PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

RENÉ OUZILOU

1 Déformations des structures de Poisson et formulation isospectrale des problèmes d'évolution non linéaires

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984___3B_A1_0>

DEFORMATIONS DES STRUCTURES DE POISSON ET FORMULATION ISOSPECTRALE DES PROBLEMES D'EVOLUTION NON LINEAIRES

par René OUZILOU

Cet exposé porte essentiellement sur les structures de Poisson affines, plus générales que les structures de Poisson linéaires [10] . Les déformations de ces structures sont étudiées et, en particulier, celle du type Moyal qui permet de donner à l'équation de Korteweg-de Vries une formulation isospectrale portant sur des polynômes. Cette méthode serait particulièrement intéressante si on pouvait disposer d'une algorithme de calcul de l'exponentielle-star d'un polynôme du troisième degré.

1. CROCHETS DE POISSON :

Soient K un anneau commutatif à unité et A une K-algèbre classique (i.e. associative, commutative, à unité). Rappelons qu'un crochet de Poisson sur A consiste en une application K-bilinéaire alternée $\{.,.\} : A \times A \to A$ telle que, pour tout $a \in A$, l'opérateur linéaire ada : $x \mapsto \{a,x\}$ soit une K-dérivation à la fois pour . et $\{.,.\}$, i.e. :

$$\{a,x.y\} = \{a,x\}.y + x.\{a,y\} \quad \text{(Identité de Poisson)}$$

$$\{a,\{x,y\}\} = \{\{a,x\},y\} + \{x,\{a,y\}\} \text{ (Identité de Jacobi).}$$

Si une filtration $A_0 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ est compatible avec la structure d'algèbre de A (i.e. les A_n sont des sous-K-modules A et, pour tout couple d'entiers positifs (p,q), on a : $A_p.A_q \subset A_{p+q}$), on dit qu'un crochet de Poisson $\{.,.\}$ sur A est régressif si :

$$\{A_p,A_q\} \subset A_{p+q-1} .$$

Exemple 1 (Structure de Poisson affine).

Etant donné un K-module M, la donnée d'un crochet de Poisson régressif sur l'algèbre symétrique $Sym_K(M)$, munie de sa graduation naturelle, équivaut à celle d'un K-crochet de Lie $[.,.]$ sur M et d'une K-forme alternée $\Phi : M \times M \to K$ telle que

$$\underset{(x,y,z)}{S} \Phi(x,[y,z]) = 0$$

i.e. Φ est un 2-cocycle scalaire de M, d'où une extension centrale de l'algèbre de Lie M par un noyau de dimension 1.

Exemple 2 (Variétés de Poisson [1]).

Si A est l'algèbre $C^\infty(X,\mathbb{R})$ des fonctions différentiables d'une variété réelle X, la donnée d'un crochet de Poisson sur A équivaut à celle d'un 2-tenseur contravariant antisymétrique Λ donné par :

$$1(\Lambda)(df \wedge dg) = \{f,g\}$$

telle que $[\Lambda,\Lambda] = 0$. Il s'agit ici du crochet de Schouten défini sur les 2-tenseurs contravariants antisymétriques par la formule :

$$i([T,S])(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \underset{(\theta_1,\theta_2,\theta_3)}{S} \langle\theta_3, i(\underbrace{T)(\mathscr{L}(i(S}_{})\theta_2)\theta_1\rangle$$

($\underbrace{.\quad .}_{}$ indique qu'on symétrise en T et S).

(Pour une définition générale du crochet de Schouten, on pourra consulter [2] ou [3]).

Lorsque le 2-tenseur Λ est non dégénéré, i.e.

$$i(\Lambda) : T^*X \to TX$$

est un isomorphisme, on retrouve ainsi les structures symplectiques pour X.

Notons aussi que les variétés canoniques constituent aussi un exemple important de structure de Poisson [4].

Exemple 3 (Sur un produit tensoriel).

