont points singuliers attractifs de $-\hat{A}$).

Puisque B a été choisi de telle sorte que la spirale de $-\hat{B}$ issue de B_1' passe strictement sous A_1 , (condition ouverte), ceci reste vrai pour un voisinage suffisamment petit de B_1' . On a vu que l'on peut recalé tout point de l'hémisphère au-dessus de E, en un tel voisinage. Depuis ce voisinage toute spirale de $-\hat{B}$ coupe $]A_1, C_1[$ ou $]A_1, B_1[$, lesquels coupent E. (cf. dessin).

Le raisonnement serait le même, par symétrie, pour l'hémisphère "au-dessous" de E.

3°) PRINCIPE DE SOLUTION AU PROBLEME DU MARIAGE.

a) Etant donné un champ générique A, on sait, d'après 2 lui associer un champ B de type 1, tel que la paire $\{A, B\}$ obtenue soit contrôlable suivant les directions.

b) Soit \mathcal{B} , la classe des champs équivalents à B_0 du point de vue directionnel : $\mathcal{B} = \{B_0 + \alpha \text{Id}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. On choisit un élément B_1 de \mathcal{B} tel que parmi les six valeurs propres de A et de B_1 , l'une soit de $\text{Re} < 0$. un autre de $\text{Re} < 0$. (ceci est toujours possible, puisque pour α suffisamment grand en valeur absolue, les valeurs propres de $B_0 + \alpha \text{Id}$ sont proches de α). On est alors assuré (cf. p. 22) de l'existence des directions rentrante et sortante, pour la FCV $\{A, B\}$.

c) Puisque $\{A, B_1\}$ est controlable suivant les directions, il suffit de vérifier la condition du rang en un point. Si tel n'est pas le cas pour $\{A, B_1\}$, il existe une petite perturbation sur B_1 , telle que la paire $\{A, B\}$ obtenue soit à la fois controlable suivant les directions (la controlabilité directionnelle est ouverte), et accessible (les paires de matrices accessibles, forment un ensemble dense).

Les trois hypothèses du critère de Gauthier-Bornard sont alors vérifiées, $\{A, B\}$ est donc contrôlable.

4°) SOLUTION CONSTRUCTIVE.

On a vu en 2°) et 3°) qu'étant donné un champ générique, il existe une large classe de partenaires répondant au problème du mariage.

On se propose ici de construire effectivement un tel partenaire.

1er CAS . A est du type 1

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & \\ \beta & \alpha & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \quad \beta \neq 0, \gamma \neq 0, \alpha \neq \gamma$$

on pose $B = \begin{pmatrix} -\gamma & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$

alors $\mathcal{F} = \{A, B\}$ est controlable.

DEMONSTRATION. Condition du rang en un point . (e₁).

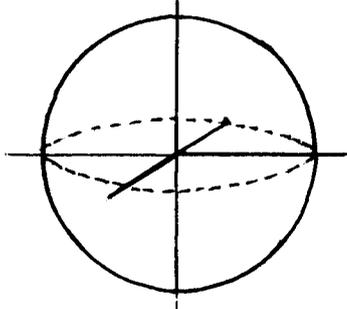
Le rang des vecteurs Ae_1 , Be_1 et $[A, B]e_1$ est donné par

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\gamma & 0 \\ \beta & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = \gamma\beta^2 \neq 0 \implies \text{rg } 3.$$

. controlabilité directionnelle

Soit E la réunion des 2 équateurs.

Toute spirale de A,B, -A ou -B coupe l'un des deux équateurs .



Tout point de S^2 peut donc être recalé sur E par \mathcal{F} , comme par $-\mathcal{F}$.

On a donc controlabilité directionnelle.

Directions rentrante et sortante.

Ce sont les axes Oz et Ox qui correspondent aux valeurs propres de signes opposés γ et $-\gamma$.

