PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

NEJIB ZAGUIA

Chapitre II Chaînes d'idéaux d'un ensemble ordonné

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 7D
« Chaînes d'idéaux et de sections initiales d'un ensemble ordonné », , p. 39-66
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___7D_39_0>

CHAPITRE II

CHAINES D'IDEAUX D'UN ENSEMBLE ORDONNE

Résumé.

Dans ce chapitre nous étudions les possibles types d'ordre des chaînes d'idéaux d'un ensemble ordonné. Nous montrons qu'à toute chaîne α indécomposable dénombrable on peut associer un nombre fini d'ensemble ordonnés $A_{\alpha(1)},\ldots,A_{\alpha(n)}$, tels que l'ensemble des idéaux d'un ensemble ordonné P contient une chaîne de type α si et seulement si P contient une partie isomorphe à l'un des $A_{\alpha(i)}$.

La finitude du nombre d'ensembles repose essentiellement sur les propriétés de la notion de meilleurordre et celles des chaînes dispersées. Les rappels concernant ces notions occupent le I ; la discussion sur les types d'ordre de chaînes d'idéaux commence en II et la preuve du théorème est en III.

I - LA NOTION DE MEILLEURORDRE - SON APPLICATION AUX CHAINES DISPERSEES.

I-1. Meilleurordre.

Parmi les notions d'ordre les plus simples qui généralisent le bonordre à l'ordre partiel figure le belordre. Or un ensemble peut être belordonné sans que l'ensemble de ses sections initiales soit belordonné. En conséquence de ceci, NASH-WILLIAMS [6] a introduit en 1965 une notion d'ordre appelée par lui *"better-quasi-order"* - que nous traduisons par *meilleurordre* - notion intermédiaire entre celles de belordre et de bonordre, et qui se conserve par passage aux ensembles de sections initiales.

La définition de NASH-WILLIAMS est compliquée, nous ne l'exposerons pas. Nous donnerons une définition équivalente en termes de suites d'intervalles, suffisante pour donner une idée de cette notion. (Pour une étude plus poussée, voir [9] , la définition d'origine étant indispensable à la preuve du moindre théorème).

I-1.1. Définitions.

Considérons un ordinal α et un ensemble ordonné A. Une application f de α dans A est dite une suite ordinale extraite de A, et plus précisément une α-suite extraite de A.

Le cas usuel est celui d'une ω-suite, ou suite indexée par les entiers.

Etant donnés deux ordinaux α,β, une α-suite f et une β-suite g extraites de A, on dit que f s'abrite dans g ou g abrite f, lorsque $\alpha \leqslant \beta$ et qu'il existe une application h strictement croissante de α sur une restriction de β, telle que pour chaque élément i de α et l'élément tranformé h(i) de β on ait $f(i) \leqslant g(h(i))$ dans A.

L'abritement est un préordre (réflexif et transitif) sur les suites ordinales extraites de A.

Une α-suite f extraite de A est dite *indécomposable* lorsqu'elle s'abrite dans chacune de ses sections finales (restriction de f aux sections finales de α).

Voici deux définitions équivalentes au meilleurordre.

I-1.2. THEOREME (M.POUZET [7]).

Pour tout ensemble ordonné A, il y a équivalence entre :

(i). A est meilleurordonné,

(ii). toute α-suite extraite de A a une section finale indécomposable,

(iii). la classe des suites ordinales dénombrables extraites de A est belordonnée pour le préordre d'abritement.

Du fait qu'un ensemble A est belordonné si et seulement si toute ω-suite a une section finale indécomposable, il s'ensuit que tout meilleurordre est un belordre.

I-1.3. M-Algèbre ordinale.

Nous reprenons les définitions et les notations analogues à celles donnée en [8].

Une M-algèbre ordinale est la donnée d'une classe préordonnée A et de la classe préordonnée M formée d'opérations sur A satisfaisant les conditions suivantes :

- a toute opération f de M est associé un ordinal, noté a(f) et appelé *l'arité* de f, et une application de $A^{a(f)}$ dans A qui, à une a(f)-suite $(x_i)_{i < a(f)}$ extraite de A, fait correspondre un élément $f(x_i)_{i < a(f)}$ de A.

- les deux préordres possèdent les propriétés de :

- *compatibilité :* si $f \leqslant g$ dans M et $(x_i)_{i < a(f)}$ s'abrite dans $(y_i)_{i < a(g)}$ alors $f(x_i)_{i < a(f)} \leqslant g(y_i)_{i < a(g)}$ dans A.

- *extensivité :* pour toute $f \in M$ et toute a(f)-suite $(x_i)_{i < a(f)}$ extraite de A et pour tout $j < a(f)$ on a $x_j \leqslant f(x_i)_{i < a(f)}$ dans A.

Par exemple si f est d'arité 3, on devrait avoir : $x \leqslant f(x,y,z)$, $y \leqslant f(x,y,z)$ et $z \leqslant f(x,y,z)$.

Voici un résultat important de M.POUZET [8], et qui va nous être utile dans la suite.

I-1.4. THEOREME.

Soit A une M-algèbre ordinale. Si M et une partie génératrice de A sont meilleurordonnées, alors A est aussi meilleurordonnée.

Cette formulation a été faite en termes de classes plutôt que d'ensembles ceci en vue des applications.

I-2. CHAINES DISPERSEES.

I-2.1. Abritement entre chaînes.

Soient α et β deux chaînes (ou si l'on veut deux types d'ordre de chaînes) on dit, avec R.FRAISSE, que α *s'abrite* dans β, et on note $\alpha \leqslant \beta$, lorsque α est isomorphe à une sous-chaîne de β.

L'abritement est un préordre, mais en général n'est pas un ordre. On note $\alpha \equiv \beta$ lorsque $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \leqslant \alpha$ et on dit qu'elles ont même genre.

I-2.2. Chaînes denses, chaînes dispersées.

Une chaîne α (d'au moins deux éléments) est *dense* lorsque entre deux éléments distincts de α, il y a un troisième (i.e. si $x < y$ dans α alors il existe $z \in \alpha$, $x < z < y$).

Il y a quatre types de chaînes dénombrables et denses (G.CANTOR) : η, $1+\eta$, $\eta+1$ et $1+\eta+1$. (η désignant le type d'ordre de la chaîne des rationnels). Ainsi le produit ordinal $\eta.\eta$ est isomorphe à η.

Une chaîne est *dispersée,* si elle n'abrite aucune chaîne dense. Il revient au même de dire qu'elle n'abrite pas la chaîne des rationnels. Toute chaîne dispersée dénombrable s'abrite dans η, donc du point de vue de l'abritement, la chaîne η est le plus grand élément de la classe des chaînes dénombrables.

I-2.3. Indécomposabilité.

Etant donnée une chaîne α, on dit que :

a). α est *indécomposable* si pour toute écriture de α sous la forme $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, alors on a $\alpha \leqslant \alpha_1$ ou $\alpha \leqslant \alpha_2$.

Par exemple η, $\omega.\omega^*$ sont indécomposables alors que $\omega^* + \omega$ ne l'est pas.

b). α est *indécomposable à droite* (resp. à gauche) si pour toute écriture de α sous la forme $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $\alpha_2 \neq 0$, alors on a $\alpha_1 < \alpha$ et $\alpha \preccurlyeq \alpha_2$ (resp. $\alpha_1 \neq 0$, alors on a $\alpha_2 < \alpha$ et $\alpha \preccurlyeq \alpha_1$).

Par exemple $\omega.\omega^*$ est indécomposable à gauche ; $(\omega^* + \omega).\omega$ indécomposable à droite, alors que η et $\omega^* + \omega$ ne sont indécomposables ni à droite ni à gauche.

c). α est *impartible*, si pour toute décomposition de α sous la forme $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ alors $\alpha \preccurlyeq \alpha_1$ ou $\alpha \preccurlyeq \alpha_2$.

Par exemple η et $\omega^*.\omega$ sont impartibles alors que $(\omega^* + \omega).\omega$ ne l'est pas. Ces notions sont compatibles avec *le préordre d'abritement*, i.e. si α et α' ont même genre, i.e. $\alpha \preccurlyeq \alpha'$ et $\alpha' \preccurlyeq \alpha$, et α indécomposable (resp. indécomposable à droite -où à gauche-) alors α' aussi.

Il est clair que tout genre impartible est indécomposable . Un genre peut être indécomposable sans être indécomposable à droite ou à gauche, par exemple η, par contre une chaîne dispersée indécomposable est soit indécomposable à droite soit indécomposable à gauche (exclusivement).