Nous dirons qu'un crochet de Poisson sur le produit tensoriel $A \underset{K}{\otimes} B$ de deux K-algèbre classiques est polarisé si ses restrictions à $(A \otimes 1_B) \times (A \otimes 1_B)$ et et $(1_A \otimes B) \times (1_A \otimes B)$ sont nulles. Considérons le cas où $B = K[\xi_1,\ldots,\xi_n]$ est une algèbre de polynômes. Alors, la donnée d'un crochet de Poisson polarisé sur $A \otimes K[\xi_1,\ldots,\xi_n] = A[\xi_1,\ldots,\xi_n]$ équivaut à celle d'une suite $(D_1,\ldots,D_n)$ de K-dérivations commutables de A ; ce crochet de Poisson se définit à partir des relations de "non commutation" :

$$\{\xi_i, a\} = D_i a \qquad , \qquad a \in A$$

et il s'écrit explicitement, pour tout couple (f,g) d'éléments de $A[\xi_1,\ldots,\xi_n]$:

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot D_i g - \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \cdot D_i f \right)$$

(Les dérivations D_i et $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ étant naturellement prolongées à $A[\xi_1,\ldots,\xi_n]$ par $D_i(1 \otimes b) = 0 = \frac{\partial}{\partial \xi_j}(a \otimes 1)$.

Dans le cas où $A = C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ est une algèbre de fonctions différentiables et où $D_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ $1 \leqslant i \leqslant n$, on retrouve, bien entendu, le crochet de Poisson ordinaire sur $T^* \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

2. DEFORMATIONS :

On suppose que K est un corps de caractéristique nulle.

(2.1) Un premier exemple :

Etant donnée une K-algèbre classique A, il arrive qu'on ait à modifier la multiplication de A pour pouvoir modeliser sur cette algèbre un problème "extérieur" à A. Considérons, par exemple, un produit tensoriel $A = B \otimes_K C$ de K-algèbres classiques. Un nouveau produit $*$ sur A sera dit polarisé par cette décomposition en produit tensoriel s'il coïncide avec le produit ordinaire sur B et C (canoniquement plongés dans A). Dans le cas particulier $C = K[\xi_1,\ldots,\xi_n]$, i.e. $A = B[\xi_1,\ldots,\xi_n]$, on montre aisément que, pour toute suite $(D_1,\ldots,D_n)$ de dérivations commutables de B, il existe sur A un seul produit $*$ polarisé tel que :

$$b * \xi_i = b\xi_i \quad \text{et} \quad \xi_i * b = b\xi_i + D_i b \quad , \quad b \in B \ ;$$

ce produit "déformé" par les D_i s'explicite aisément :

$$f\star g = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha| = k} \partial_\xi^\alpha f . D^\alpha g$$

(avec $\partial_\xi^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\ldots\partial\xi_L^{\alpha_n}}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$,) on retrouve ainsi l'algèbre des symboles des opérateurs différentiels sur A définis par $D_1,\ldots,D_n$ (Pour une exploitation de ce type de déformation en théorie des équations d'évolution non linéaires on pourra consulter [5 ; a;b;c]).

(2.2) Déformation par exponentiation :

Considérons sur une algèbre classique A, dont on désigne par μ la multiplication $A \otimes A \to A$, une application linéaire $\phi : A \otimes A \to A$ relevable par μ , i.e. il existe une application linéaire $\Phi: A \otimes A \to A \otimes A$ telle que $\phi = \mu \circ \Phi$ (Exemple : pour $\phi(f,g) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{\xi_i} f.D_i g$ on a $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \partial_{\xi_i} \otimes D_i$) .

En faisant appel à une indéterminée t, on peut alors introduire l'exponentielle :

$$\mathrm{Exp}(t\Phi) : A[t] \otimes A[t] \to A[t] \otimes A[t]$$

Désignons par μ_t le prolongement canonique de $\mu : A \otimes A \to A$ à $A[t] \otimes A[t] \to A[t]$. Alors :

Définition. *L'application composée* $\mu_t \circ \mathrm{Exp}(t\Phi) : A[t] \otimes A[t] \to A[t]$ *est appelée la déformation exponentielle du couple* (μ,Φ).

Explicitement, ce produit déformé se présente comme une série formelle de produits

$$C_o + tC_1 + \ldots + \frac{t^n}{n!} C_n + \ldots$$

avec $C_o = \mu$ et $C_1 = \phi$.

