B. BEAUZAMY
J. T. LAPRESTE

Modèles étalés des espaces de Banach

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 4A
« Modèles étalés des espaces de Banach », , p. 1-199
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___4A_A1_0>

INTRODUCTION

La notion de Modèle étalé d'un espace de Banach est d'invention assez récente, puisqu'elle a été introduite par A. Brunel et L. Sucheston en 1973. Décrite de façon simplifiée, l'idée principale est la suivante : partant d'une suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dans un espace de Banach E, on construit un nouvel espace dont la norme dépend à la fois de la norme de E et des propriétés de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En vérité, ce ne sont pas toutes les propriétés de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont prises en compte, mais seulement celles qui sont asymptotiques : si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite, avec $x_n - y_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ l'espace associé sera le même.

L'espace F ainsi construit - qu'on appelle modèle étalé de E - a une caractéristique essentielle : sa norme est invariante par étalement sur la suite fondamentale. Ceci signifie qu'il existe une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui engendre ce modèle (cette suite est une base dans certaines conditions) pour laquelle on peut écrire, par exemple,

$$\| a_1 e_1 + a_2 e_2 \| = \| a_1 e_1 + a_2 e_3 \|$$

Cette propriété d'écartabilité facilite grandement l'étude de l'espace F.

En même temps, cet espace F demeure suffisamment proche de E pour que soit possible la traduction sur celui-ci de certains résultats obtenus sur celui-là. En particulier, F est finiment représentable dans E, ce qui signifie que tous les sous-espaces de dimension finie de F se retrouvent dans E.

C'est ce double aspect : simplicité plus grande que celle de l'espace originel, mais proximité suffisante - qui donne son efficacité à l'outil que nous venons de décrire.

Les applications sont de plusieurs natures. La première, historiquement, est due à A. Brunel et L. Sucheston qui, lorsqu'ils ont introduit ce concept, ont montré qu'il pourrait être utilisé pour étudier la sommabilité - en des sens divers - de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur laquelle la construction est faite. Cette étude a ensuite été poursuivie, notamment par le premier auteur du présent ouvrage.

Une seconde application est de fournir un cadre, particulièrement bien adapté, pour la démonstration d'un résultat de J.L Krivine(précisé ensuite par H. Lemberg) concernant l'existence, sur chaque suite bornée, d'une suite de blocs équivalente à la base canonique de $\ell^p(\mathbb{N})$.

La troisième application concerne la notion d'espace stable, due à J.L Krivine et B.Maurey ; elle permet de trouver les sous-espaces isomorphes à ℓ^p.

On voit donc qu'il s'agit là de directions assez différentes. Il faut d'ailleurs oberver à cet égard que le présent ouvrage n'épuise pas toutes les applications connues de la notion de modèle étalé puisque, très récemment, R. Haydon et A. Pełczynski ont montré que cet outil était essentiel pour l'étude de l'intégrabilité – au sens de Darboux – des fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Notre ouvrage se divise en sept chapitres :

Dans le premier, les notions de modèle étalé et d'extension d'un espace de Banach sont introduites. Nous le faisons de deux manières, en apparence différentes : la première est celle de A. Brunel et L. Sucheston, la seconde fait intervenir la réitération d'ultrapuissances, concept issu de la Logique. Nous étudions ensuite les principales propriétés de la suite fondamentale du modèle, par exemple, à l'égard de la topologie faible.

Le second chapitre est consacré à la première application importante : les liens entre la structure du modèle étalé et les propriétés de sommabilité de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nous étudions à cet égard trois propriétés qui font partie d'une même famille : la propriété de Banach-Saks (la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les moyennes arithmétiques – ou sommes de Cesàro – $\frac{1}{n} \sum_1^n x'_k$, convergent), la propriété de Banach-Saks alternée, et la propriété de Banach-Saks faible. Nous caractérisons ces propriétés au moyen du modèle étalé construit sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cela nous permet d'en donner une description complète, de les comparer entre elles, et aussi d'obtenir des énoncés de disjonction uniforme, d'où le modèle étalé a complètement disparu (ce qui en prouve l'utilité !). Nous entendons par là un énoncé du type : toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite dont toutes les sous-suites vérifient une propriété A, ou bien une sous-suite dont toutes les sous-suites vérifient une propriété B (A et B étant évidemment contradictoires). Les résultats de ce chapitre sont dus pour l'essentiel, au premier auteur [8].

