

PIERRE CARTIGNY

**Bifurcation d'orbites périodiques d'un système hamiltonien
au voisinage d'une position d'équilibre**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 8D
« Bifurcation d'orbites périodiques d'un système Hamiltonien au voisinage d'une position
d'équilibre », , p. 1-73

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984__8D_A1_0

© Université de Lyon, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES SYSTEMES HAMILTONIENS ET LEURS ORBITES PERIODIQUES

§ 1 - Généralités sur les systèmes hamiltoniens.

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$ et H une application réelle de classe C^r $r \geq 2$ définie sur M .

On sait que la 2-forme symplectique permet d'associer à H un champ de vecteurs sur M de classe C^{r-1} que l'on notera X_H ; celui-ci est défini, grâce à la non dégénérescence de ω par :

$$i_{X_H} \omega = DH$$

Dans ces conditions on dit que X_H est le champ de vecteurs hamiltonien associé au hamiltonien H .

THEOREME 1 - Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) x est un point régulier de X_H , c'est-à-dire $X_H(x) = 0$
- b) x est un point critique de H , c'est-à-dire $DH(x) = 0$.

Ceci provient de la définition de X_H ,

$$DH(x) = \omega(x)(X_H(x), \cdot) = 0$$

puisque $X_H(x) = 0$, on obtient que $DH(x) = 0$. D'autre part la forme ω étant non dégénérée, l'implication contraire est vérifiée. ■

Soit $(q^1, q^2, \dots, q^n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ un système de coordonnées canoniques pour ω , c'est-à-dire pour lequel

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i ;$$

Le théorème de Darboux affirme l'existence de telles cartes ;

THEOREME 2 - Dans ces coordonnées le champ de vecteurs hamiltonien X_H s'écrit :

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i} \right) = J.DH$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ I : matrice identité de \mathbb{R}^n .

L'application $t \rightarrow (q(t), p(t))$ est une courbe intégrale de X_H si et seulement si elle vérifie les équations suivantes, dites de Hamilton :

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad i : 1, 2, \dots, n$$

Soit X_H le champ de vecteurs ayant pour composantes dans ce système de coordonnées, $\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i} \right)$; il s'agit de vérifier que $i_{X_H} \omega = DH$, puisque cette équation définit X_H de manière unique ;

$$i_{X_H} \omega = i_{X_H} \left(\sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i \right) = \sum_{i=1}^n i_{X_H} dq^i \wedge dp_i - \sum_{i=1}^n dq^i \wedge i_{X_H} dp_i .$$

Or
$$i_{X_H} dq^i = dq^i \cdot X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$i_{X_H} dp_i = d_{p_i} \cdot X_H = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

donc
$$i_{X_H} \omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \right) = DH . \quad \blacksquare$$

En identifiant \mathbb{R}^{2n} à \mathbb{C}^n , on peut poser $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) = (q, p)$.

Les équations de Hamilton s'écrivent alors :

$$(1) \quad \dot{z} = J DH(z) .$$

Supposant que l'hamiltonien vérifie

$$H(0) = 0 , DH(0) = 0$$

on obtient alors puisque

$$DH(z) = D^2H(0).z + \varepsilon(z) \cdot \|z\|$$

lorsque z est voisin de 0, $\varepsilon(z)$ étant une application réelle,

$$JDH(z) = J D^2H(0).z + \varepsilon'(z) \cdot \|z\| \quad ;$$

$J D^2H(0).z$ est le champ linéarisé en 0 associé au champ de vecteurs $JDH(z)$ et le système différentiel linéaire :

$$\dot{z} = J D^2H(0).z$$

est le système linéarisé en 0 associé à (1). ■

Soit $F_t(z)$ le flot de l'équation $\dot{z} = JDH(z)$.

THEOREME 3 - $F_t(z)$ est une application symplectique.

$$\begin{aligned} \text{En effet } \frac{d}{dt} F_t^* \omega &= F_t^* L_{X_H} \omega . \\ &= F_t^* (i_{X_H} d\omega + di_{X_H} \omega) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } F_t^* \omega = F_0^* \omega = \omega . \quad \blacksquare$$

Soit $t \rightarrow c(t)$ une courbe solution d'un système hamiltonien ;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(c(t)) &= DH(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt} \\ &= DH(c(t)) \cdot X_H(c(t)) \\ &= i_{X_H} \omega(c(t)) \cdot X_H(c(t)) \\ &= \omega(c(t)) (DH(c(t)), DH(c(t))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'hamiltonien est donc constant le long des courbes solutions ; on dit que H est une intégrale première et on dit que les systèmes hamiltoniens sont des systèmes conservatifs. ■

Dans le cas particulier des systèmes à un degré de liberté, puisque H est une intégrale première, on obtient les équations de toutes les courbes solutions en faisant varier la constante réelle k dans

$$H(p,q) = k.$$

Un tel système est dit complètement intégrable. Plus généralement un système à n degrés de liberté est dit complètement intégrable lorsque dans une carte locale le calcul du flot se ramène à un calcul de primitives.

THEOREME 4 - (M, ω) est une variété symplectique de dimension $2n$, X_H est un champ de vecteurs hamiltonien. Si il existe n intégrales premières, F_i , $i=1,2,\dots,n$ en involution (c'est-à-dire $\{F_i, F_j\} = 0$ pour tout i et j $\{.,.\}$ représentant le crochet de Poisson) et indépendantes (c'est-à-dire les $DF_i(x)$ sont linéairement indépendantes en tout x de M), alors le système hamiltonien $\dot{z} = J DH(z)$ est complètement intégrable.

La démonstration de ce théorème dû à Liouville est classique et se trouve notamment dans [2, p. 269]. Après avoir montré que l'ensemble invariant par le flot

$$M_a = \{ z \mid F_i(z) = a_i, i=1,2,\dots,n \}$$

où $a = (a_1, \dots, a_n)$ est fixé, est difféomorphe à $\mathbb{R}^{n-k} \times (S^1)^k$, $0 \leq k \leq n$, on construit un système de coordonnées sur le tore $(S^1)^k$ soit (φ_j) dans lequel le système hamiltonien s'écrit

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \omega_j, \quad \omega_j \text{ constantes } j : 1,2,\dots,k. \quad \blacksquare$$

§ 2 - Orbites périodiques des systèmes hamiltoniens.

On s'intéresse à la recherche des orbites périodiques d'un système hamiltonien.

Dans le cas où l'on a n intégrales premières indépendantes en involution, les orbites périodiques peuvent se calculer explicitement et on observe que lorsque le système n'est pas linéaire leurs périodes dépendent du niveau d'énergie (valeur de H) sur lequel elles se trouvent.

On considère le cas particulier d'un système hamiltonien linéaire,

$\dot{z} = A.z \quad z \in \mathbb{R}^{2n} \quad A = J.S \quad S \text{ étant une matrice}$
symétrique déterminée par l'hamiltonien quadratique,

$$H(z) = \frac{1}{2} \langle S.z, z \rangle$$

où $\langle ., . \rangle$ représente le produit scalaire sur \mathbb{R}^{2n} .

THEOREME 5 - Si toutes les valeurs propres de A sont imaginaires pures et distinctes, on les note $\pm i \lambda_k \quad 1 \leq k \leq n$, il existe un changement de coordonnées symplectiques (Q,P) dans lequel le système s'écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{P}_i + \lambda_i^2 Q_i &= 0 \\ \dot{P}_i - Q_i &= 0 \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Ces nouvelles coordonnées s'appellent les modes normaux de vibration.

Le système se ramène donc au produit de n oscillateurs harmoniques, de période respective $T_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$; on observe alors que la période des orbites périodiques ne dépend pas du niveau d'énergie sur lequel elles se trouvent.

On remarque d'autre part que l'on est dans la situation du théorème de Liouville (théorème 4) puisque les n fonctions

$$I_i = \bar{P}_i^2 + Q_i^2$$

où $\bar{P}_i = \sqrt{\lambda_i} \cdot P_i \quad \bar{Q}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

sont n intégrales premières indépendantes en involution.

La référence pour cette partie est [3] .

La présence de valeurs propres imaginaires pures est une condition nécessaire pour l'existence d'orbites périodiques ; en effet si aucune valeur propre n'est imaginaire pure le point fixe est hyperbolique et on sait qu'il n'y a alors, aucune orbite périodique.

Il ressort de ce qui précède qu'il est naturel pour chercher des orbites périodiques d'un système hamiltonien

$$\dot{z} = X_H(z) \quad z \in \mathbb{R}^{2n} \quad \text{avec} \quad X_H(0) = 0$$

d'étudier le système linéarisé en 0

$$\dot{z} = D X_H(0).z \quad .$$

Supposant $D X_H(0)$ non singulière, si aucune valeur propre n'est imaginaire pure, le théorème d'Hartmann affirme que les flots de X_H et de $D X_H(0)$ sont C^0 conjugués ; donc il n'y a aucune orbite périodique dans ce cas.

On suppose alors que $D X_H(0)$ possède une valeur propre imaginaire pure, $\mu_1 = i\omega$, $\omega > 0$; donc $\mu_2 = \bar{\mu}_1$ est aussi une valeur propre puisque $D X_H(0)$ est réelle. Soit $\varphi_1 = e_1 + ie_2$ un vecteur propre associé à μ_1 , $\bar{\varphi}_1$ est un vecteur propre associé à $\mu_2 = \bar{\mu}_1$; Le sous-espace E de \mathbb{R}^{2n} engendré par

$$e_1 = \frac{\varphi_1 + \bar{\varphi}_1}{2} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{\varphi_1 - \bar{\varphi}_1}{2i}$$

est stable par $D X_H(0)$ et est feuilleté par la famille des orbites de la restriction à E du champ $D X_H(0).z$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

toutes ces solutions sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ainsi le système linéarisé possède une famille de solutions périodiques situées sur un plan contenu dans \mathbb{R}^{2n} ; on espère que le système non linéaire va posséder des orbites périodiques voisines des éléments de cette famille ; le théorème suivant montre qu'il en est ainsi si on a des hypothèses de non résonance :

THEOREME 6 - (de Liapounov).

H étant de classe C^r , $r \geq 2$, X_H le champ hamiltonien associé défini sur la variété symplectique (M, ω) , on suppose que x_0 est un point singulier de X_H tel que $D X_H(x_0)$ possède deux valeurs propres imaginaires pures conjuguées $\pm i\omega$, $\omega > 0$ tandis que les autres valeurs propres μ sont telles que $\frac{\mu}{i\omega}$ ne soit pas un entier ;

Alors pour chaque valeur $C_\epsilon = H(x_0) + \epsilon$, ϵ voisin de 0, il existe sur la surface d'énergie constante $H^{-1}(C_\epsilon)$ une orbite périodique γ_ϵ de période T_ϵ De plus lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $\gamma_\epsilon \rightarrow 0$ et $T_\epsilon \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$.

On trouve une démonstration de ce théorème dans [1, p. 498].

Les hypothèses de non résonance sont nécessaires comme le montre le contre-exemple suivant énoncé dans [8] :

Soit $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2} (x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2) + (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)(x_1 x_2 - y_1 y_2)$$

Les équations de hamilton associées sont

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial y_1} = -y_1 + 2y_1(x_1 x_2 - y_1 y_2) - y_2(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial y_2} = y_2 + 2y_2(x_1 x_2 - y_1 y_2) - y_1(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)$$

$$\dot{y}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = x_1 - 2x_1(x_1 x_2 - y_1 y_2) - x_2(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -x_2 - 2x_2(x_1 x_2 - y_1 y_2) - x_1(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)$$

L'équation linéarisée étant

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\pm i$ et les conditions de résonance du théorème 6 ne sont pas remplies. D'autre part

$$\frac{d}{dt} (x_1 y_2 + x_2 y_1) = \dot{x}_1 y_2 + x_1 \dot{y}_2 + \dot{x}_2 y_1 + x_2 \dot{y}_1$$

et supposant que x_1, x_2, y_1, y_2 sont les coordonnées d'un point situé sur une courbe solution on obtient

$$\frac{d}{dt} (x_1 y_2 + x_2 y_1) = -4 (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2)^2 .$$

Or si la solution considérée est périodique de période T

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (x_1 y_2 + x_2 y_1) dt = x_1 y_2 + x_2 y_1 \Big|_0^T = 0$$

mais le deuxième membre de la relation précédente étant négatif, la seule solution périodique est la solution nulle.

L'exemple précédant montre qu'il faut une condition sur les valeurs propres autre que le fait d'être imaginaire pure ; Weinstein a démontré que la condition de non résonance n'est pas en fait nécessaire ; on donne la version due à Moser de ce théorème :

THEOREME 7 (Weinstein-Moser).

H est un hamiltonien de classe C^2 dans un voisinage de 0, $0 \in \mathbb{R}^{2n}$; Si le hessien $H_{zz}(0)$ est défini positif alors pour tout ϵ suffisamment petit, chaque surface d'énergie $H(z) = H(0) + \epsilon^2$ contient au moins n orbites périodiques du système :

$$\dot{z} = J \frac{\partial H}{\partial z}$$

Les périodes de celles-ci sont proches de celles du système linéarisé en 0.

On remarque que dans le contre exemple précédant les conditions du théorème 7 ne sont pas remplies ; en effet le hessien en 0,

$$\text{Hess}(0) = -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$$

n'est pas défini positif.

Moser [8] ramène la démonstration de ce théorème au théorème plus précis suivant :

THEOREME 8 - *L'espace \mathbb{R}^{2n} se décompose en deux sous-espaces,*

$\mathbb{R}^{2n} = E \oplus F$, E et F étant invariants par le champ linéarisé en 0 ; les solutions du champ linéaire situées dans E ont la période $T > 0$, tandis qu'aucune solution de ce champ contenue dans $F - \{0\}$ n'a cette période ; on suppose que le hessien en 0 $D^2H(0)$ restreint à E est défini positif.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, sur chaque surface d'énergie $H(z) = H(0) + \varepsilon^2$ on peut trouver au moins $p = \frac{1}{2} \dim E$ solutions périodiques ayant une période proche de celle du système linéaire.

Le théorème 7 est un corollaire du théorème 9 ; en effet les valeurs propres du système linéarisé en 0 sont toutes imaginaires pures, il suffit alors de prendre pour espace E, le sous-espace de \mathbb{R}^{2n} engendré par les valeurs propres qui sont multiples entiers de l'une d'entre elles et d'appliquer le théorème 8. On remarque que si $\dim E = 2$, alors on retrouve le théorème de Liapounov.

La démonstration du théorème 8 repose essentiellement sur un lemme qui sera énoncé et discuté au chapitre IV.

CHAPITRE II

APPLICATION DE POINCARÉ

§ 1 - Définitions.

Soit M une variété, X un champ de vecteurs et Γ_0 une orbite périodique de ce champ de période T_0 .

DEFINITION - On dit que $\Sigma \subset M$ est une section locale transverse à Γ_0 en m_0 si

1. $m_0 \in \Sigma$
2. Σ est une sous-variété de codimension 1.
3. X est transverse en tout point à Σ , ce que l'on peut traduire par :

$$\forall m, m \in \Sigma \quad X(m) \notin T_m \Sigma.$$

Une telle section sera notée $\Sigma(\Gamma_0, m_0)$.

Par le théorème fondamental des équations différentielles on sait qu'il existe un $\varepsilon > 0$ et un ouvert de M contenant m_0 sur lequel on peut définir une famille de difféomorphismes F_t ,

$$F_t : M \rightarrow M$$

définie pour tout t tel que $|t| < \varepsilon$; cette famille est un semi flot.

Le théorème sur la dépendance de $F_t(x)$, $x \in M$, par rapport aux conditions initiales permet d'affirmer l'existence d'un voisinage de m_0 dans la section tel que les orbites issues d'un point de celui-ci recourent la section au bout d'un temps voisin de T_0 .

LEMME 1 - Soit $\Sigma(\Gamma_0, m_0)$ une section, alors $\Sigma_1 = F_{T_0}(\Sigma)$ est encore une section locale transverse à Γ_0 en m_0 .

En effet, puisque $F_{T_0}(m_0) = m_0$, $m_0 \in \Sigma_1$. D'autre part F_{T_0} étant un difféomorphisme, Σ_1 est une sous-variété de codimension un ; $X(m_0)$ étant transverse à Σ , on prend un système de coordonnées locales (x,y) tel que $X(m_0) = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{m_0}$, les $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{m_0}$ formant une base de $T_{m_0} \Sigma$. Dans ce système de coordonnées, l'hyper-surface Σ a une équation $G(x,y) = 0$ et la transversalité du champ à cette surface est équivalente à

$$DG(m_0).X(m_0) \neq 0$$

La surface $\Sigma_1 = F_{T_0}^{-1}(\Sigma)$ a donc pour équation

$$G \circ F_{T_0}^{-1}(x,y) = 0 ;$$

l'application tangente au point m_0 s'écrit :

$$D(G \circ F_{T_0}^{-1})(m_0) = DG(F_{T_0}^{-1}(m_0)) \circ DF_{T_0}^{-1}(m_0)$$

d'où

$$\begin{aligned} D(G \circ F_{T_0}^{-1})(m_0).X(m_0) &= DG(F_{T_0}^{-1}(m_0)).X(m_0) \\ &= DG(m_0).X(m_0) \end{aligned}$$

puisque $DF_{T_0}^{-1}(m_0).X(m_0) = X(m_0)$ et que $F_{T_0}^{-1}(m_0) = m_0$

par conséquent $D(G \circ F_{T_0}^{-1})(m_0).X(m_0) \neq 0$

c'est-à-dire $X(m_0)$ est transverse en $m_0 \in \Sigma_1$ et par continuité X est transverse à Σ_1 . ■

Soit m_0 un point de Γ_0 , Γ_0 étant une orbite périodique de période T_0 du champ X défini sur une variété M de dimension n ; pour $X(m_0) \neq 0$ il existe une carte (U,φ) telle que

$$m_0 \in U$$

$$\varphi(U) = V \times I \quad \text{ouvert de } \mathbb{R}^n \quad I =]-a,+a[$$

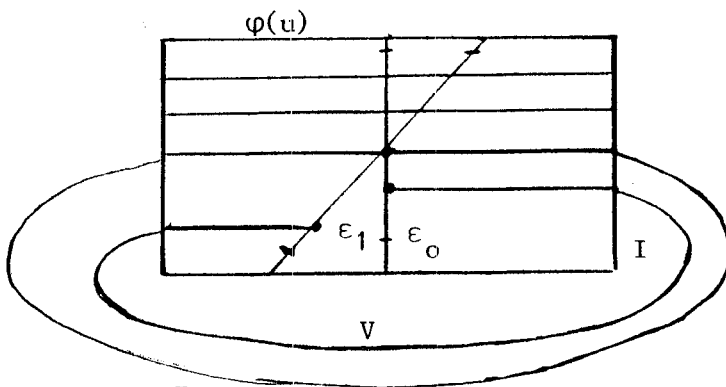
$$\varphi(m_0) = (0,0)$$

$$\varphi_* X(y,t) = (0,1) .$$

Le champ φ_*X est appelé le champ redressé et la carte (U,φ) carte de redressement.

Pour simplifier l'écriture on notera dans cette carte l'orbite périodique et le flot par Γ_0 et $F_t(x)$.

Pour $\bar{V} \subset V_0$, $\Sigma_0 = \bar{V} \times \{0\}$ est une section à l'orbite Γ_0 au point 0 ; d'après la proposition 1 et au besoin en restreignant \bar{V} , $F_{T_0} \Sigma_0 = \Sigma_1$ est encore une section en 0 à l'orbite Γ_0 , contenue dans le domaine $\varphi(U)$. Soit $g(x,s) = 0$



une équation de cette hypersurface Σ_1 , $g : V \times I \rightarrow V \times I$, la transversalité du champ implique que $\frac{\partial g}{\partial s}(x,s) \neq 0$ et d'après le théorème des fonctions implicites, on peut trouver un voisinage I' de $s = 0$ dans I , un voisinage V' de

$x = 0$ dans \bar{V} et une application

$$t : V' \longrightarrow I'$$

$$x \longmapsto t(x)$$

vérifiant

$$g(x, t(x)) = 0,$$

comme si $x \in \Sigma_1$, $F_{t(x)}x \in \Sigma_0$, on définit ainsi une application

$$\mathcal{P} : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_0$$

$$x \longmapsto \mathcal{P}(x) = F_{t(F_T(x))} + T(x) ;$$

Etant composé de difféomorphismes, \mathcal{P} est un difféomorphisme sur son image ;

quant à l'application $\theta : \Sigma_0 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto t(F_T(x)) = \theta(x)$$

elle est C^∞ .