Dans le cas où (μ,ϕ) est une structure de Poisson (Exemple : $\phi(f,g) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{\xi_i} f\, D_i g - \partial_{\xi_i} g.D_i f$) on obtient ce qu'on appelle un produit de Moyal généralisé.

Exemples explicites ($A = B[\xi_1,\ldots,\xi_n]$).

1°/ $\phi(f,g) = \Sigma \partial_{\xi_i} f.D_i g$. On retrouve alors le produit des symboles :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \cdot \sum_{|\alpha|=k} \partial_\xi^\alpha f.D^\alpha g$$

2°/ $\phi(f,g) = \Sigma(\partial_{\xi_i} f.D_i g - \partial_{\xi_i} g.D_i f)$, le produit de Moyal s'explicite suivant la formule dite de Groenwald.

$$f * g = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma \\ |\alpha|=k}} (-1)^\beta \binom{\gamma}{\alpha} \partial_\xi^\alpha D^\beta f.D^\alpha \partial_\xi^\beta g$$

Remarques :

1/ Les déformations qu'on vient d'expliciter sont régressives pour la filtration croissante canonique des algèbres de polynômes considérés.

2/ L'avantage du produit de Moyal sur le produit des symboles tient à son caractère "symétrique" par rapport à la conjugaison ordinaire des fonctions i.e. si on impose à t la condition $t^2+1 = 0$ ($A[t]$) est alors le "complexifiée" de A), le produit de Moyal est compatible avec la conjugaison $f \to \bar{f}$ en ce sens que :

$$\overline{f * g} = \bar{g} * \bar{f} \quad ,$$

ce qui formellement se traduit par la règle de parité

$$C_r(g,f) = (-1)^r\, C_r(f,g) \ , \ r = 0,1,\ldots \qquad .$$

Dans le cas du produit des symboles, la seule conjugaison compatible est celle qui à un opérateur différentiel associe son adjoint formel.

2.3. Cas d'un crochet de Poisson affine :

Etant donnée une structure de Poisson affine sur un algèbre symétrique $S(\underline{g})$ (i.e. $\underline{g}$ est une algèbre de Lie et on dispose d'un 2-cocycle $\phi : \underline{g} \times \underline{g} \to K$)

on définit alors l'algèbre enveloppante $U(\underline{g},\phi)$ de ($\underline{g},\phi$) comme le quotient de $T(\underline{g})$ par l'idéal bilatère engendré par les tenseurs :

$$x \otimes y - y \otimes x - [x,y] - \phi(x,y) \qquad ; \quad (x,y) \in \underline{g} \times \underline{g}$$

Cette algèbre enveloppante est solution du problème universel posé par les représentations projectives de g, de cocycle ϕ, dans les algèbres associatives à unité. La théorie classique des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie reste encore valable dans ce cadre plus général ; on dispose en particulier d'un théorème de Poincaré-Birkoff-Witt qui fournit, lorsque le corps des scalaires est de caractéristique nulle, un isomorphisme linéaire de $S(\underline{g})$ sur $U(\underline{g},\phi)$ qui préserve les puissances des éléments de $\underline{g}$; cet isomorphisme dit de "symétrisation" transforme de façon plus générale, tout tenseur symétrique $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ en

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \subset \mathscr{A}_n} x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} .$$

L'intérêt de cette algèbre enveloppante tient, en ce qui nous concerne, au résultat suivant facile à démontrer (Il suffit de reprendre la preuve que donne 6 dans le cas d'un 2-cocycle nul).

Proposition.

i) Pour toute déformation regressive * *de l'algèbre symétrique* $S(g)$ *, il existe un isomorphisme canonique d'algèbres associatives, à unité :*

$$\theta : U(\underline{g},\phi) \xrightarrow{\sim} S(\underline{g},*)$$

ii) Le produit de Moyal est caractérisé par le fait que $\theta^1 : S(\underline{g},*) \to U(\underline{g},\phi)$ *est l'isomorphisme de symétrisation.*

3. LE PROBLEME ISOSPECTRAL DE P. LAX .

(3.1) Principe général :

