GILBERT ARSAC

**Le groupe de Poincaré et ses représentations. II. (algèbre de Lie, algèbre enveloppante)**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1983, fascicule 5C
« Le groupe de Poincaré et ses représentations. II. (Algèbre de Lie, Algèbre enveloppante) », , p. 1-117
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___5C_A1_0>

# Chapitre 7 : Groupes de Lie.

1) Rappels. (Les notations concernant les variétés sont précisées p. 117).

(1.1) DEFINITION. - *Un groupe de Lie est une variété* $G$*, de classe* $C^\infty$*, munie d'une loi de groupe telle que l'application* $(x,y) \mapsto x^{-1}y$ *soit une application* $C^\infty$ *de* $G \times G$ *dans* $G$.

EXEMPLE : Pour tout espace vectoriel de dimension finie $E$ sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $GL(E)$ est un groupe de Lie, de dimension $n^2$ si $K = \mathbb{R}$, $(2n)^2$ si $K = \mathbb{C}$. En effet, $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ (cf. pour plus de détails, §5) .

REMARQUES :

1) En réalité, on peut remplacer dans la définition, $C^\infty$ par $C^\omega$ ; c'est-à-dire qu'un groupe de Lie est automatiquement muni d'une structure de variété analytique. On dira plus précisément que $G$ est un groupe analytique si $G$ est un groupe de Lie connexe.

2) Même si $G$ n'est pas connexe, sa dimension est bien définie car, d'après (1.1), les translations, à gauche ou à droite, sont des difféomorphismes de $G$ : la translation $\gamma(a) : x \mapsto ax$ transforme $e$ en $a$, donc son application tangente en $e$, $\gamma(a)_*^e$ est un isomorphisme de l'espace tangent en $e$, $T_e(G)$, sur l'espace tangent en $a$, $T_a(G)$.

3) Les composantes connexes de $G$, en particulier la composante neutre, sont ouvertes et fermées dans $G$ car, pour tout $x \in G$, on peut, au moyen d'une carte, trouver un ouvert connexe contenant $x$, c'est-à-dire que $G$ est localement connexe.

## ALGEBRE DE LIE D'UN GROUPE DE LIE.

Rappelons qu'un champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur $G$ est la donnée, pour tout $x \in G$, d'un vecteur tangent en $x$, $\tilde{X}_x$.

On dira que ce champ de vecteurs est $C^\infty$ (ou $C^\omega$) s'il vérifie la condition suivante : pour toute carte $(U, \varphi)$ de $G$, les composantes en $x \in U$ de $\tilde{X}_x$ sur la base de $T_x(G)$ associée à la carte, sont des fonctions $C^\infty$ (resp. $C^\omega$) de $x$.

<u>EXEMPLE</u> : Soit $X \in T_e(G)$, alors, pour tout $x \in G$, $\gamma(x)^e_*(X) \in T_x(G)$. En posant $\tilde{X}_x = \gamma(x)^e_*(X)$ on définit un champ de vecteurs sur $G$ dont on vérifie qu'il est $C^\infty$, et même $C^\omega$, par simple application de la définition.

On va maintenant caractériser les champs de vecteurs introduits dans l'exemple précédent :

(1.2) <u>DEFINITION</u>. - *On dit qu'un champ de vecteurs* $\tilde{X}$ *sur* $G$ *est invariant par translation si, pour tout* $(x,y) \in G \times G$, on a :

$$\gamma(x)^y_* (\tilde{X}_y) = \tilde{X}_{xy}.$$

(1.3) <u>PROPOSITION</u>. - *Les champs de vecteurs invariants par translation sont exactement les champs de vecteurs* $\tilde{X}$ *définis, à partir de la donnée d'un vecteur* $X \in T_e(G)$, *par la formule :*

$$(1.4) \qquad \tilde{X}_x = \gamma(x)^e_*(X).$$

En particulier, ces champs sont $C^\infty$, et $C^\omega$.

<u>DEMONSTRATION</u>

1) Si $\tilde{X}$ est invariant par translation, la formule de définition montre (en faisant $y = e$) que :

$$\tilde{X}_x = \gamma(x)^e_* \, (\tilde{X}_e)$$

donc $\tilde{X}$ est bien du type considéré avec $X = \tilde{X}_e$.

2) Réciproquement, supposons $\tilde{X}$ défini par la formule (1.4). On a :

$$\gamma(x)^y_* \, (\tilde{X}_y) = \gamma(x)^y_*[\gamma(y)^e_*(X)] = [\gamma(x)^y_* \circ \gamma(y)^e_*] \, (X)$$
$$= [\gamma(x) \circ \gamma(y)]^e_*(X) = \gamma(xy)^e_* \, (X).$$

c.q.f.d.

L'ensemble des champs de vecteurs $C^\infty$ (ou $C^\omega$) sur $G$ constitue un espace vectoriel réel et même une algèbre de Lie lorsqu'on définit le crochet $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ de deux champs de vecteurs comme on va l'expliquer ci-dessous.

Tout d'abord, pour toute $f$ appartenant à l'ensemble $C^\infty(U)$ des fonctions $C^\infty$ sur un ouvert $U$ de $G$, on définit $\tilde{X}f$ par :

$$(\tilde{X}f)(x) = \tilde{X}_x(f).$$

Du fait que $\tilde{X}$ est $C^{\infty}$, il résulte que $\tilde{X}f \in C^{\infty}(U)$, on peut donc calculer $\tilde{Y}\tilde{X}f$.

Soit $Z(f) = \tilde{X}\tilde{Y}f - \tilde{Y}\tilde{X}f$. On vérifie que :

$$Z(fg) = Z(f)g + fZ(g).$$

Donc, l'application $\tilde{Z}_x$ qui, à toute f $C^{\infty}$ au voisinage d'un point $x \in G$ associe $Z(f)(x)$ est linéaire et vérifie

$$\tilde{Z}_x(fg) = (\tilde{Z}_x(f))g(x) + f(x)\,\tilde{Z}_x(g).$$

Elle définit donc un vecteur tangent en x, $\tilde{Z}_x$. On a ainsi défini un champ de vecteurs $\tilde{Z}$, noté $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$, dont on peut vérifier qu'il est $C^{\infty}$. Le crochet $(\tilde{X},\tilde{Y}) \mapsto [\tilde{X},\tilde{Y}]$ définit sur l'ensemble des champs de vecteurs $C^{\infty}$ (ou $C^{\omega}$) une structure d'algèbre de Lie.

On retiendra les formules :

$$[\tilde{X},\tilde{Y}]_x\,(f) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]\,f(x) = (\tilde{X}\tilde{Y}f - \tilde{Y}\tilde{X}f)(x).$$

(1.5) <u>PROPOSITION</u>. - *L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche constitue une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs* $C^{\infty}$ *(ou* $C^{\omega}$*) sur* G.

<u>DEMONSTRATION</u> : elle résulte immédiatement du :

(1.6) <u>LEMME</u>. - *Pour qu'un champ de vecteurs* $\tilde{X}$ *sur* G *soit invariant par translation à gauche, il faut et il suffit que, pour tout* $x \in G$, *et toute* $f \in C^{\infty}(U)$ *où* G *est un ouvert quelconque de* G, *on ait :*

$$\gamma(x)[\tilde{X}(f)] = \tilde{X}[\gamma(x)f].$$

PREUVE : En effet, on a, pour tout $(x,y) \in G \times G$

$$\tilde{X}[\gamma(x)f](y) = \tilde{X}_y[\gamma(x)f] = \tilde{X}_y[f\circ\gamma(x^{-1})] = (\gamma(x^{-1})_*^y[\tilde{X}_y])(f)$$

et $$\gamma(x)[\tilde{X}f](y) = (\tilde{X}f)(x^{-1}y) = \tilde{X}_{x^{-1}y}(f).$$

Donc, on aura l'égalité annoncée, pour tout $x$ et toute $f$, si et seulement si, on a, pour tout $x$ et tout $y$ dans $G$ :

$$\tilde{X}_{x^{-1}y} = \gamma(x^{-1})_*^y[\tilde{X}_y]$$

c'est-à-dire ssi $\tilde{X}$ est invariant à gauche.

c.q.f.d.

REMARQUE : Ainsi, $\tilde{X}$ est invariant à gauche ssi il commute aux translations à gauche considérées comme opérateurs sur les fonctions.

(1.7) DEFINITION. - *L'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur* $G$, *invariants par translation à gauche, est appelée algèbre de Lie de* $G$ *et noté* $L(G)$.

(1.8) D'après la proposition (1.3), $L(G)$ est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel, à $T_e(G)$. En effet, les deux applications : $\tilde{X} \mapsto \tilde{X}_e$ de $L(G)$ dans $T_e(G)$ et $X \mapsto \tilde{X}$ de $T_e(G)$ dans $L(G)$ (où $\tilde{X}$ est défini par (1.4)) sont réciproques l'une de l'autre, et évidemment linéaires.

Nous noterons $\underline{G}$ l'algèbre de Lie obtenue en transportant la structure d'algèbre de Lie de $L(G)$ sur $T_e(G)$ et nous dirons aussi, par abus de langage, que $\underline{G}$ est l'algèbre de Lie de $G$.

Soit $(X,Y) \in \underline{G} \times \underline{G}$, leur crochet sera donc défini par :

$$[X,Y] = [\tilde{X},\tilde{Y}]_e .$$

Soit $f$ $C^\infty$ au voisinage de $e$, on a donc :

$$[X,Y](f) = \tilde{X}_e(\tilde{Y}f) - \tilde{Y}_e(\tilde{X}f).$$

Mais $\tilde{X}_e = X$, et $(\tilde{Y}f)(x) = \tilde{Y}_x(f) = [\gamma(x)^e_*(Y)](f) = Y[f\circ\gamma(x)]$.

D'où : $\tilde{X}_e(\tilde{Y}f) = X(x \mapsto Y(f\circ\gamma(x)))$

$= X(x \mapsto Y(t \mapsto f(xt)))$.

D'où, en notant $X_x(f(x))$ l'action de $X$ sur $f$ :

$$(1.9) \qquad [X,Y](f) = X_x(Y_y(f(xy))) - Y_x(X_y(f(xy))).$$

Notons en outre que, puisque l'algèbre de Lie de $G$ s'identifie à $\underline{G}$, elle est de dimension finie, égale à celle du groupe.

## LE FONCTEUR L.

(1.10) Soit $G$ et $H$ deux groupes de Lie et $u : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie (c'est-à-dire un morphisme de groupe $C^\infty$). L'application linéaire $u^e_* : \underline{G} \to \underline{H}$ définit, par transport de structure, une application linéaire :

$$L(u) : L(G) \to L(H).$$

(1.11) PROPOSITION. - *Les applications* $L(u)$ *et* $u^e_*$ *sont des morphismes d'algèbres de Lie.*

DEMONSTRATION : $u_*^e\,[X,Y]\;(f) = [X,Y]\;(f\circ u)$

$$[X,Y](f\circ u) = X_x[Y_y(f(u(xy)))] - Y_x[X_y(f(u(xy)))]$$

et
$$X_x[Y_y(f(u(xy)))] = X_x[Y_y(f(u(x)u(y)))] = u_*^e(X)_\xi[Y_y(f(\xi u(y)))]$$
$$= u_*^e(X)_\xi\;[u_*^e(Y)_\eta\;\;(f(\xi\eta))]$$

d'où

$$u_*^e([X,Y])(f) = u_*^e(X)_\xi[u_*^e(Y)_\eta\;\; f(\xi\eta)] - u_*^e(Y)_\xi[u_*^e(X)_\eta\;\; f(\xi\eta)]$$

c'est-à-dire

$$u_*^e([X,Y]) = [u_*^e(X),\; u_*^e(Y)]$$

c.q.f.d.

(1.1.2) REMARQUE. - On peut démontrer que, pour que le morphisme de groupes $u : G \to H$ soit $C^\infty$, il suffit qu'il soit continu ; il est alors, en fait, $C^\omega$.

## L'APPLICATION EXPONENTIELLE.

Soit $X \in \underline{G} = T_e(G)$ ; on sait, du simple fait que $G$ est une variété, que l'on peut trouver un chemin de classe $C^1$, c'est-à-dire une application $\Gamma$ de classe $C^1$ d'un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$, contenant $0$, dans $G$ tel que :

$\Gamma(o) = e$ et $\Gamma'(o) = X$, où $\Gamma'(o) = \Gamma_*^o(\frac{d}{dt}\big|_{t=o})$, c'est-à-dire que, pour toute $f$ $C^\infty$ autour de $e$ :

$$X(f) = \frac{d}{dt}\,[f(\Gamma(t))]_{t=o}.$$

Du fait que $G$ est un groupe de Lie, on va obtenir en fait un résultat plus précis :

(1.13) DEFINITION. - *On appelle sous-groupe à un paramètre du groupe de Lie* $G$, *tout morphisme de groupes de Lie de* $\mathbb{R}$ *dans* $G$.

En utilisant une carte de $G$ en $e$ et la théorie des équations différentielles, on démontre :

(1.14) THEOREME. - *Pour tout* $X \in \underline{G}$, *il existe un unique sous-groupe à un paramètre* $\Gamma_X$ *tel que* $X = \Gamma'_X(o)$.

(1.15) DEFINITION. - *Soit* $X \in \underline{G}$, *soit* $\Gamma_X$ *le sous-groupe à un paramètre associé à* $X$, *on pose :*

$$\exp(X) = \Gamma_X(1).$$

On définit ainsi une application $\exp : \underline{G} \to G$, dite application exponentielle :

(1.16) PROPOSITION (mêmes notations). - *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\Gamma_X(t) = \exp(tX).$$

DEMONSTRATION. - Tout revient, par définition, à prouver que :

$$\Gamma_{tX}(1) = \Gamma_X(t).$$

Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Gamma_{tX}(u) = \Gamma_X(tu).$$

Or $u \mapsto \Gamma_X(tu)$ est évidemment un sous-groupe à un paramètre de $G$ et, si $f$ est $C^\infty$ au voisinage de $e$, on a, d'après la règle de dérivation d'une fonction composée :

$$\frac{d}{du} f(\Gamma_X(tu))_{u=o} = t \frac{d}{du} f(\Gamma_X(u))_{u=o} = t(Xf)$$

donc, le vecteur tangent associé à $u \mapsto \Gamma_X(tu)$ est $tX$ c'est-à-dire que :

$$\Gamma_{tX}(u) = \Gamma_X(tu).$$

c.q.f.d.

REMARQUE : On retiendra les formules :

(1.17) $X(f) = \frac{d}{dt}(f(\exp tX))_{t=o}$ qui exprime que $\Gamma_X(t) = \exp(tX)$ ;

(1.18) $(\tilde{X}f)(x) = \frac{d}{dt}[f(x \exp tX)]_{t=o}$ qui exprime que $\tilde{X}_x = \gamma(x)_*^e(X)$ ;

(1.19) $\exp(t+s)X = \exp(tX)\exp(sX)$ qui exprime que $t \mapsto \exp tX$ est un sous-groupe à paramètre. Cette formule implique que $\exp tX$ et $\exp sX$ commutent.

(1.20) THEOREME. - *Pour tout morphisme de groupes de Lie* $u : G \to H$, *le diagramme ci-dessous est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] & H \\ \underline{G} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "u_*^e"] & \underline{H} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

DEMONSTRATION. - Soit $X \in \underline{G}$. Par définition de $u_*^e$, on a :

$$u_*^e(X)f = X(f \circ u) = \frac{d}{dt}\,(f(u(\exp tX))_{t=o}.$$

Or $t \mapsto u(\exp tX)$ est évidemment un sous-groupe à un paramètre de H. D'après l'égalité précédente, il est associé à $u_*^e(X)$ c'est-à-dire que l'on a, pour tout $t$ :

$$u(\exp tX) = \exp(t\, u_*^e(X)).$$

c.q.f.d.

REMARQUE. - Ce théorème signifie que la bijection de $\underline{G}$ sur l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ des sous-groupes à un paramètre de G transforme $u_*^e$ en application :

$$g \mapsto u \circ g \text{ de } \mathrm{Hom}(\mathbb{R},G) \text{ dans } \mathrm{Hom}(\mathbb{R},H).$$

## 2) Opérateurs différentiels et algèbre de Lie.

Soit $\tilde{X} \in L(G)$ ; soit $C^\infty(G)$ l'espace des fonctions $C^\infty$ sur G, à valeurs complexes. L'application $f \mapsto \tilde{X}f$ est une application linéaire de $C^\infty(G)$ dans lui-même, telle que $\mathrm{supp}(\tilde{X}f) \subset \mathrm{supp}\, f$. On peut démontrer qu'il résulte des propriétés ci-dessus que $f \mapsto \tilde{X}f$ est un opérateur différentiel sur G, ce qui se vérifie, plus facilement, en remarquant qu'il s'agit d'une application linéaire de $C^\infty(G)$ dans lui-même qui "se lit" dans toute carte $(U,\varphi)$ de G comme un opérateur différentiel à coefficients $C^\infty$ dans l'ouvert $U' = \varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$.

Par définition un opérateur différentiel dans $U'$ est une application linéaire $P$ de $C^{\infty}(U')$ dans lui-même : $u \mapsto Pu = \sum_{\alpha} a^{\alpha} D^{\alpha}u$ où les $\alpha$ sont des multi-indices et les $a^{\alpha}$ une famille de fonctions $C^{\infty}$ sur $U'$ qui, sur chaque compact de $U'$, sont toutes nulles sauf un nombre fini : cf, par ex. HÖRMANDER : linear partial differential operators, Springer 1964, page 29.

Dire que $f \mapsto \tilde{X}f$ "se lit" suivant $P$, c'est dire que, si $\operatorname{supp} v \subset U$, on a :

$$\tilde{X}(v) = P(v \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi ).$$

Dans le cas de $\tilde{X}$, l'opérateur $P$ sera toujours de la forme :

$$u \mapsto \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

c'est-à-dire que $f \mapsto \tilde{X}f$ est un opérateur différentiel du premier ordre, sans terme de degré zéro.

Cet opérateur différentiel est en outre invariant par translation à gauche, car, d'après le lemme (1.6) on a, pour tout $x \in G$ et toute $f \in C^{\infty}(G)$ :

$$\gamma(x)[\tilde{X}f] = \tilde{X}[\gamma(x)f].$$

Soit $D(G)$ l'algèbre engendrée, dans $\mathcal{L}(C^{\infty}(G))$, par les $\tilde{X}$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients complexes de produits d'opérateurs $\tilde{X}$. On voit, par récurrence, que les $T \in D(G)$ sont encore des opérateurs différentiels invariants par translation à gauche et on démontre :

(2.1) THEOREME. - *Tout opérateur différentiel invariant par translation à gauche sur* G *appartient à* D(G).

Ainsi, D(G) est l'algèbre associative des opérateurs différentiels sur G, invariants par translation à gauche.

En fait, D(G) possède, par rapport à l'algèbre de Lie L(G), une propriété tout à fait fondamentale : c'est l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie $L(G)^{\mathbb{C}}$ complexifiée de L(G) : ceci signifie qu'il existe un morphisme d'algèbre de Lie $i$ (ici, l'injection canonique) de $L(G)^{\mathbb{C}}$ dans D(G) et que, pour tout morphisme d'algèbre de Lie $\psi$, de $L(G)^{\mathbb{C}}$ dans une $\mathbb{C}$-algèbre associative A, il y a une factorisation unique $\psi = \psi_1 \circ i$ où $\psi_1 : D(G) \to A$ est un morphisme d'algèbres associatives :

$$\begin{tikzcd} L(G)^{\mathbb{C}} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i"] & A \\ D(G) \arrow[ur, "\psi_1"] & \end{tikzcd}$$

## 3) Distributions et algèbre de Lie.

(3.1) DEFINITIONS. - *On notera* $\mathcal{D}(G)$ *l'espace des fonctions différentiables à support compact dans* G, *à valeurs complexes. Pour tout compact* K, $\mathcal{D}_K(G)$ *désignera l'espace des* $f \in \mathcal{D}(G)$ *dont le support est contenu dans* K. *Lorsque* K *est contenu dans le domaine* U *d'une carte* $(U, \varphi)$ *de* G, *l'espace* $\mathcal{D}_K(G)$ *est, par définition, en bijection avec* $\mathcal{D}_{\varphi(K)}(\mathbb{R}^n)$ *par l'application* $f \mapsto f \circ \varphi^{-1}$. *Or l'espace*

*$\mathcal{D}_{\varphi(K)}(\mathbb{R}^n)$ peut être muni de la topologie de la convergence uniforme des fonctions ainsi que de toutes les dérivées. Nous supposerons, dans la suite, $\mathcal{D}_K(G)$ muni de la topologie obtenue par transport de structure à partir de celle-ci ; on pourrait montrer que cette topologie est en fait indépendante de la carte $(U, \varphi)$, pourvu que $K \subset U$.*

*On appellera distribution sur $G$ toute forme linéaire $T$ sur $\mathcal{D}(G)$ telle que sa restriction à tous les $\mathcal{D}_K$ dont le domaine est contenu dans une carte soit continue. (Il suffit de le vérifier pour les cartes d'un atlas).*

(3.2) EXEMPLES

1) Toute mesure $\mu$ définit une forme linéaire sur $\mathcal{K}(G)$ dont la restriction à $\mathcal{D}(G)$ est évidemment une distribution.

2) Tout $X \in \underline{G}$ définit une distribution. De plus, cette distribution a son support réduit à $\{e\}$ car, si $e \notin \text{supp } f$, on a évidemment $X(f) = o$.

(3.3) Soit $T_1$ et $T_2$ deux distributions. Par analogie avec le produit de convolution de deux mesures, on définit $T_1 * T_2$ par :

$$\langle f, T_1 * T_2 \rangle = \langle f(xy), (T_1 \otimes T_2)(x,y) \rangle$$

où $T_1 \otimes T_2$ désigne la distribution produit, définie sur $G \times G$, de $T_1$ et de $T_2$. Cette définition a un sens quand $T_1$ ou $T_2$ est à support compact.
En particulier, si $G$ est compact, elle a toujours un sens. On montre enfin que

l'on peut appliquer la règle de Fubini

$$\langle f, T_1 * T_2 \rangle = \langle\langle f(xy),\ T_1(x)\rangle,\ T_2(y)\rangle$$
$$= \langle\langle f(xy),\ T_2(y)\rangle,\ T_1(x)\rangle.$$

Il est commode d'adopter la notation des physiciens, c'est-à-dire d'écrire $\int f(x)\, dT(x)$ au lieu de $\langle T, f\rangle$, cette notation se manie comme l'intégrale ordinaire en ce qui concerne la linéarité et l'application formelle du théorème de Fubini, mais non en ce qui concerne la continuité.

EXEMPLES

1) Remarquons que toute fonction $f$ localement intégrable définit une mesure, donc a fortiori une distribution dite, dans ce cas, régulière, et qui est la mesure $fdx$ de densité $f$ par rapport à la mesure de Haar à gauche du groupe, supposée fixée. Nous noterons, abusivement, $f$ cette distribution. Soit $T$ une distribution à support compact, calculons $T * f$ et $f * T$ ; poue toute $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, on a :

$$\langle \varphi, T*f\rangle = \int\int \varphi(xy)\, dT(x)\, d[f(y)dy] = \int dT(x) \int \varphi(xy) f(y)\, dy$$
$$= \int dT(x) \int \varphi(y) f(x^{-1}y)\, dy = \int \varphi(y)\, dy \int f(x^{-1}y)\, dT(x).$$

Ce calcul, ici en partie formel, peut être justifié ; il montre que $T*f$ est définie par la densité :

$$(T*f)(s) = \int f(t^{-1}s)\, dT(t) = \langle f(t^{-1}s),\ T(t)\rangle$$

cette dernière notation étant une abréviation pour $\langle t \mapsto f(t^{-1}s), T\rangle$.

On trouve de même que, en notant $\Delta$ le module de $G$ :

$$(f*T)(s) = \int f(st^{-1})\ \Delta(t^{-1})\ dT(t) = \langle f(st^{-1})\ \Delta(t^{-1}), T(s)\rangle \ .$$

Par exemple, si $X \in \underline{G}$ :

$$\begin{aligned}(f*X)(s) &= \frac{d}{dt}\,(f(s\ \exp\ (-tX))\ \Delta(\exp - tX))_{t=o} \\ &= -\ (\tilde{X}f)(s) + f(s)\ \frac{d}{dt}\,(\Delta(\exp - tX))\Big|_{t=o}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $f*X = -\ \tilde{X}f + kf$ où $k = \frac{d}{dt}\,(\Delta(\exp\ (-tX)))_{t=o}$ .

Si $G$ est unimodulaire, on a donc $f*X = -\ \tilde{X}f$, mais sinon, la constante $k$ n'est pas nulle pour tout $X$ et dans ce cas, $f \mapsto f*X$ n'est pas défini par un champ de vecteurs sur $G$ puisque c'est un opérateur différentiel comportant des termes "d'ordre o". On verra plus loin que, une fois introduite la représentation adjointe, on peut calculer la valeur de $k$ : on trouve $k = -\ tr(adX)$.

2) Soit $X \in \underline{G}$, $Y \in \underline{G}$, on a :

$$\langle f, X*Y\rangle = \langle X_x, \langle Y_y,\ f(xy)\rangle\rangle$$

d'où
$$[X,Y] = X*Y - Y*X.$$

Soit $\mathscr{D}'_{\{e\}}(G)$ l'ensemble des distributions à support réduit à $\{e\}$ : c'est une algèbre de convolution, car si $\text{supp}\ T_1 \subset \{e\}$ et $\text{supp}\ T_2 \subset \{e\}$, il en est de même de $\text{supp}\ (T_1 * T_2)$. Cette algèbre est isomorphe à $D(G)$ ; pour le voir, il vaut mieux, toutefois, examiner d'abord les opérateurs différentiels invariants par translations à droite.

## 4) Ecritures "à droite". Réalisations de l'algèbre enveloppante.

Si l'on privilégie les translations à droite au lieu des translations à gauche sur le groupe G, on associe à chaque $X \in T_e(G)$ le champ de vecteurs invariant par translations à droite $\tilde{X}^d$ défini par :

$$\tilde{X}^d_x = \delta(x^{-1})^e_* (X) \quad \text{où} \quad \delta(x^{-1})(t) = tx$$

d'où $\quad (\tilde{X}^d f)(s) = \frac{d}{dt} [f((\exp tX)s)]_{t=o} = -(X*f)(s)$

c-à-d : $\quad \tilde{X}^d(f) = -(X*f) = -(\tilde{X}(\check{f}))\check{}$ .