Pour toute chaîne α indécomposable dénombrable on a $2\alpha \preccurlyeq \alpha$, une propriété qui va nous être utile dans la suite.

I-2.4. Une caractérisation des chaînes dispersées dénombrables.

Soit $(D_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ la suite d'ensembles de types d'ordres définie comme suit :

- D_o contient 0 et 1,
- D_α est l'ensemble des ω-sommes et des ω^*-sommes d'éléments de $\bigcup_{\beta < \alpha} D_\beta$.
- $D = \bigcup_{\alpha < \omega_1} D_\alpha$.

I-2.4.1. PROPOSITION

D est l'ensemble des types d'ordre des chaînes dispersées dénombrables.

Soit α un type d'ordre de chaîne dispersée dénombrable. Le plus petit ordinal γ tel que $\alpha \in D_\gamma$ est *le rang de* α. On note $r(\alpha) = \gamma$.

Si $\alpha \leqslant \alpha'$ alors $r(\alpha) \leqslant r(\alpha')$ et donc deux chaînes équimorphes ont le même rang. Par exemple $r(\omega) = 1$, $r(\omega^\omega) = \omega$.

Les résultats essentiels concernant les chaînes dispersées, en relation avec des conjectures de R.FRAISSE [2], sont dûs à R.LAVER [5] :

I-2.4.2. THEOREME.

1). La classe des types d'ordre dispersés dénombrable est meilleurordonné pour l'abritement donc en particulier belordonné : de toute suite $(\alpha_i)_{i < \omega}$ de types d'ordre on peut extraire une sous-suite croissante.

2). Toute chaîne dispersée est somme finie de dispersés indécomposables.

3). Soit α un type d'ordre dispersé indécomposable, alors il existe une suite $(\alpha_i)_{i < \omega}$ de types d'ordre indécomposables telle que $\alpha_i < \alpha$ pour tout i et $\alpha = \sum_{i < \omega} \alpha_i$ ou $\alpha = (\sum_{i < \omega} \alpha_i^*)^*$.

II - ETUDE DE DEUX CAS PARTICULIERS.

II-1. Chaînes infinies d'idéaux.

Les notations sont celles du premier chapitre ; on rappelle seulement que pour un ensemble ordonné P, on note $\underset{\sim}{I}(P)$, (respectivement $\underset{\sim}{J}(P)$)

l'ensemble ordonné par inclusion, des sections initiales (respectivement des idéaux de P). On étend l'abritement entre chaînes aux ensembles ordonnés, par exemple on dit que le type d'ordre α s'abrite dans l'ensemble ordonné P, et on note $\alpha < P$, lorsque P contient une chaîne de type α.

Si P est fini et plus généralement si toute suite strictement croissante d'éléments de P est fini, c'est-à-dire P^* est bien fondé, ou en terme d'abritement $\omega \not< P$, alors tout idéal de P est principal et donc P est isomorphe à $\underset{\sim}{J}(P)$. Cela a pour conséquence :

II-1.1. <u>PROPOSITION.</u>

Soit P un ensemble ordonné. $\omega \not< \underset{\sim}{J}(P)$ si et seulement si $\omega \not< P$.

Evidemment, ceci est faux pour l'ensemble $\underset{\sim}{I}(P)$. En effet, il suffit que P contienne une antichaîne infinie pour que $\underset{\sim}{I}(P)$ contienne la chaîne des rationnels, ce qui implique qu'il contient tous les types d'ordres dénombrables (en fait si P contient une antichaîne infinie alors $\underset{\sim}{I}(P)$ contient une partie isomorphe à l'ensemble $2^{\underset{\sim}{\omega}}$ des parties de ω ordonné par inclusion).

II-1.2. <u>Construction de l'ensemble $\Omega(\omega^*)$.</u>

Considérons l'ensemble $\Omega(\omega^*)$, illustré figure 1, des couples d'entiers (i,j) avec $j < i$ ordonné comme suit :

$$(i,j) < (i',j') \text{ lorsque } i < i' \text{ et } j' < j.$$

$$\begin{tikzcd}
o \arrow[r] & o \arrow[r] & o \arrow[r] & o \arrow[r] & \overset{(4,0)}{o} & \cdots\cdots \\
& o \arrow[u] \arrow[r] & o \arrow[u] \arrow[r] & o \arrow[u] \arrow[r] & o \arrow[u] & \cdots\cdots \\
& & o \arrow[u] \arrow[r] & o \arrow[u] \arrow[r] & o \arrow[u, "(4,2)"'] & \cdots\cdots \\
& & & o \arrow[u] \arrow[r] & o \arrow[u] & \cdots\cdots \\
& & & & o \arrow[u] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

(figure 1)

II-1.3. PROPOSITION.

Soit P un ensemble ordonné. $\omega^* \not\leq \underset{\sim}{J}(P)$ si et seulement si $\omega^* \not\leq P$ et $\Omega(\omega^*) \not\leq P$.

Preuve.

Il est clair que $\omega^* \leq \underset{\sim}{J}(P)$ dès que $\omega^* \leq P$ ou $\Omega(\omega^*) \leq P$.

Réciproquement supposons que $\omega^* \leq \underset{\sim}{J}(P)$.

Soit $(J_i)_{i < \omega}$ une suite strictement décroissante d'idéaux de P. On pose $E = \{x \ / \ x \in J_o$ et $J_m \subset (\leftarrow x]$ pour un entier $m\}$.

1er cas.

Pour tout $i < \omega$, on a $E \cap J_i \neq \emptyset$.

On construit la suite $(x_n)_{n < \omega}$ dans P par induction sur n : on choisit x_o dans $E \cap J_o$ puis un indice i_o tel que $J_{i_o} \subset (\leftarrow x_o]$.

Supposons construits $\{x_o , \ldots , x_n\}$ avec $J_{i_n} \subset (\leftarrow x_n]$. On a $J_{i_n} \cap E \neq \emptyset$, donc on peut choisir un élément x_{n+1} dans $E \cap J_{i_n}$.

La suite $(x_n)_{n < \omega}$ ainsi construite est strictement décroissante et définit une chaîne de type ω^*.

2ème cas.

$E \cap J_k = \emptyset$ pour un certain entier k.

Sans perdre de généralité on peut supposer $k = 0$ (si l'on supprime les k premiers termes de la suite de départ, et on considère la suite $(J'_i)_{i < \omega}$ avec $J'_i = J_{i+k}$ alors l'ensemble E' défini comme ci-dessus est vide).

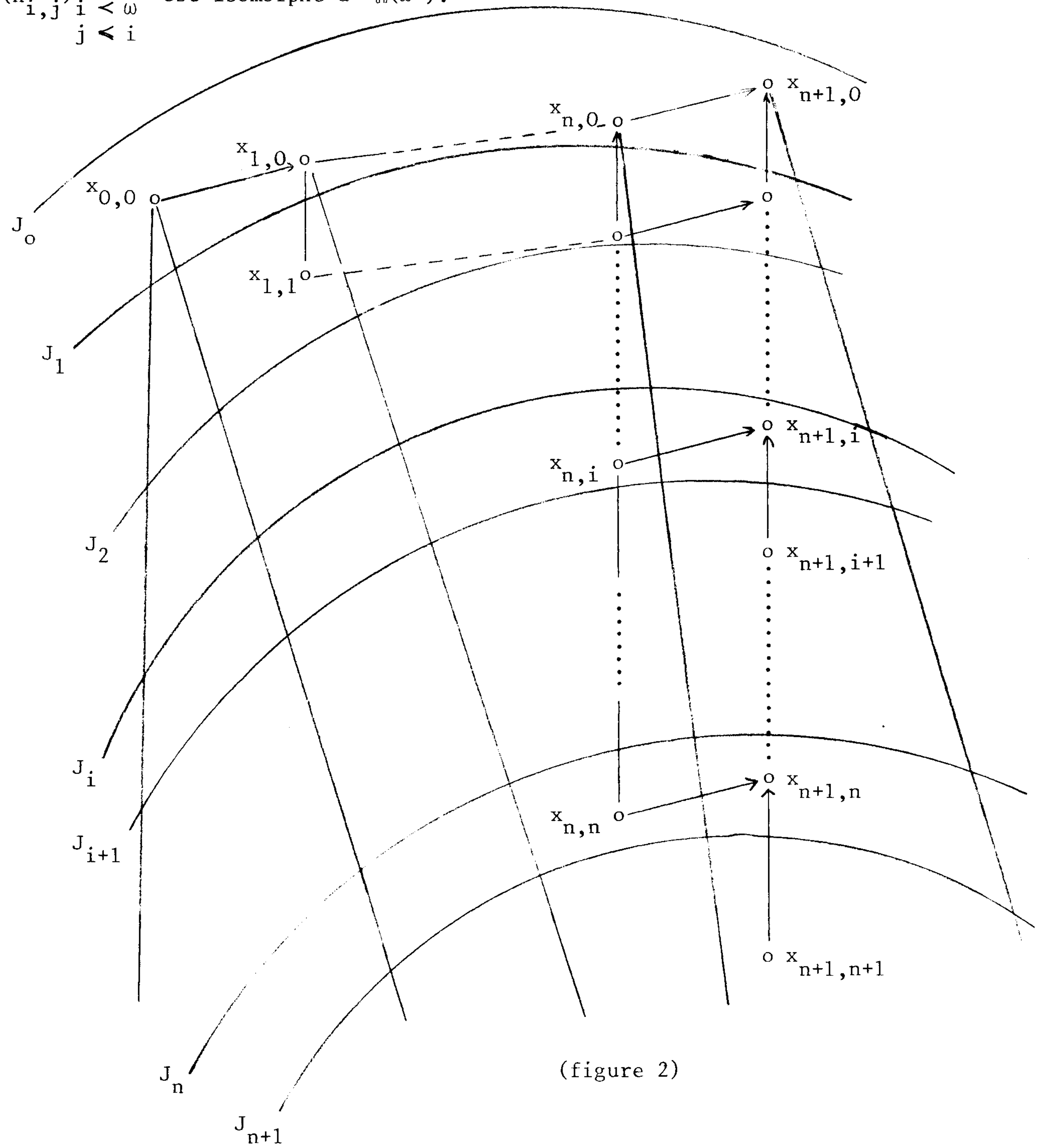
Pour tout $j < \omega$, on pose $L_j = J_{j+1} \ / \ J_j$. On construit la suite $(x_{i,j})_{\substack{i < \omega \\ j \leq i}}$ de la façon inductive suivante sur i : (cf. figure 2).