Considérons un couple (L,P) d'opérateurs linéaires définis sur un même sous-espace partout dense d'un espace de Hilbert . Supposons que L et P dépendent différentiablement du temps t et qu'on puisse suivre l'évolution dans le temps d'une fonction propre f de L ; i.e., on dispose d'une fonction scalaire $\lambda(t)$ telle que :

$$(1) \qquad Lf = \lambda f$$

et cela, grâce à P, au moyen de l'équation différentielle :

$$(2) \quad \partial_t f = P.f \quad .$$

Par dérivation de (1) on a alors :

$$(\partial_t L + LP)f = \partial_t \lambda . f + \lambda P f$$

d'où :

$$(\partial_t L + [L,P])f = (\partial_t \lambda) f \ ,$$

de sorte que le spectre <u>discret</u> de L est une constante du temps si la condition suivante (dite de P. Lax) est vérifiée :

$$(3) \quad \partial_t L = [P,L] \quad .$$

Cette remarque de P. Lax (qui, à première vue, est très élémentaire) a ouvert la voie à un champ de recherche considérable dans la théorie des équations d'évolution non linéaires.

Dans le cas où P est un opérateur anti-auto-adjoint i.e. l'évolution de la fonction propre s'effectue suivant un groupe à un paramètre $U(t)$:

$$f(t) = U(t)f(o) \ ,$$

l'équation (3) s'intégre en :

$$L(t) = U(t)L(o)U(t)^{-1}$$

car

$$\begin{aligned}\partial_t(U.L(o).U^{-1}) &= \partial_t U.L(o).U^{-1} - U.L(o).U^{-1}.\partial_t U.U^{-1} \\ &= P.U.L(o).U^{-1} - U.L(o)U^{-1}.P \\ &= [P,L] \ .\end{aligned}$$

(3.2) <u>Cas d'une structure de Poisson affine ([7],[8]).</u>

Soit g une algèbre de Lie banachique réelle munie d'une forme bilinéaire symétrique $B : \underline{g} \times \underline{g} \to \mathbf{R}$ continue, non dégénérée et invariante, ce dernier point signifiant, rappelons le, qu'on a l'identité :

$$B([x,y],z) = B(x,[y,z]) \ .$$

La non-dégénérescence de B assure en particulier que l'espace de Banach $\underline{g}$ est réglexif, i.e. $\underline{g}^* = \underline{g}$.

Pour les fonctions différentiables (au sens Gateaux) $\overline{f} : \underline{g} \to \mathbf{R}$ un gradient ∇f , relatif à B , est défini par :

$$\frac{d}{dt} f(x+ty)|_{t=0} = B(\nabla f(x),y)$$

et la structure de Poisson définie canoniquement sur $\underline{g}^*$ (structure de Beretin-Lirillov-Kostant-Souriau) s'explicite alors ainsi :

$$\{f,g\}(x) = B([\nabla f(x),\nabla g(x)],x) \qquad , \quad x \in \underline{g}$$

Par ce transport de structure de $\underline{g}^*$ à $\underline{g}$ réalisé au moyen de B, une équation d'évolution hamiltonienne :

$$\frac{df(u)}{dt} = \{H,f\}(u)$$

devient alors :

$$B(\nabla f(u),\frac{du}{dt}) = B([\nabla H(u),\nabla f(u)],u)$$

$$= B(\nabla f(u),[u,\nabla H(u)])$$

i.e., compte-tenu une fois de plus du fait que B est non-dégénérée, une équation du type de Lax :

$$\frac{du}{dt} = [u,\nabla H(u)]$$

Dans le cas plus général d'une structure de Poisson affine, le 2-cocycle ϕ s'identifie au moyen de B, à un opérateur linéaire $J : \underline{g} \to \underline{g}$ anti-symétrique. Il convient de noter que la condition

$$\mathbf{S}\, B(J[x,y],z) = 0$$

est réalisée dès que J est une dérivation de g.