DEFINITION - \mathcal{P} est appelée application de premier retour de Poincaré.

Pour justifier l'intérêt que l'on porte à cette application de Poincaré, nous allons montrer qu'elle rend compte du comportement des courbes intégrales du champ X dans le voisinage de l'orbite Γ_0 ;

LEMME 2 - Soit $\mathcal{P} : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ et $\mathcal{P}' : \Sigma' \longrightarrow \Sigma'$ deux applications de Poincaré associées à deux sections d'une même orbite périodique Γ ; alors il existe un difféomorphisme $G : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ qui conjugue \mathcal{P} et \mathcal{P}' , $\mathcal{P}_0 G = G_0 \mathcal{P}'$.

Soit $\{m\} = \Sigma \cap \Gamma$ et $\{m'\} = \Sigma' \cap \Gamma$; soit τ le réel tel que $F_\tau(m) = m'$;

Par un raisonnement identique à celui utilisé dans la démonstration de la proposition 1 on montre que $F_\tau(\Sigma)$ est une section à Γ au point m' . L'application $\mathcal{P}_\tau = F_{\tau 0} \mathcal{P}_0 F_{-\tau}$ est une application de Poincaré associée à la section $F_\tau(\Sigma)$. La proposition se ramène donc au cas où $m = m'$. Mais on peut considérer les nombres $\theta(p)$ définis par $F_{\theta(p)}(p) \in \Sigma'$ avec $p \in \Sigma$ et prendre le plus petit d'entre eux, $\bar{\theta}(p)$, on obtient ainsi un difféomorphisme G qui conjugue \mathcal{P} et \mathcal{P}' :

$$G : \Sigma \longrightarrow \Sigma' \quad G(p) = F_{\bar{\theta}(p)}(p)$$

(En fait il faut au besoin restreindre Σ). ■

On suppose maintenant que la variété M est symplectique, ω étant la 2-forme symplectique.

A l'hamiltonien H on associe le champ de vecteurs X_H et on suppose que X_H possède une orbite périodique Γ ; soit Σ une section locale transverse en m à Γ $m \in \Gamma$. L'hypersurface $H^{-1}(m)$ contenant l'orbite périodique Γ , on considère

$$\bar{\Sigma} = \Sigma \cap H^{-1}(m).$$

$\bar{\Sigma}$ est un élément de sous-variété de codimension 2 qui est transverse à Γ ; on peut définir une application de Poincaré, \mathcal{P} associée à Γ et à $\bar{\Sigma}$ et montrer que \mathcal{P} est une application symplectique; pour cela montrons tout d'abord que $\bar{\Sigma}$ est munie naturellement d'une 2-forme symplectique.

Soit $i : \bar{\Sigma} \hookrightarrow M$ l'injection canonique, $i^*\omega$ est une 2-forme sur $\bar{\Sigma}$ qui est fermée, puisque

$$d(i^*\omega) = i^*d\omega = 0 ;$$

il faut montrer que $(i^*\omega)^{n-1}$ est une forme volume, soit $\tau_1, \dots, \tau_{2n-2}$ une base de $T_m(\bar{\Sigma})$ que l'on peut compléter avec les vecteurs $X_H(m)$ et $\text{grad}H(m)$ qui vérifient

$$\omega(X_H, \text{grad}H) = \langle \text{grad}H, \text{grad}H \rangle \neq 0 .$$

On a donc

$$i^*\omega^{n-1}(\tau_1, \dots, \tau_{2n-2}) \cdot \|\text{grad}H\|^2 = \omega^n(\tau_1, \dots, \tau_{2n-2}, X_H, \text{grad}H) \neq 0$$

et $i^*\omega^{n-1}$ étant non nulle, est une forme volume sur $\bar{\Sigma}$.

On montre alors,

THEOREME 1 - l'application de Poincaré $\mathcal{P} : \bar{\Sigma} \longrightarrow \bar{\Sigma}$ est une application symplectique c'est-à-dire

$$\mathcal{P}^*(i^*\omega) = i^*\omega .$$

Soit γ une courbe fermée située sur la section $\bar{\Sigma}$; on désigne par C le cylindre d'orbites s'appuyant sur γ ; notant $\theta(x)$ le réel tel que $\phi_{\theta(x)}(x) \in \bar{\Sigma}$ pour $x \in \gamma$, ϕ désignant le flot de X_H , on a

$$C = \{ \phi_t(x) \mid x \in \gamma \quad t \in [0, \theta(x)] \}$$

d'autre part le bord de C est

$$C = \gamma \cup \mathcal{P}(\gamma).$$

Puisque $\omega(X_H, Y) = dH.Y$ on a $\iint_C \omega = \int_{\gamma} dH.Y = 0$ puisque γ est fermée; sur un voisinage de l'orbite γ on peut définir Λ , 1-forme de Liouville, telle que $\omega = d\Lambda$; on a

$$\iint_C \omega = \int_{\mathcal{P}(\gamma)} \Lambda - \int_{\gamma} \Lambda$$

et donc \mathcal{P} préserve la 1-forme de Liouville

$$\mathcal{P}^*(i^*\Lambda) = i^*\Lambda$$

donc préserve la 2-forme $i^*\omega$. ■

§ 2 - Nombres caractéristiques d'une orbite périodique.

Soit X un champ de vecteurs défini sur une variété M , Γ une orbite périodique de ce champ, m un point de Γ non singulier c'est-à-dire tel que $X(m) \neq 0$, Σ une section en m à Γ et \mathcal{P} l'application de premier retour de Poincaré associée.

Puisque \mathcal{P} est un difféomorphisme, l'application $D\mathcal{P}(m)$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $T_m\Sigma$.

DEFINITION - Les valeurs propres de $D\mathcal{P}(m)$ sont appelées les nombres caractéristiques de l'orbite Γ .

D'après le lemme 2 du § 1 ces nombres sont bien caractéristiques de l'orbite Γ et ne dépendent pas de l'application de premier retour de Poincaré choisie ; en effet si \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont conjuguées par G , $D\mathcal{P}(m)$ et $D\mathcal{P}(m')$ sont conjuguées par $DG(m)$, et les nombres caractéristiques sont des invariants associés à l'orbite Γ .

On étudie maintenant le lien entre les valeurs propres de $DF_T(m)$, $m \in \Gamma$, T période de Γ et les nombres caractéristiques de Γ .

On considère une carte (x_1, \dots, x_{n-1}, y) , n étant la dimension de M , telle que :

$$\begin{aligned} x_i(m) &= 0 & i &= 1, 2, \dots, n-1 \\ y(m) &= 0 \end{aligned}$$

$(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0)$ forment une base de $T_m\Sigma$, $\frac{\partial}{\partial y} \Big|_0 = X(m)$.

Dans cette carte on note la représentation locale du flot par

$$F_t(x, y) = (F_t^1(x, y), F_t^2(x, y)) \dots$$

Ainsi par définition l'application de premier retour de Poincaré \mathcal{P} associée à Σ est donnée par

$$\mathcal{P}(x) = F_{t(x)}^1(x, 0) \ .$$

THEOREME 2 - La matrice Jacobienne de F_T en 0 est :

$$DF_T(0) = \begin{pmatrix} D\mathcal{P}(0) & 0 \\ D_1F_T^2(0) & 1 \end{pmatrix} \ .$$

En effet

$$\frac{\partial F_T}{\partial t}(0) = \frac{\partial F_{T+s}}{\partial s}(0) \Big|_{s=0} = \left(\frac{\partial F_{T+s}^1}{\partial s}(0) \Big|_{s=0}, \frac{\partial F_{T+s}^2}{\partial s}(0) \Big|_{s=0} \right)$$

puisque Γ est une orbite périodique on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{T+s}}{\partial s}(0) \Big|_{s=0} &= (0, X(m)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_{T+s}}{\partial s}(0) \Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} F_{T \circ F_s}(0) \Big|_{s=0} = DF_T(0) \cdot \frac{\partial F_s}{\partial s} \Big|_{s=0} \\ &= DF_T(0) \cdot (0, X(m)) \end{aligned}$$

d'où $DF_T(0) \cdot (0, X(m)) = (0, X(m))$.

Or $DF_T(0) \cdot (0, X(m)) = (DF_T^1(0) \cdot (0, X(m)), DF_T^2(0) \cdot (0, X(m)))$ en identifiant on obtient,

$$0 = DF_T^1(0) \cdot (0, X(m)) = D_1 F_T^1(0) \cdot 0 + D_2 F_T^1(0) \cdot X(m)$$

$$\text{soit } D_2 F_T^1(0) = 0$$

$$X(m) = DF_T^2(0) \cdot (0, X(m)) = D_1 F_T^2(0) \cdot 0 + D_2 F_T^2(0) \cdot X(m) \text{ soit } D_2 F_T^2(0) \cdot X(m) = X(m)$$

c'est-à-dire 1 est valeur propre, de $D_2 F_T^2(0)$, associée à $X(m) = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_0$.

D'autre part de ce qui précède on tire que

$$\frac{\partial F_{T+s}^1}{\partial s}(0) \Big|_{s=0} = 0$$

$$\text{de } \mathcal{P}(x) = F_{t(x)}^1(x, 0) = \phi(t(x), x)$$

on obtient que

$$D \mathcal{P}(x) = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i$$

$$\text{d'où } D \mathcal{P}(0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(T, 0) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(T, 0) dx_i$$

$$= \frac{\partial F_{T+t}^1}{\partial t}(0, 0) dt + D_1 F_T^1(0, 0)$$

$$\text{soit donc } D \mathcal{P}(0) = D_1 F_T^1(0). \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE - Les valeurs propres de $DF_T(0)$ sont les nombres caractéristiques union le nombre 1.

§ 3 - Valeurs propres d'un difféomorphisme symplectique au voisinage d'un point fixe.

Soit F une application linéaire symplectique définie sur un espace vectoriel symplectique (E, ω) ; par définition on a $F^*\omega = \omega$.

THEOREME 3 - Si μ est une valeur propre de multiplicité k de F , il en est de même de $\frac{1}{\mu}$, $\bar{\mu}$, $\frac{1}{\bar{\mu}}$.

On considère une base telle que la matrice de ω prenne la forme canonique :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

on sait qu'il existe de telle base ; soit A la matrice de F dans cette base, la symplecticité de A se traduit par

$${}^t A_0 J_0 A = J$$

d'où son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} p(X) &= \det(A - XI) = \det(J(A - XI)J^{-1}) \\ &= \det({}^t A^{-1} - XI) = \det(A^{-1}(I - XA)) = \det(I - XA) \\ &= \det(X(\frac{1}{X}I - A)) = X^{2n} p(\frac{1}{X}) \end{aligned}$$

donc si X est valeur propre, $\frac{1}{X}$ l'est aussi.

Comme de plus les coefficients de $p(X)$ sont réels, à la racine X est associée la racine conjuguée \bar{X} . Supposant enfin que X_0 est de multiplicité k ,

$$\begin{aligned} p(X) &= (X - X_0)^k Q(X) \\ &= (XX_0)^k \left(\frac{1}{X_0} - \frac{1}{X}\right)^k Q(X) \end{aligned}$$

on a

$$p\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{X_0^k}{X^{2n-k}} \left(\frac{1}{X_0} - \frac{1}{X}\right)^k Q(X)$$

comme $Q(X)$ est un polynôme de degré $2n-k$ en X , $\frac{1}{X^{2n-k}} Q(X)$ est un polynôme de degré $2n-k$ en $\frac{1}{X}$ qui peut avoir $\frac{1}{X_0}$ comme racine ; $\frac{1}{X_0}$ a donc au moins la multiplicité k . En échangeant les rôles de $\frac{1}{X_0}$ et de X_0 , on obtient que $\frac{1}{X_0}$ a exactement la multiplicité k . ■

§ 4 - Application : nombres caractéristiques dans le cas hamiltonien.

Soit (M, ω) une variété symplectique H un hamiltonien défini sur M ; on a vu dans le chapitre I théorème 3 que le flot $F_t(x)$ associé au système hamiltonien $\dot{x} = X_H(x)$ était symplectique : pour tout t , $F_t^* \omega = \omega$, c'est-à-dire que pour tout point $m \in M$, $DF_t(m)$ est une application linéaire symplectique.

D'après les résultats du § 3 on a donc démontré

THEOREME 4 - Les valeurs propres de $DF_T(m)$, m étant un point (d'une orbite) T -périodique, vont par quadruple du type :

$$\left(\mu, \frac{1}{\mu}, \bar{\mu}, \frac{1}{\bar{\mu}} \right).$$

Remarque. Ce quadruple peut se réduire à un doublet si $\frac{1}{\mu} = \bar{\mu}$ ou si $\mu = \bar{\mu}$.

COROLLAIRE - Les nombres caractéristiques d'une orbite périodique d'un champ de vecteurs hamiltonien vont par quadruple du type : $\left(\mu, \frac{1}{\mu}, \bar{\mu}, \frac{1}{\bar{\mu}} \right)$.

CHAPITRE III

BIFURCATION D'UNE ORBITE 1-PERIODIQUE EN UNE ORBITE 2-PERIODIQUE

§ 1 - Position et réduction du problème.

Soit X_ν une famille de champ de vecteurs hamiltoniens dépendant analytiquement du paramètre réel ν . Pour $\nu = \nu_0$, on suppose que le champ X_{ν_0} possède une orbite périodique Γ_{ν_0} ; en $x_{\nu_0} \in \Gamma_{\nu_0}$ on considère une section locale transverse de codimension 1 que l'on note Σ ; on désigne par Σ_{ν_0} la section locale transverse de codimension 2 sur laquelle est définie l'application de premier retour de Poincaré \mathcal{P}_{ν_0} , $\Sigma_{\nu_0} \subset \Sigma$.

Désignant par μ_{ν_0} les nombres caractéristiques de Γ_{ν_0} on se propose d'étudier le comportement des orbites de la famille X_ν dans le voisinage de Γ_{ν_0} lorsqu'un des nombres caractéristiques μ_{ν_0} prend la valeur -1 .

On s'intéresse tout d'abord à l'existence dans le voisinage de Γ_{ν_0} d'orbites périodiques pour les champs X_ν .

Lorsque ν est voisin de ν_0 , les orbites des champs X_ν issues des points de Σ proches de x_{ν_0} recoupent Σ ; on note $\mathcal{P}_\nu(x)$ le point de première intersection entre l'orbite issue de $x \in \Sigma$ pour le champ X_ν et l'hypersurface Σ . On considère alors l'application

$$F(\nu, x) = x - \mathcal{P}_\nu(x) \quad \text{pour } x \in \Sigma, \nu \text{ voisin de } \nu_0$$

puisque X_ν est associé à un hamiltonien H_ν , 1 est valeur propre de $D\mathcal{P}_{\nu_0}(x_{\nu_0})$ car on a une direction propre correspondant à la conservation de l'énergie $H_\nu(x)$. On suppose d'autre part que l'orbite Γ_{ν_0} est non dégénérée, c'est-à-dire que 1 n'est pas un nombre caractéristique de Γ_{ν_0} :

1 n'est pas dans le spectre de $D\mathcal{P}_{\nu_0}(x_{\nu_0})$ lorsque l'on prend

$$\mathcal{P}_{\nu_0} : \Sigma_{\nu_0} \longrightarrow \Sigma_{\nu_0}$$

alors que 1 est dans le spectre de $D\mathcal{P}_{\nu_0}(x_{\nu_0})$ lorsqu'on prend $\mathcal{P}_{\nu_0} : \Sigma \longrightarrow \Sigma$

Ainsi l'application linéaire $D\mathcal{P}_{\nu_0}(x_{\nu_0}) - \text{Id}$ est de rang $(n-1)$ sur $T_{x_{\nu_0}}\Sigma$; et donc l'image réciproque de 0 par $F(\nu, x)$ est une courbe située dans Σ ; chaque point de cette courbe vérifiant

$$x = \mathcal{P}_\nu(x) \quad \text{pour un certain } \nu$$

on a obtenu l'existence d'une famille à un paramètre de points de Σ , x_ν , fixes pour \mathcal{P}_ν . Ceci prouve la persistance des orbites périodiques pour une petite perturbation.

Notant $\Sigma_\nu = \Sigma \cap H^{-1}(c_\nu)$ où $c_\nu = H(x_\nu)$ on obtient pour tout ν voisin de ν_0 , une famille d'application $\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\nu : \Sigma_\nu \subset \Sigma \longrightarrow \Sigma_\nu$ possédant un point fixe x_ν ; les \mathcal{P}_ν s'interprètent comme des applications de premier retour de Poincaré.

Pour chaque ν , on introduit un système de coordonnées tel que $x_\nu = 0$ et $\Sigma_\nu = \bar{\Sigma}$ sous-variété de codimension 2 dans \mathbb{R}^{2n} ; on est conduit à la famille d'applications \mathcal{P}_ν

$$\mathcal{P}_\nu : \bar{\Sigma} \longrightarrow \bar{\Sigma} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_\nu(o) = 0$$

On suppose alors que l'application $D \mathcal{P}_{\nu_0}(0)$ possède -1 comme valeur spectrale ; la continuité des valeurs propres de $D \mathcal{P}_\nu(0)$ par rapport à ν conduit à l'existence d'une valeur propre μ_ν au moins telle que

$$\mu_\nu \longrightarrow -1 \quad \nu \longrightarrow \nu_0$$

ce qui conduit donc à l'existence d'un quadruple (ou un doublet)

$$\left(\mu_\nu, \frac{1}{\mu_\nu}, \bar{\mu}_\nu, \frac{1}{\bar{\mu}_\nu} \right)$$

au moins dans le spectre de $D \mathcal{P}_\nu(0)$, qui tend vers -1 lorsque ν tend vers ν_0 .

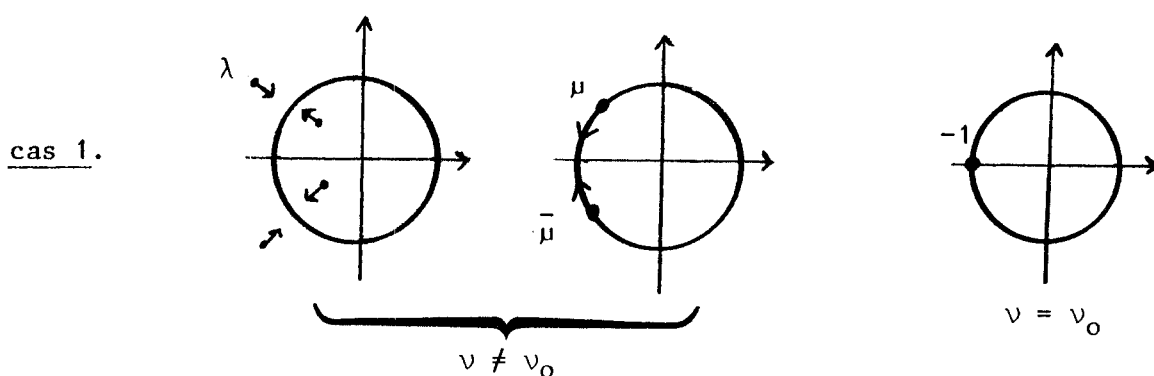
On suppose qu'il n'existe qu'un seul tel quadruple (ou doublet).

On fait enfin l'hypothèse suivante : le reste du spectre de $D \mathcal{P}_{\nu_0}(0)$, la partie autre que -1 , est en dehors du cercle unité S^1 ; pour $\nu \neq \nu_0$, -1 n'est pas dans le spectre de $D \mathcal{P}_\nu(0)$.