On choisit un élément $(x_{o,o})$ dans L_o et on pose $I_o = (\leftarrow x_{o,o}]$.

Supposons définis $(x_{n,j})_{j \leq n}$. Soit $I_n = (\leftarrow x_{n,o}]$; on a $L_{n+1} \setminus I_n \neq \emptyset$

sinon $J_{i+1} \subset (\leftarrow x_{n,0}]$. Soit alors $x_{n+1,n+1}$ un élément de $L_{n+1} \setminus I_n$. Supposons les $(x_{n+1,i'})_{i+1 \leqslant i' \leqslant n+1}$ définis, soit alors $x_{n+1,i}$ un élément de L_i majorant commun de $x_{n+1,i+1}$ et $x_{n,i}$.

Pour tout j, on a $x_{i,j} \in L_j$. Il est donc clair que $x_{i,j} \prec x_{i',j'}$ si et seulement si $j' \leqslant j$ (i.e. $J_j \subset J_{j'}$) et $i \leqslant i'$ (i.e. $x_{i,j}$ est construit avant $x_{i',j'}$). Par conséquent l'ensemble défini par la suite $(x_{i,j})_{\substack{i < \omega \\ j \leqslant i}}$ est isomorphe à $\Omega(\omega^*)$.



(figure 2)

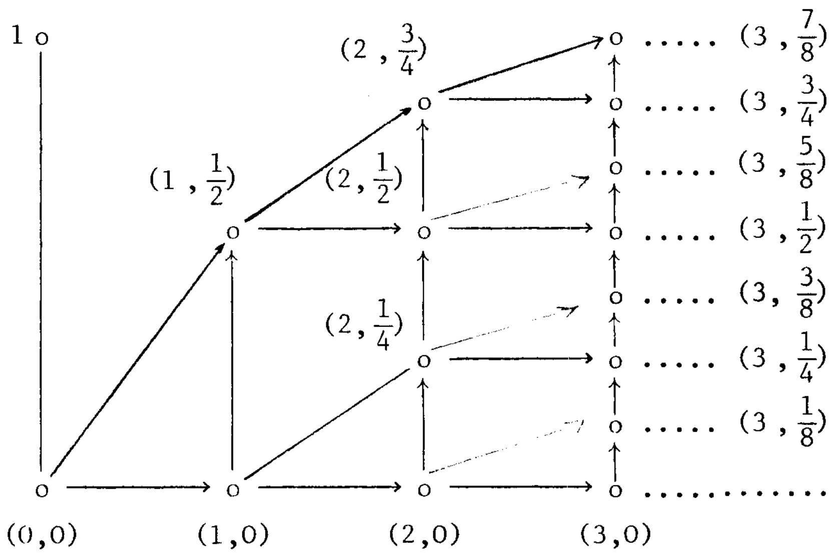
II-2. Chaînes denses d'idéaux.

On donne une caractérisation constructive des ensembles ordonnés dont l'ensemble des idéaux est dispersé.

II-2.1. Construction de l'ensemble $\Omega(\eta)$.

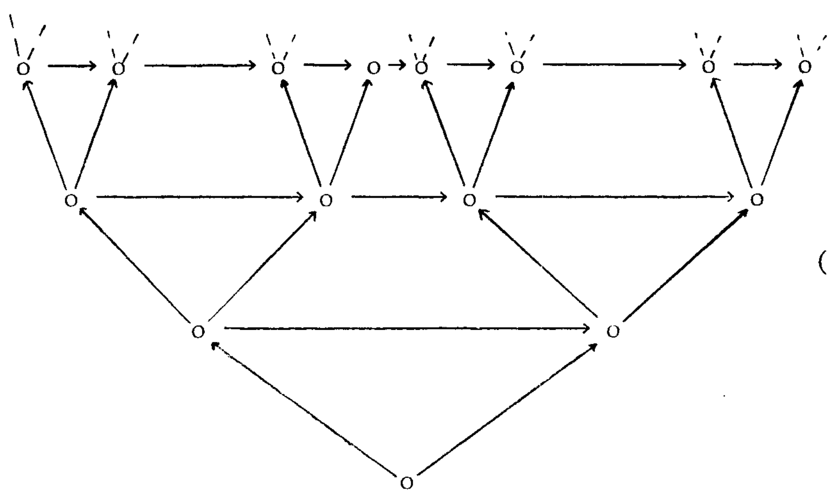
Considérons l'ensemble $\Omega(\eta)$ des couples $(n\,,\frac{i}{2^n})$ où i,n sont des entiers tels que $0 \leqslant i \leqslant 2^n-1$, ordonné par composantes i.e. $(n\,,\frac{i}{2^n}) \leqslant (m\,,\frac{j}{2^m})$ lorsque $n \leqslant m$ et $\frac{i}{2^n} \leqslant \frac{j}{2^m}$.

L'ensemble $\Omega(\eta)$ est une partie du produit de l'ensemble ω des entiers par l'ensemble D des dyadiques de l'intervalle $[0,1[$ (cf. figure 3).



(figure 3)

Plus simplement, $\Omega(\eta)$ est l'arbre dichotomique où on a rajouté les comparaisons indiquées ci-dessous (cf. figure 4).



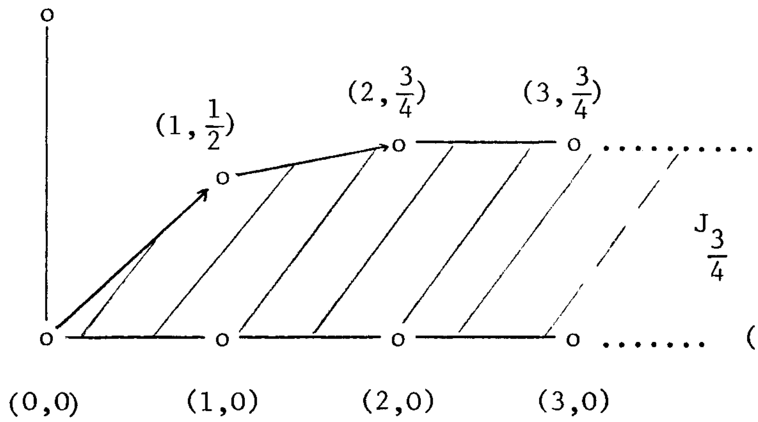
(figure 4)

II-2.2. PROPOSITION.

Soit P un ensemble ordonné. $\eta \not\leq \underset{\sim}{J}(P)$ si et seulement si $\eta \not\leq P$ et $\Omega(\eta) \not\leq P$.

Preuve.