On peut se ramener à une structure de Poisson linéaire sur $\underline{g} \times \mathbf{R}$ par extension centrale au moyen de J ; on retrouve alors la structure affine de (g,J) en identifiant $\underline{g}$ à $\underline{g} \times \{1\}$, ce qui conduit à modifier l'équation d'évolution de Lax par addition de J :

$$\frac{du}{dt} = [u,\nabla H(u)] + J(u) \quad .$$

Exemple 8 :

$\underline{g}$ étant l'algèbre de Lie d'un groupe réductif G, il existe sur $\underline{g}$ une forme bilinéaire invariante, non dégénérée $B : \underline{g} \times \underline{g} \to \mathbf{R}$. On considère alors le groupe de "jauge" $\tilde{G} : C^{\infty}(S^1,G)$ d'algèbre de Lie $C^{\infty}(\mathbf{S}^1,\underline{g}) = \tilde{g}$, de dimension infinie ; cette algèbre est munie d'une forme bilinéaire invariante, non dégénérée :

$$\tilde{B}(L,M) = \int_{\mathbf{S}^1} dx.B(L(x),M(x))$$

Le champ de vecteurs sur $\mathbf{S}^1$:

$$J = \frac{d}{dx}$$

définit alors un 2-cocycle :

$$\omega(L,M) = \tilde{B}\left(\frac{d}{dx} L,M\right)$$

et la représentation adjointe de l'extension centrale de $\tilde{g}$ par ω s'exprime alors sur les sous-espace stables $\tilde{g} \times e$ $(e \in \mathbf{R})$ par :

$$(ad^e M)\ (L) = [M,L] + e\frac{dM}{dx}$$

d'où, par intégration sur le groupe $\tilde{G}$, une action de jauge :

$$Ad^e g(L) = Adg.L + e.\frac{dg}{dx}.g^{-1} \quad .$$

L'équation d'évolution de P. Lax s'écrit alors :

$$\partial_t L = \partial_x M - [M,L] \qquad , \quad M = \text{grad } H$$

et elle se traduit par la <u>platitude</u> de la <u>connexion</u> $Ldx + Mdt$ sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$.

4. CROCHET DE MOYAL ET EQUATIONS D'EVOLUTION DU TROISIEME ORDRE.

(4.1) Préambule :

Soit $\mathscr{A}$ l'algèbre réelle des fonctions $C^{\infty} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Sur cette algèbre on considère l'opérateur de "Schrödinger" :

$$\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

et à cet opérateur on associe, dans l'algèbre de polynômes $\mathscr{A}[\xi]$, le symbole :

$$L = \xi^2 + u(x) \ ;$$

On suppose que u dépend différentiablement d'un paramètre t et on se propose d'étudier l'équation de Lax

$$\partial_t L = [\, L, P \,]$$

lorsque P est un polynôme du troisième degré en ξ :

$$P = \xi^3 + a(x)\xi^2 + b(x)\xi + c(x)\xi.$$

(4.2) Formulation en crochet de Poisson :

$$
\begin{aligned}
[\, L,P \,] &= [\xi^{\,2}+u,\ \xi^3+a\xi^2+b\xi+c\,] \\
&= [\xi^2,a]\xi^2 + [\xi^2,b]\xi + [\xi^2,c] + [u,\xi^3] + a[u,\xi^2] + b[u,\xi] \\
&= 2a_x.\xi^3 + 2b_x.\xi^2 + 2c_x.\xi - 3u_x.\xi^2 - 2u_x a.\xi = u_x.b \ .
\end{aligned}
$$

(L'indice x indique la dérivation par rapport à x).

Pour qu'une telle expression soit indépendante de ξ , il suffit de chosir :

$$a = 0 = c \qquad , \qquad b = \frac{3}{2}u \quad ,$$

de sorte que l'équation d'évolution de P. Lax devient :

$$2u_t + 3u_x u = 0$$

ou encore, sous forme de "Loi de conservation" :

$$(u^2)_t + (u^3)_x = 0 \ .$$

(4.2) Formulation en crochet de Moyal :

Le crochet de Moyal sur $\mathscr{A}[\xi]$ est défini à partir du produit de Moyal :

$$u * v = uv + P_1(u,v) + \ldots + \frac{P_r(u,v)}{r!} + \ldots +$$

($P_1(u,v) = \{u,v\}$ est le crochet de Poisson usuel) par :

$$\{u * v\} = \frac{1}{2}(u*v - v*u)$$

ce qui donne, en raison de la propriété de parité du produit de Moyal :

$$\{u*v\} = P_1(u,v) + \ldots + \frac{P_{2r+1}(u,v)}{(2r+1)!} + \ldots \qquad .$$

Un calcul élémentaire assure que :