2e CAS . A est de type 2

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

On construit un champ spirale dont l'équateur passe par le point singulier correspondant à la plus petite valeur propre de A, i.e. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On applique à la base canonique la rotation d'angle $\pi/4$ et d'axe Ox, de matrice P. Supposons λ_1 et λ_2 non nulles (il existe forcément deux valeurs propres non nulles).

On pose alors dans la base obtenue $B' = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & +\lambda_1 & \\ -\lambda_1 & -\lambda_1 & \\ & & -h_2 \end{pmatrix}$

et on prend $B = PB'P^{-1}$ alors $\mathcal{F} = \{A,B\}$ est controlable.

DEMONSTRATION

. Condition du rang 1 en un point. (e_1)

Le rang des vecteurs Ae_1 , Be_1 et $[A,B]e_1$ est donné par :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda_1 \frac{\sqrt{2}}{2} (1+h_2) \\ 0 & -\lambda_1 \frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda_1 \frac{\sqrt{2}}{2} (1+h_3) \end{vmatrix} = \frac{\lambda_1^3}{2} (\lambda_2 - \lambda_3) \neq 0 \Rightarrow \text{rg } 3$$

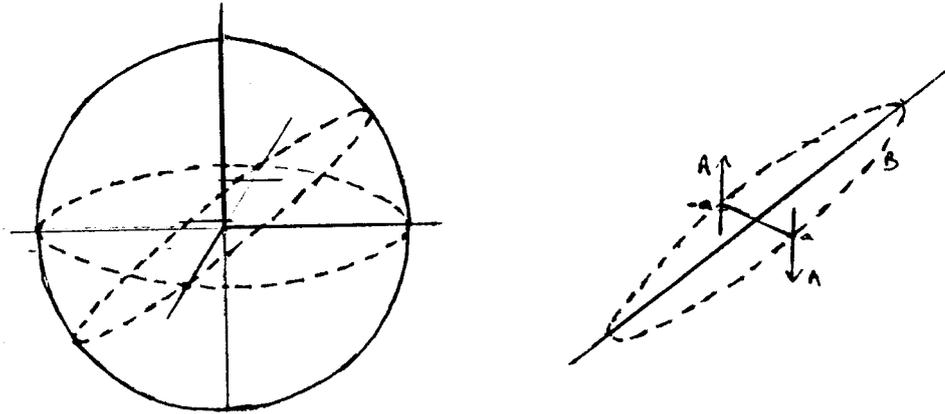
. Controlabilité directionnelle.

B est un champ spiral à équateur attractif car $-\lambda_2 + \lambda_1 < 0$.

Soit E cet équateur.

- tout point de S^2 peut être recalé sur E.

En effet, sur l'équateur E, il existe un point a en lequel A est transverse à E. (Sinon A serait tangent en tout point de E, le plan équatorial serait donc stable par A et B, ce qui contredit la condition du rang en e_1 qui est dans ce plan).



en -a, le vecteur -Aa est symétrique.

Donc les spirale de B, en s'approchant de E coupent les trajectoires de A au voisinage de $\overset{+}{-} a$ auxquelles coupent E.

Tout point peut être recalé sur E, par le système opposé.

$\overset{+}{-} e_1$ sont points attractifs de -A.

Les trajectoires de $-A$ ramènent tout point arbitrairement près de E . En suivant alors une spirale de $-B$, on coupe les trajectoires de A au voisinage de $\frac{+}{-} a$, qui coupent E .

. Directions rentrante et sortante.

Ce sont les axes Oy et Oz , qui correspondent aux valeurs propres opposées λ_2 et $-\lambda_2$.

REMARQUE.

Les résultats obtenus dans ce paragraphe permettent de résoudre le problème du mariage des champs affines génériques sur \mathbf{R}^3

Rappelons qu'on appelle partie linéaire du champ affine $x \rightarrow Ax + a$, le champ linéaire $x \rightarrow Ax$. On sait, d'après [18], que si la partie linéaire d'une FCV affines \mathcal{F} est contrôlable sur $\mathbf{R}^n - \{0\}$ et si \mathcal{F} est sans point fixe, alors \mathcal{F} est contrôlable sur \mathbf{R}^n .