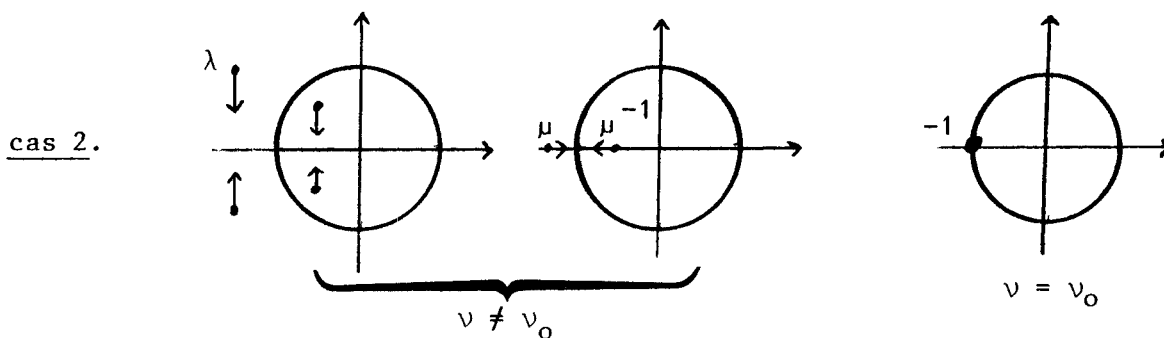
Dans ces conditions la multiplicité de -1 est soit 2, soit 4 :

1ère situation

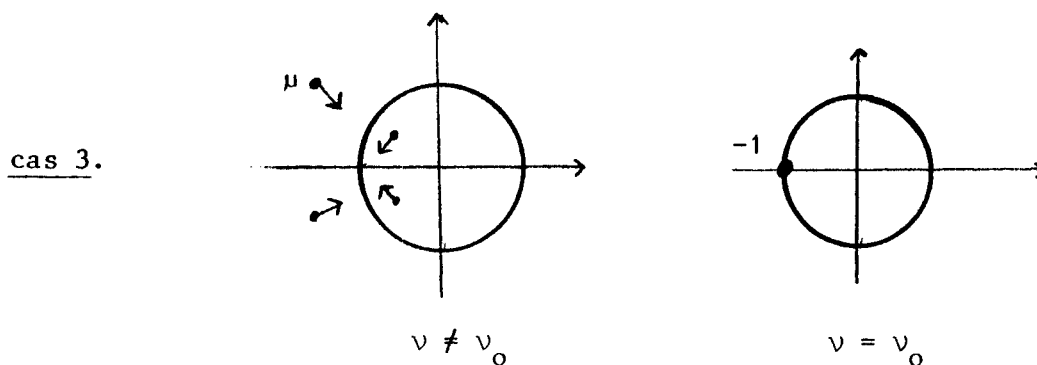
-1 est de multiplicité 4 dans les cas suivants et leurs combinaisons



$\mu, \bar{\mu}$ sont deux valeurs propres de multiplicité 2



μ, μ^{-1} sont deux valeurs propres réelles de multiplicité 2



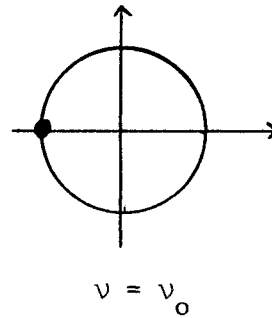
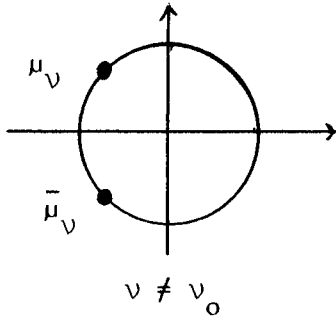
μ est de multiplicité 1

2ème situation

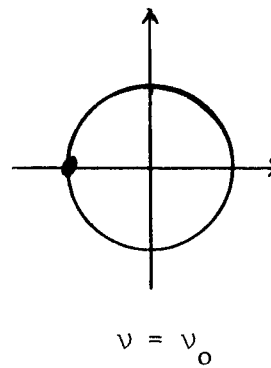
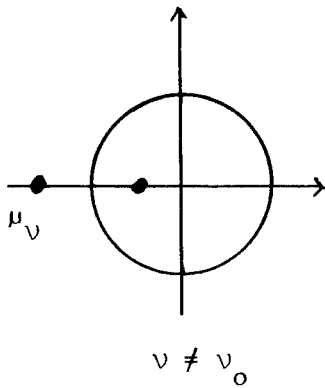
-1 est de multiplicité 2

pour $v \neq v_0$, $D\mathcal{P}_v(0)$ possède deux valeurs propres :

. soit complexes conjuguées $\mu_v, \bar{\mu}_v$ sur S^1 , μ_v de multiplicité 1

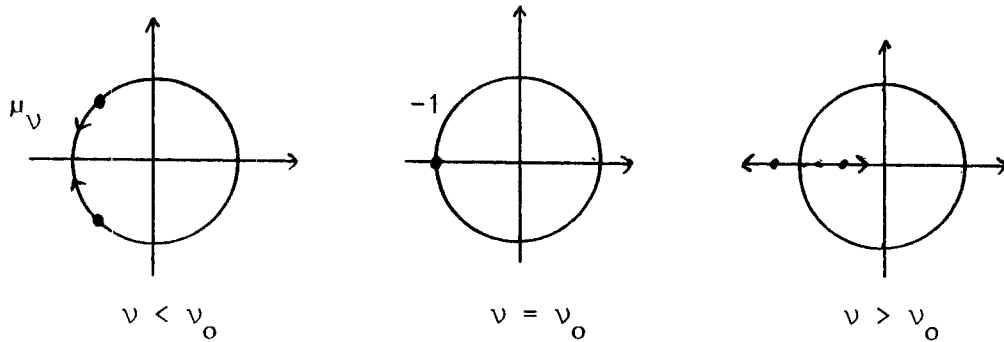


. soit réelles inverses μ_v, μ_v^{-1} ; μ_v de multiplicité 1

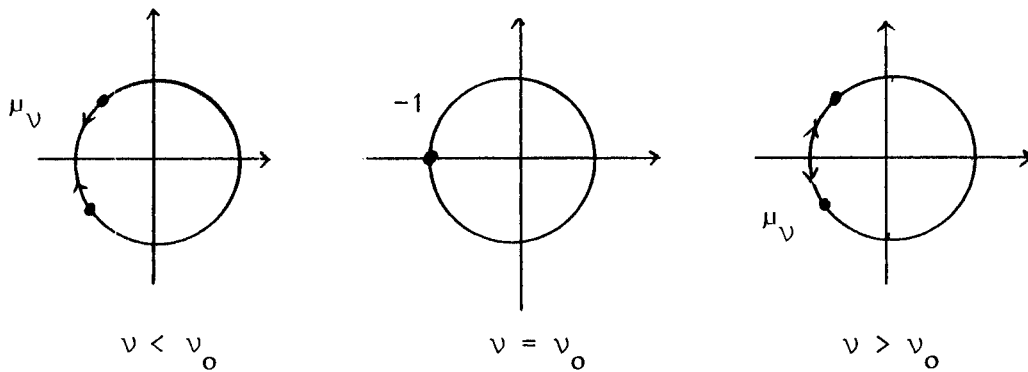


Dans la suite nous nous intéressons à cette deuxième situation ; lorsque v traverse v_0 on est amené à distinguer plusieurs cas, nous étudions les deux cas suivants :

1) Le couple de valeur propre passe de S^1 à \mathbb{R}



2) Le couple de valeur propre reste sur S^1



On va restreindre l'étude du comportement de la famille \mathcal{P}_v lors de ce passage par -1 à une famille définie sur \mathbb{R}^2 et ceci grâce au théorème de la variété centrale.

On a supposé la partie spectrale de $D\mathcal{P}_{v_0}(0)$ autre que -1 entièrement située en dehors du cercle unité S^1 ; du caractère hamiltonien on tire l'existence d'une partie spectrale, σ_- , située à l'intérieure strictement de S^1 et d'une partie spectrale, σ_+ , située à l'extérieure de S^1 ; à cette décomposition est associée une décomposition de l'espace tangent à $\bar{\Sigma}$ au $p^t 0$, qui est laissée invariante par $D\mathcal{P}_{v_0}(0)$:

$$T_0 \bar{\Sigma} = N_+ \oplus L \oplus N.$$

L, N_+, N_- étant les sous-espaces propres généralisés associés aux parties spectrales, situées sur S^1 , à σ_+ , à σ_- , respectivement.

On dit qu'une application linéaire $T : E \rightarrow E$ où E est un espace vectoriel de dimension finie est normalement hyperbolique sur le sous-espace L invariant par T si il existe une décomposition de E , en $E = N_+ \oplus L \oplus N_-$, laissée invariante par T telle que T contracte plus les vecteurs de N_- que ceux de L et que T^{-1} contracte plus les vecteurs de N_+ que ceux de L .

On peut donc supposer que l'application $\mathcal{P}_\nu : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ est normalement hyperbolique en $\{0\}$, ceci signifiant que $D\mathcal{P}_{\nu_0}(0)$ est normalement hyperbolique sur $\{0\}$.

Dans ces conditions on peut utiliser le théorème de la variété centrale :

THEOREME [5]. Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme d'une variété M laissant invariant une sous-variété V de M . On suppose que f est normalement hyperbolique sur V . Alors il existe un voisinage A de V tel que les variétés stables de A , $W_A^S(f) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(A)$ et instables de A , $W_A^U(f) = W_A^S(f^{-1})$, soient des sous-variétés de M s'intersectant dans V ; celles-ci sont tangentes le long de V à $N_+ \oplus TV$ et $N_- \oplus TV$ respectivement et sont attractantes et répulsantes respectivement.

Avec les hypothèses faites sur la famille \mathcal{P}_ν , pour ν voisin de ν_0 , en appliquant ce théorème on est conduit à l'existence d'une famille M_ν de sous-variétés de $\bar{\Sigma}$ de dimension inférieure ou égale à 2; la dépendance de cette famille par rapport au paramètre ν s'obtenant en appliquant le théorème à l'application $\psi(x, \nu) = (\mathcal{P}_\nu(x), \nu)$ $x \in \bar{\Sigma}$, ν voisin de ν_0 .

Dans le cas où ν traversant ν_0 , les deux valeurs propres de $D\mathcal{P}_\nu(0)$ situées sur S^1 restent sur S^1 après et avant le passage par -1 en $\nu = \nu_0$, à chaque M_ν , par un changement de carte, on fait correspondre un voisinage de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans \mathbb{R}^2 et on est amené à étudier une famille d'applications

$$P_\nu : \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

avec $p_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le spectre de $Dp_{v_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est égal à -1 de multiplicité 2, le spectre de $Dp_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ reste sur S^1 et les sous-espaces propres de $D\mathcal{P}_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ associés aux deux valeurs propres sont de dimension 2.

On considère le modèle suivant

$$p_v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + \mathcal{A}(x,y,v) \\ -y + \mathcal{B}(x,y,v) \end{pmatrix}$$

où \mathcal{A}, \mathcal{B} sont des expressions en x, y, v du deuxième degré au moins en ces variables telles que $p_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On montre dans le paragraphe suivant que ce modèle possède les propriétés désirées.

Dans l'autre cas que nous considérons, lorsque v traverse v_0 les valeurs propres de $D\mathcal{P}_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ passent du cercle unité à la droite réelle en passant par -1 pour $v = v_0$. Supposons que pour $v \leq v_0$, les valeurs propres de $D\mathcal{P}_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soient situées sur S^1 ; on peut appliquer le raisonnement précédant et on est amené à étudier une famille d'applications

$$p_v : v(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

avec $p_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v \leq v_0$, le spectre de $D\mathcal{P}_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ reste sur S^1 , les sous-espaces propres de $D\mathcal{P}_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ associés aux deux valeurs propres sont de dimension 2 pour $v \neq v_0$.

Mais pour $v > v_0$ les deux valeurs propres sont devenues réelles (μ_v, μ_v^{-1}) et à ce couple est associé un sous-espace propre de dimension deux ayant l'origine comme point hyperbolique. Dans ce cas on complète la famille précédente (p_v) par

$$p_v : v(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$p_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v > v_0 \quad \text{le spectre de } D\mathcal{P}_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est réel}$$

les sous espaces propres de $D \mathcal{P}_\nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ associés aux deux valeurs propres sont de dimension 2 pour $\nu \neq \nu_0$; et on a pour $\nu = \nu_0$ un sous-espace propre de dimension un cette fois.

En fait on est passé d'une rotation d'angle θ_ν , avec θ_ν qui tend vers 0 pour ν tendant vers ν_0 à un système selle, d'autant "plus selle" que ν augmente à partir de ν_0 .

Dans ce cas on considère le modèle suivant :

$$P_\nu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + \mathcal{A}(x, y, \nu) \\ -y + \mathcal{B}(x, y, \nu) \end{pmatrix}$$

\mathcal{A} , \mathcal{B} comme précédemment et nous verrons dans le paragraphe suivant que ce modèle possède les propriétés désirées.

§ 2 - Etude des modèles dans \mathbb{R}^2 : bifurcation.

Soit la famille d'applications (p_ν) définies par

$$p_\nu : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$p_\nu \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -x + y + \mathcal{A}(x, y, \nu) \\ -y + \mathcal{B}(x, y, \nu) \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}(x, y, \nu)$, $\mathcal{B}(x, y, \nu)$ étant des expressions en x, y, ν du 2ème degré au moins en ces variables, telles que $\mathcal{A}(0, 0, \nu) = \mathcal{B}(0, 0, \nu) = 0$ ainsi $p_\nu \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On note $A(x, y, \nu)$ et $B(x, y, \nu)$ les polynômes homogènes du deuxième degré en x, y, ν et on pose :

$$A(x, y, \nu) = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 \nu^2 + A_{12} xy + A_{13} x\nu + A_{23} y\nu$$

de même pour $B(x, y, \nu)$; on a $A_3 = B_3 = 0$.

On fait un changement de variables qui permette de simplifier l'expression du 2ème degré.

$$\text{Soit } C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$C \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(x, y, \nu) \\ \beta(x, y, \nu) \end{pmatrix}$$

α et β des polynômes homogènes du 2ème degré en x, y, ν ; C étant tangente à l'identité en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, est un difféomorphisme local et son inverse est donnée par :

$$C^{-1} \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha(x', y', \nu) \\ -\beta(x', y', \nu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(x', y', \nu) \\ \tilde{\beta}(x', y', \nu) \end{pmatrix}$$

où $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont du 3ème degré au moins en x', y', ν .

On calcule alors en ne gardant que les termes du 1er et 2ème degrés

$$\begin{aligned}
C_{o'p'v} C^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &\equiv C_{o'p'v} \begin{bmatrix} x' - \alpha(x', y', v) \\ y' - \beta(x', y', v) \end{bmatrix} \\
&\equiv C \begin{bmatrix} -x' + \alpha(x', y', v) + y' - \beta(x', y', v) + A(x', y', v) \\ -y' + \beta(x', y', v) + B(x', y', v) \end{bmatrix} \\
&\equiv \begin{bmatrix} -x' + y' + \alpha(x', y', v) - \beta(x', y', v) + A(x', y', v) + \alpha(-x'+y', -y', v) \\ -y' + \beta(x', y', v) + B(x', y', v) + \beta(-x'+y', -y', v) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

pour éliminer des termes du 2ème degré, on pose :

- (1) $\alpha(x', y', v) + \alpha(-x'+y', -y', v) - \beta(x', y', v) + A(x', y', v) = 0$
- (2) $\beta(x', y', v) + \beta(y'-x', -y', v) + B(x', y', v) = 0$

dans l'équation (2) on identifie les termes entre eux :

$$\begin{aligned}
x'^2 (2\beta_1 + B_1) &= 0 & \beta_1 &= -\frac{B_1}{2} \\
y'^2 (2\beta_2 + \beta_1 - \beta_{12} + B_2) &= 0 & 2\beta_2 - \beta_{12} &= -B_2 + \frac{B_1}{2} \\
v^2 (2\beta_3 + B_3) &= 0 & \text{or } B_3 &= 0 & \beta_3 &= 0 \\
x'y' (2\beta_{12} - 2\beta_1 + B_{12}) &= 0 & \beta_{12} &= -\frac{1}{2} B_{12} - \frac{1}{2} B_1 \\
x'v (\beta_{13} - \beta_{13} + B_{13}) &= 0 \\
y'v (\beta_{23} + \beta_{13} - \beta_{23} + B_{23}) &= 0 & \beta_{13} &= -B_{23}
\end{aligned}$$

des relations précédentes on obtient

$$\beta_2 = -\frac{1}{4} B_{12} - \frac{1}{4} B_1 - \frac{1}{2} B_2 + \frac{B_1}{4}$$

soit $\beta_2 = -\frac{1}{4} B_{12} - \frac{1}{2} B_2$.

Ainsi en prenant pour $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_{12}, \beta_{13}$ les valeurs trouvées on fait disparaître les termes en

$$x'^2, y'^2, v'^2, x'y', y'v$$

il reste un coefficient de C, à savoir β_{23} , qui n'est pas déterminé et un terme du second degré, à savoir $B_{13}x'\nu$, qu'on ne peut éliminer.

On considère alors l'équation (1)

$$\begin{aligned} x'^2(2\alpha_1 - \beta_1 + A_1) &= 0 & \alpha_1 &= -\frac{B_1}{4} - \frac{A_1}{2} \\ y'^2(2\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_{12} - \beta_2 + A_2) &= 0 & \alpha_2 - \alpha_{12} &= \frac{B_1}{8} + \frac{A_1}{4} - \frac{B_{12}}{8} - \frac{B_2}{4} - \frac{A_2}{2} \\ \nu^2(2\alpha_3 - \beta_3 + A_3) &= 0 \text{ or } A_3 = 0 & \alpha_3 &= 0 \\ x'y'(2\alpha_{12} - \beta_{12} + A_{12}) &= 0 & \alpha_{12} &= -\frac{B_{12}}{4} - \frac{B_1}{4} - \frac{A_{12}}{2} \\ x'\nu(\alpha_{13} - \alpha_{13} - \beta_{13} + A_{13}) &= 0 & x'\nu(B_{23} + A_{13}) &\neq 0 \\ y'\nu(\alpha_{23} + \alpha_{13} - \alpha_{23} - \beta_{23} + A_{23}) &= 0 & \alpha_{13} &= \beta_{23} - A_{23} \end{aligned}$$

or β_{23} n'est pas déterminé donc la relation $\alpha_{13} - \beta_{23} = -A_{23}$ détermine un α_{13} et un β_{23} .

D'autre part
$$\alpha_2 = \frac{B_1}{8} + \frac{A_1}{4} - \frac{B_{12}}{8} - \frac{B_2}{4} - \frac{A_2}{2} - \frac{B_{12}}{4} - \frac{B_1}{4} - \frac{A_{12}}{2}$$

d'où
$$\alpha_2 = \frac{A_1}{4} - \frac{A_2}{2} - \frac{A_{12}}{2} - \frac{B_1}{8} - \frac{B_2}{4} - \frac{3B_{12}}{8}$$

Ainsi en prenant pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ les valeurs trouvées on élimine dans (1) les termes du 2ème degré sauf celui en $x'\nu$.

On fait le changement de variable ainsi déterminé, d'où

$$C_{o'p\nu o} C^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -x' + y' + (A_{13} + B_{23})x'\nu \\ -y' + B_{13}x'\nu \end{pmatrix}$$

où ne sont conservés que les termes de degré 2 au maximum.

On est ainsi amené à considérer la famille d'applications notées encore (p_ν) définie par

$$p_\nu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + Ax\nu + \mathcal{A}(x, y, \nu) \\ -y + Bx\nu + \mathcal{B}(x, y, \nu) \end{pmatrix}$$

où A et B sont des réels, $\mathcal{A}(x, y, \nu)$ et $\mathcal{B}(x, y, \nu)$ représentent cette fois des expressions du 3ème degré au moins en x, y, ν .

La Jacobienne en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $p_\nu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est

$$Dp_\nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + A\nu + O(\nu^2) & 1 + O(\nu^2) \\ B\nu + O(\nu^2) & -1 + O(\nu^2) \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres de p_ν en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont les racines de

$$\lambda^2 + \lambda(2 - A\nu) + 1 - (A\nu + B\nu) + O(\nu^2) = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (2 - A\nu)^2 - 4 + 4A\nu + 4B\nu + O(\nu^2) \\ &= 4B\nu + O(\nu^2) \end{aligned}$$

- pour $\nu > 0$ on pose $\nu = \mu^2$ et $\mu > 0$

$$\lambda = \frac{-2 + A\mu^2 \pm 2\mu\sqrt{B} + O(\mu^2)}{2} = -1 + \mu\sqrt{B} + O(\mu^2)$$

ou $O(\mu^2)$ est une expression réelle

Si $B > 0$ on a deux valeurs propres réelles

Si $B < 0$ on a deux valeurs propres complexes.

- pour $\nu = 0$ on a deux valeurs propres confondues en -1 .