1°) Pour tout polynôme $p(\xi)$ du second degré à coefficients constants et pour toute fonction $f \in \mathscr{A}$, le crochet de Moyal de p et f coïncide avec le crochet de Poisson de ces fonctions; i.e. :

$$[p * f] = [p,f] \quad .$$

2°) Pour tout polynôme $q(\xi) = \xi^3 + \ldots$ du troisième degré à coefficients dans $\mathscr{A}$ et toute $u \in \mathscr{A}$:

$$[u * q] = \frac{1}{6} P_3(u,\xi^3) + [u,q]$$

ou, de façon plus explicite :

$$[u * q] = - u_{xxx} + [u,q]$$

Ces remarques donnent, compte-tenu du calcul fait précédemment en crochet de Poisson, le :

Théorème .

Pour $L = \xi^2 + u$ *et* $P = \xi^3 + \frac{3}{2} u\xi$ *, l'équation de Lax-Moyal :*

$$L_t = [L * P]$$

se réduit à l'équation de Korteweg-de Wriès::

$$u_t + \frac{3}{2} uu_x + u_{xxx} = 0$$

Remarques.

1/ en posant $u = - 4v$, on retrouve la forme normale de l'équation de Korteweg-de Vries :

$$v_t - 6 v\, v_x + v_{xxx} = 0$$

2/ l'introduction d'un paramètre de déformation ε (i.e. $u * v = \mathrm{Exp}\xi P(\varepsilon,v)$) se traduit pour l'équation de Korteweg-de Vries par une déformation en ε^2 :

$$v_b - 6 v\, v_x + \varepsilon^2 v_{xxx} = 0$$

(4.3) Equations K.d.V. modifiée :

Comme l'a remarqué R. Hermann [9], on peut retrouver l'équation de Korteweg-

-de Vries modifiée en utilisant encore la formulation de Lax-Moyal. Il suffit pour cela de remplacer L par :

$$L_1 = \xi + u \ ,$$

ce qui donne le crochet de Poisson :

$$[\ L_1, P\ ] = a_x\xi^2 + b_x\xi + c_x - 3u_x\xi^2 - 2u_x u.\xi - u_x.b,$$

expression indépendante de ξ pour :

$$a = 3u \qquad \text{et} \qquad b = 3u^2$$

ce qui donne l'équation de Lax-Poisson :

$$u_t = 3u^2 u_x$$

d'où, en crochet de Moyal :

$$u_t - 3u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \ .$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. LICHNEROWICZ , (1977), *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées* (Jour. Diff. Geometry, vol. 12 n°2)

[2] J. BRACONNIER (1977), *Sur les crochets généralisés et quelques unes de leurs applications* (Pub. Dep. Math. Lyon, T. 14 n° 4)

[3] R. OUZILOU (1983), *Hamiltonian actions on Poisson manifolds* (Research Notes in mathematics 80 - Pitman).

[4] A. LICHNEROWICZ (1975), *Algèbres de Lie attachées à une cariété canonique* (Jour. Math. Pures Appl. T. 54 n° 6).

[5] (a) M. ADLER (1979), *On a trace fonctional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of K.d.V. equation* (Inv. Math. 50)

(b) LEBEDEV-MANIN, (1979), *The Gelfand-Dikii hamiltonian operators and the co-adjoint representation of Volterra groups.*

(c) G. WILSON, (1979), *Commuting flows and conservation law for Lax equations* (Math. Proc. London Society).

[6] J. HELMSTETTER, (1982), *Algèbres de Clifford et algèbres de Weyl,* (Cahiers Math. Montpellier n° 25).

[7] BEREZIN-PERELOMOV, (1980), *Group theoretical interpretation of the Korteweg-de Vries type equations* (Com. Math. Phys. 74).

[8] RIEMAN & SEMENOV-TIAN-SANSKII, (1980), *Current algebras and non linear partial differential equations* (Soviet Math. Dokl. Vol. 21 n° 2).

[9] R. HERMANN, (1974), *Geometric theory of non-linear differential equations* (Vol. XIV, Math. Sciences Press).

[10] A. WEINSTEIN, (1982), *The local structure of Poisson manifolds* (Center of Pures and Applied Math. Berkeley).

>>>>>>>>>>