On en déduit : $\quad [\tilde{X}^d, \tilde{Y}^d](f) = ([\tilde{X},\tilde{Y}](\check{f}))\check{}$

d'où $\quad [\tilde{X}^d,\tilde{Y}^d](f)(e) = [\tilde{X},\tilde{Y}](\check{f})(e) = [X,Y](\check{f}) = -[X,Y](f)$.

Ainsi, le crochet d'algèbre de Lie défini sur $\underline{G}$ par transport de structure à partir de l'algèbre de Lie des $\tilde{X}^d$ est donné par :

$$(4.1) \qquad [X,Y]^d = -[X,Y].$$

Il s'agit donc de la structure d'algèbre de Lie opposée à la structure initiale.

Les $\tilde{X}^d$ engendrent, dans $\mathcal{L}(C^\infty(G))$, l'algèbre $D^d(G)$ des opérateurs différentiels invariants par translation à droite, évidemment également isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie des $\tilde{X}^d$. Cette algèbre $D^d(G)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{D}'_{\{e\}}(G)$ des distributions à support réduit à $\{e\}$, (qui a, elle, un caractère intrinsèque), par l'application qui, à $D \in D^d(G)$

associe $T_D \in \mathscr{D}'_{\{e\}}(G)$ définie par :

$$<f,T_D> = (D\check{f})(e)$$

dont la réciproque est l'application qui, à $T \in \mathscr{D}'_{\{e\}}(G)$ associe l'opérateur :

$$f \mapsto T*f.$$

Ainsi, $D(G)$, $D^d(G)$ et $\mathscr{D}'_{\{e\}}(G)$ sont trois réalisations de l'algèbre enveloppante de $\underline{G}$ ou $L(G)$. Précisons les différents isomorphismes entre ces algèbres :

- Le plus simple est celui de $\mathscr{D}'_e(G)$ sur $D^d(G)$ : à toute $T \in \mathscr{D}'_e(G)$, on associe l'opérateur différentiel : $f \mapsto T * f$, invariant par translation à droite. Sa restriction à $\underline{G}$ est l'application $X \to -\tilde{X}^d$ et l'on a :

$$(X*f)(s) = \frac{d}{dt} f((\exp-tX)s)\Big|_{t=o}.$$

Remarquons maintenant que $G$ opère à gauche sur l'ensemble de tous les opérateurs différentiels $T$ sur $G$ par :

$$(s,T) \to \gamma(s)T \quad \text{où} \quad (\gamma(s)T)(f) = \gamma(s)T[\gamma(s^{-1})f]$$

(translation à gauche) et par :

$$(s,T) \to \delta(s)T \quad \text{où} \quad (\delta(s)T)(f) = \delta(s)T(\delta(s^{-1})f)$$

(translation à droite). Avec ces définitions, on trouve que $D(G)$ est bien l'ensemble des opérateurs différentiels tels que $\gamma(s)T = T$, alors que $D^d(G)$ est celui des opérateurs différentiels tels que $\delta(s)T = T$. A partir de cette situation, il est facile de trouver un isomorphisme entre $D(G)$ et $D^d(G)$ :

il suffit de définir $\check{T}$ pour tout opérateur différentiel $T$. Pour cela, on pose :

$$\check{T}(f) = \overset{\vee}{\widehat{T(\check{f})}}$$

et il est immédiat que $T \mapsto \check{T}$ est une involution qui échange $D(G)$ et $D^d(G)$.

- On en déduit l'isomorphisme de $\mathscr{D}'_e(G)$ qur $D(G)$ : à toute $T \in \mathscr{D}'_e(G)$, on associe $f \mapsto \overset{\vee}{\widehat{T*\check{f}}}$, dont la restriction à $\underline{G}$ est $X \mapsto \tilde{X}$ (c'est donc bien l'injection canonique quand on identifie $\underline{G}$ à $L(G)$ ).

- Les isomorphismes réciproques sont faciles à préciser :

$D^d(G) \to \mathscr{D}'_e(G)$ : à $T \in D^d(G)$, on associe $f \mapsto (D\check{f})(e)$

$D(G) \to \mathscr{D}'_e(G)$ : à $T \in D(G)$, on associe $f \mapsto (Df)(e)$.

<u>REMARQUES</u> :

1) On prendra garde au fait suivant : l'application "naturelle" de $\mathscr{D}'_{\{e\}}(G)$ dans $D(G)$ qui, à $T \in \mathscr{D}'_e(G)$, associe $U_T : f \mapsto f*T$ n'est pas un homomorphisme d'algèbres : on a en effet :

$$U_{T*T'} = U_{T'}\, U_T.$$

C'est donc seulement un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, on a vu que, si $X \in \underline{G}$, $U_X$ n'est pas toujours un champ de vecteurs si $G$ n'est pas unimodulaire.

2) Evidemment, la propriété universelle caractérisant l'algèbre enveloppante est vraie pour $D(G)$, $D^d(G)$ et $\mathscr{D}'_e(G)$ à condition de considérer

chaque fois le morphisme correspondant de $\underline{G}^{\mathbb{C}}$ dans $D(G)$ ou $D^d(G)$ ou $\mathscr{D}'_e(G)$. Concrètement, on a :

a) $\underline{G} \subset \mathscr{D}'_e(G)$. Donc $\underline{G}^{\mathbb{C}}$ s'identifie à l'espace vectoriel complexe $\underline{G} \oplus i\underline{G}$ engendré par $\underline{G}$ dans $\mathscr{D}'_e(G)$ et le morphisme est l'injection canonique.

b) Dans le cas de $D^d(G)$, le morphisme associe à tout $X \in \underline{G}$ l'opérateur différentiel :

$$f \mapsto X*f$$

et $\underline{G}^{\mathbb{C}}$ peut être identifiée à l'espace vectoriel complexe engendré, dans $D^d(G)$, par ces opérateurs ;

c) Dans le cas de $D(G)$, le morphisme est l'application $X \mapsto \tilde{X}$ et $\underline{G}^{\mathbb{C}}$ s'identifie à $L(\underline{G})^{\mathbb{C}}$, l'espace vectoriel complexe $L(G) \oplus iL(G)$.

## 5) Exemples de groupes de Lie.

L'exemple le plus simple est évidemment fourni par $G = \mathbb{R}^n$ ou, plus généralement, par un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que, d'une manière générale, si $V$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et si $v \in V$, l'espace tangent $T_v(V)$ est canoniquement isomorphe à $V$ de la façon suivante : tout $x \in V$ définit le vecteur tangent $X_x \in T_v(V)$ qui associe à toute fonction $f$ $C^\infty$ autour de $v$, le nombre :

$$(5.1) \qquad X_x(f) = \frac{d}{dt}[f(v+tx)]_{t=o}$$

(dérivée dans la direction de $x$).

Si l'on applique cette formule à une forme linéaire sur $V$ (qui est évidemment $C^\infty$ !) on trouve en particulier :

$$X_x(f) = \frac{d}{dt}[f(v)+tf(x)]_{t=o} = f(x) = (x,f).$$

Enfin, si $\Gamma : I \to V$ est un chemin de classe $C^1$ dans $V$ tel que $\Gamma(o) = v$ et si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $V$, on trouve, en posant $\Gamma(t) = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i(t)e_i$, que :

$$\Gamma'(o) = X_x$$

où $x = \sum_{i=1}^{n} \Gamma'_i(o)e_i$ est la dérivée, au sens élémentaire, de la fonction vectorielle $\Gamma$.

Dans la suite, nous identifierons toujours $T_v(V)$ à $V$ au moyen de l'isomorphisme ci-dessus ce qui nous redonnera en particulier la formule élémentaire :

$$\Gamma'(o) = \sum_{i=1}^{n} \Gamma'_i(o)e_i.$$

Revenons à la structure de groupe de $V$. On a :

$$\underline{V} = T_o(V) = V.$$

L'algèbre de Lie $\underline{V}$ est commutative, c'est-à-dire que, pour tout $(X,Y) \in \underline{G} \times \underline{G}$ on a $[X,Y] = o$, résultat qui est exact, plus largement, pour tout groupe de Lie abélien car on a alors $[X,Y]^d = [X,Y]$ puisque $\tilde{X}^d = \tilde{X}$ (cf 3.6). D'autre part, la formule (4.2) exprime que le sous-groupe à un paramètre tangent en o à x est l'application $\Gamma_x : t \mapsto tx$ ce qui donne $\Gamma_x(1) = x$, c.à.d. $\exp(x) = x$. Ainsi l'application exponentielle est l'identité : $V \to V$.

(5.2) Nous allons maintenant étudier les groupes $GL(V)$, où $V$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, ou sur $\mathbb{C}$. Pour cela, suivant HOCHSCHILD. (La structure des groupe de Lie, DUNOD), nous envisageons plus généralement la situation suivante qui englobe les cas précédents et s'applique aussi aux algèbres de CLIFFORD.

Soit $A$ une algèbre associative à unité, de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Puisque $A$ est un espace vectoriel de dimension finie, c'est une variété $C^\infty$ et $C^\omega$.

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $A$. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on a $xy = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n x_i y_j e_i e_j$

et $$e_i e_j = \sum_{k=1}^n c_{ijk} e_k$$

où les $c_{ijk}$ sont déterminés par la loi d'algèbre de $A$. Il en résulte que les composantes de $xy$ sur la base $(e_1,\dots,e_n)$ sont des polynômes du second degré en $(x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_n)$, ce qui implique, vu la définition de la structure de variété de $A$, que la multiplication est une application analytique $A \times A \to A$.

Soit $G$ l'ensemble des éléments inversibles de $A$. Pour que $x \in G$, il faut et il suffit que les applications linéaires $g_x : y \mapsto xy$ et $d_x : y \mapsto yx$ de A dans A soient bijectives, ce qui équivaut à $\det(g_x) \neq o$ et $\det(d_x) \neq o$. Comme les applications $x \mapsto \det(g_x)$ et $x \mapsto \det(d_x)$ sont continues, on en déduit que G est ouvert dans A.

Par conséquent, G est une sous-variété de A, de même dimension que A, et, en tout point $s \in G$, $T_s(G) = T_s(A) = A$.

D'autre part, G est un groupe pour la multiplication de A et c'est un groupe de Lie puisque cette multiplication est analytique. On a l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\underline{G} = T_o(G) = A$, calculons maintenant la structure d'algèbre de Lie de $\underline{G}$.

Soit $(x,y) \in A \times A$, soit f une forme linéaire sur A. On a :

$$[x,y](f) = x_\xi(y_\eta(f(\xi\eta))) - y_\xi(x_\eta(f(\xi\eta))).$$

Or $\eta \mapsto f(\xi\eta)$ est encore une forme linéaire, donc :

$$y_\eta(f(\xi\eta)) = f(\xi y)$$

et de même : $$x_\xi(f(\xi y)) = f(xy).$$

D'où : $$[x,y](f) = f(xy - yx)$$

c-à-d : $$([x,y],f) = (xy - yx,f), \text{ d'où } [x,y] = xy - yx.$$

On a ainsi démontré :

(5.3) PROPOSITION. - *L'algèbre de Lie* $\underline{G}$ *s'identifie canoniquement à l'algèbre de Lie de l'algèbre associative* A.

Exercice : Vérifier que le champ de vecteurs $\tilde{x}$ invariant par translation à gauche, associé à x, est défini par $\tilde{x}_t = tx$.

Calculons maintenant l'application exponentielle. Pour cela, pour tout $x \in A$, soit :

$$\mathrm{Exp}(x) = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad .$$

Tout d'abord, cette série converge. En effet, vu la continuité de l'application bilinéaire $(x,y) \mapsto xy$, si $x \to |x|$ est une norme quelconque sur $A$, il existe une constante $k > o$ telle que l'on ait $|xy| \leqslant k|x||y|$. En posant $\|x\| = k|x|$, on définit une nouvelle norme telle que $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$ d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|x^n\| \leqslant \|x\|^n$$

donc la série $\Sigma \frac{x^n}{n!}$ converge normalement. Cette majoration montre même qu'elle converge uniformément par rapport à $x$ dans toute boule de centre $o$, donc que Exp est une fonction entière : $A \to A$.

Une simple identité de série entières montre que

$$\mathrm{Exp}[(t+s)x] = \mathrm{Exp}(tx)\mathrm{Exp}(sx)$$

donc $\mathrm{Exp}(tx)$ est inversible et a pour inverse $\mathrm{Exp}(-tx)$.

Ainsi Exp est en fait un sous-groupe à un paramètre de $G$. On a :

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Exp}(tx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

donc $$\frac{d}{dt} \mathrm{Exp}(tx)\Big|_{t=o} = x$$

ce qui montre que $t \mapsto \mathrm{Exp}(tx)$ est le sous-groupe à un paramètre $\Gamma_x$ associé à $x$ par le théorème (1.14). D'où :

$$\exp(x) = \Gamma_x(1) = \mathrm{Exp}(x) \qquad \text{c'-à-d :}$$

(5.4) PROPOSITION. - *Lorsqu'on identifie l'algèbre de Lie* $\underline{G}$ *à* A, *l'application exponentielle devient l'application entière* $A \to G$ *définie par :*

$$\exp(x) = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \ .$$

Cette théorie s'applique en prenant $A = \mathcal{L}(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Dans ce cas $G = GL(V)$ et $\exp(x)$ est l'exponentielle matricielle habituelle.

Choisissons en particulier $A = \mathbb{R}$ muni de sa multiplication habituelle. Alors $G = \mathbb{R}^*$ et $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ est bien d'après (4.5) l'exponentielle habituelle ; de même pour $\mathbb{C}$ ou pour le corps $\mathbb{H}$ des quaternions.

## 6) Sous-groupes des groupes de Lie. Exemples.

Soit G un groupe de Lie, soit H un sous-groupe fermé de G. On sait déjà que H est un groupe localement compact lorsqu'on le munit de la topologie induite, mais on démontre de plus que H, muni de cette topologie, est une sous-variété de G s'il n'est pas discret : c'est donc un groupe de Lie.

Dans ces conditions, $\underline{H} = T_e(H)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\underline{G}$ qui est en fait une sous-algèbre de Lie, et qui est aussi l'ensemble des $X \in \underline{G}$ tels que le sous-groupe à un paramètre correspondant : $t \mapsto \exp tX$ ait son image dans H. L'application exponentielle $\underline{H} \to H$ se déduit par restriction de celle de G.

Les sous-groupes de $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ introduits aux chapitres précédents étaient tous des sous-groupes fermés, donc des groupes de Lie, et les résultats énoncés ci-dessus permettent de calculer leur algèbre de Lie. Un autre procédé peut aussi être employé : il consiste à appliquer le résultat suivant (ou d'autres énoncés voisins) de géométrie différentielle.

(6.1) *Soit* $M$ *et* $M'$ *des variétés* $C^\infty$ *de dimension* $m$ *et* $m'$ *avec* $m' < m$. *Soit* $f$ *une application* $C^\infty : M \to M'$ *et* $y_\circ \in M'$. *Si* $f^{-1}(y_\circ) \neq \emptyset$ *et si* $f$ *est de rang* $m'$ *en tout point de* $f^{-1}(y_\circ)$, $f^{-1}(y_\circ)$ *est une sous-variété de dimension* $m-m'$ *de* $M$ *dont l'espace tangent en tout* $x$ *est le noyau de* $f_*^x$.

<u>1-er exemple</u>

6.2) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* $u : G \to G'$ *un morphisme de groupes de Lie. Alors* $H = \operatorname{Ker} u$ *est un sous-groupe de Lie de* $G$ *dont l'algèbre de Lie* $\underline{H}$ *est le noyau de* $u_*^e$.

<u>DEMONSTRATION</u> : On sait que l'on a, pour tout $X \in \underline{G}$ :

$$(6.3) \qquad u\,[\exp X] = \exp\,[u_*^e(X)].$$

Pour que $\exp tX \in H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$u\,[\exp tX] = e$$

c-à-d : $$\exp\,[u^e_*(tX)] = e$$

ou $$\exp\,[tu^e_*(X)] = e$$

ce qui équivaut à $u^e_*(X) = o$ car cette relation implique que le vecteur tangent $u^e_*(X)$ associé au sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \exp(tu^e_*(X))$ est le vecteur nul.

<u>APPLICATION</u> : <u>Algèbres de Lie de $SL(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{C})$</u>.

(6.4) L'application $X \mapsto \det X$ est un morphisme de groupes de Lie $GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ (ou $GL(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$) car c'est la restriction d'une application polynomiale $\mathcal{L}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (ou $\mathcal{L}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$). D'autre part, la définition même du déterminant montre que sa différentielle en la matrice identique $I$ est l'application trace. D'après (5.2), on en déduit que $SL(n, \mathbb{R})$ (resp. $SL(n, \mathbb{C})$) est un sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ (resp. $GL(n, \mathbb{C})$) dont l'algèbre de Lie s'identifie à la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(n, \mathbb{R})$ formée des matrices de trace nulle, l'application exponentielle s'identifiant alors à l'exponentielle matricielle définie en (5.4)

Remarquons que la formule (6.3) s'écrit ici :

(6.5) $$\det(\exp(X)) = e^{\operatorname{tr}(X)}.$$

<u>REMARQUES (notations de (6.2))</u>.

1) L'application $u$ est de rang constant sur $G$ car, de l'égalité :

$$u(t) = u(x)\,u(x^{-1}t)$$

c-à-d : $u = \gamma^{G'}(u(x)) \circ u \circ \gamma^{G}(x^{-1})$ valable pour tout $x \in G$

on déduit : $u_*^x = \gamma^{G'}(u(x))_*^e \circ u_*^e \circ \gamma^{G}(x^{-1})_*^x$

or $\gamma^{G'}(u(x))_*^e$ et $\gamma^{G}(x^{-1})_*^x = [\gamma(x)_*^e]^{-1}$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

2) D'après (6.2), on a :

$$\dim H = \dim G - \operatorname{rang}(u_*^e).$$

2-ème exemple

Le groupe $U(n, K)$ (où $K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, auquel cas $U(n, K) = O(n)$) est le sous-groupe fermé de $GL(n, K)$ défini par l'équation :

$$^t\overline{X}\, X = I.$$

C'est donc un sous-groupe de Lie de $GL(n, K)$ dont l'algèbre de Lie s'identifie à l'ensemble des $Y \in \mathcal{L}(n, K)$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp tY \in U(n, K)$.

Cette condition s'écrit :

$$^t\overline{\exp(tY)}\, \exp tY = I$$

c-à-d : $\exp(t\, ^t\overline{Y})\, \exp tY = I$

ou encore : $\exp(t\, ^t\overline{Y}) = (\exp tY)^{-1} = \exp(-tY)$

ce qui équivaut à $^t\overline{Y} = -Y$, par unicité du vecteur tangent à un sous-groupe à un paramètre.

Ainsi : U(n,K) s'identifie à l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ telles que ${}^t\overline{Y} = - Y$ (matrices antihermitiennes).

Lorsque $K = \mathbb{R}$ ou C, on trouve en appliquant la proposition (5.2) à $G = U(n, K)$ et à l'application $u : X \mapsto \det X$ de G dans $G' = K^*$ que :

SU(n, K) s'identifie à l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ antihermitiennes et de trace nulle (lorsque $K = \mathbb{R}$, antihermitiennes signifie antisymétriques).

Par exemple :

SU(2) est l'ensemble des $\begin{pmatrix} i\alpha & b \\ -\overline{b} & -i\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$.

SO(3) est l'ensemble des $\begin{pmatrix} o & a & b \\ -a & o & c \\ -b & -c & o \end{pmatrix}$ $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ .

## 7) Propriétés de l'exponentielle ; Formule de Taylor : applications.

Nous admettrons le résultat suivant :

(7.1) THEOREME. - *L'application exponentielle est analytique et induit un isomorphisme de variétés analytiques d'un certain voisinage ouvert connexe de* $0$ *dans* $\underline{G}$ *sur un voisinage ouvert connexe de* $e$ *dans* $G$.

(La démonstration consiste à reprendre celle de (1.14) et à examiner comment $\Gamma_X$ dépend de la condition initiale $\Gamma'_X(o) = X$).

(7.2) COROLLAIRE 1. - *La composante neutre* $G_\circ$ *de* $G$ *est engendrée algébriquement par* $\exp(\underline{G})$.

DEMONSTRATION. - Soit $U$ le voisinage de $e$ dans $G$ dont il est question dans le théorème précédent. Le sous-groupe $H$ engendré par $U$ est ouvert (donc fermé) dans $G$ et connexe. Donc $H = G_\circ$. D'autre part, on a $U \subset \exp(\underline{G}) \subset G_\circ$ (car $\underline{G}$ est connexe) donc $\exp(\underline{G})$ engendre $G_\circ$.

c.q.f.d.

REMARQUE. - La composante neutre de $G$ est un sous-groupe de Lie de $G$ qui a la même algèbre de Lie et la même application exponentielle (car c'est une sous-variété ouverte de $G$ et les sous-groupes à un paramètre ont évidemment leur image contenue dans $G_\circ$). Ceci explique que les propriétés de $\underline{G}$ reflètent celles de $G_\circ$, et non celles de $G$, quand $G$ n'est pas connexe.

EXEMPLE. - $\underline{SO(n, \mathbb{R})} = \underline{O(n, \mathbb{R})}$ (car toute matrice antisymétrique est de trace nulle).

(7.3) COROLLAIRE 2. - *Soit* $u$ *et* $v$ *deux morphismes de groupes de Lie* $G \to H$ *(c'est-à-dire en fait, deux homomorphismes de groupes continus) tels que* $u_*^e = v_*^e$. *Alors* $u$ *et* $v$ *coïncident sur la composante neutre de* $G$.

DEMONSTRATION. - On a, pour tout $X \in \underline{G}$

$$u\,[\exp X] = \exp[\,u_*^e(X)\,] = \exp[\,v_*^e(X)\,] = v[\exp X]$$

donc $u$ et $v$ coïncident sur $\exp \underline{G}$. Comme ce sont des morphismes de groupes, ils coïncident sur le groupe engendré.

c.q.f.d.

Formule de Taylor

(7.4) LEMME.- *Soit* $f$ *une fonction* $C^\infty$ *sur* $G$, *à valeurs réelles. Soit* $F$ *la fonction* $C^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$F(s) = f(x \exp sX)$$

*où* $x \in G$, $X \in \underline{G}$.

*On a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ :

$$F^{(n)}(s) = (\tilde{X}^n f)(x \exp sX).$$

DEMONSTRATION. - La notation $\tilde{X}^n$ désigne la puissance nième de $\tilde{X}$ dans $D(G)$, de sorte que la relation est vraie pour $n = o$

On a :

$$F'(s) = \frac{d}{dt}[F(s+t)]_{t=o} = \frac{d}{dt} f(x \exp sX \exp tX)\big|_{t=o} = (\tilde{X}f)(x \exp sX)$$

d'où l'on déduit facilement le résultat par récurrence, en remplaçant $f$ par $\tilde{X}^n f$ dans ce qui précède.

(7.5) COROLLAIRE 1 (Formule de Taylor). - *Avec les mêmes hypothèses :*

$$f(x \exp tX) = \sum_{k=o}^{n} \frac{t^k}{k!} (\tilde{X}^n f)(x) + o(t^n).$$

(7.6) REMARQUE. - Si $f$ est analytique, la série de Taylor ci-dessus converge pour $t$ assez petit car alors $F$ est analytique (6.1).

(7.7) COROLLAIRE 2. - *On suppose toujours* $f$ $C^\infty$*, on désigne maintenant par* $G$ *la fonction* $C^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^p$ *définie par :*

$$G(t_1,\dots,t_p) = F(x \exp t_1X_1 \dots \exp t_pX_p).$$

*Pour tout* $(n_1,\dots,n_p) \in \mathbb{N}^p$ on a :

$$\frac{\partial^{|n|} G}{\partial t_1^{n_1} \dots \partial t_p^{n_p}}(o,o,.o) = (\tilde{X}_1^{n_1} \tilde{X}_2^{n_2} \dots \tilde{X}_p^{n_p} F)(x).$$

DEMONSTRATION. - D'après le corollaire 1, on a :

$$\frac{\partial^{n_p}}{\partial t_p^{n_p}} G(t_1,\dots,t_{p-1},o) = (\tilde{X}_p^{n_p} f)(x \exp t_1 X_1 \dots \exp t_{p-1} X_{p-1})$$

et on continue par récurrence sur $p$.

c.q.f.d.

(7.8) REMARQUE. - Ce dernier résultat permet d'écrire la formule de Taylor (ou le développement en série si $f$ est analytique) pour $G$.

Coordonnées canoniques.

Soit $U$ un voisinage de $e$ dans $G$, ouvert, analytiquement isomorphe à un voisinage $V$ de $o$ dans $\underline{G}$ par l'application exponentielle. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ une base de $\underline{G}$ et $B$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels (donc de variétés analytiques) de $\mathbb{R}^n$ sur $\underline{G}$ associé à cette base :

$$B(x_1,\dots,x_n) = x_1X_1 +\dots+ x_nX_n.$$

Pour tout $x \in G$, soit $\varphi(x) = B^{-1}[\exp^{-1}(x)]$. D'après ce qui précède $(U, \varphi)$ est une carte de $G$ en $e$ et $\varphi(x) = (x_1,\dots,x_n)$ équivaut à $x = \exp(x_1X_1 +\dots+ x_nX_n)$.

Par définition, $(x_1,\dots,x_n)$ sont des "coordonnées canoniques" de $x$ ; plus précisément, nous dirons que $(U, \varphi)$ est la carte canonique associée à $(X_1,\dots,X_n)$.

Soit $\varphi_i(x) = x_i$ de sorte que $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))$.

Les $\varphi_i$ sont des fonctions $C^\infty$ sur G, de plus si $X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i \in \underline{G}$, on a :

$$X(\varphi_i) = x_i .$$

En effet $X(\varphi_i) = \frac{d}{dt} [\varphi_i(\exp tX)]_{t=o} = \frac{d}{dt} (tx_i)|_{t=o} = x_i .$

Autrement dit, $(X_1,\ldots,X_n)$ est la base de $\underline{G} = T_e(G)$ canoniquement associée à la carte $(U, \varphi)$.

Application : Calcul de $(\exp tX)(\exp tY)$.

Appliquons à $\varphi^i$ le résultat (6.7), il vient :

$$G(t,u) = \varphi_i(\exp tX \exp uY) = \sum_{n_1+n_2 \leqslant n} \frac{t^{n_1} u^{n_2}}{n_1! n_2!} (\tilde{X}^{n_1} \tilde{Y}^{n_2} \varphi_i)(e) + o((|t|+|u|)^n).$$

Calculons des premiers termes de ce développement de Taylor :

terme constant : $\varphi_i(e) = o$.

terme en $t$ : $(\tilde{X} \varphi_i)(e) = X(\varphi_i) = x_i$ (si $X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i$).

terme en $u$ : $(\tilde{Y} \varphi_i)(e) = Y(\varphi_i) = y_i$ (si $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i X_i$).

terme en $t^2$: $\frac{1}{2}(\tilde{X}^2 \varphi_i)(e) = \frac{1}{2} X [\tilde{X} \varphi_i]$ .