Soit $Ax + a$ champ affine générique, sur \mathbf{R} (i.e. tel que sa partie linéaire A soit générique au sens défini plus haut), on sait trouver B tel que $\{A, B\}$ soit contrôlable sur $\mathbf{R}^3 - \{0\}$, puis b tel que $\{Ax + a, Bx + b\}$ soit sans point fixe donc contrôlable. [18].

V - Généralisation du théorème de Gauthier-Bornard au cas des FCV homogènes.

Du fait de ses nombreuses applications pratiques, le problème de la contrôlabilité des FCV homogènes sur $\mathbf{R}^n - \{0\}$ est particulièrement intéressant. La quantité des publications s'y rapportant en est d'ailleurs la preuve. (cf. Bailleul [2][3], Bornard [4]).

En effet, les champs linéaires et les champs constants (dont l'importance n'est plus à démontrer), entrent dans cette catégorie, ainsi que les champs quadratiques qui interviennent par exemple dans les équations du mouvement d'un solide autour de son centre de gravité ; Ceci a donné naissance à bon nombre d'articles sur le contrôle d'attitude d'un satellite. ([5] . [6]).

Rappelons qu'un champ sur \mathbb{R}^n , muni des coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) est dit homogène de degré α , si chacune de ses composantes est un polynôme homogène de degré α en les x_i .

On entend par FVC homogènes une FCV dont chaque élément est un champ homogène de degré quelconque. (i.e. le degré n'est pas nécessairement commun à tous les champs).

1°) EXISTENCE DE TRAJECTOIRES HOMOTHETIQUES

C'est une propriété géométrique essentielle des FCV homogènes, qui constitue la "substantifique moëlle" du théorème.

Nous allons d'abord établir le résultat suivant, connu en théorie des équations différentielles.

PROPOSITION. Soit X champ de vecteurs homogène de degré α sur \mathbb{R}^n alors

$$\forall x_0 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}$$

$$X_1(h x_0) = h X_t(x_0) \quad \text{avec } s = t/h^{\alpha-1}$$

DEMONSTRATION . Soit $c_1(t) = h X_t(x_0)$

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= \frac{d}{dt} c_1(t) = h X(X_t(x_0)) = h X\left(\frac{h X_t(x_0)}{h}\right) \\ &= h X\left(\frac{c_1(t)}{h}\right) = 1/h^{\alpha-1} X(c_1(t)) \end{aligned}$$

Soit, d'autre part $c_2(t) = X_1(h x_0)$.

$$c_2'(t) = \frac{d}{dt} c_2(t) = 1/h^{\alpha-1} X(X_1(h x_0)) = 1/h^{\alpha-1} X(c_2(t))$$

à $t = 0$, on a $c_1(0) = c_2(0) = h x_0$.

c_1 et c_2 sont donc solutions du même problème de Cauchy.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1/h^{\alpha-1} X(x(t)) \\ x(0) = h x_0 \end{cases}$$

donc $c_1 \equiv c_2$.

REMARQUE. Si $\alpha = 0$, i.e. X champ constant, cette propriété exprime le théorème de Thalès.

Soit \mathcal{F} une FCV homogène ; le résultat précédent permet de montrer, comme dans le cas linéaire, l'existence de trajectoires homothétiques de \mathcal{F} .

En effet soit $\varphi \in S(\mathcal{F})$, et supposons que φ s'écrive

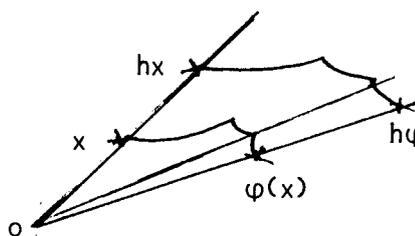
$$\varphi = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_p}^p \text{ où chaque } X^i \in \mathcal{F} \text{ est de } d^\circ \alpha_i > 0.$$

On définit alors, pour tout $h > 0$, le difféo $\varphi_h \in S(\mathcal{F})$ par :

$$\varphi_h = X_{s_1}^1 \circ \dots \circ X_{s_p}^p \text{ avec } s_i = t_i/h^{\alpha_i-1}$$

On a alors l'égalité :

$$\varphi_h(hx) = h\varphi(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ (cf. dessin)}$$



La famille $\{\varphi_h\}_{h \in \mathbb{R}_*^+}$ transporte par des trajectoires homothétiques le rayon $\mathbb{R}^+ x$ en le rayon $\mathbb{R}^+ \varphi(x)$.