Le troisième chapitre concerne le comportement des modèles étalés à l'égard de la dualité. On y démontre notamment que, sous certaines conditions, le dual d'un modèle étalé de E est un modèle étalé d'un quotient de E'. Ces résultats sont dus au second auteur [48]. On y étudie en outre les modèles étalés isomorphes à c_o, ce qui permet d'obtenir les résultats duaux de ceux du chapitre II.

Le quatrième chapitre est le plus technique, car il a pour but de fournir les exemples nécessaires au bon développement de la théorie. Un premier paragraphe est consacré aux espaces de suites usuels. Un second, plus long et plus difficile, étudie successivement huit espaces, de complexité croissante, dont les modèles étalés sont entièrement décrits. Ces espaces possèdent, à des degrés divers, des pathologies remarquables qui éclairent bien les différents aspects de la théorie.

Le cinquième chapitre ne fait qu'esquisser une théorie où la finie-représentabilité serait remplacée par la notion de modèle étalé : au lieu de considérer, par exemple, la super-réflexivité (tout espace finiment représentable dans E est réflexif), on la remplace par la M-réflexivité : tout modèle étalé de E est réflexif). Certes, nous donnons quelques énoncés positifs, mais bien davantage, des contre-exemples qui montrent que les choses, dans ce nouveau cadre, ne se passent pas si bien. C'est sans doute pourquoi les M-propriétés n'ont pas connu le développement des super-propriétés !

Le sixième chapitre concerne les extensions localement de type ℓ^p, et les extensions de type ℓ^p ; il est consacré à la démonstration d'un résultat de J.L Krivine, précisé par H. Lemberg : un ℓ^p, ou c_o, est finiment représentable en blocs sur n'importe quelle suite bornée dans un espace de dimension infinie.

Le septième chapitre est consacré à la théorie des espaces stables, due à J.L Krivine et B. Maurey : il y est démontré qu'un tel espace contient (pour un p, $1 \leqslant p < +\infty$) un sous-espace isomorphe à ℓ^p.

Nous pensons avoir ainsi présenté un assez large panorama des applications de la notion que nous voulons étudier, sans toutefois épuiser le sujet, comme nous l'avons déjà dit.

Nos notations sont celles utilisées habituellement. Nous avons numéroté les résultats par chapitre et par paragraphe, ce qui permet de les retrouver plus aisément. Nous avons donné toutes les démonstrations en détail. Certes, à plusieurs reprises, les matières traitées se révèlent fort peu élémentaires, d'une part en ce qu'elles requièrent une technique assez sérieuse, et d'autre part parce qu'elles utilisent des résultats antérieurs qui eux-mêmes ne sont pas simples. Nous nous sommes cependant efforcés de mettre l'ouvrage à la portée d'un lecteur n'ayant que des connaissances élémentaires en Géométrie des Espaces de Banach, telles qu'on peut par exemple les trouver dans [12]. Pour cela, nous avons regroupé dans différents appendices des résultats que nous devrions utiliser, notamment sur l'extraction de suites basiques

Nous espérons ainsi contribuer à faire connaître quelques techniques et résultats récents de la Géométrie des Espaces de Banach, et donc de l'Analyse Fonctionnelle.