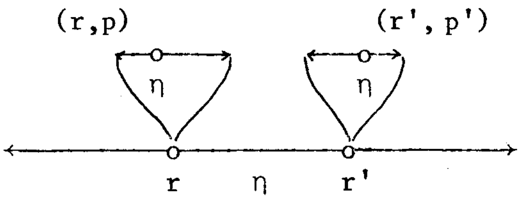
Supposons que $\Omega(\eta) \leq P$. Pour tout nombre dyadique r avec $0 \leq r < 1$, soit J_r l'idéal engendré par la chaîne $C_r = \{(n\ ,\ \frac{i}{2^n})\ /\ 0 \leq i \leq 2^n-1$ et $\frac{i}{2^n} = r\}$. L'ensemble des idéaux constitué par les J_r est une chaîne isomorphe à la chaîne des nombres dyadiques, donc une chaîne dense : (cf. figure 5).



(figure 5)

Pour la condition nécessaire, on suppose que $\eta \leq \underset{\sim}{J}(P)$. Puisque $\eta.\eta \leq \eta$, on peut considérer une chaîne $(J_{r,p})_{\substack{r \in \eta \\ p \in \eta}}$ d'idéaux de P de type $\eta.\eta$ ordonné lexicographiquement par rapport à (r,p).

[i.e. $J_{r,p} \subset J_{r',p'}$ lorsque $r < r'$ ou $(r = r'$ et $p \leq p')$]. (figure 6).



(figure 6)

Pour tout $r \in \eta$, on définit l'ensemble :

$E_r = \{x\ /\ x \in \cup\ \{J_{r,p}\ ,\ p \in \eta\}$ et $\cup\ \{J_{q,p}\ ,\ q < r$ et $p \in \eta\} \subset (\leftarrow x]\}$

1er cas.

$E_r \neq \emptyset$, pour tout $r \in \eta$.

Il est clair que si $r \neq r'$ alors $E_r \cap E_{r'} = \emptyset$. Pour tout $r \in \eta$, on choisit x_r dans E_r. La suite $(x_r)_{r \in \eta}$ est une chaîne dense dans P. (noter que $r < r'$ équivaut à $x_r < x_{r'}$).

2ème cas.

$E_r = \emptyset$ pour un certain $r \in \eta$.

On en déduit que pour tout x dans $\cup \{J_{r,p}, p \in \eta\}$ et tout $q \in \eta$, on a $J_{r,q} \not\subseteq (\leftarrow x]$ sinon x serait un élément de E_r. La chaîne $(J_{r,p})_{p \in \eta}$ d'idéaux de P est de type η, or sachant que $2.\eta < \eta$ il est possible

d'extraire une sous-chaîne indexée par $2.D$, soit $(K_{r,i})_{\substack{r \in D \\ i=0,1}}$, où D est l'ensemble des dyadiques de $[0,1[$.

On pose, pour tout $r \in D$, $L_r = K_{r,1} \setminus K_{r,0}$.

On définit par récurrence une suite $(x_{n,\frac{i}{2^n}})_{\substack{n \in \omega \\ 0 < i < 2^n-1}}$ d'éléments de P avec $x_{n,\frac{i}{2^n}}$ dans $L_{\frac{i}{2^n}}$ (cf. figure 7).

Soit $x_{0,0}$ un élément arbitraire de L_o. Supposons définis les $\left(x_{n',\frac{i'}{2^{n'}}}\right)_{\substack{n' < n \\ 0 < i' < 2^{n'}-1}}$. On pose $I_n = (\leftarrow x_{n,\frac{2^n-1}{2^n}}]$.

Soit $x_{n+1,0}$ un élément de $L_o \setminus I_n$ (il existe un tel élément puisque $K_{0,1}$ n'est pas majoré) qui majore $x_{n,0}$.

Supposons $x_{n+1,\frac{i}{2^{n+1}}}$ défini :

Si $i+1$ *est pair,* on prend pour $x_{n+1,\frac{i+1}{2^{n+1}}}$ un majorant dans $L_{\frac{i+1}{2^{n+1}}}$ de $x_{n,\frac{i+1}{2^{n+1}}}$ et $x_{n+1,\frac{i}{2^{n+1}}}$.

Si $i+1$ *est impair,* on prend pour $x_{n+1,\frac{i+1}{2^{n+1}}}$ un majorant dans $L_{\frac{i+1}{2^{n+1}}}$ de $x_{n,\frac{i}{2^{n+1}}}$ et $x_{n+1,\frac{i}{2^{n+1}}}$.

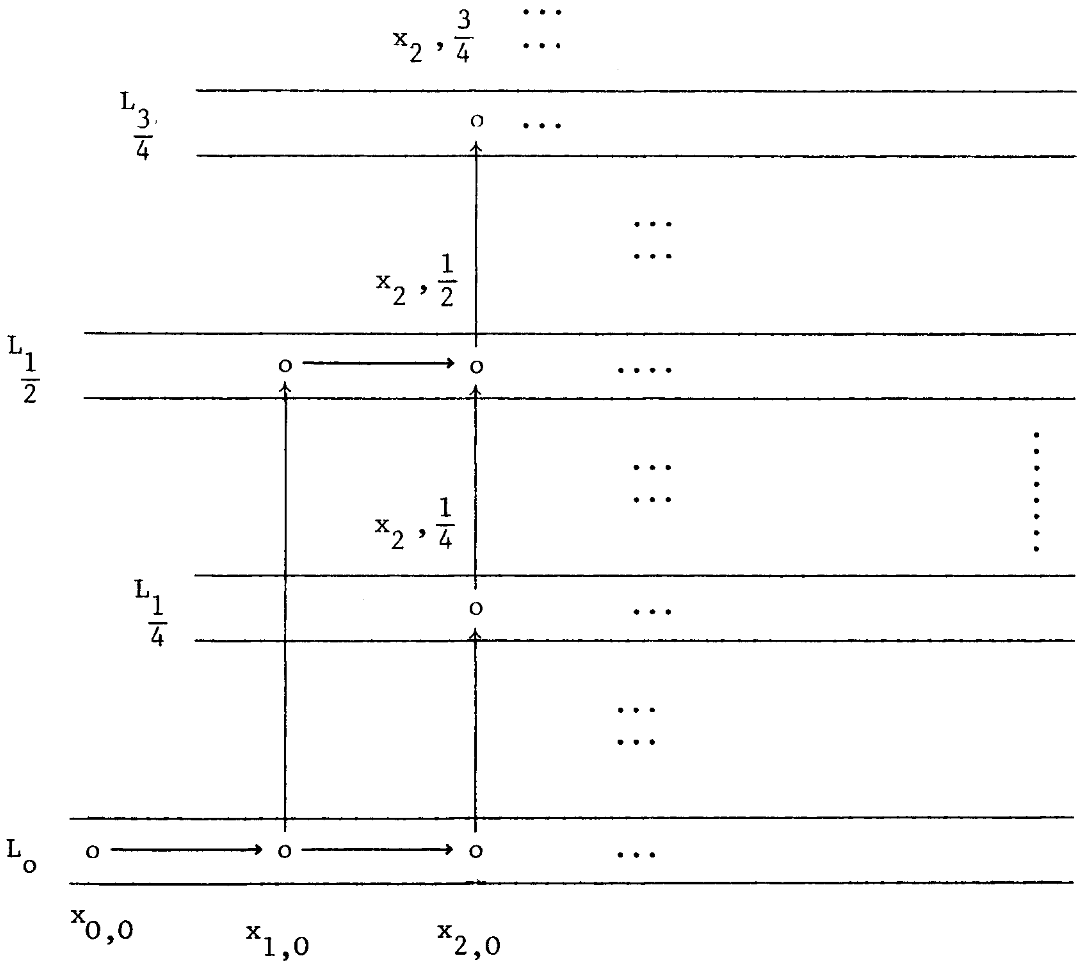


figure 7.

III - ETUDE DU PROBLEME GENERAL.

III-1. Position du problème.

Etant donnée une chaîne de type α on considère la classe $\underset{\sim}{J}_\alpha$ des ensembles ordonnés P dont l'ensemble $\underset{\sim}{J}(P)$ des idéaux contient une chaîne de type α. Le problème est le suivant : trouver une sous-classe de tels ensembles, aussi petite que possible, telle que tout élément P de $\underset{\sim}{J}_\alpha$ abrite au moins un élément A de cette sous-classe.

Pour $\alpha = \omega$ cette sous-classe se réduit à ω ; pour $\alpha = \omega^*$ elle est formée de ω^* et de $\Omega(\omega^*)$ et pour $\alpha = \eta$ de η et $\Omega(\eta)$. Nous allons étudier le cas général. Nous verrons que, au moins pour les α indécomposables dénombrables, le nombre de ces A est fini.

