PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

NEJIB ZAGUIA

Chaînes d'idéaux et de sections initiales d'un ensemble ordonné

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 7D
« Chaînes d'idéaux et de sections initiales d'un ensemble ordonné », , p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___7D_1_0>

CHAINES D'IDEAUX ET DE SECTIONS INITIALES D'UN ENSEMBLE ORDONNE

Ce travail est consacré à l'étude, d'un point de vue infinitiste, des problèmes de longueur de chaînes dans les ensembles ordonnés. Il comprend trois parties :

CHAPITRE I - HAUTEUR D'UN ENSEMBLE BIEN FONDE.

Parmi les généralisations de la notion de bon-ordre à l'ordre partiel, une des plus naturelles est celle de *belordre* : un ensemble est dit belordonné s'il est bien fondé et sans antichaîne infinie, ou encore si toutes les extensions linéaires sont bien ordonnées.

D. DE JONGH et R. PARIKH [3] , ont prouvé que parmi les extensions linéaires d'un bel ordre, l'une d'elles a un type d'ordre maximum. Ceci peut se voir comme une propriété de l'ensemble, ordonné par inclusion, des sections initiales d'un bel ordre. En effet on sait, d'après R. BONNET et M. POUZET [2] , que pour toute extension linéaire $\overline{E}$ d'un ensemble ordonné E, l'ensemble $\underset{\sim}{I}(E)$ des sections initiales de $\overline{E}$, est une chaîne maximale de $\underset{\sim}{I}(E)$; et réciproquement qu'à toute chaîne maximale C de $\underset{\sim}{I}(E)$, correspond une extension linéaire $\overline{E}$ de E telle que $C = \underset{\sim}{I}(\overline{E})$. Le théorème, cité au début, exprime donc que $\underset{\sim}{I}(E)$ contient une chaîne de type maximum.

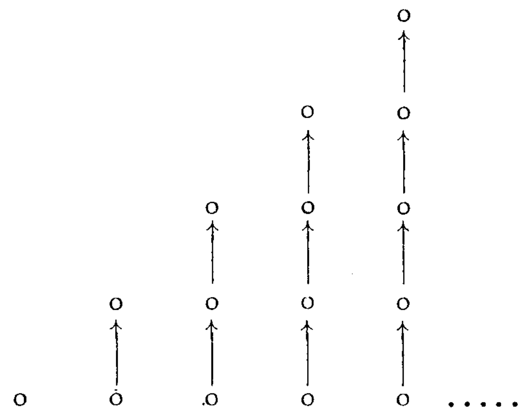
Or E belordonné veut dire que $\underset{\sim}{I}(E)$ est bien fondé, et sur un ensemble bien fondé P, on peut définir la fonction *hauteur* h de P dans la classe des ordinaux inductivement par :

$h(x,P) = \sup\{h(y,P)+1,\ y < x\}$, $\forall\ x \in P$. La fonction hauteur partitionne P en parties disjointes P_α, *les niveaux de hauteur,* avec $P_\alpha = \{x \in P,\ h(x,P) = \alpha\}$. La *hauteur* de P est le plus petit ordinal α, tel que $P_\alpha = \emptyset$, on la note $h(P)$.

Les types d'ordre des chaînes d'un ensemble bien fondé P sont tous inférieurs ou égaux à la hauteur de P. Le théorème de D.DE JONGH et R.PARIKH exprime que l'ensemble $\underset{\sim}{I}(E)$ des sections initiales d'un bel ordre E contient une chaîne dont le type est la hauteur de $\underset{\sim}{I}(E)$.

On pourrait se demander si, en toute généralité, tout ensemble bien fondé P contient une chaîne de type $h(P)$?

C'est un fait bien établi que la réponse est négative. En fait pour tout ordinal α, on peut construire un ensemble bien fondé de hauteur α et dont les chaînes sont toutes finies. Pour $\alpha = \omega$ on a l'exemple suivant :



Dans ce chapitre, nous étudions ce problème lorsque l'ensemble ordonné est un treillis distributif T bien fondé (ce qui inclu le cas du treillis $\underset{\sim}{I}(E)$ formé de sections initiales d'un bel ordre).