Mais, $X[\tilde{X} \varphi_i] = \frac{d}{du} [(\tilde{X} \varphi_i)(\exp uX)]_{u=o} = \frac{d}{du} [\frac{d}{dt} \varphi_i(\exp uX \exp tX)|_{t=o}]_{u=o}$.

Or $\varphi_i(\exp uX \exp tX) = \varphi_i(\exp(t+u)X) = (t+u)x_i$,

d'où $(\tilde{X}^2 \varphi_i)(e) = o$, et de même $(\tilde{Y}^2 \varphi_i)(e) = o$, donc le coefficient de $u^2$ est également nul.

terme en $tu$ : $(\tilde{X}\,\tilde{Y}\,\varphi_i)(e)$.

Or $(\tilde{X}+\tilde{Y})^2\,\varphi_i(e) = o$ (même raisonnement que pour $(\tilde{X}^2\,\varphi_i)(e)$),

c-à-d : $(\tilde{X}^2 + \tilde{X}\,\tilde{Y} + \tilde{Y}\,\tilde{X} + \tilde{Y}^2)\,\varphi_i(e) = o$,

ou $(\tilde{X}\,\tilde{Y} + \tilde{Y}\,\tilde{X})\,\varphi_i(e) = o$,

et
$$(\tilde{X}\,\tilde{Y}\,\varphi_i)(e) = \frac{1}{2}[\tilde{X}\,\tilde{Y} + \tilde{X}\,\tilde{Y}]\,\varphi_i(e) = \frac{1}{2}[\tilde{X}\,\tilde{Y} - \tilde{Y}\,\tilde{X}]\,\varphi_i(e)$$
$$= \frac{1}{2}[\tilde{X},\tilde{Y}]\,\varphi_i(e) = \frac{1}{2}[X,Y]\,(\varphi_i) = \frac{1}{2}\;z_i$$

(en posant $[X,Y] = \sum\limits_{i-1}^{n} z_i\,X_i$).

On obtient donc :

$$\varphi_i(\exp tX \exp uY) = tx_i + uy_i + \frac{tu}{2}\,z_i + o((|t| + |u|)^2).$$

$$\exp(tX)\,\exp(uY) = \exp[tX + uY + \frac{tu}{2}\,[X,Y] + o\,(|t| + |u|)^2\,].$$

D'où : (7.9) $\exp(tX)\,\exp(tY) = \exp(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}\,[X,Y] + o(t^2))$

(en utilisant le fait que $\varphi_i$ est analytique, on peut remplacer $o(t^2)$ par $o(t^3)$).

On déduit de (7.9) que :

$$\exp(-tX)\,\exp(-tY)\,\exp(tX)\exp(tY) = \exp[\,t(-(X+Y) + \frac{t}{2}\,[X,Y] + to(t))\,]$$
$$\exp[t(X+Y) + \frac{t}{2}\,[X,Y] + to(t)]$$

d'où, par une nouvelle application de (7.9),

(7.10) $\exp(-tX)\exp(-tY)\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t^2[X,Y] + o(t^2))$.

Par une méthode analogue, en utilisant la formule de Taylor, on obtient :

$$(7.11)\quad \exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX) = \exp(tY + t^2\,[X,Y] + o(t^2)).$$

(Les formules 7.9, 7.10, 7.11, vu leur démonstration, sont vraies pour $t$ et $u$ assez petits).

Groupes de Lie abéliens connexes.

(7.12) PROPOSITION. - *Soit* $G$ *un groupe de Lie,* $X$ *et* $Y$ *deux éléments de* $G$. *Pour que* $[X,Y] = 0$, *il faut et il suffit que l'on ait l'une des deux conditions suivantes :*

*(i) Pour tout* $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\exp sX \exp tY = \exp tY \exp sX$ ;

*(ii) Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\exp tX \exp tY = \exp tY \exp tX$.

PREUVE : Si $[X,Y] = 0$, on a $[\tilde{X},\tilde{Y}] = 0$ c-à-d. que $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ commutent dans $D(G)$. On en déduit d'après (6.7) que, pour toute fonction $F$ analytique sur $G$, le développement en série de Taylor de $G(s,t) = F(\exp sX \exp tY)$ est le même que celui de $H(s,t) = F(\exp tY \exp sX)$. Il en résulte que $\exp sX$ et $\exp tY$ commutent pour $s$ et $t$ assez petits, donc pour $s$ et $t$ quelconques puisque $\exp sX = (\exp \frac{s}{n} X)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, supposons simplement que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait :

$$\exp tX \exp tY = \exp tY \exp tX.$$

On en déduit alors, pour $t$ assez petit, d'après (6.9)

$$\frac{t^2}{2}\,[X,Y] + o(t^2) = \frac{t^2}{2}\,[Y,X] + o(t^2)$$

d'où $[X,Y] = [Y,X]$.

c.q.f.d.

(7.13) REMARQUE. - Si $[X,Y] = o$, $t \mapsto \exp tX \exp tY$ est donc un sous-groupe à un paramètre de $G$ associé à $Z \in \underline{G}$ tel que, d'après (6.9) :

$$tZ = t(X+Y) + o(t)$$

d'où $Z = X+Y$ c-à-d :

$$\exp tX \exp tY = \exp t(X+Y) \quad \text{pour tout} \quad t \in R.$$

En particulier :

$$\exp X \exp Y = \exp(X+Y).$$

(7.14) COROLLAIRE 1. - *Si l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie connexe est abélienne, le groupe est abélien, et l'application exponentielle est un homomorphisme surjectif du groupe additif de* $\underline{G}$ *sur* $G$.

PREUVE : Dans ce cas, d'après la remarque ci-dessus, $\exp$ est un homomorphisme de groupes. Donc, d'après (6.2), $G = \exp(\underline{G})$.

(7.15) COROLLAIRE 2. - *Tout groupe de Lie abélien connexe est isomorphe à un groupe* $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{k'}$.

PREUVE : Soit $G$ un tel groupe. Puisque $\exp$ est un homomorphisme de groupes topologiques, en posant $V = \mathrm{Ker}(\exp)$, on a une factorisation :

$$\begin{tikzcd} \underline{G} \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\varphi"'] & G \\ \underline{G}/V \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

(où $\varphi$ est canonique et $u$ est une bijection continue).

D'autre part, d'après (7.1) l'application exp est ouverte ; on en déduit, d'après la définition de la topologie-quotient, que $u$ est ouvert. Ainsi, $u$ est un isomorphisme de groupes topologiques.

Toujours d'après (7.1), le noyau de $u$ est un sous-groupe additif de $\underline{G}$, fermé et même discret. Or, tout sous-groupe discret $H \neq \{o\}$ du groupe additif d'un espace vectoriel réel de dimension finie $V$ est du type $\mathbb{Z} X_1 + \ldots + \mathbb{Z} X_k$ où $(X_1,\ldots,X_k)$ est un système libre dans $V$ (lorsque $\dim V = 1$, se ramener à $V = \mathbb{R}$ et poser $X_1 = \inf H \cap (\mathbb{R}^+ - \{o\})$, puis raisonner par récurrence sur $\dim V$, en quotientant $V$ par un sous-espace $\mathbb{R}X$ de dimension 1 tel que $G \cap \mathbb{R}X \neq \{o\}$).

Ainsi, $\operatorname{Ker} u = \mathbb{Z}X_1 + \ldots + \mathbb{Z} X_k$ ; complétons $(X_1,\ldots,X_k)$ en une base $(X_1,\ldots, X_k, X_{k+1} \ldots X_n)$ de $\underline{G}$ et soit $V_1$ et $V_2$ engendrés respectivement par $(X_1,\ldots, X_k)$ et $(X_{k+1},\ldots, X_n)$. On a :

$$\underline{G} = V_1 \oplus V_2 \quad \text{et} \quad V \subset V_1.$$

On en déduit facilement un isomorphisme :

$$\underline{G}/V \simeq V_1/_V \times V_2$$

et $V_1/_V$ est bien isomorphe à $\mathbb{T}^k$ et $V_2$ à $\mathbb{R}^{n-k}$.

Ces isomorphismes de groupes topologiques sont des isomorphismes de groupes de Lie ; ceci résulte de (1.12) mais peut aussi se vérifier directement.

c.q.f.d.

En particulier :

(7.16) COROLLAIRE 3. - *Tout groupe de Lie abélien connexe compact est isomorphe à un tore* $\mathbb{T}^n$.

## 8) Représentations infinitésimales.

Soit $G$ un groupe de Lie et $\pi$ une représentation continue de $G$ dans un espace vectoriel réel de dimension finie (en particulier, $V$ peut être l'espace sous-jacent à un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, ou sur le corps $\mathbb{H}$ des quaternions).

En fait, $\pi$ est un homomorphisme de groupes topologiques de $G$ dans $GL(V)$. Or $GL(V)$ est un groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie s'identifie à $\mathcal{L}(V)$ (4.4). Par conséquent (1.12), $\pi$ est un morphisme de groupes de Lie et, d'après (1.11), $\pi_*^e$ est un morphisme d'algèbres de Lie $\underline{G} \to \mathcal{L}(V)$ c-à-d une représentation de $\underline{G}$ dans $V$.

(8.1) DEFINITION. - *La représentation* $\pi_*^e$ *ainsi définie est appelée représentation infinitésimale de l'algèbre de Lie* $\underline{G}$ *de* $G$ *et notée* $d\pi$ *ou* $\pi_\infty$ *ou simplement* $\pi$.

D'après cette définition, pour tout $X \in \underline{G}$, $d\pi(X)$ est l'image du vecteur tangent à la courbe $t \mapsto \exp(tX)$. Donc $d\pi(X)$ est tangent à $t \mapsto \pi(\exp tX)$, d'où, d'après (5.1) :

(8.2) $$d\pi(X) = \frac{d}{dt}\,[\,\pi(\exp tX)\,]_{t=o}$$

(dérivée au sens élémentaire de la fonction vectorielle $t \mapsto \pi(\exp tX)$).
Soit $\xi \in V, \eta \in V^*$ ; comme les applications $T \mapsto T(\xi)$ et $T \mapsto \langle T(\xi)|\eta\rangle$ sont linéaires, de $\mathcal{L}(V)$ dans $V$ et $\mathbb{R}$ respectivement, a fortiori :

(8.3) $$d\pi(X)(\xi) = \frac{d}{dt}\,[\,\pi(\exp tX)(\xi)\,]_{t=o}$$

(8.4) $$\langle d\pi(X)(\xi)|\eta\rangle = \frac{d}{dt}\,[\,\langle\pi(\exp tX)\xi|\eta\rangle\,]_{t=o} .$$

On peut "reconstituer" $\pi$ à partir de $d\pi$ grâce à la formule :

(8.5) $$\pi(\exp X) = \exp d\pi(X)$$

qui résulte de (1.20).

Cette formule détermine $\pi$ sur $\exp(\underline{G})$, donc sur la composante neutre de $G$, ce qui permet de relier les propriétés de $\pi$ et de $d\pi$ :

(8.6) PROPOSITION. - *Soit* $\pi$ *une représentation d'un groupe de Lie connexe* $G$ *dans un espace vectoriel réel de dimension finie* $V$. *Les sous-espaces invariants de* $V$ *sont les mêmes pour* $\pi$ *et* $d\pi$.

DEMONSTRATION :

1) Supposons que $V'$ soit un sous-espace de $V$ invariant par les

$\pi(s)$, $s \in G$ et soit $X \in \underline{G}$. On a, pour tout $\xi \in V'$ :

$$d\pi(X)(\xi) = \frac{d}{dt}\left[\pi(\exp tX)\xi\right]_{t=o}$$

$$= \lim_{t=o}\left[\frac{1}{t}(\pi(\exp tX)\xi - \xi)\right]$$

d'où $d\pi(X)(\xi) \in V'$ car $V'$, étant de dimension finie, est fermé dans $V$.

2) Réciproquement, supposons $V'$ invariant par les $d\pi(X)$. Pour tout $\xi \in V'$, on a, d'après (7.5)

$$\pi(\exp X)(\xi) = [\exp(d\pi(X))](\xi) = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{1}{n!} d\pi(X)^n(\xi)$$

$$= \lim_N \left(\sum_{n=o}^{N} \frac{1}{n!} d\pi(X)^n(\xi)\right).$$

D'où $\pi(\exp X)(\xi) \in V'$. Donc $V'$ est stable par les $\pi(\exp X)$, ce qui suffit, puisque $\exp(\underline{G})$ engendre $G$.

(8.7) <u>COROLLAIRE</u>. - *La représentation* $\pi$ *est irréductible si et seulement si* $d\pi$ *est irréductible.*

L'intérêt de la proposition (7.6) est de ramener la recherche des sous-espaces de $V$ invariants par tous les opérateurs $\pi(s)$ à celle des sous-espaces invariants par $d\pi(\underline{G})$ : comme $\underline{G}$ est de dimension finie, si $(X_1,\dots,X_n)$ est une base de $\underline{G}$, il suffit de chercher les sous-espaces stables par $d\pi(X_1)\dots d\pi(X_n)$ (qui engendrent $d\pi(\underline{G})$).

## 9) Représentation adjointe.

Soit $G$ un groupe de Lie. Pour tout $x \in G$, soit $\sigma_x$ l'automorphisme intérieur correspondant : $s \mapsto xsx^{-1} = \sigma_x(s)$. L'application linéaire $(\sigma_x)_*^e$ est donc un morphisme d'algèbre de Lie que l'on note $Ad(x)$ et l'on a le diagramme commutatif habituel :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sigma_x} & G \\ {\scriptstyle exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle exp} \\ \underline{G} & \xrightarrow{Ad(x)} & \underline{G} \end{array}$$

c'est-à-dire que, pour $X \in \underline{G}$ : (8.1) $\exp\,(Ad(x)(X)) = x \exp X\, x^{-1}$.

D'autre part :

$$Ad(xx') = (\sigma_{xx'})_*^e = (\sigma_x \circ \sigma_{x'})_*^e = (\sigma_x)_*^e \circ (\sigma_{x'})_*^e = Ad(x)\ Ad(x')$$

donc $Ad$ est une représentation de $G$ dans l'espace vectoriel réel de dimension finie $\underline{G}$.

(9.1) DEFINITION. - *La représentation ainsi définie s'appelle la représentation adjointe de* $G$.

(9.2) EXEMPLE : Reprenons l'exemple de l'algèbre associative $A$ défini en (4.3). Soit $H$ un sous-groupe fermé de $G$, donc un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie $\underline{H}$ est une certaine sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de l'algèbre $A$.

Pour tout $x \in H$, $\sigma_x$ apparait comme la restriction à $H$ de l'application $a \xmapsto{s_x} xax^{-1}$ de $A$ dans $A$. Or $s_x$ est linéaire, donc identique à sa différentielle, ce qui donne, par restriction : $Ad(x)(a) = xax^{-1}$ pour tout $a \in \underline{H}$.

En particulier, $\underline{H}$ est nécessairement stable par tous les $s_x$.
En utilisant (8.1) on obtient aussi, avec les mêmes notations :

$\exp(xax^{-1}) = x(\exp a)x^{-1}$ où exp est l'exponentielle usuelle.

Dans cet exemple, il est évident que Ad est un morphisme de groupes de Lie $G \to GL(\underline{G})$. Nous allons le démontrer maintenant dans le cas général. Pour cela, nous envisageons la situation suivante:

(9.3) Soit $G$ un groupe de Lie opérant à gauche analytiquement sur une variété analytique $X$, c-à-d. que $G$ opère à gauche sur $X$ par :

$$\begin{aligned} (s,x) &\mapsto s.x \\ G \times X &\to X \end{aligned}$$

et que cette application est analytique.

Supposons qu'il existe un point fixe $x_\circ \in X$ pour l'action de $G$, c-à-d. que $s.x_\circ = x_\circ$ pour tout $s \in G$. Si nous notons $\gamma(s)$ l'application $x \mapsto s.x$, comme $\gamma(s)(x_\circ) = x_\circ$, l'application $\gamma(s)_*^{x_\circ}$ est un endomorphisme de $T_{x_\circ}(X)$ que nous noterons $\pi(s)$.

Comme $\gamma(s's) = \gamma(s')\gamma(s)$, on a :

$$\pi(s's) = \pi(s')\pi(s).$$

donc $\pi$ est une représentation de $G$ dans $T_{x_\circ}(X)$.

(9.4) PROPOSITION. - *La représentation* $\pi$ *ainsi définie est une application analytique :* $G \to GL(T_{x_0}(X))$.

DEMONSTRATION. - Comme $\pi$ est un homomorphisme de groupes, il suffit de démontrer que $\pi$ est analytique au voisinage de $e$.

Pour cela, soit $(U, \varphi)$ une carte de $G$ en $e$ et $(V, \psi)$ une carte de $X$ en $x_0$. Quitte à restreindre $U$, nous pouvons supposer, grâce à la continuité de $(s,x) \mapsto s.x$ en $(e, x_0)$, qu'il existe un voisinage ouvert $W$ de $x_0$ contenu dans $V$ tel que, si $s \in U$ et $x \in W$, $s.x \in V$.

Puisque $(s,x) \mapsto s.x$ est analytique, il existe une application analytique $\tilde{F}$ de $\varphi(U) \times \psi(W)$ dans $\psi(V)$ telle que :

$$\begin{tikzcd} U \times W \arrow[r] \arrow[d, "\varphi \times \psi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \varphi(U) \times \psi(W) \arrow[r, "\tilde{F}"] & \psi(V) \end{tikzcd}$$

$$\tilde{F}\,[\varphi(s),\ \psi(x)] = \psi(s.x)$$

quand $s \in U$ et $x \in W$.

Pour tout $s \in U$, on a $s.W \subset V$ et la relation définissant $\tilde{F}$ montre que $\gamma(s)$ se lit :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\gamma(s)"] \arrow[d, "\psi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \psi(W) \arrow[r, "F(\varphi(s),.)"] & \psi(V) \end{tikzcd}$$

$$\eta \mapsto \tilde{F}(\varphi(s), \eta) = \tilde{F}(\varphi(s), .)$$

dans les cartes $(W, \psi)$, $(V, \psi)$ en $x_0$.

Dans la base de $T_{x_0}(X)$ canoniquement associée à $(V, \psi)$, $\gamma(s)_*^{x_0}$ a pour matrice la matrice jacobienne de $\tilde{F}(\varphi(s), .)$ calculée en $\psi(x_0)$ : $J_{\psi(x_0)}\,[\tilde{F}(\varphi(s), .)]$.

Il s'agit de démonter que $s \mapsto J_{\psi(x_0)}[\tilde{F}(\varphi(s),.)]$ est analytique, par exemple dans U. Or, dans la carte $(U,\varphi)$, cette application se lit :

$$\xi \mapsto J_{\psi(x_0)}[\tilde{F}(\xi,.)]$$

qui est évidemment analytique (c-à-d. que les coefficients de cette matrice sont des fonctions analytiques de $\xi$).

(9.5) <u>COROLLAIRE</u>. - *La représentation adjointe est un homomorphisme analytique* $G \to GL(\underline{G})$.

<u>PREUVE</u> : Il suffit d'appliquer la proposition précédente en choisissant $X = G$, $s.x = sxs^{-1}$ et $x_0 = e$.

(9.6) <u>THEOREME</u>. - *La représentation infinitésimale de* $\underline{G}$ *dans* $\underline{G}$ *associée à la représentation adjointe de* G *dans* $\underline{G}$ *est la représentation adjointe, notée* ad, *de* $\underline{G}$ *dans* $\underline{G}$ *définie par :*

$$ad(X)(Y) = [X,Y] .$$

<u>DEMONSTRATION</u>. - Notons ad la représentation infinitésimale. Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Ad"] & GL(\underline{G}) \\ \underline{G} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "ad"] & \mathcal{L}(\underline{G}) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

On a donc, pour tout $X \in \underline{G}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$Ad(\exp tX) = \exp(ad(tX))$$

où
$$\exp(ad(tX)) = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\ ad(X)^n \qquad \text{(cf. 4.5)}.$$

Soit $Y \in \underline{G}$, calculons de deux manières $Ad(\exp(tX))(tY)$.

Tout d'abord, d'après ce qui précède :

$$Ad(\exp tX)(tY) = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n!}\ ad(X)^n\,[Y]\ .$$

D'autre part, d'après (8.1) :

$$\begin{aligned}\exp\,[Ad(\exp tX)(tY)] &= \exp tX \exp tY \exp(-tX)\\ &= \exp(tY + \frac{t^2}{2}[X,Y] + o(t^2))\end{aligned}$$

donc, si $t$ est voisin de $0$ :

$$Ad(\exp tX)(tY) = tY + \frac{t^2}{2}[X,Y] + o(t^2).$$

En identifiant avec l'expression précédemment obtenue, il vient :

$$adX(Y) = [X,Y]$$

c.q.f.d.

Exemple d'application.

(9.7) PROPOSITION. - *Soit* G *un groupe de Lie,* H *un sous-groupe fermé de* G. *Si* H *est distingué dans* G, $\underline{H}$ *est un idéal de* G *; si* $\underline{H}$ *est un idéal de* $\underline{G}$ *et si* H *et* G *sont connexes,* H *est distingué dans* G.

DEMONSTRATION. - Si H est distingué, on a pour tout $x \in G$, $\sigma_x(H) \subset H$, d'où $Ad(x)(\underline{H}) \subset \underline{H}$, ce qui entraîne, pour tout $X \in \underline{G}$, $ad(X)(\underline{H}) \subset \underline{H}$ (cf.(8.6)) c-à-d. que $\underline{H}$ est un idéal de $\underline{G}$.

Réciproquement, si $\underline{H}$ est un idéal, on a, pour tout $X \in \underline{G}$ :

$$\mathrm{ad}(X)(\underline{H}) \subset \underline{H},$$

donc, d'après (7.6), pour tout $x \in G$,

$$\mathrm{Ad}(x)(\underline{H}) \subset \underline{H}$$

ce qui implique, pour tout $Y \in \underline{H}$ :

$$\mathrm{Ad}(x)(Y) \in \underline{H}$$

c'est-à-dire : $\exp(\mathrm{Ad}(x)(Y)) \in H$ (§5)

ou $x(\exp Y)x^{-1} \in H.$

Si $H$ est connexe, il est engendré par les $\exp Y$, cette dernière relation montre donc qu'il est distingué.

c.q.f.d.

# CHAPITRE 8 : ALGÈBRE DE LIE D'UN PRODUIT SEMI-DIRECT. CAS DU GROUPE DE POINCARÉ.

## 1) Algèbre de Lie d'un produit semi-direct. Cas du groupe affine. Cas de ST(2).

(1.1) Soit $G$ un groupe de Lie, produit semi-direct topologique de deux sous-groupes fermés $N$ et $H$, le sous-groupe $N$ étant distingué. Alors l'algèbre de Lie $\underline{G}$ est somme directe, en tant qu'espace vectoriel, de l'idéal $\underline{N}$, algèbre de Lie de $N$, et de la sous-algèbre $\underline{H}$, algèbre de $H$. En effet :

a) Si $X \in \underline{N} \cap \underline{H}$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp tX \in N \cap H$ c-à-d. $\exp tX = e$ d'où $X = 0$. Ainsi $\underline{N} \cap \underline{H} = \{o\}$.

b) Soit $X \in \underline{G}$, écrivons $\exp tX = g(t)\, h(t)$ avec $g(t) \in N$ et $h(t) \in H$. Comme la projection sur $H$ est un homomorphisme de groupes, $h : \mathbb{R} \to H$ est un sous-groupe à paramètre de $H$, donc il existe $Z \in \underline{H}$ tel que $h(t) = \exp(tZ)$. On en déduit $g(t) = \exp(tX)\exp(-tZ)$ et $g$ est donc une courbe tracée sur $N$, tangente en $e$ à un certain $Y \in N$. Mais la formule de Taylor (ch. 7, 6. 9) montre que le vecteur tangent à $t \mapsto \exp tX \exp(-tZ)$ est $X-Z$ d'où $Y = X-Z$ c-à-d. $X = Y+Z$ avec $Y \in \underline{N}$ et $Z \in \underline{H}$. Ainsi, $\underline{G} = \underline{N} + \underline{H}$.

c.q.f.d.

On peut donc dire, en un sens évident, que l'algèbre de Lie $\underline{G}$ est produit semi-direct de l'idéal $\underline{N}$ et de la sous-algèbre $\underline{H}$. Cette situation donne lieu à des formules analogues à celles du produit semi-direct de groupes.

Soit $(x,x') \in \underline{N} \times \underline{N}$ et $(X,X') \in \underline{H} \times \underline{H}$, on aura :

$$(x+X,\ x'+X') = [x,x'] + [X,x'] - [X',x] + [X,X']$$

avec $[x,x'] + [X,x'] - [X',x] \in \underline{N}$ et $[X,X'] \in \underline{H}$.

(1.2) Ainsi, $\underline{G}$ est isomorphe à $\underline{N} \times \underline{H}$ muni d'une structure d'algèbre de Lie définie par :

$$[(x,X),\ (x',X')] = ([x,x'] + [X,x'] - [X',x], [X,X'])$$

où $[X,x']$ désigne le crochet de $X$ et $x'$ calculé dans $\underline{G}$ ou abusivement, celui de $(0,X)$ et $(x',o)$ calculé dans $\underline{N} \times \underline{H}$. Concrètement, on se pose en général le problème suivant : connaissant les algèbres de Lie $\underline{N}$ et $\underline{H}$, calculer $\underline{G}$. Si l'on identifie $\underline{G}$ à $\underline{N} \times \underline{H}$, la structure d'algèbre de Lie de $\underline{G}$ est parfaitement définie quand on sait calculer les crochets du type $[X,x]$ avec $X \in \underline{H}$ et $x \in \underline{N}$. Quant à l'application exponentielle $\underline{G} \to G$, on se contente pratiquement de savoir que ses restrictions à $\underline{N}$ et $\underline{H}$ sont les exponentielles de $N$ et $H$.