On en déduit immédiatement que :

. La notion de contrôlabilité directionnelle est bien définie pour une FCV homogène.

. Les notions de directions rentrante, et sortante ont également un sens.

En effet, si l'on peut transporter (par $S(\mathcal{F})$) x en hx , On peut transporter hx en h^2x , h^2x en h^3x etc.....

2°) SYSTEME DE CHAMPS PROJETES SUR LA SPHERE.

Les trajectoires homothétiques d'un champ (ou d'une FCV) admettent même projection conique de centre O sur S^{n-1} . Nous allons montrer dans ce paragraphe que les courbes sur S^{n-1} , obtenues comme projection des trajectoires d'un champ homogène X (respectivement d'une FCV homogènes \mathcal{F}) peuvent être considérées comme trajectoires d'un champ \hat{X} (resp. d'une FCV $\hat{\mathcal{F}}$) sur S^{n-1} .

Pour un champ quelconque Z sur \mathbb{R}^n , la projection sur S^{n-1} de la courbe intégrale de Z , issue d'un point y est donnée par $\frac{Z_t(y)}{\|Z_t(y)\|}$.

On obtient par un calcul élémentaire :

$$\frac{d}{dt} \frac{Z_t(y)}{\|Z_t(y)\|} = \frac{Z(Z_t(y))}{\|Z_t(y)\|} - \left\langle \frac{Z(Z_t(y))}{\|Z_t(y)\|} ; \frac{Z_t(y)}{\|Z_t(y)\|} \right\rangle \times \frac{Z_t(y)}{\|Z_t(y)\|}$$

si X est un champ homogène de degré α

puisque $X_t(y) = \|X_t(y)\| \times \frac{X_t(y)}{\|X_t(y)\|}$

$$X(X_t(y)) = \|X_t(y)\|^\alpha \times X\left(\frac{X_t(y)}{\|X_t(y)\|}\right)$$

d'où $\frac{X(X_t(y))}{\|X_t(y)\|} = \|X_t(y)\|^{\alpha-1} \times X\left(\frac{X_t(y)}{\|X_t(y)\|}\right)$

On obtient donc :

$$\frac{d}{dt} \frac{X_t(y)}{\|X_t(y)\|} = \|X_t(y)\|^{\alpha-1} \times \left[X\left(\frac{X_t(y)}{\|X_t(y)\|}\right) - \left\langle X\left(\frac{X_t(y)}{\|X_t(y)\|}\right), \frac{X_t(y)}{\|X_t(y)\|} \right\rangle \frac{X_t(y)}{\|X_t(y)\|} \right]$$

d'où si l'on pose, par définition

$$\hat{X}(y) = X(y) - \langle X(y), y \rangle \times y \quad \text{pour tout } y \in S^{n-1}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{X_t(y)}{\|X_t(y)\|} = \|X_t(y)\|^{\alpha-1} \times \hat{X}\left(\frac{X_t(y)}{\|X_t(y)\|}\right)$$

Les deux courbes sur S^{n-1} :

$$\frac{X_t(y)}{\|X_t(y)\|} \quad \text{et} \quad \hat{X}_t(y) \quad , \quad \text{décrivent donc lorsque } t \text{ parcourt } \mathbb{R} \text{ , le même}$$

ensemble de points sur S^{n-1} . De plus puisque $\|X_t(y)\|^{\alpha-1} > 0$, ces courbes sont parcourues dans le même sens (avec des vitesses différentes).