Nous prouvons que *si* $h(T)$ *est dénombrable, alors* T *contient* *une chaîne de type* h(T). C'est faux si la hauteur est non dénombrable. Par contre, avec une propriété supplémentaire sur T, le résultat reste valable pour une hauteur quelconque. Il s'applique en particulier au treillis $\underset{\sim}{I}(E)$ d'un bel ordre E, ce qui nous donne avec une nouvelle preuve le résultat de D.DE JONGH et R.PARIKH déjà cité.

Plutôt que d'étudier les cas où il existe une chaîne de type d'ordre égale à la hauteur, on pourrait se demander dans quels cas il existe une chaîne qui passe par tous les niveaux de hauteur. La généralisation du lemme de KOENIG [10] donne une réponse positive lorsque les niveaux de hauteur sont finis. Et donc si $\underset{\sim}{I}(E)$ est belordonné, il existe une telle chaîne. Mais on sait E belordonné n'assure pas que $\underset{\sim}{I}(E)$ est belordonné. On peut donc se demander si, en toute généralité, $\underset{\sim}{I}(E)$ a une chaîne qui passe par tous les niveaux. La réponse est négative. Cela veut dire qu'un bel ordre E n'admet pas nécessairement une extension linéaire de type maximum sur chacune de ses sections initiales.

L'exemple que nous construisons est dénombrable (il n'est évidemment pas un meilleur ordre).

CHAPITRE II - CHAINES D'IDEAUX D'UN ENSEMBLE ORDONNE.

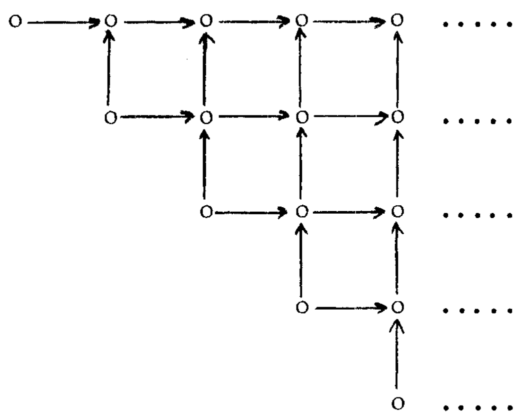
Les types d'ordre des chaînes de l'ensemble $\underset{\sim}{I}(E)$, ordonné par inclusion, des sections initiales d'un ensemble ordonné E, ont été étudiés intensivement par R.BONNET et M.POUZET [2], en raison de leur rapport avec les extensions linéaires de E. Ils ont notamment étudiés les types d'ordres α pour lesquels on a l'équivalence entre $\underset{\sim}{I}(E)$ ne contient pas de chaînes de type α et E ne contient ni de chaînes de type α ni d'antichaîne infinie. (Pour $\alpha = \omega^*$, on retrouve la notion de bel ordre).

Parmi les sections initiales, les idéaux (un idéal J de E, est une section initialle telle que pour tous x et y dans J, il existe z dans J tel que $x \leq z$ et $y \leq z$) jouent un rôle privilégié (e.g. ce sont les éléments irréductibles du treillis $\underset{\sim}{I}(E)$) et apparaissent dans l'étude des diverses structures (e.g. en théorie des relations ; cf. les "âges" de R.FRAISSE).

Les antichaînes de l'ensemble $\underset{\sim}{J}(E)$ des idéaux ordonné par inclusion ont été étudiés par R.BONNET [1], D.DUFFUS, M.POUZET, I.RIVAL [4]. Ici nous étudions les types d'ordres des chaînes d'idéaux.