On peut donner une formule générale pour la structure d'algèbre de Lie de $\underline{N} \times \underline{H}$ (cf. HOCHSCHILD . La structure des groupes de Lie, Ch. IX, th. 3.1) mais il est plus simple de la retrouver dans chaque cas particulier : le principe est de calculer $[X,x] = (\mathrm{ad}\ X)(x)$ en utilisant le fait que ad est la représentation infinitésimale associée à Ad d'où :

(1.3) $$[X,x] = (\mathrm{ad}\ X)(x) = \frac{d}{dt}\left[\mathrm{Ad}(\exp tX)(x)\right]_{t=o}$$

et, par définition, $\mathrm{Ad}(\exp tX)$ est l'application tangente en $e$ à l'automorphisme intérieur $s \mapsto (\exp tX)\ s \exp(-tX)$ de $G$. Il est important dans la pratique de remarquer que l'on n'a besoin en fait que de la restriction de $Ad(\exp tX)$ à $\underline{N}$, restriction qui est la différentielle de la restriction à $N$ de l'automorphisme intérieur considéré ; on sait que cette restriction n'est autre que l'action de $H$ sur $N$ définissant le produit semi-direct.

(1.4) Exemple du groupe affine et de ses sous-groupes.

Le groupe affine est le produit semi-direct externe de $\mathbb{R}^n$ et de $GL(n, \mathbb{R})$, où $GL(n, \mathbb{R})$ agit canoniquement sur $\mathbb{R}^n$. L'algèbre de Lie sera le produit $\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(n, \mathbb{R})$, muni de la loi déterminée par la formule (1.3), où $x \in \mathbb{R}^n$ (algèbre de Lie de $\mathbb{R}^n$), et $X \in \mathcal{L}(n, \mathbb{R})$ (algèbre de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$). La restriction à $N = \mathbb{R}^n$ de l'automorphisme intérieur associé à $\exp(tX)$ est l'application linéaire $s \mapsto (\exp tX)(s)$ d'où :

$$[Ad(\exp tX)](x) = (\exp tX)(x)$$

et $\qquad [X,x] = X(x)$. Ainsi :

(1.5) PROPOSITION. - *L'algèbre de Lie du groupe affine de* $\mathbb{R}^n$ *est le produit* $\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(n, \mathbb{R})$ *muni de la loi :*

$$[(x,X),(x',X')] = (X(x') - X'(x),[X,X']) \quad \textit{où} \quad [X,X'] = XX'-X'X.$$

(c-à-d. que $\mathcal{L}(n, \mathbb{R})$ agit canoniquement sur $\mathbb{R}^n$).

Le même calcul reste valable si l'on remplace $GL(n, \mathbb{R})$ par un de ses sous-groupes fermés. On obtient ainsi l'algèbre de Lie de tout groupe d'isométries d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée (cf. Ch. I, 3.11), connaissant l'algèbre de Lie de $O(E,B)$ que nous déterminerons plus loin. En résumé :

(1.6) <u>PROPOSITION</u>. - *L'algèbre de Lie du produit semi-direct* $R^n \times G$, *où* $G$ *est un sous-groupe fermé de* $GL(n, \mathbb{R})$ *agissant canoniquement sur* $\mathbb{R}^n$, *d'algèbre de Lie* $\underline{G}$, *identifiée à une sous-algèbre de Lie de* $\mathcal{L}(n, \mathbb{R})$, *est le produit* $\mathbb{R}^n \times \underline{G}$, *muni de la loi :*

$$(x,X)(x',X') = (X(x') - X'(x),[X,X']) \quad \text{où} \quad [X,X'] = XX' - X'X.$$

(1.7) <u>EXEMPLE</u> : L'algèbre de Lie du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^n$, pour le produit scalaire canonique, est le produit : $R^n \times \underline{SO}(n)$, où $\underline{SO}(n)$ est l'algèbre de Lie des matrices carrées d'ordre $n$, antisymétriques.

(1.8) <u>Calcul de l'algèbre de Lie de ST(2)</u>.

Réalisons $ST(2)$ comme le produit semi-direct externe $\mathbb{C} \times \mathbb{U}$. L'algèbre de Lie de $\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$, l'exponentielle étant l'application identique, l'algèbre de Lie de $\mathbb{U} = \mathbb{U}(1, \mathbb{C})$ est, d'après le Ch. 7, § 4 et 5, l'algèbre de Lie abélienne $i\,\mathbb{R}$, l'exponentielle étant l'exponentielle usuelle. Comme il est d'usage, nous l'identifions à $\mathbb{R}$, l'exponentielle devenant alors l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

L'algèbre de Lie de $ST(2)$ est donc $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, et sa structure est bien précisée si nous savons calculer le crochet $[X,z]$ où $X \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour cela, nous utilisons la méthode exposée en (1.2) :

- la restriction à $N = \mathbb{C}$ de l'automorphisme intérieur $s \mapsto (\exp tX)s \exp(-tX)$ est ici :

$$z \mapsto (\exp tX)^2 z = \exp(2tX)z,$$

(car $\mathbb{U}$ opère sur $\mathbb{C}$ par $(u,z) \mapsto u^2 z$).

Cette application est linéaire, donc identique à son application tangente $Ad(\exp tX)$ d'où :

$$[X,z] = \frac{d}{dt}\, [\exp(2tX)z]_{z=o} = 2Xz.$$

Ce qui donne, pour le crochet de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, la formule générale :

$$[(z,X),(z',X')] = [X,z'] + [z,X'] = 2Xz' - 2X'z.$$

On peut aussi considérer $ST(2)$ comme le sous-groupe fermé de $GL(2,\mathbb{C})$, constitué des matrices $\begin{pmatrix} u & z \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$ où $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$, et calculer son algèbre de Lie en utilisant le ch. 1, § 4 et 5. On trouve que cette algèbre est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} i\alpha & b \\ o & -i\alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{C})$, évidemment isomorphe à la réalisation précédente. Ceci peut se retrouver très simplement en remarquant que l'on peut trouver facilement les sous-groupes à un paramètre suivant de $G$ :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} e^{it} & 1 \\ 1 & e^{-it} \end{pmatrix} \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ o & 1 \end{pmatrix} \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & it \\ o & 1 \end{pmatrix}.$$

Les éléments de $\mathcal{L}(2,\mathbb{C})$ tangents à ces sous-groupes sont, respectivement :

$$\begin{pmatrix} i & o \\ o & -i \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} o & 1 \\ o & o \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} o & i \\ o & o \end{pmatrix}.$$

Ils sont évidemment indépendants ; comme on sait, d'après 1.1, que l'algèbre de Lie de $ST(2)$ est de dimension 3, ils constituent une base de cette algèbre qui est donc l'ensemble des $\begin{pmatrix} i\alpha & b \\ o & -i\alpha \end{pmatrix}$.

## 2) Algèbre de Lie du groupe orthogonal d'une forme bilinéaire symétrique et du groupe d'isométries associé. Première étude.

Soit $B$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel réel $E$, de dimension finie $n$. Il s'agit de calculer l'algèbre de Lie du groupe $O(E,B)$. On peut toujours trouver une base de $E$ dans laquelle $B$ s'écrit :

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{p} x_1^i \, y^i - \sum_{i=p+1}^{n} x^i \, y^i$$

(éventuellement, $p = n$ si la forme est définie positive).

Dans cette base, la matrice de $B$ est $A = \begin{pmatrix} I_p & o \\ o & -I_q \end{pmatrix}$, où $I_k$ note la matrice unité d'ordre $k$, et où $q = n-p$. Le groupe $O(E,B)$ est isomorphe (cf. Ch I) au groupe matriciel, noté $O(p,q)$, des matrices carrées réelles $X$ d'ordre $n$ telles que :

$${}^tX \, A \, X = A.$$

C'est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$, donc un groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie $\underline{O(p,q)}$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des matrices carrées d'ordre $n$ ; plus précisément, d'après le ch. 7, § 5, $\underline{O(p,q)}$ est l'ensemble des matrices $Z$ telles que $\exp(uZ)$ appartienne à $O(p,q)$ pour tout $n$, c-à-d. telles que :

$$\exp(u\,{}^tZ)A \exp uZ = A$$

c-à-d.

$$A^{-1} \exp(u\,{}^tZ)A = \exp(-uZ)$$

ou :

$$\exp(u\, A^{-1}\,{}^tZA) = \exp(-uZ)$$

(car $\exp(A\,X\,A^{-1}) = A(\exp X)A^{-1}$ pour l'exponentielle matricielle), et ceci équivaut, d'après l'unicité du vecteur tangent à un sous-groupe à un paramètre, à :

$$A^{-1}\,{}^tZ\,A = -Z, \quad \text{c-à-d. à} \quad AZ + {}^tZA = o.$$

En écrivant $Z$ par blocs : $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix}$, où $Z_1$ et $Z_4$ sont carrées de dimension $p$ et $q$ respectivement, on trouve que cette condition équivaut à l'antisymétrie pour $Z_1$ et $Z_4$, et à $Z_3 = {}^tZ_2$, d'où :

2.1) <u>PROPOSITION</u>. - *L'algèbre de Lie* <u>$O(p,q)$</u> *est l'ensemble des matrices carrées réelles* $Z$ *d'ordre* $n$ *qui vérifient* $AZ + {}^tZA = 0$, *où* $A = \begin{pmatrix} I_p & o \\ o & -I_q \end{pmatrix}$. *C'est aussi l'ensemble des* $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ {}^tZ_2 & Z_3 \end{pmatrix}$ *où* $Z_1$ *et* $Z_3$ *sont carrées antisymétriques d'ordre* $p$ *et* $q$ *respectivement, et où* $Z_2$ *est quelconque, d'ordre* $p \times q$.

2.2) Le groupe $SO(p,q)$ est, par définition, le sous-groupe fermé de $O(p,q)$ défini par la condition $\det X = 1$. Ainsi, son algèbre de Lie est formée des matrices de <u>$O(p,q)$</u> vérifiant de plus $\det(\exp uZ) = 1$, ce qui équivaut à $\mathrm{tr}(Z) = o$, et est vérifié par toutes les matrices de <u>$O(p,q)$</u>. Ainsi, <u>$SO(p,q)$</u> = <u>$O(p,q)$</u>, ce qui était prévisible si l'on remarque que $\det X$ ne prend que les valeurs $+1$ et $-1$ sur $O(p,q)$, ce qui implique $O(p,q)_o \subset SO(p,q)$, donc que $O(p,q)$ et $SO(p,q)$ ont la même composante neutre. On a vu au tome 1, ch. 2, que $SO(n) = SO(n,o)$ est toujours connexe, et que $SO(1,3)$ a deux composantes connexes ; on démontre plus généralement que, si $o < p < p+q$, $SO(p,q)$ a deux composantes connexes.

## 2.3) EXEMPLES

a) L'algèbre de Lie $\underline{O(n)} = \underline{SO(n)}$ est l'ensemble des matrices carrées réelles antisymétriques d'ordre $n$. Par exemple $\underline{O(3)} = \underline{SO(3)}$ est l'ensemble des

$$Z = \begin{pmatrix} o & \alpha & \beta \\ -\alpha & o & \gamma \\ -\beta & -\gamma & o \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\alpha,\beta,\gamma) \in R^3.$$

b) L'algèbre de Lie de $SO(1,3)$ est l'ensemble des

$$Z = \begin{pmatrix} o & a & b & c \\ a & & & \\ b & & Z_1 & \\ c & & & \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad Z_1 \in \underline{O(3)} \quad \text{et} \quad (a,b,c) \in R^3.$$

## 2.4) Cas du groupe des isométries.

Le groupe des isométries de $E$ pour la "distance" associée à la forme $B$ est isomorphe (cf. Ch. I) au produit semi-direct $R^n \times O(p,q)$ donc on peut lui appliquer 1.6, on obtient :

PROPOSITION. - *L'algèbre de Lie du produit semi-direct* $R^n \times O(p,q)$ *où* $O(p,q)$ *agit canoniquement sur* $R^n$ *est le produit* $R^n \times \underline{O(p,q)}$, *muni de la loi :*

$$(x,X)(x',X') = (X(x') - X'(x), [X,X']) \quad \textit{où} \quad [X,X'] = XX' - X'X.$$

Bien entendu, cette algèbre de Lie est aussi celle du produit semi-direct $R^n \times SO(p,q)$, et de $R^n \times SO_\circ(p,q)$, qui est la composante neutre du produit semi-direct étudié.

Cette proposition détermine l'algèbre de Lie de $R^n \times O(1,3)$.

## 3) Algèbre de Lie du groupe de Poincaré. Bases usuelles.

3.1) L'algèbre de Lie du groupe de Poincaré $\mathbb{R}^4 \times SL(2, \mathbb{C})$ est produit semi-direct de l'algèbre de Lie abélienne $\mathbb{R}^4$ et de l'algèbre de Lie $\underline{SL(2, \mathbb{C})}$ constituée des matrices carrées complexes d'ordre 2 de trace nulle. Toutefois, sous cette forme, la crochet n'est pas simple à expliciter.

Pour obtenir une expression simple du crochet grâce à la méthode 1.2, il vaut mieux remplacer $\mathbb{R}^4$ par l'espace vectoriel isomorphe $H$ des matrices hermitiennes en considérant que son algèbre de Lie (abélienne) s'identifie également à $H$ (l'exponentielle est donc l'application identique). Alors le groupe est le produit semi-direct $H \times SL(2, \mathbb{C})$ où $SL(2, \mathbb{C})$ agit sur $H$ par

$$A.Z = AZA^* \qquad\qquad (A \in SL(2, \mathbb{C}),\ Z \in H).$$

Soit $X \in SL(2, \mathbb{C})$. D'après (1.2), $Ad(\exp tX)$ est tangente à $Z \mapsto (\exp tX).Z$, donc lui est identique, puisque cette dernière est linéaire. Ainsi, si $X \in \underline{SL(2, \mathbb{C})}$ et $Z \in H$, on a :

$$[X,Z] = (adX)(Z) = \frac{d}{dt}\left[(\exp tX)\, Z(\exp tX)^*\right]_{t=o} = XZ + ZX^*$$

d'où le résultat :

(3.2) PROPOSITION. - *L'algèbre de Lie du produit semi-direct* $H \times SL(2, \mathbb{C})$ *s'identifie à* $H \times SL(2, \mathbb{C})$ *de la manière suivante :*

*a) Si* $Z_i \in H$ *et* $X_i \in \underline{SL(2,\mathbb{C})}$ $(i = 1, 2)$ *on a :*

$$[(Z_1,X_1), (Z_2,X_2)] = (X_1 Z_2 + Z_2 X_1^* - X_2 Z_1 - Z_1 X_2^*, [X_1, X_2])$$

*où* $[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1$.

*b)* $\exp(Z) = Z$ *si* $Z \in H$ *et* $\exp X$ *est l'exponentielle matricielle si* $X \in SL(2, \mathbb{C})$.

3.3) En général, on utilise cependant plutôt l'algèbre de Lie de $R^4 \circledS SO_\circ(1,3)$, déterminée en (2.4), en effet, cette algèbre, dont le crochet est simple à expliciter, est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, comme nous allons le vérifier maintenant.

3.4) <u>Base de l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{C})$.</u>

On détermine une base "naturelle" de cette algèbre, en liaison avec le problème qui nous intéresse, à partir des remarques suivantes.

a) Le sous-groupe $SU(2)$ de $SL(2, \mathbb{C})$ a pour image dans $SO(1,3)_\circ$, le sous-groupe $SO(3)$ des rotations de $\mathbb{R}^3$. Considérons les matrices représentant dans $SU(2)$ des notations d'angle $\theta$ autour de $e_1, e_2, e_3$ (base canonique de $R^3$). Ce sont, respectivement :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -i\sin\theta/2 \\ -i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & o \\ o & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

(cf. tome 1, Ch. I, fin de 2.11). Lorsque $\theta$ varie, on obtient ainsi 3 sous-groupes à un paramètre dont les vecteurs tangents à l'origine (dérivées par rapport à $\theta$ en o) s'expriment facilement en fonction des matrices de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ introduites au chapitre I, les dérivées sont, respectivement :

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & o \end{pmatrix} = -i\,\frac{\sigma_1}{2} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & o \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\,\sigma_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & o \\ o & i \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\,\sigma_3.$$

Comme ces 3 matrices sont indépendantes sur $\mathbb{R}$, elles constituent une base de $\underline{SU(2)}$, puisque $SU(2)$ est de dimension 3.

Remarquons que $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent également à $\underline{SL(2, \mathbb{C})}$. Comme $\underline{SL(2, \mathbb{C})}$ est de dimension 6, les 6 matrices $(\sigma_k, i\sigma_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ forment une base de $\underline{SL(2, \mathbb{C})}$ qui se décompose en une base $(\sigma_k)$ du sous-espace des matrices hermitiennes et une base $(i\sigma_k)$ du sous-espace supplémentaire des matrices antihermitiennes qui n'est autre que l'algèbre de Lie de $SU(2)$. On note donc que :

$$\underline{SL(2, \mathbb{C})} = \underline{SU(2)} \oplus i\ \underline{SU(2)}.$$

b) La transformation de Lorentz pure d'axe $\vec{m}$, où $\vec{m}$ est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$, et de paramètre $\chi \in \mathbb{R}$ est représentée, dans $SL(2, \mathbb{C})$, par la matrice :

$$L(\vec{m},\chi) = \text{ch}\ \chi/2\ \sigma_0 + \text{sh}\ \chi/2\ h(\vec{m}),$$

où $h$ désigne l'isomorphisme habituel (cf. tome 1, ch. 1) de $\mathbb{R}^4$ sur $H$, tel que $h(e_0) = \sigma_0$, $h(\vec{e}_i) = \sigma_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Comme $|\vec{m}| = 1$, on vérifie aisément que $h(\vec{m})$ est involutive : $h(\vec{m})^2 = \sigma_0$ (en particulier $\sigma_k^2 = \sigma_0$) et, de cette relation, il résulte par un calcul immédiat que $\chi \mapsto L(\vec{m},\chi)$ est un sous-groupe à un paramètre de $SL(2, \mathbb{C})$. Le vecteur tangent associé est : $\frac{d}{d\chi} L(\vec{m},\chi)\big|_{\chi=0} = \frac{1}{2} h\ (\vec{m})$. On retrouve ainsi naturellement en choisissant successivement $\vec{m} = \vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 3 matrices indépendantes de $\underline{SL(2,\mathbb{C})}$ : $\frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_2, \frac{1}{2}\sigma_3$. En résumé :

PROPOSITION. - *L'algèbre de Lie* SL(2, $\mathbb{C}$) *des matrices carrées complexes* $2 \times 2$ *de trace nulle est somme directe de la sous-algèbre* SU(2) *des matrices antihermitiennes et du sous-espace* i SU(2) *des matrices hermitiennes de trace nulle.*

*On peut prendre pour base de* SU(2) *les matrices* $-\frac{i}{2}\sigma_k$ $(k = 1,2,3)$ *tangentes chacune au sous-groupe à un paramètre constitué des rotations autour de* $e_k$.

*On peut prendre pour base de* i SU(2) *les matrices* $\frac{1}{2}\sigma_k$ $(k = 1,2,3)$, *images des précédentes par l'application* $\sigma \mapsto i\sigma$, *et qui sont tangentes chacune au sous-groupe à un paramètre constitué des transformations de Lorentz pures d'axe* $e_k$.

## 3.5) Base correspondante de l'algèbre de Lie de $SO(1,3)_\circ$.

On sait qu'il existe un homomorphisme continu, donc un morphisme de groupes de Lie, de SL(2, $\mathbb{C}$) sur $SO_\circ(1,3)$, qui associe à tout $X \in SL(2, \mathbb{C})$ la transformation de Lorentz propre $u_X : x \mapsto X.x$. Nous allons calculer les images par $u_*^e$ de la base de SU(2) introduite ci-dessus en utilisant la formule :

$$u_*^e(X) = \frac{d}{dt}\,(u(\exp tX))_{t=o}.$$

a) Lorsque $X = -\,i/2\ \sigma_k$, $u\ (\exp tX)$ n'est autre que la matrice de la rotation autour de $\vec{e}_k$ dans $\mathbb{R}^3$ identifié à un sous-espace de $\mathbb{R}^4$. Par exemple, pour $k = 1$ :

$$u(\exp(-t\ i/2\ \sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

d'où : $u^e_*(-\ i/2\ \sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ que nous noterons $F_1$.

On définit de même $u^e_*(-\ i/2\ \sigma_k) = F_k$ pour $k = 2,3$ et le calcul est analogue.

b) Lorsque $X = \frac{1}{2}\sigma_k$, $u(\exp tX)$ est la matrice de la transformation de Lorentz pure d'axe $\vec{e}_k$ définie vectoriellement par les formules :

$$\begin{cases} x'^{\circ} = \mathrm{ch}\chi\ x^{\circ} + \mathrm{sh}\chi x^k \\ \vec{x}' = \vec{x} - (1 - \mathrm{ch}\chi)x^k\ \vec{e}_k + x^{\circ}\ \mathrm{sh}\chi\ \vec{e}_k \end{cases}$$

ce qui donne, par exemple, pour $k = 1$, la matrice :

$$u(\exp(\tfrac{\chi}{2}\ \sigma_k)) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & \mathrm{sh}\chi & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $u^e_*(\frac{1}{2}\ \sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(calculs analogues pour $k = 2,3$). On a alors la

3.6) PROPOSITION. - *a) L'image par l'application tangente à* u *en* e *de la base de* SL(2, $\mathbb{C}$) *introduite en 3.4 est constituée des matrices :*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = u_*^e(\frac{1}{2}\sigma_1), \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = u_*^e(\frac{1}{2}\sigma_2),$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = u_*^e(\frac{1}{2}\sigma_3).$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = u_*^e(-\frac{i}{2}\sigma_1), \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = u_*^e(-\frac{i}{2}\sigma_2),$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = u_*^e(-\frac{i}{2}\sigma_3).$$

*b) le sous-groupe à un paramètre associé à* $E_k$ (resp. $F_k$) *est constitué des transformations de Lorentz pures d'axe* $\vec{e}_k$ *(resp. des rotations d'axe* $\vec{e}_k$).

*c) Les* 6 *matrices ainsi définies forment une base de* <u>SO(1,3)</u> *et* $u_*^e$ *est un isomorphisme d'algèbres de Lie de* <u>SL(2, $\mathbb{C}$)</u> *sur* <u>SO(1,3)</u>.

*d) L'application* u *est ouverte et induit un isomorphisme de* SL(2, $\mathbb{C}$)$/_{(\pm I)}$ *sur le groupe de Lorentz propre* $SO(1,3)_o$.

PREUVE. - Il est évident que les 6 matrices sont indépendantes, donc constituent une base de $\underline{SO(1,3)}$ , qui est de dimension 6 d'après 2.3.b). Ainsi, $u_*^e$ est un isomorphisme, donc $u$ est ouverte en $e$, donc partout puisque c'est un morphisme de groupes. On en déduit d) (cf. fin du ch. II du tome 1). Le reste a déjà été prouvé.

c.q.f.d.

REMARQUE. - On reviendra, au chapitre suivant, sur l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{C})$, ce qui amènera à introduire une base notée $M_{ij}$ $(o \leqslant i < j \leqslant 3)$ telle que :

$M_{01} = E_1$, $M_{02} = E_2$, $M_{03} = E_3$, $M_{12} = - F_3$, $M_{23} = - F_1$, $M_{13} = F_2$.

Si l'on convient de poser $M_{ji} = - M_{ij}$ lorsque $i \neq j$, et $g_{ij} = B(e_i,e_j)$, on a la formule :

$$[M_{ij}, M_{k\ell}] = g_{ik} M_{j\ell} + g_{j\ell} M_{ik} - g_{i\ell} M_{jk} - g_{jk} M_{i\ell}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{array}{lll} [E_1, E_2] = - F_3 & [E_2, E_3] = - F_1 & [E_3, E_1] = - F_2 \\ [E_1, F_3] = - F_2 & [E_2, F_1] = - F_3 & [E_3, F_2] = - F_1 \\ [F_1, F_2] = F_3 & [F_2, F_3] = F_1 & [F_3, F_1] = F_2. \end{array}$$

On remarque que ces formules se déduisent par substitution circulaire des 3 suivantes

$$[E_1, E_2] = [E_2, F_1] = [F_2, F_1] = - F_3.$$

D'autre part, on a la formule :

$$[M_{ij}, e_k] = g_{ki}\, e_j - g_{kj}\, e_i$$

d'où : $[E_1, e_\circ] = e_1 \quad [E_2, e_\circ] = e_2 \quad [E_3, e_\circ] = e_3$

c-à-d : $[E_i, e_\circ] = e_i \quad 1 \leqslant i \leqslant 3$

de même : $[E_i, e_i] = e_\circ \quad 1 \leqslant i \leqslant 3$

et $[E_i, e_j] = o \quad$ si $\quad i \neq j \quad (1 \leqslant i, j \leqslant 3)$

enfin

$$\begin{array}{ll} [F_1, e_2] = e_3 & [F_1, e_3] = - e_2 \\ [F_2, e_3] = e_1 & [F_2, e_1] = - e_3 \\ [F_3, e_1] = e_2 & [F_3, e_2] = - e_1. \end{array}$$

On a ainsi obtenu :

3.7) PROPOSITION. - *L'algèbre de Lie du groupe de Poincaré admet pour base* $(e_\circ, e_1, e_2, e_3, E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3)$ *avec les relations de commutation précisées ci-dessus, les autres crochets étant nuls.*

*Les vecteurs* $(e_\circ, e_1, e_2, e_3)$ *engendrent un idéal abélien isomorphe à* $\mathbb{R}^4$.

*Les vecteurs* $(E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3)$ *engendrent une sous-algèbre isomorphe à* SL(2, $\mathbb{C}$) *et* SO(1,3).

*Les vecteurs* $(F_1, F_2, F_3)$ *engendrent une sous-agèbre isomorphe à* SU(2).

<u>REMARQUE</u>. - En introduisant le tenseur complètement antisymétrique $\varepsilon_{ijk}$ avec $\varepsilon_{123} = 1$, les formules s'écrivent :

$$\begin{cases} [E_i, E_j] = [E_j, F_i] = [F_j, F_i] = -\varepsilon_{ijk} F_k \\ [F_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k \\ [E_i, e_\circ] = e_i, [E_i, e_i] = e_\circ \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3). \end{cases}$$

-:-:-

# CHAPITRE 9 : ETUDE DE L'ALGÈBRE DE LIE DE $O(p,q)$.

## 1) Algèbre de Lie du groupe orthogonal d'une forme bilinéaire symétrique : 2-ème étude.

1.1) On considère un espace vectoriel réel de dimension finie $E$, et une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $B$, sur $E$. On désigne par $\ell$ l'isomorphisme $E \to E^*$ défini par :

$$B(x,y) = \langle x,\ell(y)\rangle = \langle y,\ell(x)\rangle.$$

On pose, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ :

$$u' = \ell^{-1}\ {}^t u\ \ell.$$

On sait que, alors :

$$u \in O(E,B) \Leftrightarrow u' = u^{-1}$$

(cf. pour tout ceci le ch. 1 du tome 1).