- pour $\nu < 0$ on pose $\nu = -\mu^2$ et $\mu < 0$

$$\lambda = \frac{-2 + A\mu^2 \pm 2\mu \sqrt{-B}}{2} + O(\mu^2) = -1 \pm \mu \sqrt{-B} + O(\mu^2)$$

où $O(\mu^2)$ est une expression réelle ;

Si $B > 0$ on a deux valeurs propres complexes

Si $B < 0$ on a deux valeurs propres réelles.

On a donc deux situations analogues selon que $B > 0$ ou $B < 0$;

Dans la suite on suppose $B > 0$.

Pour la famille d'applications p_ν , le point fixe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ change de nature selon les valeurs du paramètre ν :

pour $\nu > 0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est hyperbolique

pour $\nu < 0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est elliptique

ceci correspond au passage des valeurs propres du domaine réel au domaine complexe en passant par -1 .

Si on suppose que les applications p_ν conservent l'aire, alors les valeurs propres passent de la droite réelle sur le cercle unité en passant par -1 pour $\nu = 0$. On retrouve cette situation au 1er ordre avec notre modèle, puisque dans le cas réel avec nos notations

$$\lambda = -1 + \mu \sqrt{B} + O(\mu^2)$$

$$\lambda' = -1 - \mu \sqrt{B} + O(\mu^2)$$

et λ' est égal à λ^{-1} au 1er ordre ;

de même dans le cas complexe

$$\lambda' = -1 - i\mu \sqrt{B} + O(\mu^2) \text{ est égale à } \bar{\lambda} \text{ où}$$

$$\lambda = -1 + i\mu \sqrt{B} + O(\mu^2) \text{ au 1er ordre.}$$

On étudie alors les points 2-périodiques de la famille (p_ν) .

$$P_v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x, y, v) \\ \psi(x, y, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + Axv + \mathcal{A}(x, y, v) \\ -y + Bxv + \mathcal{B}(x, y, v) \end{pmatrix}$$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des expressions en x, y, v de degré supérieur ou égal à 3.

Pour les polynômes homogènes de degré 3 on pose la convention d'écriture suivante :

$$X^{(3)}(x, y, v) = X_{300}x^3 + X_{030}y^3 + X_{003}v^3 + X_{210}x^2y + X_{201}x^2v + X_{021}y^2v + \\ + X_{120}xy^2 + X_{102}xv^2 + X_{012}yv^2 + X_{111}xyv.$$

Suivant la technique utilisée dans Meyer [7] on fait le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \text{pour } v \geq 0 \quad v &= \mu^2 \\ x &= \mu \xi \quad \varphi = \mu \Phi \\ y &= \mu^2 \eta \quad \psi = \mu^2 \Psi. \end{aligned}$$

Les composantes de $p_v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \mu \Phi &= -\mu \xi + \mu^2 \eta + A\mu^3 \xi + A_{300}\mu^3 \xi^3 + O(\mu^4) \\ \mu^2 \Psi &= -\mu^2 \eta + B\xi\mu^3 + B_{300}\mu^3 \xi^3 + B_{210}\mu^4 \xi^2 \eta + B_{201}\mu^4 \xi^2 + B_4\mu^4 \xi^4 + O(\mu^5) \end{aligned}$$

où B_4 représente, avec nos notations B_{4000} le coefficient de x^4 .

Soit encore

$$\begin{aligned} \mu \Phi &= -\mu \xi + \mu^2 \eta + \mu^3(A\xi + A_{300}\xi^3) + O(\mu^4) \\ \mu^2 \Psi &= -\mu^2 \eta + \mu^3(B\xi + B_{300}\xi^3) + \mu^4(B_{210}\xi^2 \eta + B_{201}\xi^2 + B_4\xi^4) + O(\mu^5) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Phi &= -\xi + \mu \eta + \mu^2(A\xi + A_{300}\xi^3) + O(\mu^3) \\ \Psi &= -\eta + \mu(B\xi + B_{300}\xi^3) + \mu^2(B_{210}\xi^2 \eta + B_{201}\xi^2 + B_4\xi^4) + O(\mu^3). \end{aligned}$$

Calculons alors ϕ^2 et ψ^2 :

$$\begin{aligned}\phi^2 &= -\phi + \mu\Psi + \mu^2(A\phi + A_{300}\phi^3) + o(\mu^3) \\ &= \xi - \mu\eta - \mu^2(A\xi + A_{300}\xi^3) - \mu\eta + \mu^2(B\xi + B_{300}\xi^3) + \mu^2(-A\xi - A_{300}\xi^3) + o(\mu^3) \\ \phi^2 &= \xi - 2\mu\eta - \mu^2(2A\xi + 2A_{300}\xi^3 - B\xi - B_{300}\xi^3) + o(\mu^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi^2 &= -\psi + \mu(B\phi + B_{300}\phi^3) + \mu^2(B_{210}\phi^2\psi + B_{201}\phi^2 + B_4\phi^4) + o(\mu^3) \\ &= \eta - \mu(B\xi + B_{300}\xi^3) - \mu^2(B_{210}\xi^2\eta + B_{201}\xi^2 + B_4\xi^4) \\ &\quad + \mu(-B\xi + B\eta\mu - B_{300}\xi^3 + 3B_{300}\xi^2\eta\mu) \\ &\quad + \mu^2(-B_{210}\xi^2\eta + B_{201}\xi^2 + B_4\xi^4) + o(\mu^3) \\ &= \eta - \mu(2B\xi + 2B_{300}\xi^3) - \mu^2(2B_{210}\xi^2\eta - B\eta - 3B_{300}\xi^2\eta) + o(\mu^3) \\ \psi^2 &= \eta - 2\mu(B\xi + B_{300}\xi^3) + \mu^2(B\eta + (3B_{300} - 2B_{210})\xi^2\eta) + o(\mu^3).\end{aligned}$$

Les points 2 périodiques ont des coordonnées qui vérifient :

$$\phi^2 = \xi \quad \text{et} \quad \psi^2 = \eta$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\phi^2 - \xi &= -2\mu\eta - \mu^2(2A\xi + 2A_{300}\xi^3 - B\xi - B_{300}\xi^3) + o(\mu^3) = 0 \\ \psi^2 - \eta &= -2\mu(B\xi + B_{300}\xi^3) + \mu^2(B\eta + (3B_{300} - 2B_{210})\xi^2\eta) + o(\mu^3) = 0\end{aligned}$$

d'où, en posant

$$\begin{aligned}\Delta(\xi, \eta, \mu) &= \frac{1}{\mu} [\phi^2 - \xi] \\ \zeta(\xi, \eta, \mu) &= \frac{1}{\mu} [\psi^2 - \eta]\end{aligned}$$

Il s'agit de résoudre :

$$\begin{aligned}0 &= \Delta(\xi, \eta, \mu) = -2\eta - \mu(2A\xi + 2A_{300}\xi^3 - B\xi - B_{300}\xi^3) + o(\mu^2) \\ 0 &= \zeta(\xi, \eta, \mu) = -2(B\xi + B_{300}\xi^3) + \mu(B\eta + (3B_{300} - 2B_{210})\xi^2\eta) + o(\mu^2)\end{aligned}$$

On applique le théorème des fonctions implicites à la première équation ;
 puisque

$$\left. \frac{\partial \Delta}{\partial \eta} \right|_{000} = -2$$

il existe une application d'un voisinage de $(\xi, \mu) = (0, 0)$ dans un voisinage de $\eta = 0$ soit $g(\xi, \mu)$ telle que posant $\eta = g(\xi, \mu)$ on ait

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, g(\xi, \mu), \mu) &= 0 ; \\ g(\xi, \mu) &= \frac{B - 2A}{2} \xi \mu + \frac{B_{300} - 2A_{300}}{2} \xi^3 \mu + O(\mu^2) \end{aligned}$$

On reporte dans la deuxième équation,

$$\begin{aligned} 0 = \zeta(\xi, g(\xi, \mu), \mu) &= -2(B\xi + B_{300}\xi^3) + \mu(Bg(\xi, \mu) + (3B_{300} - 2B_{210})\xi^2 g(\xi, \mu)) + O(\mu^2) \\ &= -2(B\xi + B_{300}\xi^3) + O(\mu^2). \end{aligned}$$

Le théorème des fonctions implicites puisque

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|_{000} = -2B$$

permet d'affirmer l'existence d'une fonction h d'un voisinage de $\mu = 0$ dans un voisinage de $\xi = 0$ telle que posant $\xi = h(\mu)$ on ait

$$\zeta(h(\mu), g(\xi, \mu), \mu) = 0$$

de plus $h(\mu) = O(\mu^2)$. En effet

$$-2B\xi - 2B_{300}\xi^3 + k\mu^2 + O(\mu^3) = 0$$

Si $\xi = h(\mu) = h_0 + h_1\mu + O(\mu^2)$

$$h_0 \neq 0 \text{ impossible car } h : v(\mu = 0) \rightarrow v(\xi = 0)$$

donc $\xi = h(\mu) = h_1\mu + h_2\mu^2 + O(\mu^3)$

$$-2B(h_1\mu + h_2\mu^2) - 2B_{300}(h_1\mu + h_2\mu^2)^3 + k\mu^2 + O(\mu^3) = 0$$

donc $h_1 = 0$; pour le coefficient du terme en μ^2 on a

$$-2Bh_2 + k = 0 \quad h_2 = \frac{k}{2B}$$

soit $\xi = h(\mu) = \frac{k}{2B} \mu^2 + O(\mu^3)$

Ainsi dans le cas $\nu \geq 0$, $B > 0$, l'ensemble des points 2-périodiques est situé sur une courbe paramétrée par μ qui dans les coordonnées (ξ, η) a pour équations :

$$\begin{aligned}\xi &= h(\mu) = o(\mu^2) \\ \eta &= g(h(\mu), \mu) = o(\mu^2) .\end{aligned}$$

Précisons alors les coordonnées de ces points 2-périodiques, ils s'écrivent

$$\xi(\mu) = \xi(0) + o(\mu)$$

$$\eta(\mu) = \eta(0) + o(\mu)$$

où $\xi(0)$ et $\eta(0)$ sont les solutions du système

$$\Delta(\xi, \eta, 0) = 0$$

$$\zeta(\xi, \eta, 0) = 0$$

C'est-à-dire du système :

$$2\eta = 0$$

$$(B + B_{300}\xi^2)\xi = 0 .$$

Mis à part le point fixe $\xi = \eta = 0$, on trouve deux points 2-périodiques, si

$B_{300} < 0$:

$$\xi_1 = \sqrt{-\frac{B}{B_{300}}} \quad \eta_1 = 0$$

$$\xi_2 = -\sqrt{-\frac{B}{B_{300}}} \quad \eta_2 = 0 .$$

Ainsi dans ce cas on a deux familles de points 2-périodiques situées sur la courbe d'équation donnée plus haut. Dans les coordonnées (x, y) , ceux-ci s'écrivent :

$$x_i(\mu) = \mu \cdot \xi_i + o(\mu^2)$$

$$y_i(\mu) = \mu^2 \cdot \eta_i + o(\mu^3).$$

Ces points tendent vers le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quand μ tend vers 0.

Revenant aux coordonnées ξ, η , pour obtenir la nature de ces points 2-périodiques, nous calculons la jacobienne de l'application :

$$(\xi, \eta) \longrightarrow (\Phi^2, \Psi^2)$$

$$\text{Jac}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 1 - \mu^2(2A - B + 6A_{300}\xi^2 - 3B_{300}\xi^2) + o(\mu^3) & -2\mu + o(\mu^3) \\ -2\mu(B + 3B_{300}\xi^2) + \mu^2(6B_{300} - 4B_{210})\xi\eta + o(\mu^3) & 1 + \mu^2(B(3B_{300} - 2B_{210})\xi^2) + o(\mu^3) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\text{Jac}(\xi_i, \eta_i) = \begin{pmatrix} 1 - \mu^2(2A - B + 6A_{300} \cdot \frac{-B}{B_{300}} + 3B_{300} \cdot \frac{B}{B_{300}}) + o(\mu^3) & -2\mu + o(\mu^3) \\ -2\mu(B + 3B_{300} \cdot \frac{-B}{B_{300}}) + o(\mu^3) & 1 + \mu^2(B(3B_{300} - 2B_{210})\frac{B}{B_{300}}) + o(\mu^3) \end{pmatrix}$$

Soit

$$\text{Jac}(\xi_i, \eta_i) = \begin{pmatrix} 1 - \mu^2(2A + 2B - 6B \frac{A_{300}}{B_{300}}) & -2\mu \\ 4\mu B & 1 + \mu^2(-2B + 2\frac{B_{210}}{B_{300}}B) \end{pmatrix} + o(\mu^3)$$

D'où le polynôme caractéristique :

$$[1 - \mu^2(2A + 2B - 6B \frac{A_{300}}{B_{300}}) - X] \cdot [1 + \mu^2(-2B + 2\frac{B_{210}}{B_{300}}B) - X] + 8\mu^2 B + o(\mu^3)$$

Les valeurs propres de l'application

$$(\xi, \eta) \longleftarrow (\Phi^2, \Psi^2).$$

sont les racines de l'équation caractéristique suivante :

$$X^2 - X \left[2 + \mu^2 \left(-4B - 2A + 2 \frac{B}{B_{300}} (B_{210} + 3A_{300}) \right) \right] \\ + 1 + \mu^2 \left(-2B + 2 \frac{B_{210}}{B_{300}} B \right) - \mu^2 \left(2A + 2B - 6 \frac{A_{300}}{B_{300}} B \right) + 8\mu^2 B + o(\mu^3) = 0$$

c'est-à-dire

$$X^2 - X \left[2 + \mu^2 \left(-4B - 2A + 2B \cdot \frac{B_{210} + 3A_{300}}{B_{300}} \right) \right] \\ + 1 + \mu^2 \left[12B - 2A + 2B \cdot \frac{B_{210} + 3A_{300}}{B_{300}} \right] + o(\mu^3) = 0 .$$

Pour simplifier on pose $\alpha = B \cdot \frac{B_{210} + 3A_{300}}{B_{300}}$ donc l'équation devient

$$X^2 - 2X \left[1 + \mu^2 (-2B + \alpha) \right] + 1 + 2\mu^2 (6B + \alpha) + o(\mu^3) = 0 .$$

En ne conservant que les termes du deuxième degré au maximum en μ , le discriminant s'écrit :

$$\Delta' = (1 + (\mu^2 (-2B + \alpha)))^2 - 1 - 2\mu^2 (6B + \alpha) \\ = 1 + 2\mu^2 (-2B + \alpha) - 1 - 2\mu^2 (6B + \alpha) \\ = 1 - 4B\mu^2 + 2\alpha\mu^2 - 1 - 12\mu^2 B - 2\alpha\mu^2 \\ = -16B\mu^2$$

Les racines sont donc

$$X = 1 \pm 4\mu \sqrt{-B} + \theta(\mu)$$

où $\theta(\mu)$ est une fonction de μ qui est réelle, ne possède pas de terme linéaire et vérifie $\theta(0) = 0$.

Puisque $B > 0$ ces valeurs propres sont complexes et les points 2-périodiques sont elliptiques.

Avec les mêmes hypothèses sur les coefficients mais $\nu < 0$, on pose cette fois $\nu = -\mu^2$ et on procède de la même manière ; nous donnons les résultats principaux :

$$\begin{cases} \Phi = -\xi + \mu\eta + \mu^2(-A\xi + A_{300}\xi^3) + O(\mu^3) \\ \Psi = -\eta + \mu(-B\xi + B_{300}\xi^3) + \mu^2(B_{210}\xi^2\eta - B_{201}\xi^2 + B_4\xi^4) + O(\mu^3) \\ \Phi^2 = \xi - 2\mu\eta - \mu^2(-2A\xi + 2A_{300}\xi^3 + B\xi - B_{300}\xi^3) + O(\mu^3) \\ \Psi^2 = \eta - 2\mu(B_{300}\xi^3 - B\xi) - \mu^2(B\eta + (2B_{210} - 3B_{300})\xi^2\eta) + O(\mu^3) \end{cases}$$

On applique le théorème des fonctions implicites à :

$$\begin{cases} 0 = \Delta(\xi, \eta, \mu) = -2\eta - \mu(-2A\xi + 2A_{300}\xi^3 + B\xi - B_{300}\xi^3) + O(\mu^2) \\ 0 = \zeta(\xi, \eta, \mu) = -2(B_{300}\xi^3 - B\xi) - \mu(B\eta + (2B_{210} - 3B_{300})\xi^2\eta) + O(\mu^2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \eta} \Big|_{000} = -2 \quad \text{d'où} \quad \eta = g(\xi, \mu) = \frac{2A-B}{2} \xi\mu + \frac{B_{300} - 2A_{300}}{2} \xi^3\mu + O(\mu^2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \Big|_{000} = 2B \quad \text{d'où} \quad \xi = h(\mu) = O(\mu^2)$$

coordonnées des points 2-périodiques :

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ -2(B_{300}\xi^3 - B\xi) = 0 \quad \quad \quad B_{300}\xi^2 - B = 0 \end{cases}$$

d'où si $B_{300} > 0$ on trouve 2 points 2-périodiques

$$\begin{cases} \eta_1 = 0 & \xi_1 = \sqrt{\frac{B}{B_{300}}} \\ \eta_2 = 0 & \xi_2 = -\sqrt{\frac{B}{B_{300}}} \end{cases}$$

La matrice jacobienne en ces points est :

$$\text{Jac}(\xi_i, \eta_i) = \begin{pmatrix} 1 - \mu^2(-2A + 2B + 6B \frac{A_{300}}{B_{300}}) & -2\mu \\ -4\mu B & 1 - \mu^2(-2B + 2B \frac{B_{210}}{B_{300}}) \end{pmatrix} + O(\mu^3) .$$

Le polynôme caractéristique, en posant $\alpha = B \cdot \frac{3A_{300} + B_{210}}{B_{300}}$ s'écrit

$$X^2 - 2X[1 + \mu^2(A + 2B - \alpha)] + 1 - 2\mu^2(2B - A + \alpha) + O(\mu^3) = 0$$

et $\Delta' = 8B\mu^2 + O(\mu^3)$ d'où les racines

$$X = 1 \pm 2\mu \sqrt{2B} + \tilde{\theta}(\mu)$$

les 2 points 2-périodiques sont de nature hyperbolique.

En conclusion on a montré le théorème

THEOREME.

$$\text{Soit } P_{\nu} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + \mathcal{A}(x, y, \nu) \\ -y + \mathcal{B}(x, y, \nu) \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{A}(0, 0, \nu) = \mathcal{B}(0, 0, \nu) = 0$, \mathcal{A} et \mathcal{B} des expressions sans terme constant ni linéaire.