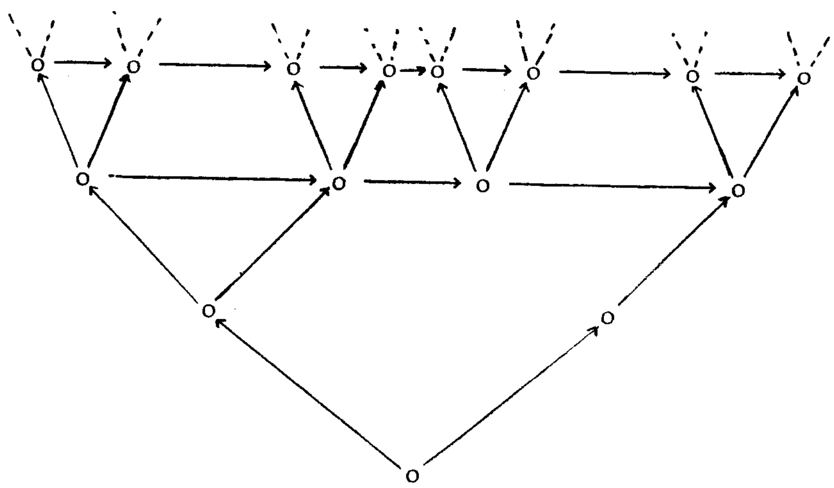
On constate immédiatement que $\underset{\sim}{J}(E)$ ne contient pas de chaînes infinie strictement croissante si et seulement si il en est de même pour E.

Voici deux faits plus significatifs : $\underset{\sim}{J}(E)$ *ne contient pas de chaîne infinie strictement décroissante si et seulement si* E *n'en contient pas ni ne contient de partie isomorphe à l'ensemble ordonné* $\Omega(\omega^*)$ *illustré figure 1.*



(figure 1)

$\underset{\sim}{J}(E)$ ne contient pas de chaînes isomorphes à la chaîne η des rationnels si et seulement si E ne contient ni η ni de partie isomorphe à l'ensemble ordonné $\Omega(\eta)$ (illustré par la figure 2) :



(figure 2)

A partir de ces exemples, il nous a paru naturel de poser en toute généralité le problème suivant : étant donné un type d'ordre de chaîne α, peut-on caractériser par des obstructions les ensembles ordonnés E tels que l'ensemble $\underset{\sim}{J}(E)$ des idéaux de E, ordonné par inclusion, ne contient pas de chaîne de type α ? Nous résolvons positivement ce problème pour α indécomposable dénombrable, ce qui constitue le résultat le plus important de cette thèse :

<u>THEOREME.</u>

> Soit α un type d'ordre indécomposable dénombrable. Il existe un nombre fini d'ensembles ordonnés $A_{\alpha(1)}, \dots, A_{\alpha(n)}$ tel que pour tout ensemble ordonné E, on ait : $\alpha \not\leq \underset{\sim}{J}(E)$ si et seulement si $A_{\alpha(1)} \not\leq E$ et ... et $A_{\alpha(n)} \not\leq E$.

[La notation $A \not\leq B$ signifie que A n'est pas isomorphe à une partie de B].

La preuve se fait en deux étapes : nous construisons pour chaque type d'ordre α dénombrable, un ensemble typique, noté $\Omega(\alpha)$, qui contient une chaîne d'idéaux de type α (mais pas de chaîne de type α). Par exemple les figures 1 et 2 illustrent respectivement les $\Omega(\alpha)$ associés à ω^* et η. Puis nous prouvons qu'un contre-exemple associé à un type α indécomposable dénombrable est soit $\Omega(\alpha)$, soit une ω-somme (ou une ω^*-somme) de contre-exemples associés à des types inférieurs à α.

Le fait que les contre-exemples, pour α indécomposables dénombrables, soient en nombre fini est l'objet de la deuxième partie de la preuve . L'outil essentiel est le meilleur ordre (better-quasi-ordering) introduit par C.St.J.A.NASH-WILLIAMS en 1965 [7]. Nous utilisons les résultats de LAVER [6], concernant les chaînes dispersées, et le résultat de M.POUZET [8] sur les algèbres ordinales meilleur-ordonnées.

CHAPITRE III - DIMENSION DE KRULL DES ENSEMBLES ORDONNES.

Ce chapitre est consacré à l'étude des chaînes de sections initiales à l'aide de la notion de dimension de Krull.

La déviation d'un ensemble ordonné P, dev P, est un ordinal qui mesure combien P dévie de la classe des ensembles bien fondés. C'est une notion introduite par P.GABRIEL et R.RENTSCHLER [5], comme moyen de classement des structures algébriques et notamment des anneaux. On la définit inductivement comme suit :

1). dev $P = 0$, si P est bien fondé.