CHAPITRE I

DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES DES MODELES ETALES

Dans ce chapitre, nous montrerons comment on peut associer, à une suite bornée dans un espace de Banach, un nouvel espace de Banach, dont la norme ne dépendra que des propriétés asymptotiques de la suite de départ. A l'origine, ceci a été fait par A. Brunel et L. Sucheston [16],[17], au moyen d'un procédé d'extraction de sous-suites. C'est ce que nous développons dans un premier temps, dans un cadre un peu plus large. Ce nouveau cadre nous permet ensuite de rattacher cette construction à une "réitération d'Ultrapuissances", qui est une notion issue de la Logique. Dans les paragraphes suivants, nous commençons l'étude de l'espace de Banach ainsi obtenu.

1. CONSTRUCTION DU MODELE ETALE :

A) - Le procédé d'extraction de bonnes sous-suites, de A. Brunel et L. Sucheston :

On notera $\mathbb{K}$ le corps des scalaires (ce sera toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

PROPOSITION 1

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite bornée dans un espace de Banach séparable* E, *réel ou complexe.*

Il existe une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *extraite de la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que, pour tout* $x \in E$, *pour tout* $k \geq 1$, *toute suite finie de scalaires* $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ *(réels ou complexes), la limite*

$$\operatorname{Lim} \| x + a_1 x'_{n_1} + a_2 x'_{n_2} + \dots + a_k x'_{n_k} \|$$

existe lorsque $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ *tendent vers l'infini.*

Posant $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, nous noterons $L(x,a)$ cette limite. L définit clairement une semi-norme sur $E \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. L'existence de la limite ci-dessus signifie que, pour tout $x \in E$, tout $k \geq 1$, toute suite finie de scalaires $(a_1,\dots,a_k)$, tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier ∂ tel que si $\partial < n_1 < n_2 < \dots < n_k$, alors :

$$\left| \| x + \sum_1^k a_i x'_{n_i} \| - L(x,a) \right| < \varepsilon.$$

La démonstration de ce résultat utilise le théorème combinatoire de Ramsey :

THEOREME DE RAMSEY

Soit k un entier, $k \geq 1$. *Soit* $\mathcal{K}_k$ *l'ensemble des k-uples d'entiers distincts.*

Si $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$ *est une partition de* $\mathcal{K}_k$, *on peut trouver une partie infinie de* $\mathbb{N}$, I, *telle que tous les* k - uples *dont les composantes sont dans* I *appartiennent au même sous-ensemble* $\mathcal{K}'$ *ou* $\mathcal{K}''$.

Nous allons maintenant démontrer la proposition 1.

Tout d'abord, fixons $x \in E$, $k \geq 1$ et $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, et définissons ψ, de $\mathcal{K}_k$ dans $\mathbb{R}^+$, par :

$$\psi(\bar{n}) = \|x + \sum_1^k a_i x_{n_i}\|,$$

si $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ avec $n_1 < \ldots < n_k$ (le k - uple d'entiers constituant $\bar{n}$ a donc d'abord été rangé en ordre croissant).

La fonction ψ est bornée : si $C = \|x\| + (\sup\|x_i\|)\sum_1^k |a_i|$, on a $\psi(\bar{n}) \leq C$, $\forall \bar{n}$.

Posons $\mathcal{K}_1' = \{\bar{n}\ ;\ 0 \leq \psi(\bar{n}) \leq \frac{C}{2}\}$ et $\mathcal{K}_1'' = \{\bar{n}\ ;\ \frac{C}{2} < \psi(\bar{n}) \leq C\}$

D'après le théorème de Ramsey, il existe une suite croissante d'entiers $(\alpha_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, par exemple, $0 \leq \psi(\bar{n}) \leq \frac{C}{2}$, si les composantes de $\bar{n}$ sont dans la suite $(\alpha_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$. On considère alors la partition de $(\alpha_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue par :

$$\mathcal{K}_2' = \{\bar{n}\ ;\ 0 \leq \psi(\bar{n}) \leq \frac{C}{4}\}\ ,\ \mathcal{K}_2'' = \{\bar{n}\ ;\ \frac{C}{4} < \psi(\bar{n}) \leq \frac{C}{2}\}.$$