On a vu au ch. 8, 2.1 que l'algèbre de Lie de $O(E,B)$ et de $SO(E,B)$ est l'ensemble, noté $\underline{O(E,B)}$ ou $\underline{SO(E,B)}$ des $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$${}^t v\ell + \ell v = o \quad \text{c-à-d} \quad v' = -v.$$

Lorsqu'on considère $E = \mathbb{R}^n$, et $B$ définie par :

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{p} x^i y^i - \sum_{i=p+1}^{n} x^i y^i$$

on pose $q = n-p$ et on adopte les notations $O(p,q)$, $SO(p,q)$, $\underline{O(p,q)}$, $\underline{SO(p,q)}$. Les éléments des ces groupes ou algèbres de Lie sont de plus identifiés à des matrices dont la forme a été précisée au ch. 8, 2.1).

1.2) <u>THEOREME</u>. - *a) Il existe un isomorphisme d'espace vectoriel du produit extérieur* $E \wedge E = \Lambda^2 E$ *sur* $\underline{SO(E,B)}$. *A tout* $x \wedge y \in \Lambda^2 E$, *cet isomorphisme associe l'élément* $\widetilde{x \wedge y} \in \underline{SO(E,B)}$ *qui est l'application linéaire de* $E$ *dans* $E$ *suivante :*

$$\widetilde{x \wedge y} : x' \mapsto B(x',x)y - B(x',y)x.$$

*b) Lorsqu'on munit* $\Lambda^2 E$ *de la structure d'algèbre de Lie déduite de cet isomorphisme, on obtient la formule suivante pour le crochet :*

$$[x \wedge y, x' \wedge y'] = B(x,y')x' \wedge y + B(x',y)y' \wedge x + B(x,x')y \wedge y' + B(y,y')x \wedge x'.$$

<u>PREUVE</u>. - On sait qu'il existe un isomorphisme, associé à $B$, de $\mathcal{L}(E)$ sur l'ensemble $B\mathcal{L}(E)$ des formes bilinéaires sur $E \times E$. L'image de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans cet isomorphisme est la forme $\varphi_u$ définie par :

$$\varphi_u(x,x') = B(u(x),x').$$

La condition $u' = -u$ qui exprime que $u \in \underline{SO(E,B)}$ est équivalente au fait que $\varphi_u$ est antisymétrique. Ainsi, l'image de $\underline{SO(E,B)} \subset \mathcal{L}(E)$ par l'isomorphisme $u \mapsto \varphi_u$ est l'ensemble $AB\ell(E)$ des formes bilinéaires antisymétriques. Il est bien connu que $AB\ell(E)$ est isomorphe à $E^* \wedge E^* = \Lambda^2 E^*$, lui-même isomorphe à $\Lambda^2 E$ par l'application $\ell \wedge \ell : x \wedge y \mapsto \ell(x) \wedge \ell(y)$. Au total, il existe donc bien un isomorphisme d'espace vectoriel de $\Lambda^2 E$ sur $AB\ell(E)$ et sur $\underline{SO(E,B)}$, qu'il suffit de préciser :

A $x \wedge y \in \Lambda^2 E$, on associe tout d'abord $\ell(x) \wedge \ell(y) \in \Lambda^2 E^*$. Nous identifions toujours un produit extérieur d'ordre $p$ au tenseur antisymétrisé correspondant, ce qui donne :

$$\ell(x) \wedge \ell(y) = \ell(x) \otimes \ell(y) - \ell(y) \otimes \ell(x) \in E^* \otimes E^*.$$

L'isomorphisme canonique de $E^* \otimes E^*$ sur $B\ell(E)$ associe à $\ell(x) \otimes \ell(y) - \ell(y) \otimes \ell(x)$ la forme bilinéaire :

$$(x',x'') \mapsto \langle x',\ell(x)\rangle\langle x'',\ell(y)\rangle - \langle x',\ell(y)\rangle\langle x'',\ell(x)\rangle$$

c'est-à-dire :

$$(x',x'') \mapsto B(x',x)\, B(x'',y) - B(x',y)\, B(x'',x)$$

ou $$(x',x'') \mapsto B(B(x',x)y - B(x',y)x,x'').$$

On reconnait sous cette forme qu'il s'agit de l'image dans $B\ell(E)$, par $u \mapsto \varphi_u$, de l'application linéaire $u = \widetilde{x \wedge y}$ définie dans l'énoncé, ce qui prouve a).

La formule b) résulte alors de simples calculs.

Tout d'abord, on trouve que :

$$\widetilde{x\wedge y} \circ \widetilde{x'\wedge y'} = B(y',x)\widetilde{x' \otimes y} - B(x',x)\widetilde{y' \otimes y} - B(y',y)\widetilde{x' \otimes x} + B(x',y)\widetilde{y' \otimes x}$$

où $\widetilde{x' \otimes y}$ désigne l'extension à $E \otimes E$ de l'isomorphisme défini en a) :

$$\widetilde{x' \otimes y} : \xi \mapsto B(\xi,x')y.$$

On en déduit l'espression de :

$$[\widetilde{x\wedge y}, \widetilde{x'\wedge y'}] = \widetilde{x\wedge y} \circ \widetilde{x'\wedge y'} - \widetilde{x'\wedge y'} \circ \widetilde{x\wedge y}$$

d'où le résultat annoncé.

1.3) PROPOSITION. - *Dans l'isomorphisme défini au théorème précédent, la représentation adjointe de* $O(E,B)$ *ou de* $SO(E,B)$ *devient une représentation dans* $\Lambda^2 E$ *définie par la formule :*

$$Ad(u) = u\wedge u. \qquad (u \in SO(E,B) \text{ ou } O(E,B)).$$

PREUVE. - $Adu(x\wedge y)$ est, par définition, l'image inverse par isomorphisme de $u\,\widetilde{x\wedge y}\,u^{-1} \in \underline{SO(E,B)}$. Or :

$$\begin{aligned} u\,\widetilde{x\wedge y}\,u^{-1}(\xi) &= u\,[B(u^{-1}(\xi),x)y - B(u^{-1}(\xi),y)x] \\ &= B(u^{-1}(\xi),x)\;u(y) - B(u^{-1}(\xi),y)\;u(x) \\ &= B(\xi,u(x))\;u(y) - B(\xi,u(y))\;u(x) \quad \text{car } u \in SO(E,B) \\ &= \widetilde{u(x)\wedge u(y)}(\xi). \end{aligned}$$

c.q.f.d.

1.4) REMARQUES

1) Constantes de structure de l'algèbre de Lie $SO(E,B)$.

Soit $(e_1,..,e_n)$ une base de $E$. Soit $g_{ij} = B(e_i,e_j)$ et $e_{ij} = e_i \wedge e_j$. D'après le théorème 1.2 b, on a la formule

$$[e_{ij}, e_{k\ell}] = g_{ik}\, e_{j\ell} + g_{j\ell}\, e_{ik} - g_{jk}\, e_{i\ell} - g_{i\ell}\, e_{jk} .$$

Comme les $e_{ij}$, pour $i < j$, forment une base de $\Lambda^2 E$, on a ainsi les constantes de structure de l'algèbre de Lie $\Lambda^2 E$.

2) Constantes de structure de l'algèbre de Lie du produit semi-direct de $E$ et $O(E,B)$.

On sait (cf. Ch. 8) que l'algèbre de Lie de ce groupe, qui est celui des isométries affines de $B$, est somme directe de $E$ et de $SO(E,B)$. On peut prendre pour base les $M_{ij} = e_i \wedge e_j$ et les $M_{oi} = e_i$. On a alors les relations de commutation suivantes :

$$[M_{ij}, M_{k\ell}] = g_{ik}\, M_{j\ell} + g_{j\ell}\, M_{ik} - g_{jk}\, M_{i\ell} - g_{i\ell}\, M_{jk}$$

et
$$[M_{ij}, M_{ok}] = g_{ki}\, M_{oj} - g_{kj}\, M_{oi}$$

(car $[M_{ij}, M_{ok}] = [M_{ij}, e_k] = M_{ij}(e_k)$ d'après la définition du crochet, cf. Ch. 8, § 2). Ceci s'applique au groupe de Poincaré (cf. Ch. 8, § 3.5).

3) Forme de Killing.

Par définition, la forme de Killing $K$ d'une algèbre de Lie $A$ est la forme bilinéaire symétrique définie sur $A \times A$ par :

$$K(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, Y).$$

Grâce aux relations de commutation écrites ci-dessus, on trouve que, si la base des $e_i$ est orthogonale pour B (c-à-d. $g_{ij} = o$ si $i \neq j$)

$$K(e_{ij}, e_{k\ell}) = 0 \qquad \text{si} \quad \{i,j\} \neq \{k,\ell\}$$

$$K(e_{ij}, e_{ij}) = -2\,(n-2) \quad g_{ii}\, g_{jj} \quad (\text{pour } i \neq j).$$

Ainsi, la base des $e_{ij}$ est orthogonale pour K si $n \geqslant 3$, ce qui prouve que, si $\dim E \geqslant 3$, K est non dégénérée ; on démontre que ce résultat est équivalent au fait que SO(E,B) est semi-simple : cette caractérisation peut même être prise pour définition (cf. HELGASON, differential geometry and symmetric spaces 1962, ch. II, § 6). Nous verrons plus loin comment relier K à B.

Lorsque $\dim E = 2$, les groupes SO(E,B) sont tous isomorphes à SO(2) ou SO(1,1). Ces groupes sont abéliens : SO(2), isomorphe à $\mathbb{U}$, est bien connu (cf. Tome 1, ch. 3) quant à SO(1,1), sa composante neutre est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}t & \mathrm{sh}t \\ \mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}$, elle est isomorphe à $\mathbb{R}$.

## 2) Compléments d'algèbre.

### 2.1) Extension de B aux puissances tensorielles de E.

Considérons $\overset{r}{\otimes} E$, la propriété universelle qui le définit montre immédiatement que l'application :

$$(x_1,\ldots x_r,\ y_1,\ldots,y_r) \mapsto B(x_1,\ y_1)\ \ldots\ B(x_r,\ y_r)$$
$$(E_1 \times \ldots \times E_r) \times (E_1 \times \ldots \times E_r) \to \mathbb{R}$$

se factorise en une forme bilinéaire symétrique, encore notée B, sur $(\overset{r}{\otimes}E) \times (\overset{r}{\otimes}E)$ ; cette forme est donc définie, sur les éléments décomposés, par :

$$B(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r,\ y_1 \otimes \ldots \otimes y_r) = B(x_1,y_1)\ \ldots\ B(x_r,y_r).$$

D'autre part, puisque $\ell$ est un isomorphisme de E sur $E^*$, $\overset{r}{\otimes}\ell$ est un isomorphisme de $\overset{r}{\otimes} E$ sur $\overset{r}{\otimes}E^* = (\overset{r}{\otimes}E)^*$. On a, par définition :

$$\begin{aligned}<x_1 \otimes \ldots \otimes x_r,(\overset{r}{\otimes}\ell)(y_1 \otimes \ldots \otimes y_r)> &= <x_1 \otimes \ldots \otimes x_r,\ell(y_1) \otimes \ldots \otimes\ell(y_r)> \\ &= \prod_{i=1}^{r} <x_i,\ell(y_i)> = \prod_{i=1}^{r} B(x_i,y_i) \\ &= B(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r,\ y_1 \otimes \ldots \otimes y_r).\end{aligned}$$

Ceci montre que B est non dégénérée sur $\overset{r}{\otimes} E$ et que le couple $(B,\ \overset{r}{\otimes}\ \ell)$ se comporte sur $\overset{r}{\otimes} E$ comme le couple $(B,\ell)$ sur E. Dans la suite, on adoptera en général la notation $\ell$ au lieu de $\overset{r}{\otimes}\ \ell$.

### 2.2) Extension de B aux puissances extérieures de E.

On identifie $\Lambda^r E$ au sous-espace des tenseurs antisymétriques de $\overset{r}{\otimes} E$ par

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_r = a(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon_\sigma\, x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma^{-1}(r)}$$
$$= \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon_\sigma\, x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(r)}\,.$$

(Cette formule, où $S_r$ désigne le groupe symétrique, et $\varepsilon_\sigma$ la signature de $\sigma \in S_r$ définit l'opérateur d'antisymétrisation a).

De même, on identifie $\Lambda^r E^*$ au sous-espace des tenseurs antisymétriques de $\overset{r}{\otimes} E^* = (\overset{r}{\otimes} E)^*$.

Il est important de remarquer que le crochet de dualité que nous noterons

$$<x_1 \wedge \dots \wedge x_r,\ x'_1 \wedge \dots \wedge x'_r>_\otimes \ ,$$

défini par restriction de la dualité $(\overset{r}{\otimes} E,\ \overset{r}{\otimes} E^*)$ c-à-d égal par définition à :

$$<a(x_1 \otimes \dots \otimes x_r),\ a(x'_1 \otimes \dots \otimes x'_r)>$$

ne coïncide pas avec la dualité entre $\Lambda^r E$ et $\Lambda^r E^*$ obtenue en identifiant canoniquement $\Lambda^r E^*$ à $(\Lambda^r E)^*$. En effet, pour cette dualité canonique que nous noterons $<,>$ , la valeur du crochet devrait être $\det(<x_i, x'_i>)$ (cf. BOURBAKI, Alg., ch. 3 : Algèbre multilinéaire.), c-à-d :

$$(2.2.1) \qquad <x_1 \otimes \dots \otimes x_r,\ a(x'_1 \otimes \dots \otimes x'_r)>_\otimes$$

car

$$<x_1 \otimes \dots \otimes x_r,\ a(x'_1 \otimes \dots \otimes x'_r)>_\otimes = \sum \varepsilon_\sigma <x_1 \otimes \dots \otimes x_r,\ x'_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x'_{\sigma(r)}>$$
$$= \sum \varepsilon_\sigma <x_1, x'_{\sigma(1)}> \dots <x\ ,\ x'_{\sigma(r)}>$$
$$= \det\,(<x_i,\ x'_j>)$$

alors que, puisque la forme multilinéaire associée à $a(x'_1 \otimes \dots \otimes x'_r)$ est alternée par la construction,

$$\langle a(x_1 \otimes \dots \otimes x_r), a(x'_1 \otimes \dots \otimes x'_r)\rangle = r!\ \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_r, a(x'_1 \otimes \dots \otimes x'_r)\rangle$$

c-à-d (2.2.2) $\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_r, x'_1 \wedge \dots \wedge x'_r\rangle_{\otimes} = r!\ \det(\langle x_i, x'_j\rangle)$ et, plus généralement, si $z \in \Lambda^r E$ et $z' \in \Lambda^r E^*$, $\langle z,z'\rangle_{\otimes} = r!\ \langle z,z'\rangle$.

Ceci provient du fait que $\Lambda^r E$ est le quotient de $\overset{r}{\otimes} E$ par le sous-espace $N_r$ engendré par les tenseurs décomposés ayant deux facteurs égaux. Son dual est donc l'orthogonal dans $(\overset{r}{\otimes} E)^* = \overset{r}{\otimes} E^*$ de $N_r$, c-à-d l'ensemble des formes alternées, ou encore $a(\overset{r}{\otimes} E^*) = \Lambda^r E^*$. Mais la formule de dualité est, pour une telle forme $f$ :

$$\varphi(x_1 \wedge \dots \wedge x_r, f) = \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_r, f\rangle$$

c-à-d : 2.2.1.

Or on sait que $\overset{r}{\otimes} E = N_r \oplus a(\overset{r}{\otimes} E)$, de sorte que $\overset{r}{\otimes} E/_{N_r} = \Lambda^r E$ s'identifie canoniquement à $a(\overset{r}{\otimes} E)$ par projection ; dans cette identification, le dual de $a(\overset{r}{\otimes} E)$ s'identifie à celui de $\Lambda^r E$, c-à-d à $\Lambda^r E^*$, grâce à la formule ci-dessus. Malheureusement, la projection $\overset{r}{\otimes} E \to a(\overset{r}{\otimes} E)$ parallèlement à $N_r$ est égale à $\frac{1}{r!}\, a$ et ne donne donc pas l'identification habituelle de $\Lambda^r E$ à $a(\overset{r}{\otimes} E)$.

Calculons maintenant les restrictions de $B$ et $\ell$ à $\Lambda^r E$.

$$\begin{aligned}\ell(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = \ell(a(x_1 \otimes \dots \otimes x_r)) &= \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon_\sigma\, \ell(x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(r)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon_\sigma\, \ell(x_{\sigma(1)}) \otimes \dots \otimes \ell(x_{\sigma(r)}) \\ &= a(\ell(x_1) \otimes \dots \otimes \ell(x_r)) = \ell(x_1) \wedge \dots \wedge \ell(x_r)\end{aligned}$$

ce qui est bien connu : la restriction de $\overset{r}{\otimes}\ell$ à $\Lambda^r E$ est $\overset{r}{\Lambda}\ell$ (cf. BOURBAKI, loc. cit. ch. III, § 5, n° 7, remarques), ceci montre que $\ell(\Lambda^r E) \subset \Lambda^r E^*$ donc que $\ell(\Lambda^r E) = \Lambda^r E^*$ car $\ell$ respecte la dimension ; de plus, on a vu au passage que $\ell|\Lambda^r E = \Lambda^r \ell$. Soit $z, t \in \Lambda^r E$, on a :

$$B(z,t) = \langle z,\ell(t)\rangle_{\otimes} = r!\ \langle z,\ell(t)\rangle \quad \text{d'après (2.1).}$$

Comme on vient de voir que $\ell$ est un isomorphisme, il en résulte que $B$ restreinte à $\Lambda^r E$ est non dégénérée et forme avec la restriction de $\ell$ à $\Lambda^r E$ un couple possédant encore les propriétés des $E$, $B$ et $\ell$ initiaux, pour la dualité $\langle\ \rangle_{\otimes}$ entre $\Lambda^r E$ et $\Lambda^r E^*$. Si l'on utilise la dualité ordinaire, il faut remplacer $\ell$ par $r!\ell$.

On retiendra la formule

$$B(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r, y_1 \wedge \ldots \wedge y_r) = \langle x_1 \wedge \ldots \wedge x_r, \ell(x_1) \wedge \ldots \wedge \ell(x_r)\rangle_{\otimes}$$

c-à-d :

$$(2.2.3) \qquad B(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r, y_1 \wedge \ldots \wedge y_r) = r!\ \det(B(x_i,y_i)),$$

qui résulte immédiatement de 2.2.2.

Supposons par exemple que $(e_1,\ldots,e_n)$ soit une base de $E$ et posons toujours $e_{ij} = e_i \wedge e_j$. La formule 2.2.3 permet de calculer la matrice de $B$ dans $\Lambda^2 E$, c-à-d celle des $B(e_{ij}, e_{k\ell})$, en fonction de celle de $B$ dans $E$ c-à-d des $g_{ij} = B(e_i,e_j)$. En particulier, si la base $(e_i)$ est orthogonale, il en est de même de la base $(e_{ij})$ (pour $i < j$) et l'on a :

$$B(e_{ij},e_{ij}) = 2\ g_{ii}\ g_{jj}.$$

## 2.3) Relation entre la forme de Killing et l'extension de $B$ à $\Lambda^2 E$.

En comparant la formule précédente avec les calculs effectués en 1.4.3, on constate que :

$K = -(n-2)B.$

2.4) PROPOSITION. - *Pour tout* $u \in O(E,B)$, $Ad(u) \in O(\Lambda^2 E,B) = O(\Lambda^2 E, K)$.

PREUVE. - Plus généralement, d'après 2.2.3, on a, pour tout entier $r \geqslant 1$, le lemme suivant :

LEMME. - *Pour tout* $u \in O(E,B)$, $\Lambda^r u \in O(\Lambda^r E,B)$.

c.q.f.d.

2.5) Extension de $B$ à $\overset{r}{\otimes} E^*$ et $\Lambda^r E^*$.

On peut étendre $B$ à $\overset{r}{\otimes} E^*$ de deux manières.

- par transport de structure, grâce à l'isomorphisme $\ell : \overset{r}{\otimes} E \to \overset{r}{\otimes} E^*$.

Par définition, si les $x'_i$, $y'_i$ appartiennent à $E^*$, on posera :

$$\begin{aligned} B(x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_r, y'_1 \otimes \ldots \otimes y'_r) &= B(\ell^{-1}(x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_r), \ell^{-1}(y'_1 \otimes \ldots \otimes y'_r)) \\ &= B(\ell^{-1}(x'_1) \otimes \ldots \otimes \ell^{-1}(x'_r), \ell^{-1}(y'_1) \otimes \ldots \otimes \ell^{-1}(y'_r \end{aligned}$$

- En appliquant la construction de 2.1 où l'on remplace $E$ par $E^*$. Par définition , on posera

$$B(x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_r, y'_1 \otimes \ldots \otimes y'_r) = \prod_{i=1}^{r} B(x'_i, y'_i).$$

Comme, par définition de $B$ sur $E^*$, on a $B(x'_i, y'_i) = B(\ell^{-1}(x'_i), \ell^{-1}(y'_i))$, *ces deux définitions coïncident.*

2.6) Bases orthonormées directes.

On dira qu'une base $(e_i)$ de $E$ est orthonormée si $|B(e_i,e_j)| = \delta_{ij}$. Soit $(f_i)$ une deuxième base orthonormée, cherchons à quelle condition la matrice de passage $P$ de $(e_i)$ à $(f_i)$ appartient à $O(E,B)$. Comme $P$ est la matrice de l'application linéaire $u$, déterminée par les conditions $u(e_i) = f_i$, et calculée dans la base $(e_i)$, il faut et il suffit pour cela que $u$ soit une isométrie.

Or, si $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y^i e_i$, on a : $B(u(x), u(y)) = \Sigma x^i y^i B(f_i, f_i)$ alors que $B(x,y) = \Sigma x^i y^i B(e_i, e_i)$ donc $u$ est une isométrie ssi $B(f_i,f_i) = B(e_i, e_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ce qui signifie que les vecteurs de même indice dans les deux bases doivent avoir leurs carrés de même signe.

Supposons choisie une base particulière de référence $(e_i)$ dans $E$ ; si par exemple $E = \mathbb{R}^n$, ce sera la base canonique. Dans la suite, nous dirons alors qu'une base $(f_i)$ est orthonormée directe si la matrice de passage $P$ appartient à $SO(E,B)$. D'après ce qui précède, ceci équivaut à :

$$\begin{cases} (f_i) \text{ est de même sens que } (e_i),\ f_i \text{ est orthonormée, et pour tout } i, \\ B(e_i,e_i) = B(f_i,f_i). \end{cases}$$

Il est immédiat que le déterminant de $n$ vecteurs, et plus généralement, toute forme multilinéaire alternée sur $E^n$ prend la même valeur sur toutes les bases orthonormées directes.

Une dernière remarque nous sera utile par la suite : soit $(e_i)$ une base orthonormée, et $(e^i = e_i^*)$ la base duale, on a :

$$e_i^* = e^i = \varepsilon_i \ell(e_i) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_i = B(e_i, e_i).$$

En effet, $\langle e_j, \ell(e_i)\rangle = B(e_j, e_i) = \delta_{ij}\ \varepsilon_i$.

2.7) Adjoint d'un tenseur.

*Définition des applications* $\varphi$ *et* $\varphi_r$, $\psi$ *et* $\psi_r$.

2.7.1) Définition de $\psi_r$ : Choisissons une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de $E$ et $r \leqslant n$.

Soit $(x_1,\ldots,x_r) \in E^r$ et $T_{x_1\ldots x_r} : E^{n-r} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$T_{x_1\ldots x_r}(x_{r+1},\ldots,x_n) = \det(x_1,\ldots,x_r,\ x_{r+1},\ldots,x_n)$$

la forme $T_{x_1,\ldots,x_r}$ est multiplinéaire alternée, donc appartient à $\Lambda^{n-r}E^*$.
L'application $T : E^r \to \Lambda^{n-r}E^*$ est elle-même r-linéaire alternée, donc se factorise en $\psi_r : \Lambda^r E \to \Lambda^{n-r}E^*$ telle que :

$$T_{x_1\ldots x_r} = \psi_r(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r)$$

c-à-d que $\psi_r(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r)(x_{r+1},\ldots,x_n) = \det(x_i)$.

Identifions maintenant $\Lambda^{n-r}E^*$ à $(\Lambda^{n-r}E)^*$ de la manière habituelle (dite canonique par opposition à celle définie en 2.2), la définition devient :

$$\langle x_{r+1} \wedge \ldots \wedge x_n,\ \psi_r(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r)\rangle = \det(x_1,\ldots,x_n).$$

2.7.2) Définition de $\psi$.

Soit $\Lambda E = \bigoplus_{r=o}^{n} \Lambda^r E$ l'algèbre extérieure de $E$, le morphisme $\psi : \Lambda E \to \Lambda E^*$ est défini par la condition $\psi(x) = \psi_r(x)$ si $x \in \Lambda^r E$.

Nous allons en donner une définition globale (cf BOURBAKI, loc. cit., ch. 3,

§ 8, n° 5). Pour cela, pour tout $x \in \Lambda E$ (resp. $x' \in \Lambda E^*$) soit $\gamma_x$, $\delta_x$ (resp. $\gamma_{x'}$, $\delta_{x'}$) les endomorphismes de $\Lambda E$ (resp. $\Lambda E^*$) définis par :

$$\gamma_x(z) = x \wedge z \qquad \delta_x(z) = z \wedge x \qquad (z \in \Lambda E)$$

et $$\gamma_{x'}(z') = x' \wedge z' \qquad \delta_{x'}(z') = z' \wedge x' \qquad (z' \in \Lambda E^*).$$

Soit $e = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, et $e' = e^*_1 \wedge \ldots \wedge e^*_n$, les bases de $\Lambda^n E$ et $\Lambda^n E^*$ associées à $(e_i)$.

2.7.3) PROPOSITION. - *Pour tout* $x \in \Lambda E$, *on a* $\psi(x) = {}^t\gamma_x(e')$.