Notant B le coefficient dans $\mathcal{B}(x, y, \nu)$ du terme en x^{ν} on suppose $B > 0$:

Si $\nu > 0$ le point fixe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est hyperbolique

Si $\nu < 0$ le point fixe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est elliptique

Si $\nu = 0$ les valeurs propres du point fixe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont confondues en -1

Notant B_{300} le coefficient dans $\mathcal{B}(x, y, \nu)$ du terme en x^3 :

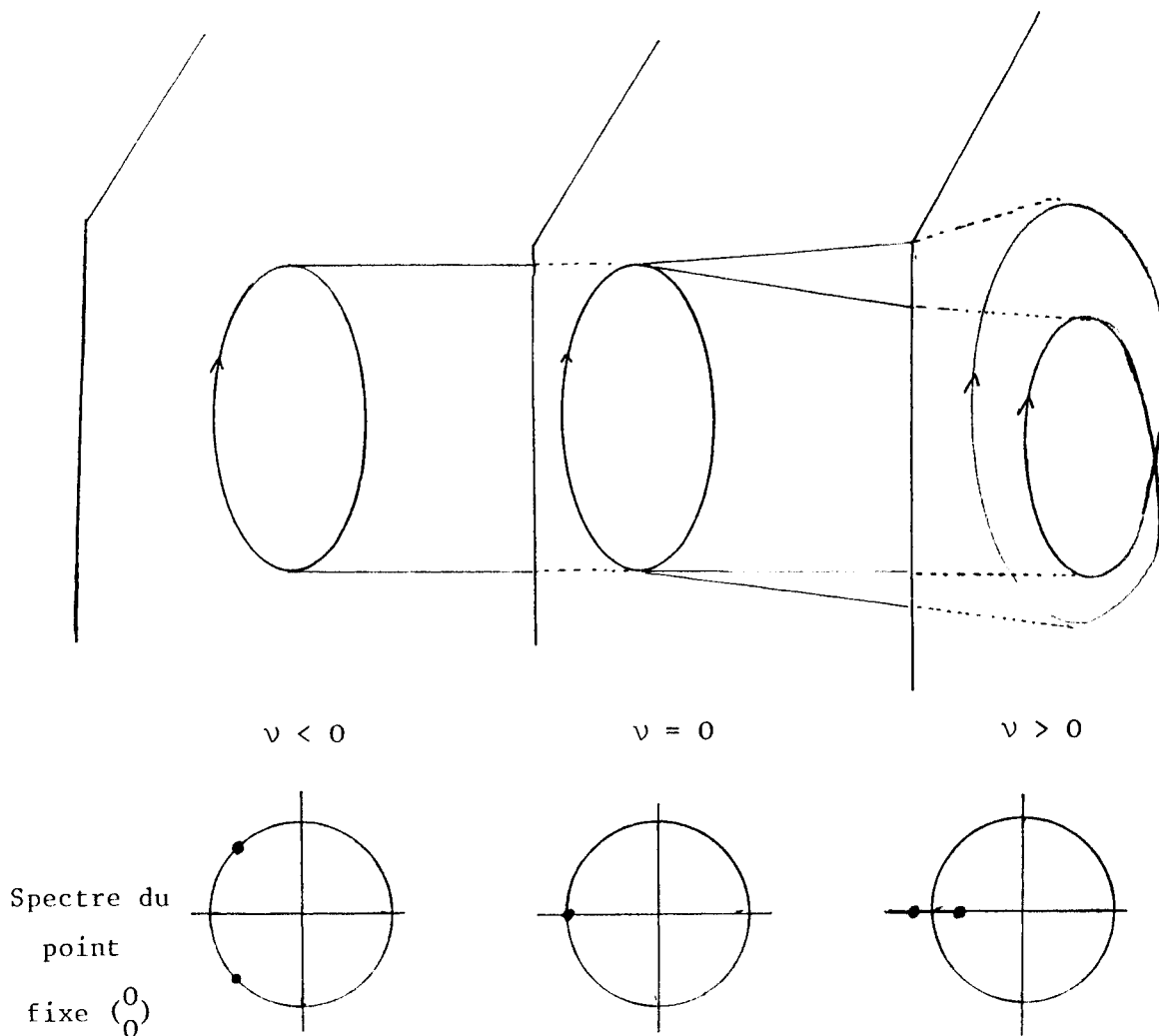
Si $B_{300} < 0$ pour $\nu > 0$ il existe deux familles de point 2-périodiques

$z_1(\nu), z_2(\nu)$ tendant vers le point fixe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lorsque ν tend vers 0 et qui

sont tous deux elliptiques.

Si $B_{300} > 0$ pour $\nu < 0$ il existe deux familles de point 2-périodiques $z_1(\nu), z_2(\nu)$ tendant vers le point fixe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lorsque ν tend vers 0 et qui sont tous deux hyperboliques

En conclusion, la famille (p_ν) étant associée à une famille de champs de vecteurs hamiltoniens (X_ν) , le théorème précédent permet d'affirmer que lorsque un nombre caractéristique d'une orbite 1-périodique Γ_ν passe par -1 pour une valeur du paramètre, les conditions du théorème étant par ailleurs remplies, il apparait une orbite 2-périodique ; on peut schématiser cette situation par la figure suivante [1, p. 599] .



On procède alors à l'étude de la deuxième famille de difféomorphismes du plan :

$$P_\nu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + \mathcal{A}(x,y,\nu) \\ -y + \mathcal{B}(x,y,\nu) \end{pmatrix}$$

\mathcal{A} et \mathcal{B} étant des expressions en x,y,ν du deuxième degré au moins en ces variables vérifiant $\mathcal{A}(0,0,\nu) = \mathcal{B}(0,0,\nu) = 0$.

Pour améliorer l'expression des termes du deuxième degré, on fait le changement de variables suivant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(x,y) \\ \beta(x,y) \end{pmatrix}$$

où α et β sont des polynômes du deuxième degré en x,y .

$$C_{0P_{\nu 0}} C^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \cong C_{0P_\nu} \begin{bmatrix} x' - \alpha(x',y',\nu) \\ y' - \beta(x',y',\nu) \end{bmatrix}$$

où on néglige les termes autres que ceux du premier et du deuxième degré en x',y',ν .

$$= C \begin{bmatrix} -x' + \alpha(x',y',\nu) + \mathcal{A}_2(x',y',\nu) \\ -y' + \beta(x',y',\nu) + \mathcal{B}_2(x',y',\nu) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x' + \alpha(x',y',\nu) + \mathcal{A}_2(x',y',\nu) + \alpha(-x',-y',\nu) \\ -y' + \beta(x',y',\nu) + \mathcal{B}_2(x',y',\nu) + \beta(-x',-y',\nu) \end{bmatrix}$$

d'où en identifiant à zéro les termes du deuxième degré (avec les notations précédentes)

$$x^2(\alpha_1 + A_1 + \alpha_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{A_1}{2}$$

$$y^2(\alpha_2 + A_2 + \alpha_2) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{A_2}{2}$$

$$\nu^2(\alpha_3 + 0 + \alpha_3) = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$x'y'(\alpha_{12} + A_{12} + \alpha_{12}) = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = -\frac{A_{12}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x'v(\alpha_{13} + A_{13} - \alpha_{13}) = 0 \\ y'v(\alpha_{23} + A_{23} - \alpha_{23}) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{on peut éliminer dans } \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2 \text{ les termes} \\ \text{en } x'v, y'v.$$

Prenant pour C les valeurs trouvées et posant $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, on procède de la même manière pour la deuxième expression, on obtient la nouvelle expression

$$p_v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + axv + \tilde{a}yv + \mathcal{A}(x, y, v) \\ -y + bxv + \tilde{b}yv + \mathcal{B}(x, y, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x, y, v) \\ \psi(x, y, v) \end{pmatrix}$$

où cette fois \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des expressions du troisième degré au moins en x, y, v .

Pour connaître la nature du point fixe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lorsque v varie autour de 0, on calcule la matrice jacobienne en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $p_v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\text{Jac} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + av + A_{102}v^2 + o(v^3) & \tilde{a}v + A_{012}v^2 + o(v^3) \\ bv + B_{102}v^2 + o(v^3) & -1 + \tilde{b}v + B_{012}v^2 + o(v^3) \end{pmatrix}$$

$$p_v(X) = X^2 - X(-2 + (a+\tilde{b})v + (A_{102} + B_{012})v^2) + 1 - (a + \tilde{b}) - (A_{102} + B_{012})v^2 + (a\tilde{b} - \tilde{a}b)v^2 + o(v^3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_v &= (4 + (a+\tilde{b})^2v^2 - 4(a+\tilde{b})v - 4(A_{102} + B_{012})v^2 - 4 + 4(a + \tilde{b})v + 4(A_{102} + B_{012})v^2 \\ &\quad - 4(a\tilde{b} - \tilde{a}b) + o(v^3)) \\ &= [(a + \tilde{b})^2 - 4(a\tilde{b} - \tilde{a}b)] v^2 + o(v^3) \\ &= [(a - \tilde{b})^2 + 4\tilde{a}b]v^2 + o(v^3) . \end{aligned}$$

On supposera dans la suite que $\Delta = [(a - \tilde{b})^2 + 4\tilde{a}b] < 0$ d'où les valeurs propres du point fixe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont :

$$X = \frac{1}{2} [- 2 + (a+\tilde{b})\nu \pm \nu i \sqrt{-[\Delta]}] + f(\nu)$$

où $f(\nu)$ est une expression réelle, $f(\nu) = o(\nu)$.

Ainsi le point fixe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est de type élliptique pour tout ν ; dans le cas où la famille est une famille d'applications symplectiques, les valeurs propres restent sur le cercle unité et passent par -1 pour $\nu = 0$.

On étudie alors les points 2-périodiques de cette famille ; pour $\nu \geq 0$ on pose

$$\begin{aligned} \nu &= \mu^2 & x &= \mu\xi & \phi &= \mu\Phi \\ & & y &= \mu^2\eta & \psi &= \mu^2\Psi \end{aligned}$$

$$\mu\phi = -\mu\xi + a\xi\mu^3 + \tilde{a}\eta\mu^4 + A_{300}\xi^3\mu^3 + A_{210}\xi^2\eta\mu^4 + A_{201}\xi^2\mu^4 + A_{400}\xi^4\mu^4 + o(\mu^5)$$

$$\mu^2\Psi = -\mu^2\eta + b\xi\mu^3 + \tilde{b}\eta\mu^4 + B_{300}\xi^3\mu^3 + B_{210}\xi^2\eta\mu^4 + B_{201}\xi^2\mu^4 + B_{400}\xi^4\mu^4 + o(\mu^5)$$

$$\phi = -\xi + (a\xi + A_{300}\xi^3)\mu^2 + (\tilde{a}\eta + A_{201}\xi^2 + A_{210}\xi^2\eta + A_{400}\xi^4)\mu^3 + o(\mu^4)$$

$$\Psi = -\eta + (b\xi + B_{300}\xi^3)\mu + (\tilde{b}\eta + B_{201}\xi^2 + B_{210}\xi^2\eta + B_{400}\xi^4)\mu^2 + o(\mu^3)$$

$$\begin{aligned} \phi^2 &= -\phi + (a\phi + A_{300}\phi^3)\mu^2 + (\tilde{a}\psi + A_{201}\phi^2 + A_{210}\phi^2\psi + A_{400}\phi^4)\mu^3 + o(\mu^4) \\ &= \xi - (a\xi + A_{300}\xi^3)\mu^2 - (\tilde{a}\eta + A_{201}\xi^2 + A_{210}\xi^2\eta + A_{400}\xi^4)\mu^3 + \mu^2(-a\xi - A_{300}\xi^3) \\ &\quad + \mu^3(-\tilde{a}\eta + A_{201}\xi^2 - A_{210}\xi^2\eta + A_{400}\xi^4) + o(\mu^4) \end{aligned}$$

$$\phi^2 = \xi - 2(a\xi + A_{300}\xi^3)\mu^2 - \mu^3(2\tilde{a}\eta + 2A_{210}\xi^2\eta) + o(\mu^4)$$

$$\begin{aligned} \psi^2 &= -\psi + (b\phi + B_{300}\phi^3)\mu + (\tilde{b}\psi + B_{201}\phi^2 + B_{210}\phi^2\psi + B_{400}\phi^4)\mu^2 + o(\mu^3) \\ &= \eta - (b\xi + B_{300}\xi^3)\mu - (\tilde{b}\eta + B_{201}\xi^2 + B_{210}\xi^2\eta + B_{400}\xi^4)\mu^2 + \mu(-b\xi - B_{300}\xi^3) \\ &\quad + \mu^2(-\tilde{b}\eta + B_{201}\xi^2 - B_{210}\xi^2\eta + B_{400}\xi^4) + o(\mu^3) \end{aligned}$$

$$\psi^2 = \eta - 2(b\xi + B_{300}\xi^3)\mu - \mu^2(2\tilde{b}\eta + 2B_{210}\xi^2\eta) + o(\mu^3) .$$

Les points 2-périodiques sont donnés par

$$\Delta(\xi, \eta, \mu) = \frac{1}{\mu} (\phi^2 - \xi) = -2(a\xi + A_{300}\xi^3) - (2\tilde{a}\eta + 2A_{210}\xi^2\eta)\mu + o(\mu^2) = 0$$

$$\zeta(\xi, \eta, \mu) = \frac{1}{\mu} (\psi^2 - \eta) = -2(b\xi + B_{300}\xi^3) - (2\tilde{b}\eta + 2B_{210}\xi^2\eta)\mu + o(\mu^2) = 0$$

Dans la deuxième équation puisque $\left. \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|_{000} = -2b \neq 0$, il existe une application g d'un voisinage de $\eta = 0$ et d'un voisinage de $\mu = 0$ dans un voisinage de $\xi = 0$ telle que

$$\xi = g(\eta, \mu) \quad \zeta(g(\eta, \mu), \eta, \mu) = 0.$$

Précisons l'expression de g :

$$g(0,0) = 0 ; \text{ posons alors}$$

$$g(\eta, \mu) = \alpha\mu + \beta\eta + \gamma\mu^2 + \delta\eta^2 + \varepsilon\eta\mu + \zeta_n\eta^n + f(\eta, \mu)$$

où $f(\eta, \mu)$ est une expression en η, μ du troisième degré au moins et $n \geq 3$.

$$0 = \zeta(g(\eta, \mu), \eta, \mu) =$$

$$\begin{aligned} & -2b[\alpha\mu + \beta\eta + \gamma\mu^2 + \delta\eta^2 + \varepsilon\eta\mu + \zeta_n\eta^n + f(\eta, \mu)] \\ & -2B_{300}[\alpha\mu + \beta\eta + \gamma\mu^2 + \delta\eta^2 + \varepsilon\eta\mu + \zeta_n\eta^n + f(\eta, \mu)]^3 \\ & -2\tilde{b}\eta\mu - 2B_{210}\eta\mu[\alpha\mu + \beta\eta + \gamma\mu^2 + \delta\eta^2 + \varepsilon\eta\mu + \zeta_n\eta^n + f(\eta, \mu)]^2 + o(\mu^2) \end{aligned}$$

par identification on obtient :

$$\alpha = 0 = \beta = \delta = \zeta_n$$

$$\varepsilon = -\frac{\tilde{b}}{b}$$

et donc $g(\eta, \mu) = \mu \bar{g}(\eta, \mu)$ avec \bar{g} ayant pour terme du premier degré $-\frac{\tilde{b}}{b}\eta$.

Reportant dans la première équation :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(g(\eta, \mu), \eta, \mu) = \\ &= -2a \cdot \mu \cdot \bar{g}(\eta, \mu) - 2A_{300} \cdot \mu^3 \cdot \bar{g}^3(\eta, \mu) - 2\tilde{a}\eta\mu - 2A_{210} \mu^3 \cdot \bar{g}^2 \cdot \eta + o(\mu^2) \\ &= \mu[-2a \cdot \bar{g}(\eta, \mu) - 2\tilde{a}\eta + o(\mu)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{posant } \bar{\zeta} &= -2a \bar{g}(\eta, \mu) - 2\tilde{a}\eta + O(\mu) \\ &= +2a \frac{\tilde{b}}{b} \eta - 2\tilde{a}\eta + f(\eta) + O(\mu) \end{aligned}$$

où $f(\eta)$ est une expression du deuxième degré au moins en η ;

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \eta} \Big|_{000} = \frac{2(\tilde{a}b - \tilde{a}\tilde{b})}{b} \neq 0$$

et il existe une application h d'un voisinage de $\mu = 0$ dans un voisinage de $\eta = 0$ telle que

$$\eta = h(\mu) \quad \zeta(g(h(\mu), \mu), h(\mu), \mu) = 0 \quad h(\mu) = o(\mu) .$$

Les points 2-périodiques sont donc situés sur une courbe paramétrée par μ qui passe par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et qui a pour équation :

$$\begin{aligned} \eta &= h(\mu) \\ \xi &= g(\eta, \mu) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Considérant} \quad 0 &= 2\left(a \frac{\tilde{b}}{b} - \tilde{a}\right)\eta + f(\eta) \\ &= -2(b\xi + B_{300}\xi^3) = -2\xi(b + B_{300}\xi^2) \end{aligned}$$

on trouve que si $-\frac{b}{B_{300}} > 0$ il y a 2 points 2-périodiques distincts de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour $\nu \geq 0$ dans le cas où $(a-\tilde{b})^2 + 4\tilde{a}\tilde{b} < 0$ et $-\frac{b}{B_{300}} > 0$ on obtient deux familles de points 2-périodiques qui tendent vers le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec μ .

Pour $\nu < 0$ on pose $\nu = -\mu^2$ et

$$\begin{aligned} \phi &= -\xi + \mu^2(-a\xi + A_{300}\xi^3) + \mu^3(-\tilde{a}\eta + A_{210}\xi^2\eta - A_{201}\xi^2 + A_4) + O(\mu^4) \\ \psi &= -\eta + \mu(-b\xi + B_{300}\xi^3) + \mu^2(-\tilde{b}\eta + B_{210}\xi^2\eta - B_{201}\xi^2 + B_4) + O(\mu^4) \end{aligned}$$

on constate que c'est l'expression obtenue pour $\nu \geq 0$ en affectant $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}, A_{201}, B_{201}$ d'un signe moins ; d'où si $-\frac{b}{B_{300}} < 0$ on obtient deux familles de

points 2-périodiques qui tendent vers le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec μ .

CHAPITRE IV

EXPRESSION DES NOMBRES CARACTERISTIQUES

A L'AIDE D'UN THEOREME DE MOSER

Dans le chapitre I nous avons énoncé un théorème de Weinstein CH. I th. 7, reformulé, en le généralisant, par Moser en 1976. Nous reprenons une partie de la démonstration de Moser ; celle-ci en effet va nous permettre de donner une approximation d'un certain nombre de valeurs propres de l'application de premier retour de Poincaré associée à une orbite périodique.

Soit le système d'équations différentielles :

$$\frac{dz}{dt} = f(z) \quad z \in \mathbb{R}^n \quad f \text{ de classe } C^r$$

on suppose que $z = 0$ est un point d'équilibre du système.

On fait alors les hypothèses suivantes :

1. \mathbb{R}^n se décompose en $\mathbb{R}^n = E \oplus F$, E et F étant deux sous-espaces vectoriels invariants par $Df(0)$; on notera dans une base adéquate

$$\text{Mat}(Df(0)) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

2. Les valeurs propres de $Df(0)$ restreint à E sont imaginaires pures et multiples entiers d'un nombre fixé $i\omega$, $\omega > 0$. Les valeurs propres de $Df(0)$ restreint à F ne sont pas multiples de $i\omega$. Cette deuxième hypothèse signifie que toutes les solutions du système linéaire $\dot{z} = Df(0).z$ situées dans E sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ alors qu'aucune solution périodique de ce système située dans F n'admet cette période.

LEMME. Dans les conditions de l'hypothèse 2 on a

$$e^{PT} = \text{Id}_E$$

$$\det(e^{QT} - \text{Id}_F) = 0.$$

Dans E les orbites périodiques ont la période T , donc la rotation e^{Pt} est l'identité pour $t = T$. D'autre part comme les orbites périodiques situées dans F n'ont jamais la période T , e^{QT} ne saurait être l'identité et $e^{QT} - \text{Id}_F \neq 0$ donc $\det(e^{QT} - \text{Id}_F) \neq 0$. ■

Sans l'effet de la perturbation $\tilde{f}(z)$ dans le système

$$\frac{dz}{dt} = f(z) = Df(0).z + \tilde{f}(z)$$

la plupart des solutions périodiques du système linéaire vont disparaître, les autres donnant des solutions périodiques du système $\frac{dz}{dt} = f(z)$; les périodes de ces dernières étant proches de celles des orbites correspondantes du système linéaire, il s'avère nécessaire d'introduire un paramètre λ permettant d'ajuster les périodes ; on est ainsi amené à poser :

$$t = \lambda s$$

Le système s'écrit alors :

$$\frac{d}{ds} z(s) = \lambda f(z)$$

en effet posant $z_1(s) = z(\lambda s)$

$$\frac{d}{ds} z_1(s) = \frac{d}{ds} z(\lambda s) = \lambda \frac{d}{dt} z(t) = \lambda f(z(t)) = \lambda f(z_1(s))$$

$$\text{soit } \frac{d}{ds} z_1(s) = \lambda f(z_1(s)) \quad \blacksquare$$

Ainsi si Γ est une orbite périodique du système $\frac{d}{ds} z(s) = \lambda f(z)$, de période T , Γ est une orbite périodique du système $\frac{d}{dt} z(t) = f(z)$ de période λT ; le paramètre λ permet bien d'ajuster les périodes.

Soit alors

$\xi = \{u \mid u : E \rightarrow E \oplus F, u \text{ de classe } C^1\}$ et $\mathcal{U}_c \xi$ un voisinage de l'injection canonique ; on pose

$$\Delta U(z) = \frac{d}{ds} u(e^{Ps}z) \Big|_{s=0} .$$

THEOREME I (Moser) [8] :

Pour tout λ proche de 1, pour tout z voisin de 0 il existe une application

$u : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ et une application $v : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que

$$1/ \Delta u(z) = \lambda fu(z) + v(z)$$

$$2/ \Delta v(z) = Df(0).v(z)$$

$$3/ \frac{1}{T} \int_0^T e^{-Ps} u_E(e^{Ps}z) ds = z$$

où u_E est la composante de u dans E , $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}}$ la période des solutions du système $\frac{dz}{dt} = Pz$.