Les deux demi-courbes sur S^{n-1} , obtenues lorsque t parcourt \mathbb{R}^+ décrivent donc, elles aussi, le même ensemble de points. On a ainsi défini sans ambiguïté la notion de champ projeté \hat{X} sur S^{n-1} et partant de système projeté $\hat{\mathcal{F}}$. La FCV sur S^{n-1} $\hat{\mathcal{F}}$ est telle que les ensembles d'états accessibles par $\hat{\mathcal{F}}$ d'une part, et au moyen des trajectoires projetées de $\hat{\mathcal{F}}$, d'autre part, sont égaux.

Donc, puisque \mathcal{F} , FCV homogène, transporte rayon sur rayon, \mathcal{F} est contrôlable suivant les directions si et seulement si sa projection $\hat{\mathcal{F}}$ est contrôlable sur S^{n-1} .

3°) GENERALISATION DU THEOREME DE GAUTHIER-BORNARD.

Compte tenu des paragraphes précédents, on est maintenant en mesure d'énoncer le critère :

Une FCV homogène \mathcal{F} est contrôlable sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ si et seulement si

- i) \mathcal{F} est accessible
- ii) \mathcal{F} est contrôlable suivant les directions
- iii) \mathcal{F} admet une direction rentrante et une direction sortante.

Le principe de démonstration est exactement le même que pour le cas linéaire et est entièrement contenu dans le dessin (cf. p. 20-21).

REMARQUE. Comme dans le cas linéaire, on peut affaiblir les hypothèses en prenant

- i)' \mathcal{F} vérifie la condition du rang sur un rayon.
- ii) \mathcal{F} est contrôlable suivant les directions.

On montre en effet de la même manière que précédemment que i)' + ii) \Rightarrow accessible.

La condition du rang en un point ne suffit pas, car dans le cas d'une FCV homogène générale (i.e. non linéaire), l'algèbre de Lie engendrée n'est pas homogène (la somme de 2 champs homogènes de d° différents n'est pas homogène ; le crochet de 2 champs de d° α_1 et α_2 est de d° $\alpha_1 + \alpha_2 - 1$) et donc la condition du rang ne "se propage" pas le long des rayons.

CONCLUSION DE LA 1° PARTIE.

Le critère de controlabilité en dimension 2, présenté au paragraphe III, peut devenir un outil d'investigation dans l'étude de différents problèmes :

. contrôle effectif sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Il s'agit de construire effectivement une trajectoire reliant deux points arbitraires, à l'aide d'un ordinateur ; on peut également se poser le problème de la stabilisation du système en un point.

. Structure des paires de matrices controlables sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Est-ce un ensemble analytique ? que peut-on dire de sa structure topologique (on sait que c'est un ouvert, est-il connexe?)

. Borne inférieure de controlabilité.

On sait que si le système $\dot{x} = (A + uB)x$, $u \in \mathbb{R}$ est controlable, il existe une borne u telle que le système reste controlable pour $u \in [-u, u]$; Il serait intéressant de déterminer cette borne.

D'autre part, en s'inspirant du paragraphe V, on peut essayer de généraliser encore le mécanisme du critère de Gauthier-Bornard à l'étude de la controlabilité d'une FCV \mathcal{F} sur une variété fibrée, $S(\mathcal{F})$ ayant la propriété de transporter fibre sur fibre.

Bibliographie.