PREUVE. - Pour tout $z \in \Lambda E$, on a :

$$<z, {}^t\gamma_x(e')> = <x \wedge z, e'> \quad \text{(dualité canonique)}.$$

Supposons $x \in \Lambda^r E$ et $z \in \Lambda^s E$. Si $r+s > n$, on a $x \wedge z = 0$ et si $r+s < n$, on a $x \wedge z \in \Lambda^{r+s} E$, donc $<x \wedge z, e'> = 0$ d'après la définition de la dualité entre $\Lambda E$ et $\Lambda E^*$. Ainsi, ${}^t\gamma_x(e')$ s'annule sur tous les $\Lambda^s E$ sauf sur $\Lambda^{n-r} E$, donc ${}^t\gamma_x(e') \in \Lambda^{n-r} E^*$. Si $x$ et $z$ sont décomposables, il vient plus précisément :

$$\begin{aligned} <x_{r+1} \wedge \ldots \wedge x_n, {}^t\gamma_{x_1 \wedge \ldots \wedge x_r}(e')> &= <x_1 \wedge \ldots \wedge x_n, e^*_1 \wedge \ldots \wedge e^*_n> \\ &= \det(x_1, \ldots, x_n) \\ &= <x_{r+1} \wedge \ldots \wedge x_n, \psi_r(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r)>. \end{aligned}$$

c.q.f.d.

2.7.4) REMARQUE : (1) si $x \in \Lambda^r E$ et $z \in \Lambda^{n-r} E$ on a : $x \wedge z = \lambda e$ et

$$<z, \psi(x)> = <z, {}^t\gamma_x(e')> = <x \wedge z, e'> = \lambda.$$

Ceci permet de préciser la définition de $\psi_r$ quand $r=o$ ou $r=n$, cas où la définition initiale, en fait, ne s'applique pas. On pose

$$\psi_o(\lambda) = \lambda e' = \lambda e_1^* \wedge \ldots \wedge e_2^* \quad \text{et} \quad \psi_n(\lambda e) = \psi_n\,(\lambda e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = \lambda,$$

c-à-d $\psi_n(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \det(x_1,\ldots,x_n)$, et la formule établie ci-dessus est satisfaite, ainsi que les diverses propriétés de $\psi$ et $\psi_r$.

(2) Il est immédiat que $\psi$ et $\psi_r$ sont invariants dans tout changement de base de déterminant 1.

2.7.5) <u>Définition de $\varphi$ et de $\varphi_r$.</u> On définit $\varphi : \Lambda E \to \Lambda E^*$, de manière analogue, par $\varphi(x) = {}^t\delta_x(e')$ ; on a $\varphi(\Lambda^r E) = \Lambda^{n-r}E^*$ donc $\varphi$ induit un isomorphisme $\varphi_r : \Lambda^r E \to \Lambda^{n-r}E^*$ lié à $\psi_r$ par $\varphi_r = (-1)^{n(n-r)}\psi_r$.

2.7.6) <u>Exemples</u>. - Soit $H \subset \{1,2,\ldots n\}$ et $e_H = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$ où $i_1 < \ldots < i_r$ est la suite des éléments de $H$ dans l'ordre strictement croissant. Alors $\psi(e_H) = \psi_r(e_H) \in \Lambda^{n-r}E^*$, et $\Lambda^{n-r}E^*$ a pour base l'ensemble des $e^*_K$ où $\mathrm{Card}(K) = n-r$ ; la composante de $\psi(e_H)$ sur $e^*_K$ est

$$\langle e_K, \psi(e_H)\rangle = \det(e_{i_1},\ldots,e_{i_p}, e_{i_{p+1}},\ldots,e_{i_n})$$

où $i_{p+1} < \ldots < i_n$ est la suite strictement croissante des éléments de $K$. Ainsi, $\langle e_K, \psi(e_H)\rangle = 0$ si $K \cap H \neq \emptyset$, mais si $K = H^c$ (complémentaire de $H$)

$$\langle e_{H^c}, \psi(e_H)\rangle = \det(e_{i_1},\ldots, e_{i_p}, e_{i_{p+1}},\ldots,e_{i_n}) = \rho_{HH^c}$$

où $\rho_{HH^c} = (-1)^\nu$, $\nu$ étant le nombre de couples $(i,j) \in H \times H^c$ tels que $i > j$. On en déduit que :

$$\psi(e_H) = \rho_{HH^c}\, e^*_{H^c}.$$

Par exemple : $\psi(e_1 \wedge \ldots \wedge e_r) = e^*_{r+1} \wedge \ldots \wedge e^*_n$.

Grâce à ces formules, on vérifie que $\psi^{-1}$ est défini par

$$\psi^{-1}(x') = {}^t\delta_{x'}(e)$$

et de même que : $\varphi^{-1}(x') = {}^t\gamma_{x'}(e)$.

REMARQUES. - a) On peut noter aussi les formules :

$${}^t\psi_r = (-1)^{r(n-r)}\psi_{n-r} \quad \text{et} \quad {}^t\varphi_r = (-1)^{r(n-r)}\varphi_{n-r}.$$

b) Pour un lien entre $\psi, \varphi$ et le "produit intérieur", cf. BOURBAKI, loc. cit..

c) Les définitions précédentes ne font pas intervenir B. Il n'en est plus de même dans ce qui suit.

2.7.7) Définition de l'adjoint.

Soit $A \in \Lambda^r E$, on note ${}^*A$, et on appelle adjoint de A, l'élément $\ell^{-1}(\psi_r(A)) \in \Lambda^{n-r}E$.

Par exemple, avec les mêmes notations qu'en 2.7.4, mais en supposant la base $(e_i)$ orthonormée, ${}^*e_H = \rho_{HH^c}\, \ell^{-1}(e^*_{H^c}) = \rho_{HH^c} \left(\prod_{i \notin H} \varepsilon_i\right) e_{H^c}$ car $\ell^{-1}(e^*_i) = \varepsilon_i\, e_i$. En particulier :

$${}^*(e_1 \wedge \ldots \wedge e_r) = \left(\prod_{i=r+1}^{n} \varepsilon_i\right)(e_{r+1} \wedge \ldots \wedge e_n).$$

On a aussi ${}^*({}^*e_H) = \rho_{HH^c} \left(\prod_{i \notin H} \varepsilon_i\right) \rho_{H^cH} \left(\prod_{i \in H} \varepsilon_i\right) e_H$.

Mais $\left(\prod_{i \in H} \varepsilon_i\right)\left(\prod_{i \notin H} \varepsilon_i\right) = (-1)^q$ où q est le nombre de signes – de la forme B et $\rho_{HH^c}\,\rho_{H^cH} = (-1)^{\nu+\nu'}$ où $\nu+\nu' = \mathrm{card}(H \times H^c) = r(n-r)$ d'où :

$$^*(^*e_H) = (-1)^{r(n-r)+q} e_H$$

et, par linéarité, on a :

$$^{*\,*}A = (-1)^{r(n-r)+q}\ A$$

où $A \in \Lambda^r E$ et $q$ est le nombre de signes - de la forme $B$.

En particulier $A \mapsto {}^*A$ est un isomorphisme de $\Lambda^r E$ sur $\Lambda^{n-r}E$ dont l'inverse est $A \mapsto (-1)^{r(n-r)+q}\ {}^*A$.

2.7.8) REMARQUES. 1) En utilisant les formules de la remarque 2.6.4, on trouve en particulier que :

$$^*(\lambda e) = \lambda \quad \text{c-à-d} \quad {}^*(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \det(x_1,\dots,x_n) \quad \text{et}$$

$$^*\lambda = (-1)^q\ \lambda e = (-1)^q\ \lambda e_1 \wedge \dots \wedge e_n .$$

2) La définition de l'adjoint est invariante pour tout changement de base de déterminant 1 mais les formules établies ci-dessus concernant les $e_i$ et les $e_i^*$ ne sont invariantes que dans une même classe de bases orthonormées directes.

2.7.9) <u>PROPOSITION</u>. - *Soient* $A \in \Lambda^r E$ *et* $A' \in \Lambda^{n-r}E$ *on a :*

$$B(^*A, A') = (n-r)\ !\ {}^*(A \wedge A').$$

<u>PREUVE</u>. - Si $A = x_1 \wedge \dots \wedge x_r$ et $A' = x_{r+1} \wedge \dots \wedge x_n$, on a :

$$^*(A \wedge A') = \det(x_1,\dots,x_n)$$

alors que $B({}^{*}A, A') = B(\ell^{-1}(\psi(A)), A')$

$= (n-r)!\ \langle A', \psi(A)\rangle$ (dualité canonique)

$= (n-r)!\ \langle x_{r+1} \wedge \ldots \wedge x_n, \psi(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r)\rangle$

$= (n-r)!\ \det(x_1,\ldots,x_n)$.

2.7.10) <u>COROLLAIRE</u>. - *Si* $A$ *et* $A'$ *appartiennent à* $\Lambda^r E$ $(o \leqslant r \leqslant n)$ *et si* $q$ *est le nombre de signes - de la forme* $B$, *on a :*

$$B({}^{*}A, {}^{*}A') = \frac{(n-r)!}{r!} (-1)^q B(A,A').$$

<u>PREUVE</u>. - $B({}^{*}A, {}^{*}A') = (n-r)!\ {}^{*}(A \wedge {}^{*}A')$, alors que :

$$B(A,A') = (-1)^{(n-r)r+q} B({}^{*}{}^{*}A',A)$$
$$= (-1)^{(n-r)r+q}\ r!\ {}^{*}({}^{*}A' \wedge A)$$

et $A \wedge {}^{*}A' = (-1)^{r(n-r)}\ {}^{*}A' \wedge A$ d'où le résultat.

2.8) <u>Produit vectoriel</u>.

<u>DEFINITION</u>. - *Soit* $A \in \Lambda^r E$, $A' \in \Lambda^s E$, *on pose :*

$$A \times A' = {}^{*}(A \wedge A'),$$

*(ainsi* $A \times A' \in \Lambda^{n-(r+s)}E$*), et on dit que* $A \times A'$ *est le produit vectoriel de* $A$ *et de* $A'$.

<u>EXEMPLE</u>. - Si $n = 3$, si on choisit pour $B$ une forme définie positive (c-à-d espace euclidien), on retrouve bien le produit vectoriel habituel. En effet, soit $(e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée, on a :

$$e_1 \times e_2 = {}^{*}(e_1 \wedge e_2) = {}^{*}e_{12} = e_3$$
$$e_2 \times e_3 = {}^{*}(e_2 \wedge e_3) = {}^{*}e_{23} = e_1$$
$$e_3 \times e_1 = {}^{*}(e_3 \wedge e_1) = {}^{*}(-e_{13}) = e_2.$$

2.8.1) <u>THEOREME</u>. - *L'isomorphisme* $x \wedge y \mapsto \widetilde{x \wedge y}$ *de* $\Lambda^2 E$ *sur* <u>SO(E,B)</u> *défini en 1.2 peut aussi être défini de la manière suivante : à tout* $A \in \Lambda^2 E$, *il associe l'opérateur* $\tilde{A}$ *tel que*

$$\tilde{A}(x) = (-1)^q \, {}^*A \times x$$ *(q désigne le nombre de signes - de la forme B).*

<u>PREUVE</u>. - Identifions $\Lambda^2 E$ à $a(E \otimes E)$. On a la suite d'isomorphismes :

$$E \otimes E \xrightarrow{\ell \otimes 1} E^* \otimes E \longrightarrow \mathcal{L}(E).$$

l'image $\widetilde{x \otimes y}$ de $x \otimes y$ par cet isomorphisme est l'opérateur linéaire associé à $\ell(x) \otimes y \in E^* \otimes E$ c-à-d :

$$\xi \mapsto \langle \xi, \ell(x) \rangle y = B(\xi,x)y.$$

Ainsi, à $x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x$ est associé :

$$\xi \to B(\xi,x)y - B(\xi,y)x.$$

On reconnait $\widetilde{x \wedge y}$, par conséquent, l'isomorphisme induit de $\Lambda^2 E$ sur son image est bien celui de 1, 2.

<u>LEMME</u>. - *Soit* $A \in E \otimes E$, *son image* $\tilde{A}$ *dans l'isomorphisme précédent vérifie, pour tous* $\xi,\eta \in E$ :

$$B(\tilde{A}(\xi),\eta) = B(A,\xi \otimes \eta).$$

En effet, si $A = x \otimes y$

$$B(\tilde{A}(\xi),\eta) = B(\xi,x)\ B(y,\eta) = B(x,\xi)\ B(y,\eta) = B(x \otimes y,\xi \otimes \eta).$$

A partir de ce lemme, on redémontre facilement que l'image par $A \mapsto \tilde{A}$ de $\Lambda^2 E$

est $\underline{SO(E,B)}$. En effet, $\tilde{A} \in \underline{SO(E,B)}$ ssi $\tilde{A}$ vérifie, pour tous $\xi, \eta \in E$ :

$$B(\tilde{A}(\xi),\eta) = - B(\xi,\tilde{A}(\eta))$$

c-à-d $$B(A,\xi \otimes \eta) = - B(A,\eta \otimes \xi)$$

ou $$<\xi \otimes \eta, \ell(A)> = - <\eta \otimes \xi, \ell(A)>.$$

Or, ceci signifie que la forme bilinéaire associée à $\ell(A)$ est antisymétrique c-à-d que $\ell(A) \in \Lambda^2 E^*$ c-à-d que $A \in \Lambda^2 E$.

On achève maintenant la preuve du théorème en remarquant que, si $\tilde{A} \in \underline{SO(E,B)}$,

$$\begin{aligned}
B(\tilde{A}(\xi),\eta) &= \frac{1}{2} B(A,\xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi) = \frac{1}{2} B(A,\xi \wedge \eta) \\
&= (-1)^{2(n-2)} \frac{(-1)^q}{2} B({}^{*\,*}A,\xi \wedge \eta) \\
&= (-1)^q \, {}^*({}^*A \wedge \xi \wedge \eta) = (-1)^q B({}^*({}^*A \wedge \xi),\eta) \\
&= (-1)^q B({}^*A \times \xi,\eta).
\end{aligned}$$

c.q.f.d.

<u>REMARQUE</u>. - Mêmes remarques sur l'invariance qu'en 2.7.8) 2).

-:-:-:-

# CHAPITRE 10 : CENTRE DE L'ALGÈBRE ENVELOPPANTE.

## 1) Retour sur l'algèbre enveloppante.

On a introduit au Ch. 7, l'algèbre enveloppante $U(\underline{G}^{\mathbb{C}})$ de la complexifiée $\underline{G}^{\mathbb{C}}$ de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie $G$, sous forme concrète (algèbre de distributions ou d'opérateurs différentiels sur $G$). On va revenir ici sur la définition de cette algèbre.

### 1.1) Présentation heuristique.

Soit $A$ une algèbre de Lie sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On cherche une algèbre associative à unité $U$ telle que :

$$A \subset U \quad \text{et, pour tous} \quad x,y \in A, \quad [x,y] = xy - yx$$

(où $(x,y) \mapsto xy$ note la multiplication dans $U$).

Supposons $A$ de dimension finie, de base $(e_1,\ldots,e_n)$. On peut toujours supposer que $U$ est engendrée, en tant qu'algèbre, par les éléments $(e_1,\ldots,e_n)$, quitte à la remplacer par la sous-algèbre qu'ils engendrent (ceci revient à choisir $U$ "minimale"). Ainsi, les $e_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots e_{i_m}^{\alpha_{i_m}}$, où $i_1,\ldots,i_m \in \{1,2,\ldots n\}$ et $(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m}) \in \mathbb{N}^m$, forment une famille génératrice, au sens des espaces vectoriels, dans $U$. Mais cette famille n'est pas libre, car on dispose des "relations de commutation " définissant le crochet de $A$. Si, par exemple, $A$ est de dimension $2$, et vérifie la relation de commutation $[e_1,e_2] = e_2$, on a, dans $U$,

$$e_1\, e_2 - e_2\, e_1 = e_2 \qquad \text{c-à-d.} \qquad e_2\, e_1 = e_1\, e_2 - e_2.$$

On conçoit que cette formule permette, par récurrence, d'exprimer tout produit $e_1^{\beta_1} e_2^{\beta_2} e_1^{\gamma_1} e_2^{\gamma_2} \dots e_1^{\lambda_1} e_2^{\lambda_2}$ comme combinaison linéaire de produits du type $e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2}$. De même, si $A$ est de dimension $n$, on conçoit que les produits $e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n}$ suffisent à engendrer $U$.

Ceci signifie, dans le cas d'un groupe de Lie, que $D(G)$, l'algèbre des opérateurs différentiels invariants par translation à gauche, est engendrée par les $\tilde{X}_1^{\alpha_1} \dots \tilde{X}_n^{\alpha_n}$.

1.2) <u>Présentation abstraite</u>. (Mêmes notations qu'en 1.1).

Comme au tome 1, Ch. 4, soit $T^r(A) = A \otimes \dots \otimes A$ (r facteurs) et soit $T(A) = \bigoplus_{r=o}^{+\infty} T^r(A)$ l'algèbre tensorielle de $A$ (on convient que $T^\circ(A) = K$). La structure d'espace vectoriel sur $K$ de $T(A)$ est celle de somme directe, la structure d'algèbre s'obtient en prolongeant par bilinéarité la multiplication $(x,y) \mapsto x \otimes y$ définie a priori de $T^r(A) \otimes T^{r'}(A)$ dans $T^{r+r'}(A)$. Cette multiplication ne dépend que de la structure d'espace vectoriel de $A$. Si l'on choisit une base $(e_1,\dots,e_n)$ de $A$, $T(A)$ apparait comme l'algèbre des polynômes non commutatifs en les $n$ indéterminées $(e_1,\dots,e_n)$, à coefficients dans $K$, ce qui signifie simplement qu'elle admet pour une base les $e_{i_1} \dots e_{i_r}$ (où $1 \leqslant i_k \leqslant n$, $r \in \mathbb{N}$).

Soit $I$ l'idéal de $T(A)$ engendré par les $x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$ pour $x,y \in A$. L'introduction de $I$ permet de mettre en relation les structures d'algèbres de $T(A)$ et de $A$, en effet, il n'est pas difficile de montrer que :

1.3) PROPOSITION. - *a) L'algèbre* $U = T(A)/_I$ *est une algèbre associative à unité.*

*b) Soit* $\varphi$ *le morphisme* $A \to U$ *composé de l'injection canonique* $A \to T(A)$ *et de la surjection canonique* $T(A) \to U$. *Alors,* $\varphi$ *est un morphisme d'algèbre de Lie (c-à-d que* $\varphi$ *est linéaire et vérifie pour tous* $x,y \in A$,
$\varphi([x,y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$) *et possède la propriété universelle suivante : pour tout morphisme d'algèbres de Lie* $\varphi'$ *de* $A$ *dans une algèbre associative à unité* $U'$, *il existe un unique morphisme d'algèbres associatives* $\psi : U \to U'$ *tel que* $\varphi' = \psi \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & U \arrow[dl, "\psi"] \\ U' & \end{tikzcd}$$

La propriété universelle énoncée en b) caractérise le couple $(\varphi, U)$ à un isomorphisme près. Comme $\varphi$ est injective, on identifie souvent $A$ à $\varphi(A)$, ainsi $A \subset U$ et, en oubliant $\varphi$, on dit souvent que $U$ est l'algèbre enveloppante universelle de $A$. On emploie la notation $U(A)$ pour cette algèbre. La propriété b) signifie en particulier que toute représentation de l'algèbre de Lie $A$ dans une algèbre associative se prolonge en une représentation d'algèbre de $U(A)$.

Avec cette définition précise de $U(A)$, on peut maintenant démontrer ce que 1.1 laissait espérer (on trouvera le détail de cette démonstration dans HOCHSCHILD, la structure des groupes de Lie, Dunod, Ch. X ou DIXMIER, algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars Ch. 2, 2.1.11).

1.4) THEOREME de POINCARE-BIRKHOFF-WITT.

*Soit* $(e_1,\dots,e_n)$ *une base de l'algèbre de Lie* A. *Soit* $J$ *l'ensemble des suites finies* $\sigma$ *d'entiers* p *tels que* $o \leqslant p \leqslant n$ *(y compris la suite vide), croissantes au sens large. Pour* $\sigma = (i_1,\dots,i_p) \in J$, *posons* $e_\sigma = e_{i_1} \dots e_{i_p}$ *(et* $e_\emptyset = 1$*). Les* $e_\sigma$ *forment une base de* U(A).

Autrement dit, les $e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n}$, dont on avait remarqué en 1.1 qu'ils formaient un système générateur, sont indépendants, et U(A) apparait comme l'algèbre des polynômes en les n indéterminées $(e_1,\dots,e_n)$ satisfaisant aux relations de commutation définissant la structure de A.

1.5) REMARQUES. - 1) Lorsque $K = \mathbb{R}$, on peut définir U(A), $U(A^{\mathbb{C}})$ et $U(A)^{\mathbb{C}}$ ($A^{\mathbb{C}}$ et $U(A)^{\mathbb{C}}$ sont les complexifiées respectives de A et de U(A)). On vérifie que $U(A)^{\mathbb{C}}$ et $U(A^{\mathbb{C}})$ sont isomorphes de manière évidente.

2) Le degré (appelé souvent filtration, cf. par ex. DIXMIER, ouvrage cité) d'un élément x de U(A) se définit facilement :

- soit après choix d'une base, en utilisant 1.4 : c'est le degré du polynôme exprimant x.

- soit en définissant l'ensemble $U_p(A)$ des éléments de degré $\leqslant p$ comme l'image canonique dans U(A) de $\bigoplus_o^p T^r(A)$. Dans ce cas, le degré de x est le plus petit entier p tel que $x \in U_p(A)$.

Bien entendu, ces deux définitions coïncident, c-à-d que $U_p(A)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de U(A), admettant pour base les $e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n}$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leqslant p$. Lorsque $A = \underline{G}^{\mathbb{C}}$, cette notion de degré ou de filtration coïncide avec les notions d'ordre d'un opérateur différentiel ou d'une distribution.

## Base symétrique de U(A).

Nous allons introduire une base de $U(A)$ qui ne dépend pas de l'ordre des éléments $(e_1,\dots,e_n)$ de la base de $A$, ceci au moyen de deux définitions équivalentes.

a) Etant donné $M = (r_1,\dots,r_n) \in \mathbb{N}^n$, on désigne par $e(M)$ le coefficient de $t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n}$ dans le développement de $\frac{1}{|M|!}(t_1e_1 + \dots + t_ne_n)^{|M|}$ où $|M| = r_1 + \dots + r_n$. Ce coefficient est la somme, divisée par $|M|!$, de $\frac{|M|!}{r_1!\dots r_n!}$ monômes <u>formellement</u> distincts (c-à-d que les monômes correspondants sont distincts dans $T(A)$) : tous ceux où figurent $r_1$ fois $e_1$, $r_2$ fois $e_2,\dots,r_n$ fois $e_n$. Par exemple, si $M = (3,2)$, on obtient 10 monômes,

$$e_1^3e_2^2 + e_2^2e_1^3 + e_1e_2^2e_1^2 + e_1^2e_2^2e_1 + e_2e_1^3e_2 + e_2e_1^2e_2e_1 + e_1e_2e_1^2e_2 + e_2e_1e_2e_1^2 + \\ + e_1^2e_2e_1e_2 + e_1e_2e_1e_2e_1,$$

distincts ou non, suivant les relations de commutation définissant le crochet dans $A$.

b) Etant donné $M$ comme en a), on pose :

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = \dots = f_{r_1} = e_1 \\ f_{r_1+1} = \dots = f_{r_1+r_2} = e_2 \\ \dots\dots \\ f_{r_{n-1}+1} = \dots = f_{r_{n-1}+r_n} = e_n. \end{cases}$$

Avec $|M| = p$, on a alors $e(M) = \frac{1}{|M|!\ r_1!\ldots r_n!} \sum_{\sigma \in S_p} f_{\sigma(1)}\ldots f_{\sigma(p)}$, ce qui constitue la 2-ème définition.

Il n'est pas difficile de vérifier que l'ensemble des $e(M)$ forme une base de $U(A)$ (si l'on veut l'écrire, il faut partir de 1.4) : la démonstration consiste à prouver plus précisément que les $e(M)$, pour $|M| \leqslant p$, forment une base de $U_p(A)$.

On prend pour base en général les $r_1!\ldots r_n!\ e(M)$, c-à-d. les :

$$\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in Sp} f_{\sigma(1)}\ldots f_{\sigma(p)},$$

où $(f_1,\ldots,f_p) \in \{e_1,\ldots,e_n\}^p$. L'élément ainsi construit ne dépend effectivement que de $M = (r_1,\ldots,r_n)$ où $r_k$ est le nombre des $f_i$ égaux à $e_k$. Lorsque $A$ est abélienne,

$$\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in Sp} f_{\sigma(p)} = f_1\ldots f_p$$

dans ce cas, bien sûr, $U(A) = K\,[e_1,\ldots,e_n]$ ce qui résultait aussi de 1.4 ou de la définition de $U(A)$.

Dans le cas général ($A$ non nécessairement abélienne), on reconnait en $\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in Sp} f_{\sigma(1)}\ldots f_{\sigma(p)}$ l'image canonique du tenseur de $T(A)$ symétrisé de $f_1 \otimes \ldots \otimes f_p$. Pour $p$ fixé, l'ensemble de ces symétrisés est une base de l'espace $s_p(A)$ des tenseurs symétriques d'ordre $p$. L'image canonique de $s_p(A)$ dans $U(A)$, notée $U^p(A)$, admet donc pour base les $e(M)$ pour $|M| = p$. On en déduit que

$$U_p(A) = U^p(A) \oplus U_{p-1}(A).$$

Les éléments de $U^p(A)$ sont évidemment appelés éléments symétriques homogènes d'ordre $p$.

## 2) Algèbre symétrique et symétrisation.

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $K$ et $T(E)$ l'algèbre tensorielle de $E$. Soit $\mathcal{J}$ l'idéal de $T(E)$ engendré par les $x \otimes y - y \otimes x$.

2.1) DEFINITION. - *On appelle algèbre symétrique de* $E$ *et on note* $S(E)$ *l'algèbre quotient* $T(E)/_{\mathcal{J}}$. *Cette algèbre commutative possède la propriété universelle suivante :*

*Soit* $\varphi : E \to S(E)$ *l'application canonique ; pour toute application linéaire* $\varphi'$ *de* $E$ *dans une algèbre associative commutative à unité* $S'$, *il existe un unique morphisme d'algèbres associatives* $\psi : S(E) \to S'$ *tel que* $\varphi' = \psi \circ \varphi$ .

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & S(E) \arrow[dl, "\psi"] \\ S' & \end{tikzcd}$$

REMARQUE. - Cette définition et les propriétés qui en découlent ne sont qu'un cas particulier de 1.2 et 1.3 : celui où $A$ est abélienne.