2). Supposons définis les ensembles ordonnés de déviation inférieure à α alors dev $P = \alpha$ si :

a). dev $P \nless \alpha$

b). pour toute suite décroissante infinie $x_o > x_1 > x_i \;, > x_{i+1} \cdots$ d'éléments de P, dev$[x_{i+1}, x_i] < \alpha$, pour presque tout $i < \omega$.

Seuls les ensembles dispersés (ensembles ordonnés ne contenant pas de sous-chaîne isomorphe à la chaîne des rationnels) ont une déviaviation. Pour des chaînes on a, par exemple, $\mathrm{dev}(\omega) = 0$, $\mathrm{dev}(\omega^*) = 1$, $\mathrm{dev}(\omega + \omega^2)^* = 2$ (la notation C^* désigne l'opposé de l'ordre C). Plus généralement la déviation d'une chaîne C anti-bien ordonnée est le plus grand ordinal β tel que $(\omega^\beta)^*$ est isomorphe à une sous-chaîne de C.

En accord avec J.C.ROBSON [9], la dimension de KRULL de P, $K \dim P$, est définie comme la déviation de l'ensemble $\underset{\sim}{F}(P)$ ordonné par inclusion, des sections finales de P.

Puisque $\underset{\sim}{F}(P)$ est l'opposé de $\underset{\sim}{I}(P)$, les propriétés de $\underset{\sim}{I}(P)$ vues au chapitre I peuvent se traduire à $\underset{\sim}{F}(P)$. Ainsi lorsque $\underset{\sim}{F}(P)$ est anti-bien ordonné, c'est-à-dire P belordonné, il contient une chaîne de type maximum. On en déduit alors que la dimension de KRULL est le maximum des ordinaux β tel que $(\omega^\beta)^* < \underset{\sim}{F}(A)$.

A partir de ce théorème, et à l'aide d'un deuxième résultat de D.DE JONGH et R.PARIKH ([3], p.204), on en déduit que *la dimension de KRULL d'un produit direct de deux bel ordres est la somme hessenbergienne des dimensions de KRULL de ces bel ordres ;* résultat dû à J.C.ROBSON [9] et obtenu par d'autres méthodes.

Pour qu'un ensemble ordonné P ait une dimension de KRULL il faut et il suffit qu'il soit dispersé et sans antichaîne infinie (en effet cette dernière condition équivaut à $\underset{\sim}{F}(P)$ dispersé, cf. R.BONNET, M.POUZET [2]). Dans ce cas P n'a pas nécessairement d'extension linéaire de type maximum, néanmoins nous prouvons qu'il a une extension linéaire $\overline{P}$ de dimension de KRULL maximum, en fait égale à la dimension de KRULL de P.

Au lieu de mesurer combien un ensemble ordonné dévie de la classe des ensembles bien fondés, on pourrait mesurer combien il dévie de la classe des ensembles ordonnés qui ne contiennent aucun type d'ordre d'une famille Γ de types d'ordres de chaînes. Donc, étant donnée une famille Γ de types d'ordres, la déviation par rapport à Γ ou Γ-déviation d'un ensemble ordonné P, dev_Γ P, sera un ordinal défini, par induction, de la même façon que ci-dessus.

La Γ-dimension de KRULL, d'un ensemble ordonné P , K dim P , est définie comme la Γ-déviation de l'ensemble $\underset{\sim}{F}(P)$ des sections finales de P. Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

THEOREME.

Etant donnés , une famille Γ de types d'ordres impartibles dénombrables et P un ensemble ordonné, la Γ-dimension de KRULL de P est le maximum des Γ-dimensions de KRULL des extensions linéaires de P.

[N.B. α est dit impartible, si pour tout partage de α en α_1 et α_2, on a $\alpha < \alpha_1$ ou $\alpha < \alpha_2$].

La preuve de ce théorème utilise une généralisation d'un théorème de partition de B.DUSHNIK - E.W.MILLER dû à E.MILNER et M.POUZET.

Lorsque $\Gamma = \{\omega^*\}$ on retrouve les notions précédentes de déviation et dimension de KRULL et donc le résultat déjà mentionné (noter que sa preuve présente le même niveau de difficultés que le theorème ci-dessus).