Dans le cas d'un α non dénombrable le nombre des A est au plus $2^{|\alpha|}$ (les A étant comptés à l'équimorphie). Ce fait découle du lemme suivant :

III-1.1. LEMME.

Soient α un type de chaîne et P un ensemble ordonné. Si $\alpha \leqslant \underset{\sim}{J}(P)$ alors il existe une partie A de P, avec $|A| \leqslant |\alpha|$ telle que $\alpha \leqslant \underset{\sim}{J}(A)$.

- Si α est fini, c'est clair.

- Si α est infini, soit $(J_i)_{i \in \alpha}$ une chaîne d'idéaux de P ordonnée comme α (i.e. $i \leqslant j$ dans α si et seulement si $J_i \subseteq J_j$). Pour chaque entier n, on construit un couple $L_n = < A_n, (I_{i,n})_{i \in \alpha} >$ tel que

1°). $A_n \subseteq P$ et $|A_n| \leqslant |\alpha|$

2°). $(I_{i,n})_{i \leqslant \alpha}$ est une chaîne de parties de A_n ordonnée (par inclusion) comme α, les $I_{i,n}$ étant choisis tels que : $I_{i,n} \subseteq J_i$ et $I_{i,n} \nsubseteq J_j$ dès que $j < i$.

Les relations entre les L_n sont :

1°). $A_n \subseteq A_{n+1}$

2°). $I_{i,n} \subseteq I_{i,n+1}$ et toute partie à deux éléments de $I_{i,n}$ a un majorant dans $I_{i,n+1}$.

Supposons la construction effectuée. On pose $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$ alors $|A| < |\alpha|$.

On pose $J'_i = (\leftarrow \bigcup_{n<\omega} I_{i,n}]_A$, alors $(J'_i)_{i \in \alpha}$ est une chaîne d'idéaux de A, ordonnée comme α. En effet, chaque J'_i est un idéal de A ($\bigcup_{n<\omega} I_{i,n}$ est filtrante par construction) inclus dans J_i. Si $j < i$ alors $I_{j,n} \subseteq I_{i,n}$ donc $\bigcup_{n<\omega} I_{j,n} \subseteq \bigcup_{n<\omega} I_{i,n}$ donc $J'_j \subseteq J'_i$. Et comme $I_{i,0} \not\subseteq J_j$ on a $J'_i \not\subseteq J_j$ alors que $J'_j \subseteq J_j$ donc $J'_j \subsetneq J'_i$.

- Construisons $L_o = < A_o, (I_{i,0})_{i \in \alpha} >$. Pour chaque couple (j,i) tel que $j < i$ dans α, soit $x_{j,i}$ un élément de $J_i \setminus J_j$.

On pose $A_o = \{x_{j,i} \ / \ j < i \text{ dans } \alpha\}$ et $I_{i,0} = \{x_{j',i'} \ / \ j' < i' < i\}$.

- Construisons $L_{n+1} = < A_{n+1}, (I_{i,n+1})_{i \in \alpha} >$.

Pour chaque $i \in \alpha$, chaque partie F à deux éléments de $I_{i,n}$ on choisit un élément $x_{i,F}$ dans J_i qui majore F.

Soient $A_{n+1} = A_n \cup \{x_{i,F} \ / \ i \in \alpha, F \subseteq I_{i,n}$ et $|F| = 2\}$ et

$$I_{i,n+1} = I_{i,n} \cup \{x_{i',F'} \ / \ i' \in \alpha, i' \leqslant i, F' \subseteq I_{i',n} \text{ et } |F'| = 2\}.$$

Q.E.D.

On sait que dans un ensemble P dénombrable, tout idéal est engendré soit par une chaîne de type ω soit par un élément. Nous étudions d'abord le cas où P contient une chaîne d'idéaux de type α, soit $(J_i)_{i \in \alpha}$, dans laquelle chaque idéal J_i est engendré par une ω-chaîne non majorée

$$x_{i,0} < x_{i,1} \ldots < x_{i,n} < \ldots.$$

Nous obtenons que P contient nécessairement une partie isomorphe à un ensemble $\Omega(\alpha)$. Cet ensemble $\Omega(\alpha)$ est la généralisation à α des ensembles $\Omega(\omega^*)$ et $\Omega(\eta)$ déjà considérées en II.

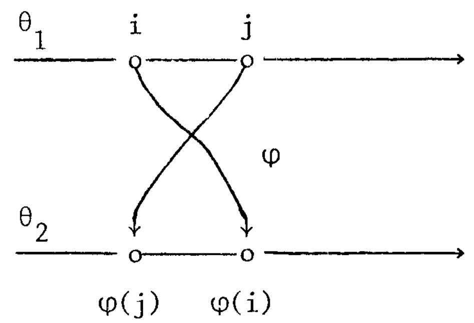
III-2. Construction et propriétés des ensembles $\Omega(\alpha)$.

Soient θ_1 et θ_2 deux chaînes dénombrables, φ une bijection de θ_1 dans θ_2. On définit sur l'ensemble des couples

$$E^{\varphi}_{\theta_1,\theta_2} = \{(i, \varphi(i)),\ i \in \theta_1\}$$

l'ordre suivant :

$(i, \varphi(i)) < (j, \varphi(j))$ lorsque $i < j$ dans θ_1 et $\varphi(i) < \varphi(j)$ dans θ_2.



Par exemple, dans ce cas $(i, \varphi(i))$ est incomparable avec $(j, \varphi(j))$.

Si $\theta_1 = \theta_2$ et φ est l'identité, l'ensemble $E^{\varphi}_{\theta_1,\theta_2}$ est une chaîne isomorphe à θ_1. Sinon l'ordre sur $E^{\varphi}_{\theta_1,\theta_2}$ est l'intersection de deux ordres totaux de même type que θ_1 et θ_2.

On s'intéresse en particulier aux ensembles ordonnés $E^{\varphi}_{\omega,\alpha}$, α étant une chaîne dénombrable.

III-2.1. LEMME.

Pour tout α, $E^{\varphi}_{\omega,\alpha}$ s'abrite dans $E^{\psi}_{\omega,\omega.\alpha}$.

Preuve.

La chaîne $\omega.\alpha$ est l'ensemble des couples (n,β), $n \in \omega$, $\beta \in \alpha$, ordonnée antilexicographiquement. Soit p_2 la projection définie par

$$p_2(n,\beta) = \beta.$$

Supposons définie les images $(i_o, \psi(i_o))$,... $(i_n, \psi(i_n))$ de $(0, \varphi(0))$ ... $(n, \varphi(n))$ de sorte que les relations d'ordre soient préservées et $p_2(\psi(i_o)) = \varphi(0)$ ... $p_2(\psi(i_n)) = \varphi(n)$.

Soit i_{n+1} le plus petit entier strictement supérieur à $i_o, \dots, i_n$, tel que $p_2(\psi(i_{n+1})) = \varphi(n+1)$. On prend $(i_{n+1}, \psi(i_{n+1}))$ pour image de $(n+1, \varphi(n+1))$.

Q.E.D.

Conséquence.

Si α et β sont équimorphes et, par exemple, α équimorphe à $\omega.\alpha$ alors les ensembles $E^{\varphi}_{\omega,\alpha}$ et $E^{\psi}_{\omega,\beta}$ sont équimorphes.

Cette propriété est fausse pour une chaîne dénombrable quelconque. Considérer par exemple une bijection φ de ω dans ω différente de l'identité, alors $E^{Id}_{\omega,\omega}$ (où Id dénote l'application identique) ne peut être équimorphe à $E^{\varphi}_{\omega,\omega}$. Pour obtenir néammoins cette propriété pour tout α nous sommes amenés à imposer une propriété supplémentaire sur les bijections.

III-2.2. LEMME.

Soit θ une chaîne dénombrable, soient φ et ψ deux bijections de ω dans $\omega.\theta$ telles que φ^{-1} et ψ^{-1} sont croissantes sur $\omega \times \{i\}$ pour tout $i \in \theta$.

Alors les ensembles ordonnés $E^{\varphi}_{\omega,\omega.\theta}$ et $E^{\psi}_{\omega,\omega.\theta}$ sont équimorphes.

Preuve.

Soit f l'application de $E^{\varphi}_{\omega,\omega.\theta}$ dans $E^{\psi}_{\omega,\omega.\theta}$ définie comme suit :

On pose $f(0, \varphi(0)) = (\psi^{-1}(\varphi(0)), \varphi(0))$ dans $E^{\psi}_{\omega,\omega.\theta}$.