2.2) Notons (comme au tome 1, ch. 4) $s_r$ le projecteur de $T^r(E)$ sur le sous-espace $s_r(E)$ des tenseurs symétriques d'ordre $r$, défini par $s_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma . x$. On peut vérifier que l'idéal $\mathcal{J}$ est gradué c-à-d que

$J = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} J_r$ où $J_r = J \cap T^r(E)$ et que $J_r$ est le noyau de $s_r$ (cf., par exemple, BOURBAKI, Alg. lin., ch. III, § 6, n° 3). On a donc :

$$T^r(E) = J_r \oplus s_r(E), \quad T(E) = J \oplus (\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} s_r(E)).$$

Ceci montre que $S(E)$ est isomorphe à $\oplus\, s_r(E)$ <u>en tant qu'espace vectoriel</u>. Soit $z \in T^r(E)$, l'isomorphisme associe à la classe de $z$ dans $S(E)$ l'élément $s_r(z) \in s_r(E)$.

Bien entendu, $J_o = J_1 = \{o\}$, ce qui fait que l'on peut identifier $E = s_1(E)$ à un sous-espace de $S(E)$ ce que l'on fait toujours. Soit $x,y \in E$, leur produit $x \otimes y$ n'est pas en général un tenseur symétrique, ce qui montre que $\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} s_r(E)$ n'est pas une sous-algèbre de $T(E)$, donc que l'isomorphisme de $S(E)$ avec $\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} s_r(E)$ n'est pas un isomorphisme d'algèbre. L'image dans $\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} s_r(E)$ du produit $xy$ calculé dans $S(E)$ est $s_2(x \otimes y) = \frac{1}{2}(x \otimes y + y \otimes x)$. Il importe donc de ne pas confondre le produit dans $S(E)$ et dans $T(E)$.

On a vu au tome I, ch. 4, que le choix d'une base de $E(e_1,\dots,e_n)$ permet de définir un isomorphisme $\theta$, d'espaces vectoriels, de $s_r(E)$ sur l'espace $K_r[X_1,\dots,X_r]$ des polynômes homogènes à $r$ indéterminées :

$$\theta(s_r(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})) = X_{i_1} \dots X_{i_r}.$$

On en déduit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $S(E)$ sur $K[X_1,\dots,X_n]$ : soit $z \in T^r(E)$, cet isomorphisme associe donc à la classe de $z$ dans $S(E)$, l'élément $\theta(s_r(z))$. Ainsi à $e_{i_1}\dots e_{i_r} \in S(E)$ est associé $X_1 \dots X_r$, ce qui montre que cet isomorphisme est en fait un isomorphisme d'algèbres.

Lorsqu'on identifie $E$ à un sous-espace de $S(E)$, l'existence de l'isomorphisme précédent se traduit par le fait que pour toute base $(e_1,\dots,e_n)$ de $E$, les $e_1^{r_1}\dots e_n^{r_n}$ forment une base de $S(E)$, ce qui est un cas particulier du théorème de Poincaré-Birkoff-Witt et amène à identifier souvent $S(E)$ à $K[e_1,\dots,e_n]$. Mais cette réalisation de $S(E)$ a l'inconvénient de dépendre de la base. En voici une autre qui n'en dépend pas :

2.3) On dit qu'une fonction $f : E \to K$ est polynômiale s'il existe un polynôme $P$ à coefficients dans $K$ et des $y_i \in E^*$ $(1 \leqslant i \leqslant d°P)$ tels que $f$ s'exprime sous la forme :

$$x \mapsto P(y_1(x),\dots, y_m(x)) = P(\langle x,y_1\rangle,\dots, \langle x,y_m\rangle).$$

L'ensemble des fonctions polynomiales sur $E$ est une algèbre associative $\mathcal{A}$ à élément unité. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$, pour toute $f \in \mathcal{A}$, il existe évidemment un unique $P \in K[X_1,\dots,X_n]$ tel que, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \in E$, on ait :

$$f(x) = P(x^1,\dots,x^n) = P(e_1^*(x),\dots, e_n^*(x)).$$

La bijection $\mathcal{A} \to K[X_1,\dots,X_n]$ ainsi mise en évidence est un isomorphisme. En remarquant que les $e_i^*(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des éléments particuliers de $\mathcal{A}$, on voit que l'égalité qui définit cette bijection signifie que le bijection inverse $K[X_1,\dots X_n] \to \mathcal{A}$ est l'application :

$$P \mapsto P(e_1^*,\dots,e_n^*).$$

Ainsi, par ce choix d'une base, $\mathcal{A}$ est identifiée à $K[e_1^*,\dots,e_n^*]$.

Soit $\varphi'$ le morphisme canonique de $E$ sur $E^{**}$ : $\varphi'_x$ est la forme linéaire $y \mapsto \langle x,y\rangle$ sur $E^*$. On peut considérer $\varphi'$ comme application linéaire de $E$ dans l'algèbre $\mathcal{A}^*$ des fonctions polynômiales sur $E^*$.
D'après la propriété universelle de $S(E)$, il existe donc un morphisme d'algèbre associative $\psi : S(E) \to S'$ tel que $\psi \circ \varphi = \varphi'$, où $\varphi$ est l'application canonique $E \to S(E)$, comme on identifie $\varphi$ à l'injection canonique, ceci signifie que $\psi$ prolonge $\varphi$. Si $x_i \in E (1 \leqslant i \leqslant p)$, on aura :

$$\begin{aligned} \psi(x_1 \dots x_p) &= \varphi'_{x_1} \dots \varphi'_{x_p} \\ &= x_1 \dots x_p \quad \text{(si l'on identifie } E \text{ à } E^{**}). \end{aligned}$$

Le morphisme $\psi$ est un isomorphisme car, si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $E$, il applique la base des $e_1^{r_1}\dots e_n^{r_n}$ de $S(E)$ sur la base correspondante de $\mathcal{A}^* = K[e_1,\dots,e_n]$. En résumé :

<u>THEOREME</u>. - *Il existe un isomorphisme canonique* $\psi$ *de l'algèbre symétrique* $S(E)$ *sur l'algèbre* $\mathcal{A}^*$ *des fonctions polynômiales sur* $E^*$. *Soit* $x_1,\dots x_p \in E$, $\psi(x_1,\dots,x_p) = x_1\dots x_p$ *est la fonction :*

$$y \mapsto \langle x_1,y\rangle \dots \langle x_p,y\rangle.$$

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$. Soit $z \in S(E)$ et $P \in K[X_1,\dots,X_n]$ tel que $z = P(e_1,\dots,e_n)$. Alors, $\psi(z)$ est le fonction polynômiale $P(e_1,\dots,e_n)$ c-à-d :

$$y \mapsto P(\langle y,e_1\rangle,\dots, \langle y,e_n\rangle) = P(y_1,\dots,y_n) \quad (\text{si } y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*).$$

<u>REMARQUES</u>. 1) Cet énoncé signifie que les deux identifications de $S(E)$ à $K[e_1,\dots,e_n]$ coïncident formellement : dans l'une, $e_1,\dots,e_n$ sont des indéterminées, dans l'autre ce sont des fonctions sur $E^*$.

2) Concrètement, si après choix d'une base on identifie $S(E)$ à $K[e_1,\dots,e_n]$, à toute fonction polynômiale $f$ sur $E^*$, on associe l'unique polynôme $P$ tel que l'on ait, avec les notations du théorème :

$$f(y) = P(y_1,\dots,y_n) = P(e_1(y),\dots,e_n(y))$$

c-à-d. $f = P(e_1,\dots,e_n)$.

2.4) Prolongement à $S(E)$ des applications linéaires $E \to E$.

Soit $\varphi : E \to E$ linéaire. Identifions $S(E)$ à l'ensemble des fonctions polynômiales sur $E^*$; si $f \in S(E)$, la fonction $\varphi f = f \circ {}^t\varphi$ appartient encore à $S(E)$. On obtient ainsi un morphisme d'algèbres $S(E) \to S(E)$ qui prolonge $\varphi$. En effet, dans cette réalisation de $S(E)$, les $x \in E$ sont identifiés aux formes linéaires qu'ils définissent sur $E^*$ et la définition précédente associe à $x$ la fonction polynômiale $y \mapsto \langle x, {}^t\varphi(y)\rangle = \langle\varphi(x),y\rangle$ c-à-d l'élément $\varphi(x) \in E$.

Si, après choix d'une base, $P \in K[X_1,\dots,X_n]$ est associé à $f$, on trouve que le polynôme $\varphi P$ associé à $\varphi f$ est $\varphi P(e_1,\dots,e_n) = P(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))$.

2.5) Symétrisation.

Soit $A$ une algèbre de Lie de dimension finie, de base $(e_1,\dots,e_n)$ sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les deux bases de $U(A)$ et la base de $S(A)$ (obtenue en identifiant $S(A)$ à $K[e_1,\dots,e_n]$) que nous avons mises en évidence sont indexées par le même ensemble d'indices $\mathbb{N}^n$. On définit donc un isomorphisme $\lambda$ d'espaces vectoriels de $S(A)$ sur $U(A)$ en appliquant l'élément $e_1^{r_1}\dots e_n^{r_n}$ de la base de $S(A)$ sur l'élément correspondant de la base symétrique de $U(A)$ c-à-d par la condition :

$$\lambda(e_1^{r_1}\dots e_n^{r_n}) = r_1 !\dots r_n ! \, e(M).$$

Il n'est pas difficile de voir que, pour tous éléments $y_1,\dots,y_p$ de A, on a plus généralement :

$$(2.6) \qquad \lambda(y_1\dots y_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} y_{\sigma(1)}\dots y_{\sigma(p)}.$$

Dans cette formule, le produit $y_1\dots y_p$ est calculé dans S(A) et le produit $y_{\sigma(1)}\dots y_{\sigma(p)}$ est calculé dans U(A). Sous cette forme, on voit que l'isomorphisme $\lambda$ ne dépend pas en réalité de la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Ceci peut également se voir de la manière suivante : identifions S(A) à $\bigoplus_{p \in \mathbb{N}} s_p(A)$. Par restriction de l'application canonique, il existe pour tout p une application $\lambda_p : s_p(A) \to U^p(A)$. Soit $y_1\dots y_p \in A$, on a

$$\begin{aligned}\lambda_p(s_p(y_1 \otimes \dots \otimes y_p)) &= \lambda_p(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in Sp} y_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes y_{\sigma(p)}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in Sp} y_{\sigma(1)}\dots y_{\sigma(p)}\end{aligned}$$

et on a déjà remarqué en 2.2. que $s_p(y_1 \otimes \dots \otimes y_p)$ représente, dans cette réalisation de S(A), le produit $y_1 \dots y_p$ calculé dans S(A). Ainsi :

$$\lambda_p(y_1 \dots y_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(p)}.$$

Comme $U_n(A) = U_{n-1}(A) \oplus U^n(A)$, on a $U(A) = \bigoplus_{n \in N} U^n(A)$, donc la suite des $\lambda_p$ définit une application linéaire $\lambda$ de S(A) dans U(A) qui n'est autre que celle que l'on a déjà introduite. Ainsi,

2.7) <u>PROPOSITION</u>. - *La formule (2.6) définit un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels de* S(A) *sur* U(A), *appelé symétrisation.*

<u>REMARQUE</u>. - Si A n'est pas commutative, U(A) non plus. On en déduit que $\lambda$ est un isomorphisme d'algèbres ssi A est commutative ; cf. toutefois ci-dessous § 3.

## 3) Centre de U(A) et éléments invariants dans S(A).

(on reprend les notations de 2.5).

### 3.1) Prolongement d'un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Soit $f : A \to A$ un homomorphisme d'algèbres de Lie. La propriété universelle de U(A) montre qu'il existe un unique morphisme $f^*$ d'algèbres associative unitaires rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "i"] \\ U(A) \arrow[r, "f^*"] & U(A). \end{tikzcd} \qquad \text{(i est l'injection canonique)}$$

Autrement dit, $f$ se prolonge d'une manière unique en un endomorphisme d'algèbres $f^*$ de U(A).

De même, du seul fait que $f$ est linéaire, elle se prolonge d'une manière unique en un endomorphisme d'algèbres $\tilde{f}$ de S(A) (cf. 2.4).

Bien entendu, formellement, les définitions de $\tilde{f}$ et $f^*$ sont les mêmes : si $Y_1,\ldots,Y_p \in A$, le produit $Y_1 \ldots Y_p$ calculé dans S(A) (resp. dans U(A)) a pour image par $\tilde{f}$ (resp. $f^*$) le produit $f(Y_1) \ldots f(Y_p)$ calculé dans S(A) (resp. dans U(A)). L'expression du prolongement est donc évidente quand on écrit les éléments de S(A) ou U(A) sous forme de polynômes après choix d'une base.

Ceci s'appliquera en particulier quand $A = \underline{G}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G ou sa complexifiée $\underline{G}^{\mathbb{C}}$ et quand $f = \mathrm{Ad}(x)$ avec $x \in G$.

3.2) Prolongement d'une dérivation.

Soit f une dérivation de A c-à-d. une application linéaire $D : A \to A$ vérifiant de plus, pour tous $X,Y \in A$ :

$$D([X,Y]) = [D(X),Y] + [X, D(Y)].$$

3.3) PROPOSITION. - *La dérivation* D *se prolonge d'une manière unique en une dérivation* D' *de* U(A) *et en une dérivation* D" *de* S(A). *De plus, si* $\lambda$ *désigne la symétrisation, on a :*

$$D' \circ \lambda = \lambda \circ D''$$

*c-à-d. que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} U(A) \arrow[r, "D'"] & U(A) \\ S(A) \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "D''"] & S(A) \arrow[u, "\lambda"'] \end{tikzcd} .$$

PREUVE. - Rappelons d'abord qu'une dérivation d'une algèbre associative telle que U(A) ou S(A) est une application linéaire $\Delta$ de cette algèbre dans elle-même vérifiant en outre, pour tous x,y éléments de l'algèbre

$$\Delta(x,y) = \Delta(x)y + x\Delta(y).$$

Ceci étant, du simple fait que D est linéaire, on déduit qu'on peut la prolonger linéairement à T(A) en posant pour tout $(j_1,\ldots,j_p)$ appartenent à l'ensemble $\{1,\ldots,n\}^{(N)}$ des suites finies de $\{1,2,\ldots n\}$ (y compris la suite vide) ;

$$\Delta(e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_p}) = (De_{j_1}) \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_p} + \ldots + e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes (De_{j_p})$$

L'existence de $\Delta$ résulte du fait que les $e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_p}$ forment une base de $T(A)$. La formule définissant $\Delta$ montre en outre qu'il s'agit de l'unique application linéaire prolongeant $D$ à $T(A)$ qui puisse être une dérivation. En utilisant la base des $e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_p}$ on vérifie que $\Delta$ est effectivement une dérivation.

Du fait que $\Delta$ est une dérivation, on vérifie que l'idéal $J$ engendré par les $x \otimes y - y \otimes x$ est stable par $\Delta$, c-à-d que $\Delta(J) \subset J$, ce qui montre que $\Delta$ définit, par passage au quotient, une dérivation $D'$ de $S(A)$ telle que, si $y_1, \ldots, y_p \in A$,

$$D'(y_1 \ldots y_p) = (Dy_1)y_2 \ldots y_p + \ldots + y_1 \ldots (Dy_p).$$

Cette formule montre que $D'$ prolonge $D$ et, puisque $1$ et $A$ engendrent $S(A)$, elle assure que $D'$ est l'unique dérivation de $S(A)$ prolongeant $A$.

3.4) Jusqu'ici, nous n'avons utilisé que la linéarité de $D$, c-à-d que nous avons démontré que toute application linéaire $A \to A$ se prolonge d'une manière unique en une dérivation de $S(A)$.

En utilisant maintenant le fait que $D$ et $\Delta$ sont des dérivations de $A$ et de $T(A)$ respectivement, on vérifie que l'idéal $I$ engendré par les $x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$ est lui aussi, stable par $\Delta$, ce qui permet de définir, par passage au quotient, une dérivation $D''$ de $U(A)$ vérifiant formellement la même égalité que $D'$ (mais ici, les produits sont calculés dans $U(A)$), ce qui assure qu'elle est l'unique dérivation de $U(A)$ prolongeant $D$.

Enfin, l'égalité $D' \circ \lambda = \lambda \circ D''$ se vérifie facilement par le calcul : il suffit de permuter $\sum_{\sigma \in S_p}$ et $\sum_{k=1}^{p}$ dans l'expression de $D' \circ \lambda(y_1 \ldots y_k \ldots y_p)$.

3.6) Appliquons ce qui précède lorsque $D = adx$, où $x \in A$, est définie par :

$$D(y) = [ad(x)](y) = [x,y].$$

Le calcul du prolongement $D'$ de $D$ à $U(A)$ est simple. En effet, l'application $y \mapsto xy - yx$ est évidemment une dérivation de $U(A)$ qui coïncide sur $A$ avec $D$ donc, par unicité :

$$D'(y) = xy - yx.$$

Quant à $D''$ elle est caractérisée par (3.3), sans plus.

Notons plus précisément $D'_x$ et $D''_x$ les prolongements de $ad(x)$ à $U(A)$ et $S(A)$ respectivement. Il est fondamental de remarquer que $x \mapsto D'_x$ et $x \mapsto D''_x$ sont des représentations de $A$ dans $GL(U(A))$ et $GL(S(A))$ respectivement ; autrement dit, ces représentations munissent canoniquement $S(A)$ et $U(A)$ de structures de $A$-modules.

Pour $D'_x$, cette affirmation résulte facilement d'un calcul direct : à partir de $D'_x(y) = [x,y]$, on vérifie que l'égalité

$$D'_{[x,y]} = D''_x D''_y - D''_y D''_x$$

résulte de l'identité de Jacobi appliquée à l'algèbre de Lie de l'algèbre associative $U(A)$.

Pour $D''_x$, cette affirmation n'est qu'un cas particulier de la situation plus générale suivante :

Soit $\rho$ et $\rho'$ des représentations de $A$ dans des espaces vectoriels $V$ et $V'$. On définit $\rho \otimes \rho'$ par

$$(\rho \otimes \rho')(x) = \rho(x) \otimes 1 + 1 \otimes \rho'(x)$$

et on vérifie que $\rho \otimes \rho'$ est une représentation de A dans $V \otimes V'$. On en déduit qu'on peut définir à partir de $\rho$ une représentation $\tau$ de A dans T(V) en posant

$$\tau(x) = \bigoplus_{k \geqslant o} \rho^k(x)$$

où $$\rho^k(x) = \rho(x) \otimes 1_k + 1 \otimes \rho^{k-1}(x)$$
$$= \rho(x) \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes \rho(x) \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes \rho(x).$$

La formule même qui définit $\tau(x)$ montre que $\tau(x)$ est l'unique dérivation de T(V) prolongeant $\rho(x)$ (cf. la preuve de 3.3). On sait qu'on peut lui associer une dérivation de S(V), cette dérivation $\sigma(x)$ définit une représentation $\sigma$ de A dans S(V) qui laisse stable les composantes homogènes de S(V).

En appliquant ceci à $\rho(x) = \mathrm{ad}(x)$, on obtient bien le résultat annoncé pour D". En résumé :

3.7) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* $x \in A$.

*a) La dérivation* $D_x = \mathrm{ad}(x)$ *de* A *se prolonge à* U(A) *par le formule*

$$D'_x(y) = xy - yx.$$

*b) Soit* $D''_x$ *le prolongement de* $D_x$ *à* S(A). *Les applications* $x \mapsto D'_x$ *et* $x \mapsto D''_x$ *munissent* U(A) *et* S(A) *respectivement de structures de* A*-modules.*

*c) La représentation* $\lambda$ *est un isomorphisme de* A*-modules de* S(A) *sur* U(A).

<u>EXERCICE</u>. - le même résultat vaut pour chaque $U^n(A)$ et chaque $S^n(A)$.

Le <u>centre</u>, noté $Z(A)$, de $U(A)$ est, par définition, l'ensemble des $z \in U(A)$ tels que $yz = zy$ pour tout $y \in U(A)$. Comme 1 et A engendrent $U(A)$, le centre est aussi l'ensemble des $z$ tels que $xz = zx$ pour tout $x \in A$, c-à-d d'après 3.7 a), l'ensemble des $z$ tels que $D''_x(z) = o$ pour tout $x \in A$ (ensemble des éléments invariants du A-module $U(A)$).

Soit $Y(A)$ l'ensemble des éléments invariants du A-module $S(A)$ c-à-d des $y \in S(A)$ tels que $D'_x(y) = o$ pour tout $x \in A$. D'après 3.7 c) :

3.8) <u>COROLLAIRE</u>. - *L'image par symétrisation de* $Y(A)$ *est* $Z(A)$ :

$$\lambda(Y(A)) = Z(A).$$

REMARQUE. - Bien que $Y(A)$ et $Z(A)$ soient toutes deux des algèbres commutatives, il existe des contre-exemples montrant que la restriction de $\lambda$ à $Y(A)$ ne définit pas en général un isomorphisme d'algèbres de $Y(A)$ sur $Z(A)$ (bien que ceci soit vrai dans certains cas) : cf. DIXMIER, algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars. Cependant, on peut démontrer que $Y(A)$ et $Z(A)$ sont toujours isomorphes en tant qu'algèbres.

## 4) Centre de l'algèbre enveloppante pour un groupe de Lie.

Supposons maintenant que A est l'algèbre de Lie $\underline{G}$ d'un groupe de Lie G, ou sa complexifiée (en général, on s'intéresse à $U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$)., 4.1) Pour tout $s \in G$, on sait que $Ad(s)$ est un morphisme d'algèbre de Lie de $\underline{G}$ dans $\underline{G}$ (ou de $\underline{G}^{\mathbb{C}}$ dans $\underline{G}^{\mathbb{C}}$, par complexification) qui vérifie, pour tout $X \in \underline{G}$ : $\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}X) = Ad(\exp X)$.

D'après les propriétés universelles de $S(\underline{G})$ et de $U(\underline{G})$, on peut prolonger $Ad(s)$ à chacune de ces deux algèbres, en obtenant chaque fois un morphisme d'algèbres (et de même pour les complexifiées).

On a vu que le prolongement à $S(\underline{G})$ (ou $S(G)^{\mathbb{C}}$) est donné par les formules suivantes :

- si $P \in S(\underline{G})$ est considéré comme fonction polynômiale sur $\underline{G}^*$, $Ad(s)P = P \circ {}^tAd(s)$ ;

-si $P$, après choix d'une base $X_1,\ldots,X_n$ de $\underline{G}$ est considéré comme un polynôme en $X_1,\ldots,X_n$, $(Ad(s)P)\ (X_1,\ldots,X_n) = P(Ad(s)(X_1),\ldots,Ad(s)(X_n))$.

Quant au prolongement à $U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$, il s'écrit facilement, dans les réalisations concrètes vues au ch. 2.

En effet, si $X \in \underline{G}$, on vérifie facilement que

$$Ad(s)\ \tilde{X} = \delta(s)\ \tilde{X}$$

où $\delta(s)$ est la restriction, à l'ensemble $L(G)$ des champs de vecteurs invariants par translation à gauche, de la translation à droite définie pour tout opérateur différentiel $T$ par :

$$(\delta(s)T)(f) = \delta(s)[T(\delta(s^{-1})f)] \qquad (f \in C^{\infty}(G)).$$

On en déduit, par unicité, que la restriction de $\delta(s)$ à $D(G)$ est le prolongement de $Ad(s)$ à l'algèbre enveloppante $U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$ lorsque celle-ci est identifiée à $D(G)$. Si l'on identifie $U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$ à $D(G)^d$, on trouve de même que le prolongement de $Ad(s)$ est $\gamma(s)$, ceci à partir de la formule :

$$Ad(s)\tilde{X}^d = \gamma(s)\tilde{X}^d.$$

Lorsqu'on écrit les éléments de $U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$ sous forme polynomiale, l'expression du prolongement est évidente, à partir du fait qu'il s'agit d'un morphisme d'algèbres :

$$[Ad(s)P]\,(X_1,\ldots,X_n) = P(Ad(s)X_1,\ldots,Ad(s)X_n)$$

où $X_1\ldots X_n$ est une base de $\underline{G}$ (attention, ici, ces indéterminées ne sont pas commutatives).

4.4) Soit $X \in \underline{G}$, les opérateurs $adX$ et $Ad(expX)$ sur $U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$ (ou $U(\underline{G})$) sont liés par une relation analogue à celle qu'ils vérifient sur $\underline{G}$ :

PROPOSITION. - *Pour tout* $P \in U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$, *on a :*

$$Exp(adX)(P) = Ad(expX)(P).$$

PREUVE. - Dans cet énoncé, on a noté $adX$ le prolongement de $adX$, initialement défini sur $\underline{G}$, à $U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$ (cf. 3.7. a)). Pour tout $P$ fixé, les $(adX)^n(P)$ appartiennent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, au sous-espace de $U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$ constitué des éléments de degré au plus égal à celui de $P$, ce qui assure la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(adX)^n}{n!}(P)$ ; c'est la somme de cette série qui est notée $Exp(adX)(P)$.

On vérifie ensuite que, du fait que $adX$ est une dérivation, $Exp(adX)$ est un morphisme d'algèbres, ce qui, par unicité du prolongement à $U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$ d'un endomorphisme d'algèbres de Lie de $\underline{G}$, achève la démonstration.

4.5) PROPOSITION. - *a) La symétrisation* $\lambda$ *commute avec l'action de* $G$ *sur* $S(\underline{G})$ *et* $U(\underline{G})$ *: pour tout* $s \in G$, *on a, en notant toujours* $Ad(s)$ *les prolongements à* $S(\underline{G})^{\mathbb{C}}$ *et* $U(G)^{\mathbb{C}}$ *de* $Ad(s)$ :

$$Ad(s)\circ\lambda = \lambda\circ Ad(s).$$

*b) Si* $G$ *est connexe, l'ensemble* $Z(\underline{G})$ *(resp.* $Y(\underline{G})$*) des éléments invariants du* $\underline{G}$*-module* $U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$ *(resp.* $S(\underline{G})$*) coïncide avec l'ensemble des éléments de* $U(\underline{G})$ *(resp.* $S(\underline{G})$*) invariants par l'action de* $G$.

PREUVE. - a) Plus généralement, pour tout morphisme $u$ d'une algèbre de Lie $A$ dans elle-même, les prolongements de $u$ à $U(A)$ et $S(A)$ commutent avec la symétrisation : vérification immédiate.

b) Soit $X \in \underline{G}$ et $P \in U(\underline{G})^{\mathbb{C}}$. Si $P \in Z(\underline{G})$, on a successivement :

$$ad(X)(P) = o, \text{ donc } Exp(ad(X)(P)) = P, \text{ donc } Ad(expX)(P) = P.$$

On en déduit que $Ad(s)(P) = P$ pour tout $s \in G$ puisque $exp(\underline{G})$ engendre $G$ (car $G$ est connexe).