Un cas particulièrement intéressant est $\Gamma = \{\omega , \omega^*\}$. La $\{\omega , \omega^*\}$-déviation d'une chaîne dispersée compte le nombre de fois où l'on peut itérer l'"équivalence finie". Elle a aussi une interprétation en termes topologiques :

Pour un ensemble ordonné P, l'ensemble $\underset{\sim}{I}(P)$ des sections initiales de P est, en tant que partie de 2^P, un espace compact totalement discontinu. Or pour qu'il ait une Γ-déviation il doit être disper-

Il se trouve que ceci équivaut à dire, en termes topologiques, qu'il est *clairsemé* (M.POUZET), i.e. chacune de ses parties a un point isolé. On peut donc lui appliquer le procédé de réduction de CANTOR-BENDIXON [ce qui revient à définir pour tout ordinal α, l'espace dérivé $(\underset{\sim}{I}(P))^{(\alpha)}$]. Le rang de $\underset{\sim}{I}(P)$, rg $\underset{\sim}{I}(P)$, est le plus petit ordinal α, tel que :

$$(\underset{\sim}{I}(P))^{(\alpha)} = (\underset{\sim}{I}(P))^{(\alpha+1)}.$$

Pour une chaîne C on obtient alors la relation suivante entre $\{\omega, \omega^*\}$ - deviation et rang topologique : $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} I(C) = \mathrm{rg}\ \underset{\sim}{I}(C)-1$.

<u>CONSEQUENCE.</u>

Si l'ensemble $\underset{\sim}{I}(P)$ des sections initiales d'un ensemble ordonné est clairsemé, alors parmi les chaînes maximales de $\underset{\sim}{I}(P)$ l'une d'elles a un rang topologique maximum.

*****

Les résultats que nous venons de présenter constituent la thèse de 3ème cycle que nous avons soutenue a Lyon le 8 juillet 1983 (Jury : E. Corominas Président, J. Braconnier, R. Fraissé, S. Grigorieff, M. Pouzet, I. Rival, I. Rosenberg). Les résultats ont été obtenus en bonne partie avec la collaboration de M. POUZET. Les résultats du 2ème chapitre font l'objet d'un article en collaboration avec M. POUZET, soumis à la revue ORDER. Ceux du troisième chapitre ont fait l'objet d'une communication à la Conférence sur les Ensembles Ordonnés et leurs Applications (Château de la Tourette, l'ARBRESLE, Juillet 1982) et seront publiés dans les actes (J. of Discrete Math, 1984).

*****

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. R.BONNET

On the Cardinality of the Set of Initial Intervals (Coll. Mat-. Soc. J.Bolayi), *Infinite and Finite Sets* ; Kesztheley (1975) A.M.S. Pub. p.189-198.

[2]. R.BONNET et M.POUZET

Linear Extensions of Ordered Sets. Ordered Sets, I.RIVAL (ed.), p.125-170, (1982), D. Reidel, Dordrecht.

[3]. D.H.J.DE JONGH et R.PARIKH

Well Partial Ordering and Hierarchies, Indagationes Mathematicae (1977), Vol.39, p.195-206.

[4]. D.DUFFUS - M.POUZET et I.RIVAL

Complete Ordered Sets with no Infinite Antichains, Discrete Mathematics, 35 (1981), p.39-52.

[5]. P.GABRIEL et R. RENTSCHLER

Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés, C.R.A.S. Paris, 265 (1967), p.712-715.

[6]. R.LAVER

On Fraissé's Order Type Conjecture, thèse Univ. de Californie (Berkeley), U.S.A. ou Annals of Math., Vol.93, n°1, (1971), p.89-111.

[7]. C.St.J.A.NASH-WILLIAMS

On Well Quasi Ordering Infinite Trees, Proc. Camb. Philos. Soc. 61 (1965), p.697-720.

[8]. M.POUZET

Algèbre ordinale prémeilleur ordonnée, C.R.A.S., Paris, 270, (1970), p.300-303.

[9]. J.C.ROBSON

Well Quasi-Ordered Sets and Ideals in Free Semi-Groups and Algebras, Journal of Algebra, 55, (1978), p.521-535.

[10]. E.S.WOLK

Partially Well Ordered Sets and Partial Ordinals, Fund. Math. 60, (1967), p.175-186.