Supposons construites les images $(i_o, \psi(i_o)), \dots, (i_n, \psi(i_n))$ des éléments $(0, \varphi(0)), \dots, (n, \varphi(n))$ de sorte que les relations d'ordres soient préservées et $p_2(\varphi(k)) = p_2(\psi(i_k))$ pour tout $k = 0, \dots, n$. On prend i_{n+1} le plus petit entier, supérieur à i_n, tel que $p_2(\psi(i_{n+1})) = p_2(\varphi(n+1))$ et on pose $f(n+1, \varphi(n+1)) = (i_{n+1}, \psi(i_{n+1}))$.

Voyons que f est un isomorphisme de $E^{\varphi}_{\omega,\omega.\theta}$ sur son image :

soit $(k, \varphi(k)) \prec (k', \varphi(k'))$, donc $k \prec k'$ ce qui veut dire que l'image de $(k', \varphi(k'))$ par f est construite après celle de $(k, \varphi(k))$ donc $i_k < i'_k$. On sait de plus que $p_2(\varphi(k)) = p_2(\psi(i_k))$ et $p_2(\varphi(k')) = p_2(\varphi(i_{k'}))$, donc :

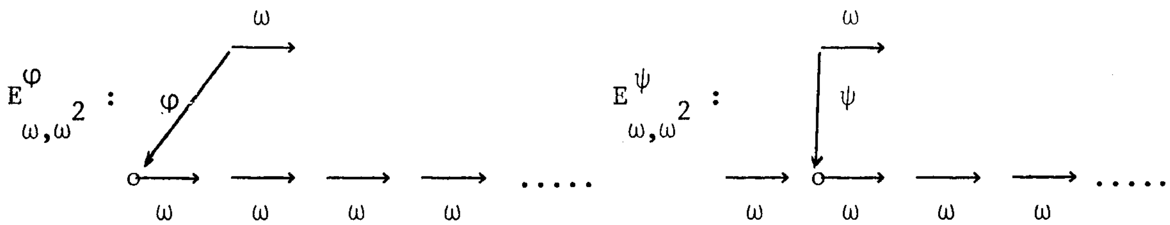
- si $p_2(\varphi(k)) = p_2(\varphi(k')) = \beta$ alors sachant que ψ est croissante sur $\omega \times \{\beta\}$, on en déduit que $\psi(i_k) < \psi(i_{k'})$, donc :

$$f(k, \varphi(k)) = (i_k, \psi(i_k)) < f(k', \varphi(k')) = (i_{k'}, \psi(i_{k'}))$$

- sinon $p_2(\varphi(k)) < p_2(\varphi(k'))$, d'où $\psi(i_k) < \psi(i_{k'})$. En utilisant la même argumentation on prouve aisément que si $f(k, \varphi(k)) < f(k', \varphi(k'))$ alors $(k, \varphi(k)) < (k', \varphi(k'))$. Il s'ensuit que les deux ensembles ordonnés sont équimorphes.

Q.E.D.

Les deux ensembles ordonnés satisfaisant les conditions du lemme III-2.2. ne sont pas en général isomorphes. Il suffit de considérer les ensembles $E^{\varphi}_{\omega,\omega^2}$ et $E^{\psi}_{\omega,\omega^2}$ tel que $\varphi(0) = (0,0)$ et $\psi(0) = (1,0)$ dans ω^2.



Alors $E^{\varphi}_{\omega,\omega^2}$ contient un élément minimum soit $(0, \varphi(0))$, contrairement à $E^{\psi}_{\omega,\omega^2}$.

Soit α un type d'ordre dénombrable ; on désigne par $\Omega(\alpha)$ un quelconque ensemble $E^{\varphi}_{\omega,\omega.\theta}$ où θ est une chaîne de type α et φ une bijection de ω sur $\omega.\theta$ satisfaisant les conditions du lemme III-2.2..

Notons que $\Omega(1)$ est la chaine ω des entiers, dans les autres cas $\Omega(\alpha)$ est un ensemble ordonné de dimension deux, c'est-à-dire que l'ordre sur $\Omega(\alpha)$ est l'intersection de deux ordres totaux de types respectifs ω et $\omega.\alpha$.

On vérifie aisément que les ensembles $\Omega(\omega^*)$ et $\Omega(\eta)$ définis ici sont équimorphes aux ensembles ordonnés déjà construit en II, à l'occasion de l'étude des chaînes infinies strictement décroissantes d'idéaux et des chaînes denses d'idéaux.

En utilisant une preuve de même genre que dans le lemme III-2.2., on démontre que tout ensemble fini de dimension 2 tel que $|E| = n$ s'abrite dans $\Omega(n)$.

III-2.3. PROPOSITION.

Soit α un type d'ordre dénombrable. Alors $\Omega(\alpha)$ contient une chaîne d'idéaux de type α.

Preuve.

On a $\Omega(\alpha) = \{(i, \varphi(i)),\ i \in \omega\}$, φ étant une bijection de ω dans $\omega.\alpha$. Pour chaque $\beta \in \alpha$, soit $J_\beta = \{(i, \varphi(i)) \in \Omega(\alpha)\ \ p_2(\varphi(i)) < \beta\}$, J_β est une section initiale de $\Omega(\alpha)$ en tant qu'image réciproque d'une section initiale. Voyons que c'est un idéal :

L'ensemble X de $\omega \times \{\beta\}$ formé des éléments supérieurs à $\mathrm{Max}\{\varphi(i), \varphi(j)\}$ est infini. Or φ étant bijective il existe donc $n > \mathrm{Max}\{i,j\}$ tel que $\varphi(n) \in X$. Par conséquent $(n, \varphi(n))$ appartient à J_β et majore à la fois $(i, \varphi(i))$ et $(j, \varphi(j))$.

Par construction l'ensemble des J_β est ordonné comme α. On a donc bien une chaîne d'idéaux de type α.

Q.E.D.

Pour chaque élément x de $\Omega(\alpha)$ (ou l'un de ses représentants) l'ensemble de ses minorants est fini. En particulier $\Omega(\alpha)$ est un ensemble bien fondé de hauteur ω. Chaque idéal infini est donc engendré par une ω-chaîne non majorée. Et donc $\Omega(\alpha)$ contient une chaîne d'idéaux de type α, chacun d'eux engendré par une chaîne non majorée.

Cette propriété est spécifique des ensembles $\Omega(\alpha)$, c'est le propos du théorème suivant :

III-2.4. THEOREME.

Soit α un type de chaîne dénombrable tel que $2\alpha < \alpha$ (par exemple α indécomposable). Si un ensemble ordonné P contient une chaîne d'idéaux $(J_\beta)_{\beta \in \alpha}$ de type α, dont aucun d'entre eux n'est majoré, alors P contient une partie équimorphe à $\Omega(\alpha)$, i.e. $\Omega(\alpha) < P$.

Preuve.

Puisque $2\alpha < \alpha$ on peut extraire de $(J_\beta)_{\beta \in \alpha}$ une sous-chaîne indexée par $2.\alpha$, soit $(J_{\beta,i})_{\substack{\beta \in \alpha \\ i=0,1}}$ telle que $J_{\beta,i} \subseteq J_{\beta',i'}$ si et seulement si $(\beta,i) < (\beta',i')$ lexicographiquement.

Pour $\beta \in \alpha$ soit $C_\beta = J_{\beta,1} \setminus J_{\beta,0}$ et soit $C = \bigcup_{\beta \in \alpha} C_\beta$. On définit un isomorphisme f de $\Omega(\alpha)$ dans C comme suit :

Soit $\gamma_o = p_2(\varphi(0))$, on associe à $(0, \varphi(0))$, par l'application f, un élément quelconque de C_{γ_o}.

Supposons définies les images respectives de $(0, \varphi(0))$,..., $(n, \varphi(n))$ de sorte que les relations d'ordres soient préservées et $f(i, \varphi(i))$ appartienne à C_{γ_i}, où $\gamma_i = p_2(\varphi(i))$, pour $i = 0$,..., n.

Soit $\gamma_{n+1} = p_2(\varphi(n+1))$ et soient :

$$E_1 = \{(i, \varphi(i)) \in \Omega(\alpha) \ / \ i < n \ \text{ et } \ p_2(\varphi(i)) < \gamma_{n+1}\} \ \text{ et}$$

$$E_2 = \{(i, \varphi(i)) \in \Omega(\alpha) \ / \ i < n \ \text{ et } \ p_2(\varphi(i)) > \gamma_{n+1}\}.$$

L'ensemble E_1 est formé des éléments de $\Omega(\alpha)$ inférieurs à $(n+1, \varphi(n+1))$ [N.B. φ est croissante sur chaque $\varphi^{-1}(\omega \times \{\gamma\}]$ et l'ensemble E_2 des éléments incomparables à $(n+1, \varphi(n+1))$ (dont le 1° indice est au plus n).