Réciproquement, en remarquant comme en 4.4. que l'on travaille en réalité en dimension finie, on a :

$$\begin{aligned} ad(X)(P) &= \lim_{t \to o} \frac{1}{t}[Exp(tad(X))(P) - P] \\ &= \lim_{t \to o} \frac{1}{t}[Ad(exptX)(P) - P]. \end{aligned}$$

On en déduit que, si $P$ est invariant par $Ad(s)$, on a $ad(X)(P) = o$, c-à-d $P \in Z(\underline{G})$.

Ainsi, on a démontré la partie de b) relative à $Z(\underline{G})$ ; en utilisant a), on obtient le résultat pour $Y(\underline{G})$. Bien entendu, les mêmes résultats valent pour les espaces réels sous-jacents car on peut prouver que si $A$ est une algèbre de Lie réelle, le centre du $U(A)^{\mathbb{C}}$ est le complexifié de celui de $U(A)$

## 5) Calcul d'éléments du centre dans le cas de groupes d'isométries.

Le principe du calcul est le suivant : on détermine $Y(\underline{G})$ grâce à 4.5. b), puis on utilise le fait que $Z(\underline{G}) = \lambda(Y(\underline{G}))$. Le calcul de $Y(\underline{G})$ revient au calcul des fonctions polynômiales sur $\underline{G}^*$ invariantes par l'action de $G$. Dans ce but, on introduit la représentation coadjointe de $G$ dans $\underline{G}^*$, $s \mapsto CoAd(s) = {}^tAd(s^{-1})$. La formule

$$(Ad(s)P = P \circ {}^tAd(s)$$

montre que les fonctions polynômiales $P$ sur $\underline{G}^*$ invariantes par $Ad$ sont les fonctions invariantes par $CoAd$ c-à-d. telles que :

$$\text{pour tout } s \in G, \quad P \circ CoAd(s) = P.$$

### 5.1) Cas de $SO_o(E,B)$.

a) Calcul de la représentation coadjointe :

Comme $\underline{SO(E,B)}$ s'identifie à $\Lambda^2 E$ par un isomorphisme qui dépend de $B$ (cf. Ch. 9), son dual s'identifie à $(\Lambda^2 E)^* = \Lambda^2 E^*$. On sait que

$$Ad(u) = u \wedge u \qquad (u \in SO(E,B)),$$

on en déduit que :

$$CoAd(u) = {}^tu^{-1} \wedge {}^tu^{-1}, \text{ c-à-d que } CoAd(u)(\xi \wedge \eta) = {}^tu^{-1}(\xi) \wedge {}^tu^{-1}(\eta).$$

b) Polynômes invariants.

L'espace $\Lambda^2 E^*$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique, encore notée B (cf. Ch 9.2.5) pour laquelle, pour tout $u \in SO_{\circ}(E,B)$, $\mathrm{CoAd}(u) = {}^tu^{-1} \wedge {}^tu^{-1}$ est une isométrie ; en effet, il suffit de remarquer que, si $u \in O(E,B)$, alors ${}^tu \in O(E^*,B)$, d'où ${}^tu \wedge {}^tu \in O(\Lambda^2E^*,B)$ (Ch. 9.2.4).

Moyennant ces remarques, il est immédiat de trouver des fonctions polynômiales sur $\Lambda^2E^*$ invaraintes par CoAd. Comme G agit isométriquement par CoAdu sur $\Lambda^2E^*$, il agit de même isométriquement par $\Lambda^k\mathrm{CoAdu}$ sur $\Lambda^k(\Lambda^2E^*) = \Lambda^{2k}E^*$ (cf. Ch. 9). Les fonctions polynômiales suivantes sont donc invariantes :

$$\begin{aligned}
A &\mapsto B(A,A)\\
A &\mapsto B(A \wedge A,\ A \wedge A)\\
&\ \vdots\\
A &\mapsto B(\Lambda^pA,\ \Lambda^pA),
\end{aligned}$$

(on s'arrête à $p$ tel que $2p \leqslant \dim E < 2p + 2$).

Lorsque $\dim E = 2n'$ est paire, on peut remplacer le dernier de ces polynômes par un polynôme de degré moitié. En effet, $\Lambda^{n'}A \in \Lambda^{2n'}E^*$, et cet espace est de dimension 1, de sorte que $B(\Lambda^{n'}A,\ \Lambda^{n'}A)$ n'est autre, à une constante près, que le carré de la composante de $\Lambda^{n'}A$ sur une base. Mais cette composante, elle-même, est G-invariante. En effet, $SO_{\circ}(E,B)$ agit sur $\Lambda^{n'}E$ par $\Lambda^{n'}\mathrm{CoAdu} = \Lambda^{2n'}\,{}^tu^{-1} = \det({}^tu^{-1})\mathrm{id} = \mathrm{id}$, c-à-d. trivialement.

Après choix d'une base, on pourra donc prendre comme dernier polynôme invariant, par exemple :

$$A \mapsto {}^*(\Lambda^{n'} A) \qquad (\text{si} \ \dim E = 2n').$$

c) Calculs effectifs.

Calculons d'abord l'expression de l'élément le plus simple : $A \mapsto B(A,A)$ dont l'image $C$ dans l'algèbre enveloppante est appelée <u>élément de Casimir</u>.

Pour cela, soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une base de $\Lambda^2 E$ orthogonale pour $B$, posons $B(X_i,X_i) = \varepsilon_i$ (en général, on choisit $|\varepsilon_i| = 1$ c-à-d une base orthonormée).

Soit $A = \sum_{i=1}^{m} a_i X_i^*$. La base des $X_i^*$ est orthogonale pour $B$ également et $B(X_i^*, X_i^*) = B(\varepsilon_i \ell(X_i), \varepsilon_i \ell(X_i)) = \varepsilon_i^3$. Ainsi, $B(A,A) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^3 a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^3 \langle X_i, A\rangle^2$ et le polynôme correspondant dans $S(\underset{\sim}{G})$, identifiée à $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_m]$, est donc : $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^3 X_i^2$. Son image par symétrisation a la même expression car $\lambda(X_i^2) = X_i^2$.

On retiendra que, si dans la base $(X_i)$, la forme $B$ (ou la forme de Killing, qui lui est proportionnelle) a pour expression

$$B(X,Y) = \Sigma\, \varepsilon_i x^i y^i, \quad \text{d'où} \quad B(X,X) = \Sigma\, \varepsilon_i x_i^2,$$

le Casimir a pour expression $C = \Sigma\, \varepsilon_i^3 X_i^2$. Si la base est orthonormée, les deux expressions sont formellement les mêmes :

$$B(X,X) = \Sigma\, \varepsilon_i x_i^2, \qquad C = \Sigma\, \varepsilon_i X_i^2 \qquad (\varepsilon_i^2 = 1).$$

Pour la calcul des autres polynômes, il n'y a pas de difficulté dans $S(\underset{\sim}{G})$. La recherche des symétrisés peut être difficile ; dans les cas qui nous intéressent, elle sera cependant toujours possible.

Exemple de $SL(2,\mathbb{C})$ et $SO_\circ(1,3)$.

En appliquant la méthode précédente, on trouve, à une constante multiplicative près, deux polynômes invariants dans l'algèbre symétrique :

$$A \mapsto B(A,A) \quad \text{et} \quad A \mapsto {}^*(A \wedge A).$$

Dans les notations du ch. 8 ($E_1 = M_{01} = e_\circ \wedge e_1$, $M_{12} = e_1 \wedge e_2 = -F_3$, etc...), ils ont respectivement pour expression :

$$-\sum_{i=1}^{3} M_{oi}^{\;2} + \sum_{1 \leqslant i < j < 3} M_{ij}^{\;2} = -E_1^{\;2} - E_2^{\;2} - E_3^{\;2} + F_1^{\;2} + F_2^{\;2} + F_3^{\;2}$$

et $M_{01}\, M_{23} - M_{02}\, M_{13} + M_{03}\, M_{12} = -(E_1\, F_1 + E_2\, F_2 + E_3\, F_3)$.

Comme chacun des monômes qui figurent dans ces deux polynômes est produit d'éléments qui commutent dans l'algèbre enveloppante, les symétrisés ont la même expression.

5.2) Eléments invariants de $S(E)$ quand $E$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique.

Remarquons que l'étude du cas de $SO_\circ(E,B)$ nous a placés, en fait, dans la situation suivante qui se retrouvera pour $E \cong SO_\circ(E,B)$ en 5.3 : on se donne une représentation $\rho$ d'un groupe $G$ dans un espace vectoriel $E$ de dimension finie sur $R$, muni d'une forme bilinéaire symétrique $B$, et on cherche les fonctions polynômiales $f$ sur $E^*$ constantes sur les orbites de la représentation $\rho^*$ définie par $\rho^*(s) = {}^t\rho(s^{-1})$ (en 5.1 le rôle de $E$ est tenu par $\Lambda^2 E$).

L'existence de l'isomorphisme $\ell$ de E sur $E^*$ associé à B permet d'éliminer $E^*$. En effet, l'application $f \mapsto f\circ\ell$ définit évidemment un isomorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}^*$ des fonctions polynômiales sur $E^*$ sur l'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions polynômiales sur E, dans lequel les fonctions f sur $E^*$ invariantes par $\rho^*$ deviennent les fonctions sur E invariantes par la représentation L de G dans E déduite de $\rho^*$ par transport de structure au moyen de l'isomorphisme $\ell$, c-à-d. définie par $L(s) = \ell^{-1}.\rho^*(s)\circ\ell = \ell^{-1}\circ{}^t\rho(s^{-1})\circ\ell$. Autrement dit, $L(s) = \rho(s^{-1})'$ (notations du Ch. 1) est défini par l'égalité, valable pour tout $(x,y) \in E \times E$ :

$$B(L(s)x,y) = B(x,\rho(s^{-1})y).$$

Supposons maintenant choisie une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E, toute fonction polynômiale g sur E est définie par un polynôme $P \in K[e_1^*,\dots,e_n^*]$ ; déterminons le polynôme $Q \in K[e_1,\dots,e_n]$ associé à la fonction polynômiale $g\circ\ell^{-1} = f$ sur $E^*$ qui correspond à g.
Par définition :

$$f(y) = Q(<e_1,y>,\dots,<e_n,y>), \quad g(x) = P(<x,e_1^*>,\dots,<x,e_n^*>),$$
$$\text{et} \quad f(y) = g[\ell^{-1}(y)].$$

D'où $\quad f(y) = P(<\ell^{-1}(y),e_1^*>,\dots,<\ell^{-1}(y),e_n^*>),$

or $\quad <\ell^{-1}(y),e_i^*> = B(\ell^{-1}(y),\ell^{-1}(e_i^*)> = <\ell^{-1}(e_i^*),y>$

et $\quad f(y) = P(<y,\ell^{-1}(e_1^*)>,\dots\ <y,\ell^{-1}(e_n^*)>).$

Le problème est donc ramené au calcul des $\ell^{-1}(e_i^*)$.
Supposons par exemple la base $e_i$ orthogonale avec $B(e_i,e_i) = \varepsilon_i$,

alors $\mathcal{L}^{-1}(e_i^*) = \varepsilon_i\ e_i$ et

$$f(y) = P(\varepsilon_1 <y,e_1>,\dots,\varepsilon_n<y,e_n>) = P(\varepsilon_1\ y_1,\dots,\varepsilon_n\ y_n)$$

d'où l'on déduit, par unicité, que :

$$Q(e_1,\dots,e_n) = P(\varepsilon_1\ e_1,\dots,\varepsilon_n\ e_n).$$

(Si la base $(e_i)$ est orthonormée, $|\varepsilon_i| = 1$).

En résumé, pour trouver des $Q \in K[e_1,\dots,e_n]$, invariants par $\rho^*$, on cherche des fonctions polynômiales $g$ invariantes par $L$ ; à une telle fonction est associé un polynôme $P(e_1^*,\dots,e_n^*)$ (cf. 2.3), si la base $(e_i)$ est orthogonale, on pose : $Q(e_1,\dots,e_n) = P(\varepsilon_1\ e_1,\dots,\varepsilon_n\ e_n)$.

5.3) Cas de $E \circledS SO(E,B)$.

Soit $G = E \circledS SO(E,B)$, le groupe des isométries affines de $E$ pour $B$.

a) Calcul de la représentation adjointe.

D'une manière générale, si $G = E \circledS H$, où $H \subset GL(E)$ agit canoniquement sur $E$, c-à-d. si $G$ est un groupe de transformations affines de $E$, on va calculer, pour $(x,u) \in G$ (avec $x \in E$, $u \in H$) et $(y,v) \in \underline{G}$ (avec $y \in E$, $v \in \underline{H}$ d'où $v \in \mathcal{L}(E)$), $Ad_{(x,u)}(y,v)$. Il suffit de différentier l'automorphisme intérieur

$$(y,v) \mapsto (x,u)(y,v)(x,u)^{-1} = (x + u(y) - uvu^{-1}(x),\ uvu^{-1}),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_{(x,u)}(y,v) &= (u(y) - uvu^{-1}(x),\ uvu^{-1}) \\ &= (u(y) - \mathrm{Ad}_u(v)(x),\ \mathrm{Ad}_u(v)).\end{aligned}$$

Limitons-nous maintenant au cas où $H = O(E,B)$, ou $SO_\circ(E,B)$, ou $SO(E,B)$... etc.. Identifions $\underline{G}$ à $E \times \Lambda^2 E$ ; ainsi, avec les notations du chapitre 8,

$$\mathrm{Ad}_{(x,u)}(y,Y) = (u(y) - \widetilde{\mathrm{Ad}_u(Y)}(x),\ \mathrm{Ad}_u(Y)).$$

Ici, $Y \in \Lambda^2 E$ et $\mathrm{Ad}_u = u \wedge u$.

b) Calcul de la représentation coadjointe transportée dans $E \times \Lambda^2 E$.

Nous sommes ici dans la situation de 5.2. En effet, $E \times \Lambda^2 E$ est muni de la forme bilinéaire symétrique $B((y,Y),\ (y',Y')) = B(y,y') + B(Y,Y')$ à laquelle est associé l'isomorphisme $(y,Y) \mapsto (\ell(y),\ \ell(Y))$ de $E \times \Lambda^2 E$ sur $E^* \times \Lambda^2 E^*$ (à condition de considérer la dualité $< , >_\otimes$ entre $\Lambda^2 E$ et $\Lambda^2 E^*$).

Ceci nous amène à calculer $(\mathrm{Ad}_{(x,u)^{-1}})' = (\mathrm{Ad}_{(-u^{-1}(x),u^{-1})})' = L(x,u)$. On a, par définition :

$$\begin{aligned} B(\mathrm{Ad}_{(x,u)}'(z,Z),(y,Y)) &= B((z,Z),\mathrm{Ad}_{(x,u)}(y,Y)) \\ &= B(z,u(y)) - B(z,\ \widetilde{\mathrm{Ad}_u(Y)}(x)) + B(Z,\ \mathrm{Ad}_u(Y)) \\ &= B(u'(z),y) + B((\mathrm{Ad}_u)'(Z),Y) - B(z,\ \widetilde{\mathrm{Ad}_u(Y)}(x)).\end{aligned}$$

Mais, on a déjà utilisé, à la fin du chapitre 9, la formule

$$B(\tilde{A}(\xi),\eta) = \frac{1}{2}\, B(A,\xi \wedge \eta) \qquad (A \in \Lambda^2 E,\ (\xi,\eta) \in E \times E)$$

qui donne
$$\begin{aligned} B(z,\ \widetilde{\mathrm{Ad}_u(Y)}(x)) &= \frac{1}{2}\, B(x \wedge z,\ \mathrm{Ad}_u(Y)) \\ &= \frac{1}{2}\, B((\mathrm{Ad}_u)'\ (x \wedge z),Y).\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(\mathrm{Ad}_{(x,u)})'(z,Z) = (u'(z),(\mathrm{Ad}_u)'(Z - \frac{1}{2}(x \wedge z)).$$

Comme $u \in SO_\circ(E,B)$, on sait de plus que $u' = u^{-1}$ ; d'autre part,

$$(\mathrm{Ad}_u)' = (u \wedge u)' = u' \wedge u' \quad \text{(par un calcul très simple).}$$

Ainsi :

$$(\mathrm{Ad}_{(x,u)})'(z,Z) = (u^{-1}(z),\ u^{-1} \wedge u^{-1}\ (Z - \frac{1}{2}\, x \wedge z)),$$

$(u \wedge u)$

et $$L_{(x,u)}(z,Z) = (u(z),(u \wedge u)(Z + \frac{1}{2}\, u^{-1}(x) \wedge z)).$$

Par exemple, avec les notations classiques pour le groupe de Poincaré :

$$L_{(x,X)}(z,Z) = (X,z,(u_X \wedge u_X)(Z + \frac{1}{2}\, X^{-1}.x \wedge z))$$

$(x,z \in R^4,\quad X \in SL(2,\mathbb{C}),\ Z \in \Lambda^2 R^4)$.

c) Fonctions polynômiales invariantes sur $E \wedge \Lambda^2 E$.

Définissons $F_p$ $(o \leqslant 2p + 1 \leqslant \dim E)$ pour $(a,A) \in E \times \Lambda^2 E$

par :

$$F_\circ(a,A) = B(a,a)$$

$$F_1(a,A) = B(a \wedge A, a \wedge A)$$

$$\vdots$$

$$F_p(a,A) = B(a \wedge \underbrace{A \wedge \ldots \wedge A}_{p \text{ facteurs}},\ a \wedge A \wedge \ldots \wedge A)\ .$$

On a alors :

$$F_p(L_{(x,u)}(a,A)) = F_p(u(a),(u \wedge u)(A')) \text{ où } A' = A + \frac{1}{2} u^{-1}(x) \wedge a$$

$$= B(u(a) \wedge \underbrace{(u \wedge u)(A') \wedge (u \wedge u)(A') \ldots}_{p \text{ facteurs}}, u(a) \wedge (u \wedge u)(A') \wedge \ldots)$$

$$= B(a \wedge A' \wedge \ldots \wedge A', a \wedge A' \wedge \ldots \wedge A')$$

(car $u \in SO_0(E,B)$)

et $a \wedge A' \wedge \ldots \wedge A' = a \wedge (A + \frac{1}{2} u^{-1}(x) \wedge a) \wedge \ldots \wedge (A + \frac{1}{2} u^{-1}(x) \wedge a)$

$$= a \wedge A \wedge \ldots \wedge A$$

d'où $F_p(L_{(x,u)}(a,A)) = F_p(a,A)$. Ainsi, toutes les fonctions $F_p$ sont invariantes (et, évidemment, polynômiales).

REMARQUE : Cas où $\dim E = n$ est impair.

Supposons $n = 2n' + 1$, alors on peut remplacer $F_{n'}$ par un polynôme de degré moitié en remarquant que $a \wedge A \wedge \ldots \wedge A$, où $A$ figure $n'$ fois, appartient à $\Lambda^n E$ qui est de dimension 1. On voit, en utilisant le calcul ci-dessus que, $E \circledS SO_0(E,B)$ opère trivialement dans $\Lambda^n E$, donc que la composante de $a \wedge A \wedge \ldots \wedge A$ sur n'importe quelle base est invariante.

d) Calculs effectifs. - Soit $(e_1,\ldots e_n)$ une base orthonormée.

5.3.1) $F_0(a,A) = B(a,a) = B(\sum_{i=1}^{n} a^i e_i, \sum_{i=1}^{n} a^i e_i) = \Sigma\, \varepsilon_i\, a_i^{\,2} = \Sigma\, \varepsilon_i e_i^*(a_i)^2$.

Ainsi, $F_0 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (e_i^*)^2$. D'après 5.2, il lui correspond un élément invariant de $K[e_1,\ldots,e_n]$ qui est

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\varepsilon_i\, e_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, e_i^{\,2}$$

et, par symétrisation, l'image dans $Z(\underline{G})$ a la même expression car les monômes $e_i^{\,2}$ sont commutatifs dans $U(\underline{G})$.

5.3.2) Soit $a = \Sigma\, a^i\, e_i$ et $A = \sum_{i<j} A^{ij}\, e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 E$. Rappelons que la base des $e_i \wedge e_j = M_{ij}$ de $\Lambda^2 E$ est orthogonale, mais non orthonormée car $B(e_i \wedge e_j,\, e_i \wedge e_j) = 2\, \varepsilon_i\, \varepsilon_j$. On a :

$$a \wedge A = \sum_{\substack{1 \leqslant i < j < n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} a^k\, A^{ij}\, e_k \wedge e_i \wedge e_j .$$

En étudiant les 3 places possibles de $k$ par rapport à $i$ et $j$,

$$a \wedge A = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} (a^{i_1} A^{i_2 i_3} + a^{i_3} A^{i_1 i_2} - a^{i_2} A^{i_1 i_3})\, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3}$$

avec $B(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3},\, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3}) = 3\,!\ \varepsilon_{i_1}\, \varepsilon_{i_2}\, \varepsilon_{i_3}$

d'où $F_1(a,A) = 3! \sum_{i_1 < i_2 < i_3} (a^{i_1} A^{i_2 i_3} + a^{i_2} A^{i_3 i_1} + a^{i_3} A^{i_1 i_2})^2\, \varepsilon_{i_1}\, \varepsilon_{i_2}\, \varepsilon_{i_3}$,

c-à-d. que $F_1 = 3! \sum_{i_1 < i_2 < i_3} (e_{i_1}^*(e_{i_2} \wedge e_{i_3})^* + \ldots)^2\, \varepsilon_{i_1}\, \varepsilon_{i_2}\, \varepsilon_{i_3}$.

En utilisant 5.2, on trouve que l'élément invariant correspondant dans l'algèbre symétrique $K(e_1,\ldots,e_n,M_{12},\ldots)$ est proportionnel à :

$$\sum_{i_1 < i_2 < i_3} [e_{i_1} M_{i_2 i_3} + e_{i_2} M_{i_3 i_1} + e_{i_3} M_{i_1 i_2}]^2\, \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \varepsilon_{i_3} .$$

5.4) <u>Cas des groupes de Poincaré de dimension 3 et 4.</u>

5.4.1) Le groupe de Poincaré usuel.

On applique 5.3 avec $n = 4$. On trouve ainsi deux fonctions polynômiales invariantes $F_\circ$ et $F_1$. Pour les calculer, on utilise la base canonique de $R^4$ $(e_\circ, e_1, e_2, e_3)$ : elle est orthonormée et

$\varepsilon_\circ = -\, \varepsilon_1 = -\, \varepsilon_2 = -\, \varepsilon_3 = 1$. On adopte pour la base de l'algèbre de Lie les notations du Ch. 8, ce qui donne

$$F_\circ = e_\circ^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2,$$

et $$F_1 = W_\circ^2 - W_1^2 - W_2^2 - W_3^2 \quad \text{où :}$$

$$\begin{aligned}
W_\circ &= e_1\, M_{23} + e_2\, M_{31} + e_3\, M_{12} = - e_1\, F_1 - e_2\, F_2 - e_3\, F_3 \\
W_1 &= e_\circ\, M_{23} + e_2\, M_{30} + e_3\, M_{02} = - e_\circ\, F_1 - e_2\, E_3 + e_3\, E_2 \\
W_2 &= e_\circ\, M_{13} + e_1\, M_{30} + e_3\, M_{01} = \phantom{-} e_\circ\, F_2 - e_1\, E_3 + e_3\, E_1 \\
W_3 &= e_\circ\, M_{12} + e_1\, M_{20} + e_2\, M_{01} = - e_\circ\, F_3 - e_1\, E_2 + e_2\, E_1 .
\end{aligned}$$

Le symétrisé de $F_\circ$, noté $P^2$, a la même expression, puisque $F_\circ$ est somme de monômes produits de termes commutant entre eux. Notons $W^2$ l'élément de l'algèbre enveloppante défini par

$$W^2 = W_\circ^2 - W_1^2 - W_2^2 - W_3^2$$

où $W_\circ,\dots,W_3$ sont définis par les mêmes égalités que ci-dessus, mais les deuxièmes membres étant calculés dans l'algèbre enveloppante.
On trouve, pour le symétrisé $\lambda(F_1)$ de $F_1$ :

$$\lambda(F_1) = W^2 - \frac{1}{2} P^2.$$

Ainsi, $W^2$ appartient au centre de l'algèbre enveloppante.

5.4.2) Le groupe de Poincaré de dimension 3.

Il s'agit du produit semi-direct $R^3 \circledS SO_\circ(1,2)$. On utilise les mêmes notations que pour le groupe de Poincaré usuel pour les bases de $\mathbb{R}^3$ et de l'algèbre de Lie. On trouve deux éléments du centre :

- l'un associé à $F_\circ$ : $e_\circ^2 - e_1^2 - e_2^2$

- l'autre qui est associé à la fonction donnant la composante de $a \wedge A$ sur $e_\circ \wedge e_1 \wedge e_2$ (ici $n=3$ est impair), ce qui donne :

$$e_\circ M_{12} + e_1 M_{20} + e_2 M_{01}.$$

5.4.3) Structure du centre.

On démontre que, pour ces deux groupes de Poincaré, le centre est exactement l'ensemble des polynômes des deux éléments particuliers que l'on a déterminés (cf. p. ex. S. J. TAKIFF, transactions of the A.M.S, Vol. 170, August 1972, p. 221-230).

-:-:-:-

# NOTATIONS CONCERNANT LES VARIETES DIFFERENTIELLES.

Soit $M$ une variété $C^{\infty}$ (en général, $M$ sera un groupe de Lie $G$).

Une carte de $M$ est notée $(U,\varphi)$, ou $(U,\psi)$,... etc.. Dans cette notation, $U$ désigne l'ouvert de $M$ domaine de la carte, et $\varphi$ est un difféomorphisme de $U$ sur un ouvert $\varphi(U)$ dans un espace $\mathbb{R}^n$.

En tout $x \in M$, la notation $T_x(M)$, ou $T_xM$, désigne l'espace tangent. Les vecteurs tangents, éléments de $T_xM$, sont en général considérés comme des formes linéaires sur l'algèbre des germes de fonctions $C^{\infty}$ en $x$. Leur valeur sur une fonction $C^{\infty}$ au voisinage de $x$ est donc bien définie.

Si $u$ est une application de classe $C^1$ (en fait, $C^{\infty}$ dans les cas qui nous intéressent), d'une variété $M$ dans une variété $M'$, l'application tangente en $x$, de $T_xM'$ dans $T_{u(x)}M'$, est notée $u^*_x$.

Enfin, les sous-variétés $M'$ d'une variété $M$ sont toujours plongées dans $M$, ce qui équivaut au fait que la topologie de $M'$ est induite par celle de $M$.

-:-:-