Avant de démontrer l'existence de u et de v on remarque :

$$(1) \begin{cases} v_F \equiv 0 \text{ donc } v \text{ est une application de } E \text{ dans } E ; \\ v(e^{Ps}z) = e^{Ps}v(z) ; \end{cases}$$

En effet dans la base précédente l'équation

$$\Delta v(z) = Df(0).v(z)$$

s'écrit :

$$\frac{d}{ds} v(e^{Ps}z) \Big|_{s=0} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_E(z) \\ v_F(z) \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } v_E(e^{Ps}.z) = e^{Ps}.v_E(z)$$

$$v_F(e^{Ps}.z) = e^{Qs}.v_F(z)$$

en particulier pour $s = T$

$$v_F(e^{PT}.z) = v_F(z) = e^{QT}.v_F(z)$$

d'où $(e^{QT} - \text{Id}) \cdot v_F(z) = 0$

or $\det(e^{QT} - \text{Id}) \neq 0$ donc $v_F(z) = 0$ ■

(2) Soit $z_0 \in E$ tel que $v(z_0) = 0$

l'image par u de la solution reparamétrisée par s du système $\frac{d}{dt} z = P \cdot z$ de condition initiale z_0 à $t = 0$, soit

$$z(t) = e^{Pt} \cdot z_0$$

admet pour vecteur tangent à l'origine

$$\left. \frac{d}{ds} u(e^{Ps} z_0) \right|_{s=0} = \Delta u(z_0) ;$$

par le théorème on obtient la relation :

$$\Delta u(z_0) = \lambda f u(e^{Ps} z_0) \Big|_{s=0}$$

C'est-à-dire que l'orbite périodique $u(e^{Ps} z_0)$ est solution de l'équation étudiée $\frac{dz}{dt} = \lambda f(z)$ ■

Pour démontrer le théorème 1 on introduit l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ \tilde{u} &\longmapsto u = \phi(\tilde{u}) \text{ définie par} \end{aligned}$$

il existe $v : E \longrightarrow E \oplus F$ telle que

$$1) \Delta u - Cu - v = \lambda f \tilde{u} - C\tilde{u} \quad (C = Df(o))$$

$$2) \Delta v - Cv = 0$$

$$3) \frac{1}{T} \int_0^T e^{-Ps} \cdot u_E(e^{Ps} \xi) ds = \xi \quad .$$

Montrons tout d'abord que si \tilde{u} est donnée, on peut bien trouver un tel u et v : Puisque si v existe, v doit vérifier la relation

$$\Delta v - Cv = 0$$

comme plus haut on peut montrer que

$$v : E \longrightarrow E \quad \text{et} \quad v(e^{Ps} \cdot \xi) = e^{Ps} \cdot v(\xi)$$

on pose alors :

$$g = \lambda f \check{u} - C \check{u}$$

et on écrit les composantes dans E puis dans F des deux premières équations ci-dessus :

dans E $E_1 : \Delta u_E - P u_E - v = g_E$

$$E_2 : \Delta v - P v = 0$$

dans F $F_1 : \Delta u_F - Q u_F = g_F$

et on remplace la 3-ème égalité par

$$E_3 : \frac{1}{T} \int_0^T e^{-Ps} u_E(e^{Ps} \cdot \xi) ds = 0$$

On résoud alors les équations E_1, E_2, F_1 ;

F_1 s'écrit encore :

$$\frac{d}{ds} u_F(e^{Ps} \xi) \Big|_{s=0} - Q u_F(\xi) = g_F(\xi)$$

on pose : $\gamma(s) = u_F(e^{Ps} \xi)$

L'équation devient alors $\frac{d}{ds} \gamma(0) - Q \cdot \gamma(0) = g_F(\xi)$ prenant $\xi_1 = e^{Ps_1} \cdot \xi$

$$\frac{d}{ds} u_F(e^{P(s_1+s)} \cdot \xi) \Big|_{s=0} - Q u_F(e^{Ps_1} \cdot \xi) = g_F(e^{Ps_1} \cdot \xi)$$

$$\frac{d}{ds} \gamma(s_1) - Q \gamma(s_1) = g_F(\xi_1)$$

posant $\check{g}(s) = g_F(e^{Ps} \xi)$

on est amené à résoudre l'équation différentielle avec 2ème membre.

$$\frac{d}{ds} \gamma(s) - Q \cdot \gamma(s) = \check{g}(s) ;$$

Ce système se résoud à l'aide de la méthode de variation des constantes ; on obtient

$$u_F(e^{Ps} \xi) = \int_0^T K_F(s-\sigma) g_F(e^{P\sigma} \cdot \xi) d\sigma$$

où K_F est le noyau de convolution introduit par Moser

$$K_F(s) = e^{Qs} [\text{Id} - e^{TQ}]^{-1} \quad 0 \leq s < T$$

$$K_F(s+T) = K_F(s).$$

On considère alors l'équation E_1 ; en un point s quelconque elle s'écrit :

$$\frac{d}{ds} u_E(e^{Ps}\xi) - P u_E(e^{Ps}\xi) - v(e^{Ps}\xi) = g_E(e^{Ps}\xi)$$

pour trouver l'expression de v , on calcule

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} (e^{-Ps} u_E(e^{Ps}\xi)) \\ &= -P e^{-Ps} u_E(e^{Ps}\xi) + e^{-Ps} \cdot \frac{d}{ds} u_E(e^{Ps}\xi) \\ &= e^{-Ps} \left[\frac{d}{ds} u_E(e^{Ps}\xi) - P u_E(e^{Ps}\xi) \right] \\ &= e^{-Ps} [v(e^{Ps}\xi) + g_E(e^{Ps}\xi)] \\ &= v(\xi) + e^{-Ps} g_E(e^{Ps}\xi) \end{aligned}$$

$$\int_0^T \frac{d}{ds} (e^{-Ps} u_E(e^{Ps}\xi)) ds = e^{-Ps} u_E(e^{Ps}\xi) \Big|_0^T = 0$$

puisque $u_E(e^{Ps}\xi)$ est une orbite périodique de période T ;

$$\text{d'où } 0 = \int_0^T v(\xi) ds + \int_0^T e^{-Ps} g_E(e^{Ps}\xi) ds$$

$$\text{soit } v(\xi) = -\frac{1}{T} \int_0^T e^{-Ps} g_E(e^{Ps}\xi) ds.$$

Ayant obtenu l'expression de v , l'équation E_1 se résoud comme l'équation F_1 , par la méthode de variation des constantes, on obtient :

$$u_E(e^{Ps}\xi) = \int_0^T K_E(s-\sigma) g_E(e^{P\sigma}\xi) d\sigma$$

$$\text{où } K_E(s) = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{T}{2} - s \right) e^{Ps} \right] \quad 0 \leq s < T$$

$$K_E(s+T) = K_E(s).$$

On note $u_g = (u_E, u_F)$ et $v_g = v$ les applications que l'on vient d'obtenir ; la donnée de l'application g permet de déterminer un couple (u_g, v_g) vérifiant les équations E_1, E_2, E_3, F_1 ; puisque $g = \lambda f \tilde{u} - C \tilde{u}$ ceci signifie que la donnée de \tilde{u} permet de déterminer un couple (u_g, v_g) solution des équations E_1, F_1 .

On pose alors

$$u(\xi) = (\xi, 0) + u_g(\xi)$$

$$v(\xi) = v_g(\xi)$$

La première égalité donne :

$$e^{-Ps} \cdot u_E(e^{Ps} \xi) = \xi + e^{-Ps} \cdot (u_g)_E \cdot (e^{Ps} \cdot \xi) ds$$

soit $\int_0^T e^{-Ps} \cdot u_E(e^{Ps} \xi) = \xi$ puisqu'on a E_3 ;

Le couple (u, v) vérifie les relations définissant l'application ϕ .

Ainsi à \tilde{u} on fait bien correspondre une application u ; L'application ϕ est bien définie, on vérifie en effet que $u \in \mathcal{U}$.

On montre alors que ϕ est une contraction de \mathcal{U} dans \mathcal{U} et on obtient ainsi l'existence d'une application $u \in \mathcal{U}$ vérifiant :

$$\Delta u = \lambda f u + v$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1. ■

Pour trouver l'application u , il suffit donc de se donner une application $u_0 \in \mathcal{U}$ et d'en prendre les images successives par ϕ ; de

$$u_{k+1} = \phi(u_k) \quad u_0(\xi) = (\xi, 0)$$

on tire $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ vérifiant $u = \phi(u)$.

Nous étudions les deux premiers pas de cette contraction :

pour $\xi \in E$ on pose $u_0(\xi) = (\xi, 0)$
c'est-à-dire $(u_0)_E(\xi) = \xi$ $(u_0)_F(\xi) = 0$;

Les relations précédentes nous donnent :

$$v_1(\xi) = -\frac{1}{T} \int_0^T e^{-Ps} [(\lambda-1)P \cdot e^{Ps} \cdot \xi + \lambda \tilde{f}(e^{Ps} \cdot \xi, o)] ds$$

$$\text{soit } v_1(\xi) = -(\lambda-1)P \cdot \xi - \frac{\lambda}{T} \int_0^T e^{-Ps} \cdot \tilde{f}(e^{Ps} \cdot \xi, o) ds.$$

de même

$$(u_1)_F(e^{Ps} \cdot \xi) = \lambda \int_0^T e^{Q(s-\sigma)} \cdot (\text{Id} - e^{TQ})^{-1} \tilde{f}_F(e^{P\sigma} \cdot \xi, o) d\sigma$$

$$(u_1)_E(e^{Ps} \cdot \xi) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{T}{2} - (s-\sigma)\right) e^{P(s-\sigma)} \cdot [(\lambda-1)P \cdot e^{P\sigma} \cdot \xi + \lambda \tilde{f}_E(e^{P\sigma} \cdot \xi, o)] d\sigma$$

A l'aide de ces expressions on peut calculer le deuxième pas de cette contraction ; pour l'application v on obtient :

$$v_2(\xi) = -\frac{1}{T} \int_0^T e^{-Ps} [(\lambda-1)P(u_1)_E(e^{Ps} \cdot \xi) + \lambda \tilde{f}_E(u_1(e^{Ps} \cdot \xi))] ds$$

$$\text{soit } v_2(\xi) = -\frac{(\lambda-1)}{T} P \int_0^T e^{-Ps} \cdot (u_1)_E(e^{Ps} \cdot \xi) ds - \frac{\lambda}{T} \int_0^T e^{-Ps} \cdot \tilde{f}_E(u_1(e^{Ps} \cdot \xi)) ds$$

$$= -(\lambda-1)P \cdot \xi - \frac{\lambda}{T} \int_0^T e^{-Ps} \cdot \tilde{f}_E(u_1(e^{Ps} \cdot \xi)) ds$$

$$\text{puisque } \frac{1}{T} \int_0^T e^{-Ps} \cdot (u_1)_E(e^{Ps} \cdot \xi) ds = \xi \text{ par définition de } \phi .$$

REMARQUE 1.

De l'expression donnant u , à savoir

$$u(\xi) = (\xi, o) + \int_0^T K(-t) [\lambda f(\tilde{u}(e^{Pt} \cdot \xi)) - C\tilde{u}(e^{Pt} \cdot \xi)] dt$$

on tire que $u(o) = o$;

en effet $\tilde{u}(o) = o$ car $u_o(o) = o$.

REMARQUE 2.

L'application u est tangente à l'identité en 0 , d'autant mieux que λ est proche de 1 :

$$Du(0) = (I, 0) : E \longrightarrow E \oplus F$$

$$\xi \longmapsto (\xi, o)$$

en effet

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \int_0^T K(-t) [\lambda \tilde{f} \tilde{u}(e^{Pt} \cdot \xi) - C \tilde{u}(e^{Pt} \cdot \xi)] dt \\ &= \int_0^T K(-t) [(\lambda-1) C \tilde{u}(e^{Pt} \cdot \xi) - \lambda \tilde{f} \tilde{u}(e^{Pt} \cdot \xi)] dt \\ &\text{où } \tilde{f}(\zeta) = O(\zeta^2) \end{aligned}$$

donc du théorème de dérivation sous l'intégrale on obtient l'expression de $D\psi(0)$ qui fait intervenir les facteurs suivants :

$$D[(\lambda-1)C\tilde{u}(e^{Pt} \cdot \xi)]_{\xi=0} = (\lambda-1)C_0 D\tilde{u}(0) \circ e^{Pt}$$

$$D[\lambda \tilde{f} \tilde{u}(e^{Pt} \cdot \xi)]_{\xi=0} = \lambda D\tilde{f}(0) \circ D\tilde{u}(0) \circ e^{Pt}$$

puisque λ est voisin de 1, $(\lambda-1)C_0 D\tilde{u}(0) \circ e^{Pt}$ est une application linéaire proche de 0 ; il en est de même du deuxième facteur puisque $D\tilde{f}(0) = 0$.

REMARQUE 3.

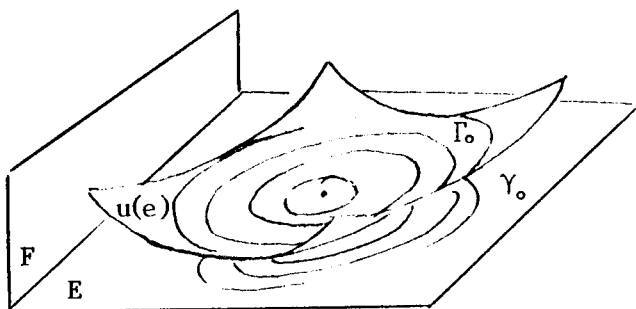
On remarque enfin que

posant $\gamma_0 = \{e^{Ps} \cdot \xi_0 \mid s \in [0, T]\}$ et

$$\Gamma_0 = \{u(e^{Ps} \xi_0) \mid s \in [0, T]\}$$

si λ est proche de 1 et ξ_0 voisin de 0, un voisinage tubulaire de γ_0 s'envoie difféomorphiquement sur un voisinage de Γ_0 situé dans $u(E)$ qui, sur ce voisinage au moins, est une surface proche de E .

Ce voisinage de Γ_0 apparaît donc comme le graphe d'une application d'un ouvert de E dans F . ■



On utilise maintenant ce théorème pour obtenir une approximation d'un certain nombre de valeurs propres d'une application de Poincaré :

Soit $\frac{d}{dt} z = f(z) \quad z \in \mathbb{R}^n \quad f \in C^r$ vérifiant les hypothèses précédentes 1 et 2.

On suppose qu'il existe $\xi_0 \in E$ tel que $v(\xi_0) = 0$ et on note Γ_0 l'orbite périodique $u(e^{Ps} \xi_0)$, $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}}$ étant sa période.

On suppose que le champ $\Delta u(e^{Ps} \xi_0)$, $s \in [0, T]$ est transverse à E .

On considère une hypersurface, \tilde{E} , de \mathbb{R}^n qui contient E et qui est transverse à Γ_0 , $\tilde{E} = E \oplus F_1$. Soit Σ_0 une section locale transverse à Γ_0 , au point $u(\xi_0)$, contenue dans \tilde{E} , et \mathcal{P} l'application de premier retour de Poincaré associée,

$$\mathcal{P}: \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_0$$

et (μ_k) $k = 1, 2, \dots, n-1$ sont les nombres caractéristiques de Γ_0 .

Considérons l'application

$$v: E \longrightarrow E$$

et notant (X_h) $h = 1, 2, \dots, p$, $p = \dim E$, les valeurs propres de $Dv(\xi_0)$, on montre dans ce qui suit que les

$$(e^{T_0 X_h}) \quad h = 1, 2, \dots, p$$

sont des approximations de p nombres caractéristiques μ_h ; ce sont des approximations des valeurs propres de l'application de Poincaré "dans la direction de E ".

Soit W_0 , un voisinage tubulaire de Γ_0 que l'on trivialise ainsi :

$$W_0 \subset \mathbb{R}^n \quad W_0 = S^1 \times U_0 \times I_0$$

où S^1 est le cercle unité, U_0 un voisinage de ξ_0 dans E , I_0 un voisinage de $u_{F_1}(\xi_0)$ dans F_1 .

Par tout point $\xi \in U_0$ passe l'orbite périodique $e^{Ps} \cdot \xi$; on obtient ainsi un feuilletage

$$(\gamma) = \{ e^{Ps} \cdot \xi \mid \xi \in U_0 \}$$

qui est contenu dans $S^1 \times U_0$ et qui contient $\gamma_0 = e^{Ps} \cdot \xi_0$. Puisque l'application u est un difféomorphisme d'un voisinage de γ_0 sur son image, l'image de ce feuilletage est encore un feuilletage, soit (Γ) ; on a

$$(\Gamma) = \{ u(e^{Ps} \cdot \xi) \mid \xi \in U_0, 0 \leq s \leq T \}$$

$$(\Gamma) \subset u(E) \quad \text{et} \quad \Gamma_0 \in (\Gamma). \quad (\text{cf. Fig. 1}).$$

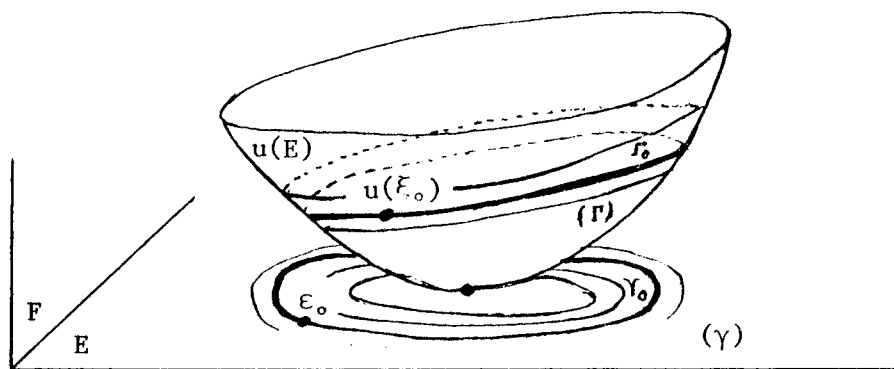


Fig. 1

On fixe alors un point $\xi_1 \in U_0$ et on note E' le sous-espace de \mathbb{R}^n parallèle à E passant par $u(\xi_1)$; la projection sur E' par rapport à F de (Γ) est encore un feuilletage, que l'on note (Γ') , car u est tangente à l'identité en 0 . Par le point $u(\xi_1)$ passe une orbite du champ λf , on la note σ_1 ; σ_1 reste dans W_0 pour un temps t de l'ordre de T_0 , par le théorème de dépendance par rapport aux conditions initiales ; σ_1 se projette en σ'_1 sur E' .

σ'_1 rencontre en chacun de ses points une feuille de (Γ') et par construction un tel point s'écrit $(u_E(e^{Ps}\xi), u_F(\xi_1))$, on le note N' ; N' est le projeté d'un point N de σ_1 , ainsi que le projeté d'un point d'une feuille Γ que l'on note M et qui a pour composantes $(u_E(e^{Ps}\xi), u_F(e^{Ps}\xi))$. (cf. Fig. 2).