Pour étendre f à $(n+1, \varphi(n+1))$ il suffit de lui associer un élément $x \in C_{\gamma_{n+1}}$ qui majore strictement $f(E_1)$ et soit incomparable à tous les éléments de $f(E_2)$. Pour obtenir un tel élément on peut observer que $C_{\gamma_{n+1}}$

est cofinal dans $J_{\gamma_{n+1}}$, c'est-à-dire $J_{\gamma_{n+1}} = \dot{\leftarrow} C_{\gamma_{n+1}}]$, or $J_{\gamma_{n+1}}$ est un idéal non majoré et $f(E_2)$ est fini, donc $C_{\gamma_{n+1}} \setminus (\leftarrow f(E_2)]$ contient au moins un élément y. D'autre part $f(E_1)$ est une partie finie de $J_{\gamma_{n+1}}$; elle admet donc au moins un majorant strict z dans $C_{\gamma_{n+1}}$ (N.B. $C_{\gamma_{n+1}}$ n'est pas majoré). N'importe quel majorant de y et z appartenant à $C_{\gamma_{n+1}}$ convient.

L'application f ainsi définie est bien un isomorphisme de $\Omega(\alpha)$ sur son image, i.e. $\Omega(\alpha) \prec P$.

Q.E.D.

Remarque.

Ce théorème est une généralisation du lemme III-2.2. pour les α tels que $2\alpha \prec \alpha$.

III-3. Finitude du nombre d'exemples.

Considérons maintenant le cas d'un ensemble ordonné P appartenant à $\underset{\sim}{J}_\alpha$, i.e. $\alpha \prec \underset{\sim}{J}(P)$, ne contenant pas nécessairement $\Omega(\alpha)$. Le cas $\alpha = \eta$ étant complètement traité, on pourra supposer α dispersé.

III-3.1. LEMME.

Soit $(\alpha_i)_{i < \omega}$ une suite de types de chaînes dispersées dénombrables telle que la somme $\alpha = \sum_{i < \omega} \alpha_i$ (resp. $\alpha = \sum^*_{i < \omega} \alpha_i$) soit indécomposable à droite (resp. indécomposable à gauche).

si $P \in \underset{\sim}{J}_\alpha$ alors ou bien $\Omega(\alpha) \prec P$ ou bien il existe une suite $(P_i)_{i < \omega}$, avec $P_i \in \underset{\sim}{J}_{\alpha_i}$ telle que $\sum_{i < \omega} P_i \prec P$ (resp. $\sum^*_{i < \omega} P_i \prec P$).

Preuve.

1er cas.

L'ensemble P contient une chaîne d'idéaux de type α, soit $(J_\beta)_{\beta \in \alpha}$, telle que aucun J_β n'est majoré dans $P' = \bigcup_{\beta \in \alpha} J_\beta$. Alors d'après le théorème III-2.4., $\Omega(\alpha) \prec P'$ et donc $\Omega(\alpha) \prec P$.

2ème cas.

Pour toute chaîne d'idéaux de type α, soit $(J_\beta)_{\beta \in \alpha}$, l'un des J_β est majoré dans $P' = \bigcup_{\beta \in \alpha} J_\alpha$.

Supposons α indécomposable à droite.

Dans ce cas tout J_β est majoré dans P', c'est-à-dire que pour tout β il existe β' et x tels que $J_\beta \subseteq (\leftarrow x] \subseteq J_{\beta'}$. On construit par induction une suite croissante x_o ,... x_i ,... d'éléments de P' telle que pour tout i, l'ensemble $P_i = [x_i , x_{i+1}[$ soit dans $\underset{\sim}{J}_{\alpha_i}$. On a alors :

$$\sum_{i < \omega} P_i \prec P.$$

La suite est construite ainsi : x_o est arbitraire dans P'.

Supposons les éléments $x_o \dots x_i$ déjà définis. Soit β tel que $x_i \in J_\beta$. Soit $\beta' > \beta$ tel que $\alpha_i \prec [\beta, \beta'[$ et soit x_{i+1} un majorant quelconque de $J_{\beta'}$.

L'intervalle $[x_i , x_{i+1}[$ est dans $\underset{\sim}{J}_{\alpha_i}$. En effet, posons $J'_\gamma = J_\gamma \cap [x_i \rightarrow)$, alors J'_γ est un idéal et l'ensemble des $J'_{\gamma'}$ pour $\beta \prec \gamma' < \beta'$ est une chaîne d'idéaux de $[x_i , x_{i+1}[$ de type au moins α_i.

Supposons α indécomposable à gauche.

Dans ce cas pour tout β il existe x et β' tels que :

$$J_{\beta'} \subseteq (\leftarrow x] \subseteq J_\beta.$$

On construit tout aussi facilement une suite décroissante x_o ,..., x_i ,...

d'éléments de P' telle que pour tout i l'ensemble $P_i =]x_{i+1}, x_i]$ soit dans $\underset{\sim}{J}_{\alpha_i}$. On obtient encore $\sum^*_{i<\omega} P_i \prec P$.

La suite est construite ainsi : on choisit x_o majorant un J_β. Supposons les $x_o \ldots x_i$ déjà définis de sorte que x_i majore un certain J_{β_i}. Soit $\beta' < \beta_i$ tel que $\alpha_i \prec]\beta', \beta_i]$ et soit x_{i+1} un élément de $J_{\beta'}$ qui majore au moins un $J_{\beta''}$.

L'intervalle $]x_{i+1}, x_i]$ est dans J_{α_i} pour la même raison que ci-dessus.

Q.E.D.

Soit Ω la classe formée des ensembles équimorphes aux $\Omega(\alpha)$ pour α décrivant les types de chaînes dispersées dénombrables.

Soit $\mathcal{D}_\Omega$ la classe formée des sommes $\sum_{i\in\beta} \gamma_i$ où les γ_i sont soit des chaînes dispersées dénombrables, soit des éléments de Ω et où β décrit les chaînes dispersées dénombrables.

Les classes Ω et $\mathcal{D}_\Omega$ étant ordonnées par abritement, on a :

III-3.2. PROPOSITION.

Soit α un type dispersé dénombrable indécomposable. Pour tout ensemble ordonné P on a : $\alpha \prec \underset{\sim}{J}(P)$ si et seulement si il existe A, $A \in \mathcal{D}_\Omega$, $A \prec P$, tel que $\alpha \prec \underset{\sim}{J}(A)$.

Preuve.

On la fait par induction sur le rang $r(\alpha)$ de α.

- si $r(\alpha) = 0$ alors $\alpha = 1$ et c'est évident.

- si $r(\alpha) = \mu$ on suppose que α est indécomposable à droite (le cas où α est indécomposable à gauche, se traite de la même façon). Dans ce cas on peut écrire α sous la forme $\alpha = \sum_{i<\omega} \alpha_i$ où les α_i sont indécomposables et $r(\alpha_i) < r(\alpha)$. (En effet, par construction des chaînes

dispersées, cf. I-2.4.1., on peut écrire $\alpha = \sum_{i < \omega} \alpha'_i$ avec $r(\alpha'_i) < r(\alpha)$. D'après le théorème de LAVER, cf. I-2.4.2., chaque α'_i est une somme finie d'indécomposables, et leur rang est au plus $r(\alpha_i)$ -N.B. le rang est une fonction croissante- et donc α se met sous la forme annoncée). D'après le lemme III-3.1., ou bien $\Omega(\alpha) \prec P$ et dans ce cas $A = \{\Omega(\alpha)\}$ convient, ou bien il existe une suite $(P_i)_{i < \omega}$ telle que $\alpha_i \prec \underset{\sim}{J}(P_i)$ et $\sum_{i < \omega} P_i \prec P$.
D'après l'hypothèse d'induction, pour chaque P_i il existe A_i tel que $A_i \in \mathcal{D}_\Omega$, $A_i \prec P_i$ et $\alpha_i \prec \underset{\sim}{J}(A_i)$.
L'ensemble $A = \sum_{i < \omega} A_i$ convient.

Q.E.D.

<u>Remarque sur la preuve</u>.

Dans ce type de preuve on pourrait éviter le recours au théorème de R.LAVER si on n'était pas obligé de supposer α indécomposable. En utiliant d'emblée le théorème de R.LAVER on peut faire une preuve encore plus courte en raisonnant par induction sur α (la classe des dispersés étant bien fondée, si la conclusion de la proposition III-3.2. est fausse elle est fausse pour un α minimal).