- [1] V. ARNOLD, Méthodes mathématiques de la mécanique classique Ed. Mir. Moscou.
- [2] J. BAILLEUL, Geometric methods for non linear optimal control problems. J. of Optim. theory and applications vol. 25 n° 4 (1978), p. 519-548.
- [3] The geometry of homogeneous polynomial dynamical systems. - Non linear analysis, theory, methods and applications vol. 4 (1980), p. 879-900.
- [4] B. BONNARD, Controlabilité et observabilité d'une certaine classe de systèmes linéaires (à paraître) - Note LAG, Grenoble 82-09.
- [5] Contrôle de l'attitude d'un satellite rigide. RAIRO série automatique vol. 16 n° 1 (1982) p. 85-93.
- [6] Controllability of mechanical control systems on Lie groups (to appear).
- [7] W. BOOTHBY, A transitivity problem from control theory - J. Diff; Eq. 17 (1975) p. 296-307.
- [8] W. BOOTHBY and E.N. WILSON, Determination of the transitivity of bilinear systems - SIAM J. Control 17 (1979) p. 212-
- [9] C. BRUNI, D. DIPILLO and G. KOCH, Bilinear systems : on appealing class of nearly linear systems in theory and applications. IEEE Trans. Automat. Control. Vol. 19 (1974) p. 334-348.
- [10] M. DENIS-PAPIN, A. KAUFMANN, Cours de calcul opérationnel appliqué. Albin Michel (1967).
- [11] M. FLIESS, Séries de Volterra et séries formelles non commutatives. C.R. Acad. Sc. Paris (1975) p. 965-967.
- [12] J.P. GAUTHIER, G. BONNARD, A theorem of controllability for bilinear system - Note interne LAG Grenoble 81-04.
- [13] H. HERMES, On the synthesis of a stabilizing feedback control via Lie algebraic methods. SIAM J. Control, vol. 18 n° 4 (1980), p. 352-360.
- [14] R. HIRSCHORN, Controllability in non linear systems. J. Diff; Eq. 19 (1975) p. 46-61.
- [15] L.R. HUNT, Controllability of general nonlinear systems. Math. systems theory 12 (1979) p. 361-370.
- [16] V. JURDJEVIC and I. KUPKA Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces, Ann. Institut Fourier Tome 3, fasc. 4 (1981) p. 151-179.

- [17] Control systems subordinated to a group action: Accessibility. J. Diff. Eq. vol. 39 n° 2 (1981) p. 186-211.
- [18] V. JURDJEVIC and G. SALLET, Controllability property of affine systems (to appear) SIAM J. on Control.
- [19] A.J. KRENER, A generalization of Chow's theorem and the bang-bang theorem to non linear control problems. SIAM J. Control 12 (1974) p. 43-52.
- [20] I. KUPKA, Thèse. Université de Dijon (1978).
- [21] C. LOBRY Bases mathématiques de la théorie des systèmes asservis non linéaires. (non publié).
- [22] R. I. RINK and R.R. MOHLER, Completely controllable bilinear systems. SIAM J. Control vol. 6 n° 3 (1968).
- [23] G. SALLET, Extension techniques. Encyclopædia of control. Pergamon press. Madan Singh.
- [24] Encadrement des ensembles d'accessibilité en temps exact. Application à la théorie des systèmes (à paraître).
- [25] G. SALLET, Sur la structure de l'ensemble d'accessibilité de certains systèmes. Application à l'équivalence des systèmes. (à paraître).
- [26] B.V. SCHMITT, Sur la structure de l'équation de Duffing sans dissipation. SIAM J. Appl. Math. vol. 42 (1982) p. 868-894.
- [27] M.B. SURYANARAYANA, Linear control problems with total differential equations without convexity. American Math. Soc. (1974).
- [28] H.J. SUSSMANN, Semi-groups representations, bilinear approximation of input-output maps and generalized inputs. Mathematical systems theory and Lecture notes in Economics and Math. systems n° 131 p. 172-191. G. Marchesin and S.K. Mitter Ed.
- [29] Some properties of vector fields systems that are not altered by small perturbations. J. Diff. Eq. Vol. 20 n° 2 (1976) p. 292-315.
- [30] A sufficient condition for local controllability. SIAM J. control and Opt. vol. 16 n° 5 (1978) p. 790-802.
- [31] H.J. SUSSMANN and V. JURDJEVIC, Controllability of non linear systems. J. DIFF. Eq. 12 (1972) p. 95-116.
- [32] W.M. WONHAM, Linear multivariable control. A geometric approach. Lecture notes in Economics and Maths systems n° 101. M. Beckmann and H.P. Kiinzi Ed.