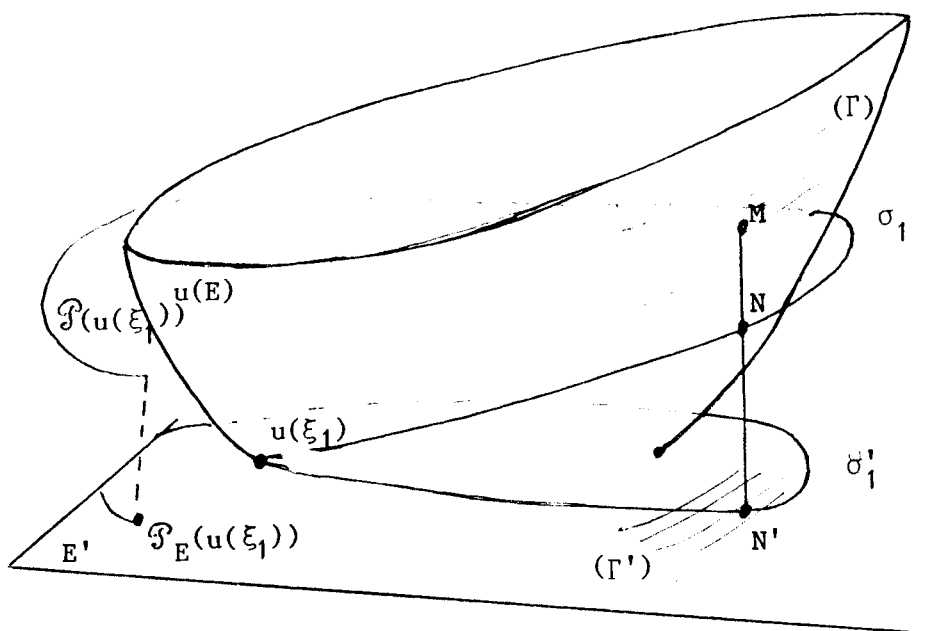


Fig. 2

Au point M on a la relation de Moser :

$$\Delta u(e^{Ps}\xi) = \lambda f u(e^{Ps}\xi) + v(e^{Ps}\xi)$$

on la projette sur E' :

$$\Delta u_E(e^{Ps}\xi) = \lambda f_E(u_E(e^{Ps}\xi), u_F(e^{Ps}\xi)) + v(e^{Ps}\xi) .$$

De l'expression du champ f ,

$$f(\zeta) = c.\zeta + \tilde{f}(\zeta) \quad \text{où } \zeta \in E \oplus F ,$$

$$\zeta = (\zeta_E, \zeta_F) \quad \text{et} \quad \tilde{f}(\zeta) = o(\zeta^2)$$

on tire, notant $\zeta(M)$ les coordonnées du point M :

$$f(M) = (P.\zeta_E(M), Q.\zeta_F(M)) + \tilde{f}(\zeta(M))$$

$$\begin{aligned} f(N) &= (P.\zeta_E(N), Q.\zeta_F(N)) + \tilde{f}(\zeta(N)) \\ &= (P.\zeta_E(M), Q.\zeta_F(N)) + \tilde{f}(\zeta(N)) \end{aligned}$$

donc

$$f(M) - f(N) = (0, Q.(\zeta_F(M) - \zeta_F(N))) + \tilde{f}(\zeta(M)) - \tilde{f}(\zeta(N))$$

soit

$$f_E(M) - f_E(N) = \tilde{f}_E(\zeta(M)) - \tilde{f}_E(\zeta(N)) = o(\zeta(M) - \zeta(N))^2 .$$

Mais puisque l'orbite σ_1 reste dans le voisinage de W_0 , notant ε la section de ce tube, on a

$$\| \zeta(M) - \zeta(N) \| < \varepsilon$$

et donc à des infiniments petits du 2-ème ordre près en $\zeta(M) - \zeta(N)$ on a

$\lambda f_E(M) = \lambda f_E(N)$ et donc

$$\lambda f_E(N) \simeq \Delta u_E(e^{Ps}.\xi) - v(e^{Ps}.\xi) .$$

Ainsi v , mesurant l'écart dans la direction E entre l'orbite σ'_1 du champ λf , et les orbites du feuilletage (Γ') , va permettre de mesurer l'écart entre $u(\xi_1)$ et la projection sur E' de $\mathcal{P}(u(\xi_1))$, notée $\mathcal{P}_E(u(\xi_1))$.

Il s'agit donc d'intégrer le champ $v(e^{Ps}.\xi)$ au point $u_E(e^{Ps}\xi) \in E'$, à partir du point $u(\xi_1)$ et pendant un temps T ; (cf. Fig. 3).

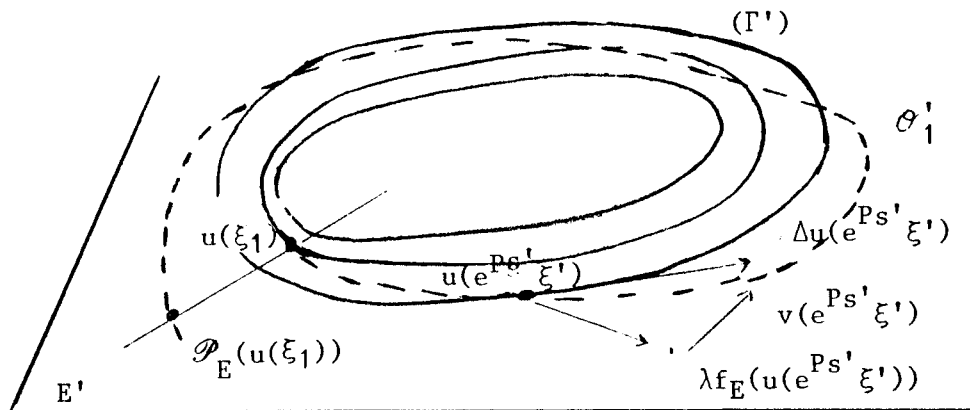


Fig. 3

Puisque u est un difféomorphisme cela revient à intégrer $v(e^{Ps}.\xi)$ au point $e^{Ps}.\xi \in E$; et ainsi on est ramené à l'intégration du champ v dans E . Mais la relation de commutation :

$$v(e^{Ps}.\xi) = e^{Ps}.v(\xi)$$

permet enfin de définir une carte de E autour du point ξ_0 dans laquelle on peut calculer le point ξ_2 qui est le point que l'on obtient en intégrant le champ $v(\xi)$ à partir de ξ_1 pendant le temps T (cf. Fig. 4).

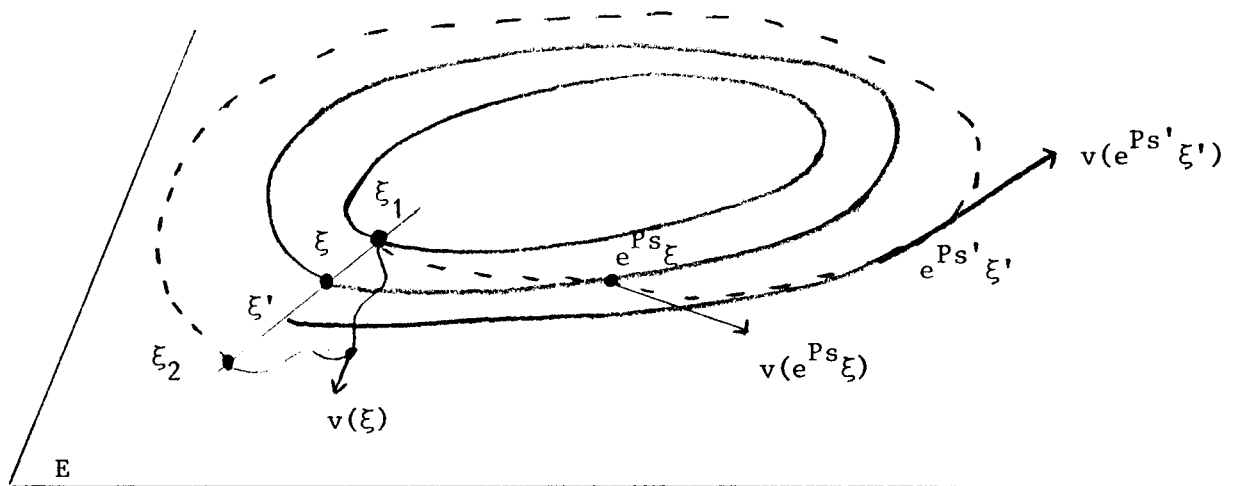


Fig. 4

Soit donc $\frac{d\xi}{dt} = v(\xi) \quad \xi \in E$

comme $\xi \in U_0$ on pose $\xi = \xi_0 + e\ell$

$$v(\xi) = v(\xi_0) + Dv(\xi_0).\ell + o(|\ell|^2) = Dv(\xi_0).\ell + o(|\ell|^2)$$

d'où l'équation

$$\frac{d\ell}{dt} = Dv(\xi_0).\ell + o(|\ell|^2)$$

$$\ell(t) = e^{Dv(\xi_0)t}.\ell(0) + o(|\ell|^2)$$

donc

$$\xi_2 = \xi(T) = e^{Dv(\xi_0)T}.\xi_1 + o(|\ell|^2) \quad T \simeq T_0 \quad .$$

En prenant les images de ξ_1 et de ξ_2 par u on obtient $u(\xi_1)$ et $u(\xi_2)$ vérifiant : l'image de $u(\xi_1)$ par l'application de premier retour de Poincaré \mathcal{P} a pour projection sur E' le point $\mathcal{P}_E(u(\xi_1))$ qui coïncide par notre construction avec la projection sur E' de $u(\xi_2)$.

Enfin puisque u est un difféomorphisme sur la carte choisie, les applications

$$u(\xi_1) \longrightarrow \mathcal{P}_E(u(\xi_1))$$

et

$$\xi_1 \longrightarrow \xi_2 = e^{Dv(\xi_0)T_{\xi_1}}$$

ont les mêmes valeurs propres ; on a donc démontré le

THEOREME 2. *Les valeurs propres de l'application de premier retour de Poincaré \mathcal{P}*

dans la direction E , au point $u(\xi_1)$ point voisin de l'orbite périodique

Γ_0 *sont celles de l'application :*

$$\xi_1 \longrightarrow \xi_2 = e^{Dv(\xi_0)T_{\xi_1}}$$

■

CHAPITRE V

APPLICATION A UN PROBLEME D'ASTRONOMIE

Dans un récent article [4] , les auteurs ont étudié les propriétés de deux familles d'orbites périodiques dans un potentiel à trois dimensions sans symétrie axiale et indépendant du temps :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} (Ax^2 + By^2 + Cz^2) - \varepsilon z^2 x - \eta z^2 y$$

où A,B,C sont des coefficients numériques donnés A= 0,9 B = 0,4 C = 0,225, ε et η étant des paramètres.

Chaque orbite périodique est représentée par un point dans un espace particulier de coordonnées (x,y, η) et on observe (cf. Fig. 1) que ces deux familles semblent se couper au point :

$$x_0 = -\frac{0,0491}{\sqrt{0,9}} \quad y_0 = \frac{0,0245}{\sqrt{0,4}} \quad \eta_0 = 0,2 \quad .$$

Ainsi on conjecture un phénomène de bifurcation et comme la période double en passant d'une de ces familles, notée 1-P dans l'article en référence, à l'autre notée 2-P , il est naturel d'appliquer la technique décrite dans les chapitres précédents ; il s'agit donc de montrer que deux nombres caractéristiques passent par - 1.

Au potentiel \mathcal{U} est associé l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} (Ax^2 + By^2 + Cz^2) - \varepsilon xz^2 - \eta yz^2$$

ainsi que le système hamiltonien :

ainsi que le système hamiltonien :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p & \dot{p} &= -Ax + \epsilon z^2 \\ \dot{y} + Q & & \dot{q} &= -By + \eta z^2 \\ \dot{z} &= r & \dot{r} &= -Cz + 2\epsilon xz + 2\eta yz \end{aligned}$$

Ce système est donc une perturbation d'un système de trois oscillateurs harmoniques de période :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{A}} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{B}} \quad T_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{C}}$$

et les valeurs données aux coefficients A,B,C font de ce système un système résonant, on a la résonance

$$\sqrt{A} : \sqrt{B} : \sqrt{C} = 6 : 4 : 3 .$$

Puisque $2\sqrt{C} = \sqrt{A}$, les solutions périodiques du sous-système :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= P \cdot \xi \\ \text{où } \xi &= (x, z, p, r) \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,225 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sont liées par $T_3 = 2T_1$, par contre aucune solution du sous-système :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= Q \cdot \xi \\ \text{où } \xi &= (y, q) \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

n'admet cette période commune T_3 .

L'espace des phases \mathbb{R}^6 se trouve ainsi décomposé en somme directe de deux sous-espaces supplémentaires E et F, E de coordonnées x,z,p,r et F de coordonnées y,q :

$$\mathbb{R}^6 = E \oplus F$$

et on pose pour $\xi \in \mathbb{R}^6$ $\xi = \xi_E \oplus \xi_F$;

Les sous-espaces E et F sont laissés invariants respectivement par P et Q.

Le système prend la forme

$$\dot{\xi} = f(\xi) = R \cdot \xi + \check{f}(\xi)$$

$$\text{où } R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} .$$

Posant $t = \lambda s$, le système devient

$$z' = \frac{d}{ds} z = \lambda f(z)$$

et on se trouve dans la situation du théorème de Moser cité plus haut (thm I ch.IV)

on peut donc appliquer le théorème 2 du chapitre IV et pour cela soit $\xi_0 \in E$ tel que $v(\xi_0) = 0$; on a vu que $u(e^{Ps} \cdot \xi_0)$ est une orbite périodique du système étudié, et les nombres caractéristiques de cette orbite dans la direction E s'obtiennent à l'aide de l'application v.

On doit donc calculer pour $\xi \in E$

$$v_2(\xi) = (\lambda - 1) \cdot P \cdot \xi + \frac{\lambda}{T} \int_0^T e^{-Ps} \cdot \check{f}_E(u_1(e^{Ps}\xi)) ds ;$$

On remarque (cf. Fig. 5) que l'on peut remplacer le point $u_1(e^{Ps}\xi)$ dont les composantes sont $(u_{1E}(e^{Ps}\xi), u_{1F}(e^{Ps}\xi))$ par le point dont les composantes sont $(e^{Ps} \cdot u_{1E}(\xi), u_{1F}(\xi))$:

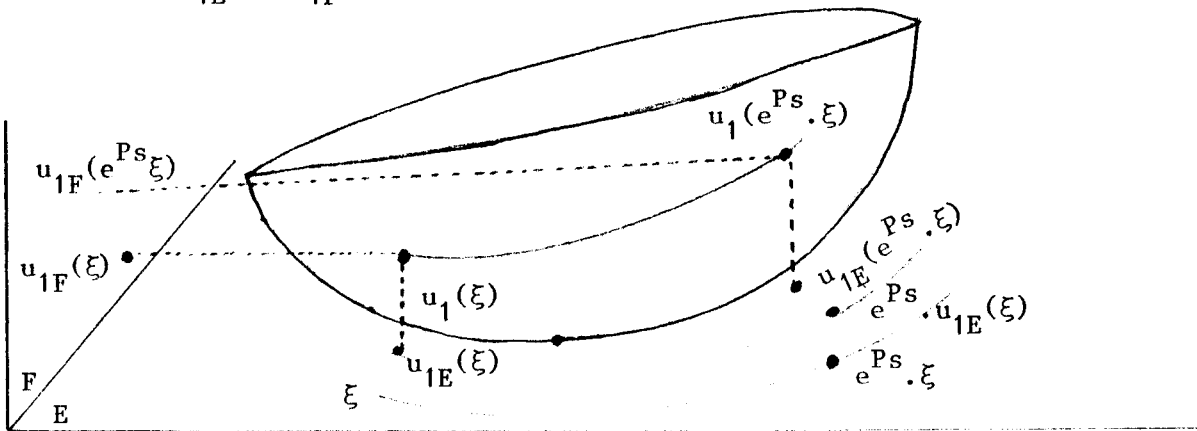


Fig. 5

En effet dans les remarques 1 et 2 du chapitre IV on a vu que

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad Du(0) = (\text{Id}_E, 0),$$

ainsi de $u_1(\xi) = Du_1(0) \cdot \xi + o(\xi^2)$ on tire

$$u_{1E}(e^{Ps} \cdot \xi) = e^{Ps} \cdot \xi + o(\xi^2)$$

$$u_{1E}(\xi) = \xi + o(\xi^2) \quad \text{soit} \quad e^{Ps} \cdot u_{1E}(\xi) = e^{Ps} \cdot \xi + o(\xi^2)$$

d'où $u_{1E}(e^{Ps} \cdot \xi) = e^{Ps} u_{1E}(\xi) + o(\xi^2)$

de même pour la composante selon F :

$$u_{1F}(e^{Ps} \xi) = o(\xi^2)$$

$$u_{1F}(\xi) = o(\xi^2).$$

Ainsi au deuxième ordre près on a le résultat annoncé.

On pose alors :

$$u_{1E}(\xi) = (x, z, p, r)$$

$$u_{1F}(\xi) = (y, q)$$

et on calcule $\tilde{f}_E(e^{Ps}(x, z, p, r), y, q)$;

comme

$$e^{Ps} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{A}s) & 0 & \frac{1}{\sqrt{A}} \sin(\sqrt{A}s) & 0 \\ 0 & \cos(\sqrt{C}s) & 0 & \frac{1}{\sqrt{C}} \sin(\sqrt{C}s) \\ -\sqrt{A} \sin(\sqrt{A}s) & 0 & \cos(\sqrt{A}s) & 0 \\ 0 & -\sqrt{C} \sin(\sqrt{C}s) & 0 & \cos(\sqrt{C}s) \end{pmatrix}$$

et puisque $\tilde{f}_E((x, z, p, r), (y, q)) = (0, 0, \epsilon z^2, 2\epsilon xz + 2\eta yz)$ on obtient

$$f_E(e^{Ps}(x, z, p, r), (y, q)) = [0, 0, \epsilon(z \cos \sqrt{C}s + \frac{r}{\sqrt{C}} \sin \sqrt{C}s)^2, 2\epsilon(x \cos \sqrt{A}s + \frac{p}{\sqrt{A}} \sin \sqrt{A}s) \\ (z \cos \sqrt{C}s + \frac{r}{\sqrt{C}} \sin \sqrt{C}s) + 2\eta y(z \cos \sqrt{C}s + \frac{r}{\sqrt{C}} \sin \sqrt{C}s)]$$

d'où

$$v_2(\xi) = (\lambda-1) \begin{pmatrix} P \\ r \\ -xA \\ -zc \end{pmatrix} + \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(s) ds$$

avec

$$\mathcal{A}(s) = \left(\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{A}} \sin \sqrt{A}s \cdot \lambda \epsilon \cdot \left(z \cos \sqrt{c}s + \frac{r}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c}s \right)^2 \\ & -\frac{1}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c}s \cdot 2\epsilon \lambda \cdot \left(xz \cos \sqrt{A}s \cdot \cos \sqrt{c}s + \frac{xr}{\sqrt{c}} \cos \sqrt{A}s \cdot \sin \sqrt{c}s + \right. \\ & \quad \left. \frac{pz}{\sqrt{A}} \sin \sqrt{A}s \cdot \cos \sqrt{c}s + \frac{rp}{\sqrt{Ac}} \sin \sqrt{A}s \cdot \sin \sqrt{c}s \right) - \\ & -\frac{2\lambda\eta\gamma}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c}s \cdot \left(z \cos \sqrt{c}s + \frac{r}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c}s \right) \\ & \lambda \epsilon \cos \sqrt{A}s \cdot \left(z \cos \sqrt{c}s + \frac{r}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c}s \right)^2 \\ & 2\epsilon \lambda \cos \sqrt{c}s \cdot \left(xz \cos \sqrt{A}s \cdot \cos \sqrt{c}s + \frac{xr}{\sqrt{c}} \cos \sqrt{A}s \cdot \sin \sqrt{c}s + \right. \\ & \quad \left. + \frac{pz}{\sqrt{A}} \sin \sqrt{A}s \cdot \cos \sqrt{c}s + \frac{rp}{\sqrt{Ac}} \sin \sqrt{A}s \cdot \sin \sqrt{c}s \right) \\ & + 2\lambda\eta\gamma \cos \sqrt{c}s \cdot \left(z \cos \sqrt{c}s + \frac{r}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c}s \right) \end{aligned} \right)$$

On calcule alors le deuxième terme du membre de droite en procédant

ligne par ligne ;

Ligne 1 : on doit intégrer une expression qui se présente sous la forme d'une somme de trois termes :

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{A} \cdot s) \cdot \cos^2(\sqrt{c}s) &= \sin \sqrt{A}s \cdot \frac{\cos 2\sqrt{c}s + 1}{2} = \frac{1}{2} \sin \sqrt{A}s + \frac{1}{2} \cos 2\sqrt{c}s \cdot \sin \sqrt{A}s \\ &= \frac{1}{2} \sin \sqrt{A}s + \frac{1}{4} (\sin(\sqrt{A} + 2\sqrt{c})s + \sin(\sqrt{A} - 2\sqrt{c})s) \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{1}{4} \int_0^T (2\sin \sqrt{A}s + \sin(\sqrt{A} + 2\sqrt{c})s + \sin(\sqrt{A} - 2\sqrt{c})s) ds$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{A}} \cos \sqrt{A}s \Big|_0^T + \frac{1}{4(\sqrt{A} + 2\sqrt{c})} \cos(\sqrt{A} + 2\sqrt{c})s \Big|_0^T + \frac{1}{4(\sqrt{A} - 2\sqrt{c})} \cos(\sqrt{A} - 2\sqrt{c})s \Big|_0^T$$

$$= 0 \quad \text{car} \quad T = 2 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{A}} = \frac{2\pi}{\sqrt{c}} .$$

Le deuxième terme revient à l'intégration de

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{As} \cdot \sin^2 \sqrt{cs} &= \sin \sqrt{As} \cdot \frac{1 - \cos 2\sqrt{cs}}{2} = \frac{\sin \sqrt{As}}{2} - \frac{1}{2} \sin \sqrt{As} \cdot \cos 2\sqrt{cs} \\ &= \frac{\sin \sqrt{As}}{2} - \frac{1}{4} (\sin(\sqrt{A+2c})s + \sin(\sqrt{A-2c})s) \end{aligned}$$

comme précédemment l'intégrale de ce terme est nulle.