La proposition précédente s'exprime plus simplement en disant que la classe $\underset{\sim}{J}_\alpha \cap \mathcal{D}_\Omega$ *est coinitiale dans* $\underset{\sim}{J}_\alpha$ (i.e. pour tout $P \in \underset{\sim}{J}_\alpha$ il existe $A \in \underset{\sim}{J}_\alpha \cap \mathcal{D}_\Omega$ tel que $A \prec P$).

Reste à voir que $\underset{\sim}{J}_\alpha \cap \mathcal{D}_\Omega$ contient elle-même une partie coinitiale finie. Pour cela il suffit de montrer que toute partie de $\mathcal{D}_\Omega$ contient une partie coinitiale finie c'est-à-dire que $\mathcal{D}_\Omega$ est belordonnée pour l'abritement. Nous allons voir que, plus fortement, $\mathcal{D}_\Omega$ est meilleurordonnée. On commence par Ω :

III-3.3. <u>PROPOSITION</u>.

La classe Ω est meilleurordonnée pour l'abritement.

Preuve.

Considérons l'application $\varphi : \mathcal{D} \to \Omega$, où $\mathcal{D}$ est la classe des chaînes dispersées dénombrables, qui à α associe $\Omega(\alpha)$ (ou plutôt un de ses représentants). Cette application est croissante : si $\alpha < \beta$ alors $\Omega(\ ) < \Omega\ (\beta)$ (utiliser le lemme II.2.2), Or $\mathcal{D}$ est meilleurordonnée pour l'abritement (R. LAVER) donc son image par une application croissante est meilleurordonnée. Il en résulte que Ω est meilleurordonnée.

Q.E.D.

III-3.4. PROPOSITION.

La classe $\mathcal{D}_\Omega$ est meilleurordonnée pour l'abritement.

Preuve.

Puisque $\mathcal{D}$ est la clôture par ω et ω^* sommes de l'ensemble $\{0,1\}$, la classe $\mathcal{D}_\Omega$ est la clôture par ω et ω^* sommes de $\Omega \cup \{0,1\}$. Si on considère $\mathcal{D}_\Omega$ comme algèbre ordinale avec pour opérations les ω et ω^* sommes, cette algèbre est engendrée par $\Omega \cup \{0,1\}$. Cette classe et l'ensemble formé de deux opérations étant meilleurordonnés, il s'ensuit, d'après le théorème de M.POUZET, cf. I-1.2., que $\mathcal{D}_\Omega$ est meilleurordonnée.

Q.E.D.

Cette proposition peut être déduite aussi du résultat suivant de R.LAVER : "pour toute classe meilleurordonnée X, la classe $X^{\mathcal{D}}$ formée des suites $\vec{x} = (x_i)_{i \in \alpha}$ ou $\alpha \in \mathcal{D}$ et $x_i \in X$, et préordonnée par l'abritement entre suites, est meilleurordonnée".

En effet $\mathcal{D}_\Omega$ est l'image par une surjection croissante de $(\Omega \cup \mathcal{D})^{\mathcal{D}}$ (considérer l'application qui à $(A_i)_{i \in \alpha}$ associe $\sum_{i \in \alpha} A_i$) et puisque $\Omega \cup \mathcal{D}$ est meilleurordonnée, la classe $(\Omega \cup \mathcal{D})^{\mathcal{D}}$ est meilleurordonnée, donc $\mathcal{D}_\Omega$ l'est aussi.

En conclusion de ceci et de la proposition III-3.2. on obtient :

III-3.5. THEOREME.

Soit α un type d'ordre indécomposable dénombrable. Il existe un nombre fini d'ensembles ordonnés $A_{\alpha(1)}, \ldots, A_{\alpha(n)}$ tels que pour tout ensemble ordonné P, on ait :

$\alpha \not\leq \underset{\sim}{J}(P)$ si et seulement si $A_{\alpha(1)} \not\leq P$ et ... et $A_{\alpha(n)} \not\leq P$.

Exemples.

1°). Pour $\alpha = \omega^k$, avec k entier, $k > 1$, le nombre d'ensembles A est exactement k. Il ne peut donc être borné indépendamment de α.

Plus précisément on a :

III-3.6. PROPOSITION.

Soient k avec $1 < k < \omega$ et P un ensemble ordonné ; alors $\omega^k \not\leq \underset{\sim}{J}(P)$ si et seulement si :

$\omega^k \not\leq P$ et $\Omega(\omega^2).\omega^{k-2} \not\leq P$ et ... $\Omega(\omega^i).\omega^{k-i} \not\leq P$ et ... $\Omega(\omega^k) \not\leq P$

Preuve.

Supposons que cette propriété est vraie pour tout k', $k' < k$. Or d'après le lemme III.3.1. si $\omega^k < \underset{\sim}{J}(P)$ alors ou bien $\Omega(\omega^k) < P$ ou bien $\sum_{i<\omega} P_i < P$ avec $\omega^{k-1} < \underset{\sim}{J}(P_i)$. D'après l'hypothèse inductive chaque P_i contient un des ensembles associés à ω^{k-1} ; or ceux-ci sont en nombre k-1, donc une infinité de P_i contient l'un d'eux, soit A, donc P contient $A.\omega$. D'après l'hypothèse inductive il est de la forme annoncée. Reste à voir que les ensembles ω^k, $\Omega(\omega^2).\omega^{k-2}$,... $\Omega(\omega^k)$ sont deux à deux incomparables pour l'abritement : si $\Omega(\omega^i).\omega^{k-i} < \Omega(\omega^j).\omega^{k-j}$ alors puisque $\Omega(\omega^i).\omega^{k-i}$ contient ω^{k-i+1} et $\omega^{k-j+1} + 1 \not\leq \Omega(\omega^j).\omega^{k-j}$ il s'ensuit que $k-i < k-j$, i.e. $j < i$. D'autre part $\underset{\sim}{J}(\Omega(\omega^i))$ contient une chaîne d'idéaux de type ω^i dont aucun n'est majoré alors que $\underset{\sim}{J}(\Omega(\omega^j))$ n'en contient pas de type ω^j+1. Il s'ensuit que $i < j$ et donc $i = j$.

Q.E.D.

2°). Pour $\alpha = \omega^\omega$ il y a exactement trois ensembles :

III-3.7. PROPOSITION.

$\omega^\omega \not< \underset{\sim}{J}(P)$ si et seulement si $\omega^\omega \not<$ (P) et $\sum_{k < \omega} \Omega(\omega^k) \not< P$ et $\Omega(\omega^\omega) \not< P$.

Preuve.

Si $\omega^\omega < \underset{\sim}{J}(P)$ alors ou bien $\Omega(\omega^\omega) < P$ ou bien $\sum_{k < \omega} P_k < P$ où P_k contient soit ω^k soit l'un des $\Omega(\omega^i).\omega^{k-i}$. Si les i sont bornés alors $\omega^\omega < P$, sinon $\sum_{k' < \omega} \Omega(\omega^{k'}) < P$.

Q.E.D.

Problème.

Etendre le théorème aux α dénombrables non indécomposables. Ceux-ci n'étant autres des des sommes finis d'indécomposables, cela paraît possible. La première extension pourrait concerner les α tels que $2\alpha < \alpha$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. P.ERDOS - A.HAJNAL :

On a classification of denumerable order types and an application to the partition calculus,
Fund. Math., tome 21, (1962).

[2]. R.FRAISSE :

Sur la comparaison des types d'ordres,
C.R.A.S., PARIS, A.226, (1948), p.1330-1331.

[3]. A.GLEYZAL :

Order types and structures of orders,
Trans. Amer. Math. Soc. 48, (1940), p.451-466.

[4]. F.HAUSDORFF :

Grundzüge einer theorie der Geordnete Mengen,
Math. Ann., 65, (1908).

[5]. R.LAVER :

On FRAISSE's order type conjecture,
Annals of Math., 93, (1971), p.89-111.

[6]. C.St.J.A.NASH-WILLIAMS :

On well quasi ordering infinite trees,
Proc. Camb. Soc. 6o, (1965), p.697-720.

[7]. M.POUZET :

Sur les prémeilleurordres,
Annales de l'Institut Fourier, tome 22, Fascicule 2, (1972).

[8]. M.POUZET :

Algèbre ordinale prémeilleurordonnée,
C.R.A.S., PARIS, tome 270, (1970), p.300-303.

[9]. J.G.ROSENSTEIN :

Linear ordering,
(1982), Série pure and applied mathematics (ACADEMIC PRESS).