Le troisième terme revient à l'intégration de

$$\sin \sqrt{As} \cdot \cos \sqrt{cs} \cdot \sin \sqrt{cs} = \sin \sqrt{As} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\sqrt{cs} = \frac{1}{4} (\cos(\sqrt{A-2c})s - \cos(\sqrt{A+2c})s)$$

or on a vu que $\sqrt{A-2c} = 0$ donc

$$\sin \sqrt{As} \cdot \cos \sqrt{cs} \cdot \sin \sqrt{cs} = \frac{1}{4} (1 - \cos(\sqrt{A+2c})s)$$

en intégrant entre 0 et T on obtient, compte tenu du coefficient :

$$-2 \frac{\lambda \epsilon z r}{\sqrt{AC}} \cdot \frac{T}{4} = -\frac{\lambda \epsilon z r}{2\sqrt{AC}} \cdot T$$

Ligne 2 : on procède comme plus haut, pour simplifier on omet de répéter s dans le calcul,

$$\cdot \sin \sqrt{c} \cdot \cos \sqrt{A} \cdot \cos \sqrt{c} = \cos \sqrt{A} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\sqrt{c} = \frac{1}{4} [\sin(\sqrt{A+2c}) + \sin(2\sqrt{c} - \sqrt{A})]$$

d'intégrale nulle.

$$\begin{aligned} \cdot \sin \sqrt{c} \cdot \cos \sqrt{A} \cdot \sin \sqrt{c} &= \cos \sqrt{A} \cdot \sin^2 \sqrt{c} = \cos \sqrt{A} \cdot \frac{1 - \cos 2\sqrt{c}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cos \sqrt{A} - \frac{1}{2} \cos \sqrt{A} \cdot \cos 2\sqrt{c} = \frac{1}{2} \cos \sqrt{A} - \frac{1}{4} (\cos(\sqrt{A-2c}) + \cos(\sqrt{A+2c})) \end{aligned}$$

dont l'intégration donne $\epsilon \lambda \frac{x r}{2c} \cdot T$.

$$\cdot \sin \sqrt{c} \cdot \sin \sqrt{A} \cdot \cos \sqrt{c} = \sin \sqrt{A} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\sqrt{c} = \frac{1}{4} (\cos(\sqrt{A-2c}) - \cos(\sqrt{A+2c}))$$

dont l'intégration donne $-\frac{1}{2} \frac{\epsilon \lambda}{\sqrt{AC}} p z \cdot T$.

$$\begin{aligned}
 \cdot \sin \sqrt{A} \cdot \sin^2 \sqrt{c} &= \sin \sqrt{A} \cdot \frac{1 - \cos 2\sqrt{c}}{2} = \frac{1}{2} \sin \sqrt{A} - \frac{1}{2} \sin \sqrt{A} \cdot \cos 2\sqrt{c} \\
 &= \frac{1}{2} \sin \sqrt{A} - \frac{1}{4} (\sin(\sqrt{A} + 2\sqrt{c}) + \sin(\sqrt{A} - 2\sqrt{c}))
 \end{aligned}$$

d'intégrale nulle.

$$\cdot 2 \sin \sqrt{c} \cdot \cos \sqrt{c} = \sin 2\sqrt{c} \quad \text{d'intégrale nulle.}$$

$$\cdot \sin^2 \sqrt{c} = \frac{1 - \cos 2\sqrt{c}}{2}$$

dont l'intégration donne $-\frac{\lambda \eta \gamma r}{c} \cdot T$.

Ligne 3 :

$$\begin{aligned}
 \cdot \cos \sqrt{A} \cdot \cos^2 \sqrt{c} &= \cos \sqrt{A} \cdot \frac{\cos 2\sqrt{c} + 1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cos \sqrt{A} + \frac{1}{4} [\cos(\sqrt{A} - 2\sqrt{c}) + \cos(\sqrt{A} + 2\sqrt{c})]
 \end{aligned}$$

dont l'intégrale donne $\lambda \epsilon z^2 \cdot \frac{T}{4}$.

$$\cdot 2 \cos \sqrt{A} \cdot \cos \sqrt{c} \cdot \sin \sqrt{c} = \cos \sqrt{A} \cdot \sin 2\sqrt{c} = \frac{1}{2} (\sin(2\sqrt{c} + \sqrt{A}) + \sin(2\sqrt{c} - \sqrt{A}))$$

d'intégrale nulle.

$$\cdot \cos \sqrt{A} \cdot \sin^2 \sqrt{c} = \cos \sqrt{A} \cdot \frac{1 - \cos 2\sqrt{c}}{2} = \frac{1}{2} \cos \sqrt{A} - \frac{1}{4} [\cos(\sqrt{A} - 2\sqrt{c}) + \cos(\sqrt{A} + 2\sqrt{c})]$$

dont l'intégrale donne $-\lambda \epsilon \frac{r^2}{c} \cdot \frac{T}{4}$.

Ligne 4 :

$$\cdot \cos^2 \sqrt{c} \cdot \cos \sqrt{A} \quad \text{d'intégrale } \lambda \epsilon \frac{xz}{2} \cdot T$$

$$\cdot 2 \cos \sqrt{c} \cdot \sin \sqrt{c} \cdot \cos \sqrt{A} = \sin 2\sqrt{c} \cdot \cos \sqrt{A} = \frac{1}{2} [\sin(2\sqrt{c} + \sqrt{A}) + \sin(2\sqrt{c} - \sqrt{A})]$$

d'intégration nulle.

$$\cdot \sin \sqrt{A} \cdot \cos^2 \sqrt{c} \quad \text{d'intégrale nulle.}$$

$$\cdot 2 \sin \sqrt{A} \cdot \cos \sqrt{c} \cdot \sin \sqrt{c} = \sin \sqrt{A} \cdot \sin 2\sqrt{c} = \frac{1}{2} [\cos(\sqrt{A} - 2\sqrt{c}) - \cos(\sqrt{A} + 2\sqrt{c})]$$

dont l'intégration donne $\lambda \epsilon \frac{rp}{\sqrt{AC}} \cdot \frac{T}{2}$.

$$\cdot \cos^2 \sqrt{c} = \frac{\cos 2\sqrt{c} + 1}{2}$$

dont l'intégration donne $\lambda \eta y z . T$.

$$\cdot 2 \cos \sqrt{c} . \sin \sqrt{c} = \sin 2\sqrt{c}$$

d'intégrale nulle.

Ainsi on obtient l'expression de v_2 :

$$v_2(\xi) = (\lambda-1) \begin{pmatrix} p \\ r \\ -xA \\ -zc \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{\epsilon z r}{2\sqrt{AC}} \\ \frac{\epsilon x r}{2c} - \frac{\epsilon p z}{2\sqrt{AC}} - \frac{\eta y r}{c} \\ \frac{\epsilon z^2}{4} - \frac{\epsilon r^2}{4c} \\ \frac{\epsilon x z}{2} + \frac{\epsilon r p}{2\sqrt{AC}} + \eta y z \end{pmatrix}$$

On cherche alors les valeurs propres de $Dv_2(\xi_0)$; puisque

$$v_2(\xi) = (\lambda-1)P.\xi + \lambda G(\xi)$$

$$\text{on a} \quad Dv_2(\xi) = (\lambda-1)P + \lambda DG(\xi)$$

$$\text{d'où} \quad Dv_2(\xi_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\lambda\epsilon}{A} r_0 & \lambda-1 & -\frac{\lambda\epsilon z_0}{A} \\ \frac{\lambda\epsilon r_0}{2c} & -\frac{\lambda\epsilon}{A} p_0 & -\frac{\lambda\epsilon z_0}{A} & \lambda-1 + \frac{\lambda\epsilon x_0}{2c} - \frac{\lambda\eta y_0}{c} \\ -(\lambda-1)A & \frac{\lambda\epsilon}{2} z_0 & 0 & -\frac{\lambda\epsilon}{2c} r_0 \\ \frac{\lambda\epsilon}{2} z_0 & -(\lambda-1)c + \frac{\lambda\epsilon x_0}{2} & \lambda\epsilon \frac{r_0}{A} & \frac{\lambda\epsilon p_0}{A} \\ & + \lambda\eta y_0 & & \end{pmatrix}$$

Dans l'article cité en référence [4], les conditions initiales des orbites périodiques sont des points du type : $((x_0, z_0, p_0, r_0)(y_0, r_0))$ avec $z_0 = p_0 = q_0 = 0$ r_0 étant donné par la valeur de l'hamiltonien qui est prise égale à $h = 0,00765$.

En un tel point on calcule le polynôme caractéristique de $Dv_2(\xi_0)$:

$$P_\lambda(X) = \det \begin{pmatrix} -X & -\frac{\lambda \epsilon r_0}{A} & \lambda - 1 & 0 \\ \frac{\lambda \epsilon r_0}{2c} & -X & -\frac{\lambda \epsilon z_0}{A} & \alpha \\ (1-\lambda)A & 0 & -X & -\frac{\lambda \epsilon r_0}{2c} \\ 0 & \beta & \frac{\lambda \epsilon r_0}{A} & -X \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \alpha = \lambda - 1 + \frac{\lambda \epsilon x_0}{2c} - \frac{\lambda \eta y_0}{c}$$

$$\beta = (1-\lambda)c = \frac{\lambda \epsilon x_0}{2} + \lambda \eta y_0$$

En prenant les valeurs attribuées à A, B, C, on obtient

$$P_\lambda(X) = X^4 + X^2 [4 \left(\frac{\lambda \epsilon r_0}{0,9}\right)^2 + 0,9(\lambda-1)^2 - \alpha\beta] + 4\beta(\lambda-1)\left(\frac{\lambda \epsilon r_0}{0,9}\right)^2 + 4\left(\frac{\lambda \epsilon r_0}{0,9}\right)^4 - 0,9(\lambda-1)^2 \alpha \cdot \beta - 0,9(\lambda-1)\left(\frac{\lambda \epsilon r_0}{0,9}\right)^2 \alpha$$

Cette expression dépendant du paramètre η , les nombres caractéristiques de l'orbite périodique passant par $u(\xi_0)$ en dépendent aussi ; on les note $\mu_k(\eta)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Dans l'article [4] les conditions initiales pour lesquelles les deux familles semblent se rencontrer sont :

$$x_0 = -\frac{0,0491058}{\sqrt{0,9}} \quad y_0 = \frac{0,0245373}{\sqrt{0,4}}$$

La valeur donnée à la fonction hamiltonienne H permet de calculer r_0 , on trouve $r_0^2 = 0,0122865$.

Notant X_k , $k = 1,2,3,4$ les valeurs propres de $Dv_2(\xi_0)$, on calcule alors pour différentes valeurs de λ , les nombres caractéristiques $\mu_k(\eta) = e^{X_k \eta}$, $k = 1,2,3,4$; puis dans chaque cas on fait varier la valeur de η autour de 0,2. On prend successivement :

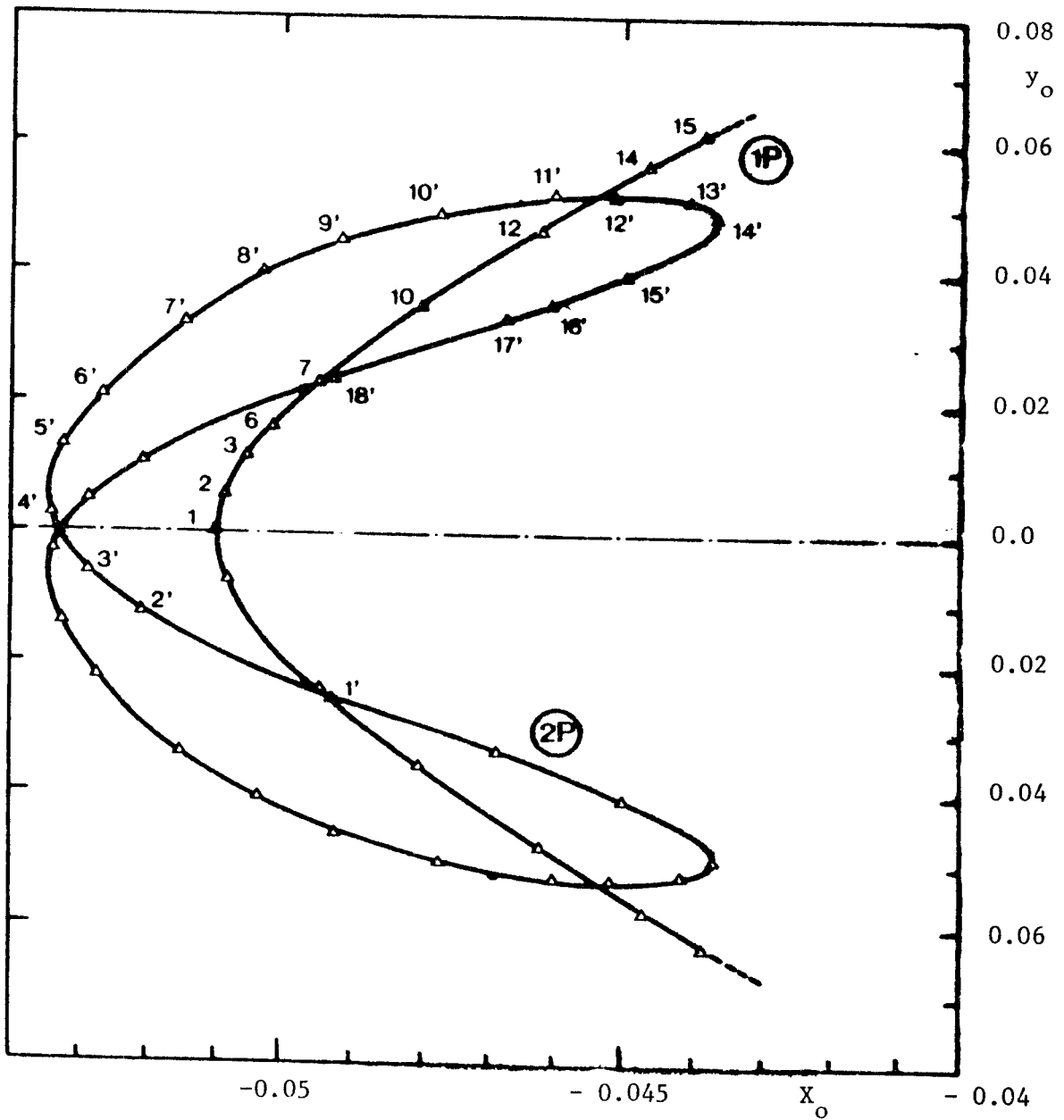
$$\lambda = 1,185 \quad \lambda = 1,195 \quad \lambda = 1,20 \quad .$$

Les résultats sont consignés dans le tableau donné page suivante (Fig. 2) ; On observe que les valeurs propres vont par deux, μ_1 et μ_2 d'une part, μ_3 et μ_4 d'autre part ce qui est conforme aux résultats du chapitre II ; bien que seul le couple (μ_1, μ_2) nous intéresse on a fait figurer les valeurs obtenues pour le couple (μ_3, μ_4) .

A la lecture du tableau Fig. 2, et compte tenu de la dépendance continue par rapport aux paramètres λ et η , on peut conclure qu'il existe une valeur de λ pour laquelle les nombres caractéristiques μ_1, μ_2 passent par -1 lorsque η passe par une valeur η_0 qui est voisine de 0,2.

FIG. I

Courbes caractéristiques des familles d'orbites périodiques 1-P et 2-P représentées dans l'espace (x_0, y_0, η) . A chaque point de ces courbes correspond une orbite périodique obtenu pour une valeur de η . Les courbes se coupent pour $|\eta| \approx 0,2$.



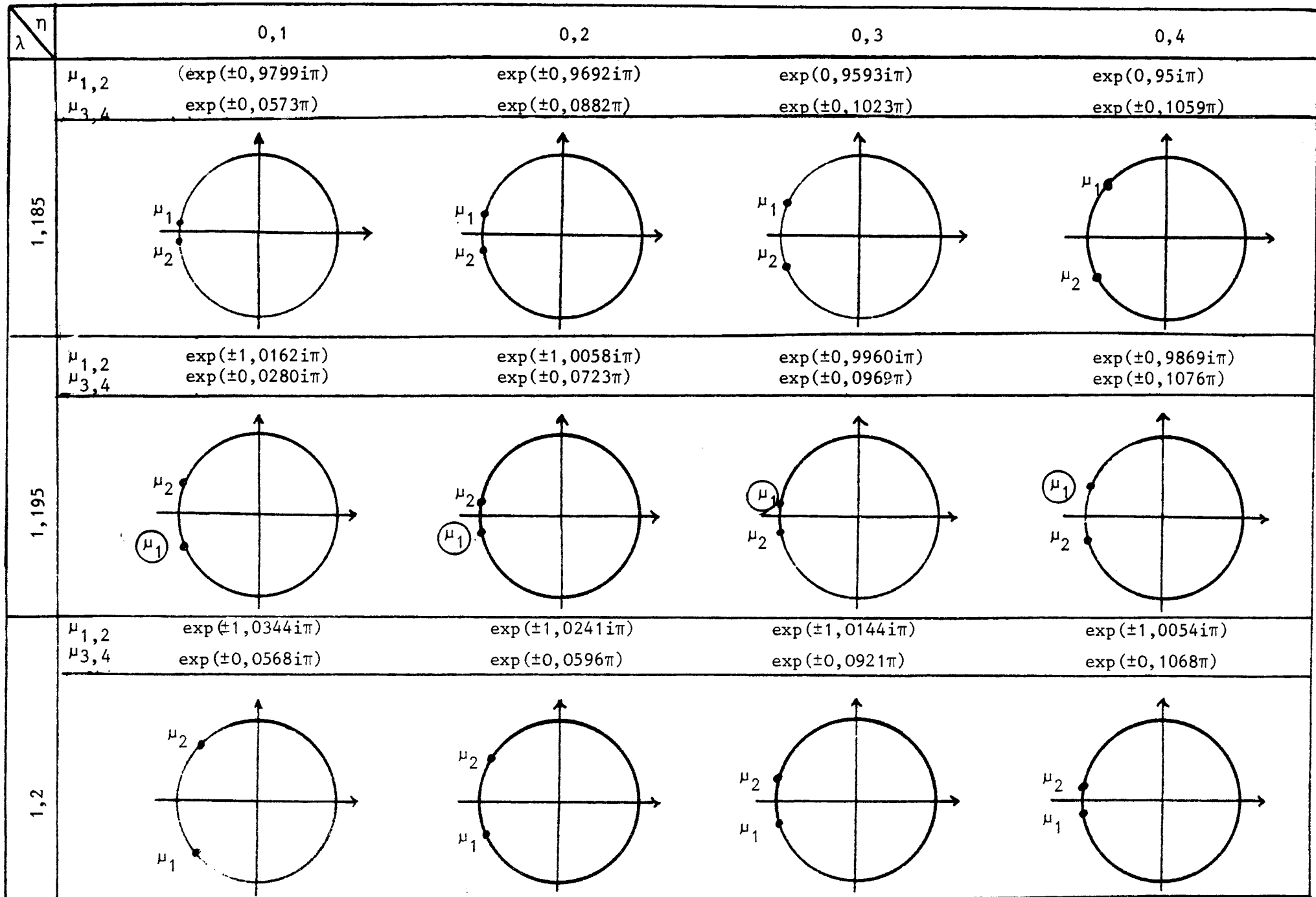


FIG 2