Il existe une sous-suite $(\alpha_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(\alpha_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tous les $\bar{n}$ dont les composantes sont dans cette sous-suite, $\psi(\bar{n})$ est dans l'un des deux intervalles $[0, \frac{C}{4}]$ ou $]\frac{C}{4}, \frac{C}{2}]$. On continue ainsi. Soit $(\alpha_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite diagonale. Par construction,

$$(2) \qquad \operatorname{Lim}\|x + \sum_1^k a_i x_{n_i}\|$$

existe lorsque $n_1 < \ldots < n_k$ tendent vers l'infini et appartiennent à la suite $(\alpha_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

E étant supposé séparable, soit $(z_j, A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une énumération des paires où :

- z_j décrit un ensemble dénombrable dense dans E,
- A_j décrit l'ensemble des suites finies de scalaires, à coefficients rationnels (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou à parties réelles et imaginaires rationnelles (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Soit $(\beta_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'entiers donnée par le raisonnement ci-dessus pour $x = z_1$, $a = A_1$. D'après ce qui précède, on peut, pour chaque j, trouver une suite $(\beta_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$, extraite de $(\beta_n^{(j-1)})_{n \in \mathbb{N}}$, pour laquelle la limite (2) existe pour $x = z_j$ et $a = A_j$. Pour la suite diagonale $(\beta_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, la limite (2) existera donc pour tout couple (z_j, A_j), $j \in \mathbb{N}$.

Ces couples formant un ensemble dense dans $E \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, il est immédiat que la limite (2) existe pour tout $x \in E$ et tout $a \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. La suite cherchée $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est celle dont les indices sont dans $(\beta_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. On l'appellera *bonne sous-suite extraite* de la *suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Plus généralement, toute suite bornée $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle la limite

$$\operatorname{Lim} \| x + a_1 y_{n_1} + \dots + a_k y_{n_k} \|$$

existe lorque $n_1 < \dots < n_k$ tendent vers l'infini, sera appelée une *bonne suite.*

Le résultat démontré par A. Brunel et L. Sucheston [17] concernait seulement l'existence de la limite $\operatorname{Lim} \| a_1 x'_{n_1} + \dots + a_k x'_{n_k} \|$. Le fait d'y adjoindre les éléments de E, c'est-à-dire de considérer $x + a_1 x'_{n_1} + \dots + a_k x'_{n_k}$ ne complique guère la démonstration, et nous permettra, dans notre construction, de garder trace des propriétés de l'espace E. Il y aura à cela de nombreux avantages qui seront apparents dès les prochains paragraphes de ce chapitre.

Pour terminer ce paragraphe il nous faut observer qu'il n'y a évidemment pas unicité, pour une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée, de la bonne sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (toute sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en contient une). Ceci oblige à certaines précautions de langage.

B) - Le Modèle Etalé sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Notons $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Supposons extraite une bonne sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par la proposition 1.

En posant, $\forall x \in E$, $\forall a \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$,

$$(3) \qquad L(x,a) = \| x + \sum_i a_i e_i \|$$

on définit donc une semi-norme sur $E \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

La suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est *écartable au-dessus de* E pour cette semi-norme, c'est-à-dire :

PROPOSITION 1

Pour tout $x \in E$, *tout* $k \geqslant 1$, *toute suite finie de scalaires* $a_1, \ldots, a_k$ *et toute suite d'entiers* $n_1 < \ldots < n_k$, on a :

$$\| x + \sum_{i=1}^{k} a_i e_{n_i} \| = \| x + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \|$$

C'est une conséquence immédiate de la façon dont la norme est définie. La propriété obtenue pour $x = 0$, c'est-à-dire $\| \sum_1^k a_i e_{n_i} \| = \| \sum_1^k a_i e_i \|$ s'appelle simplement *écartabilité* de la suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Si $a = 0$, on trouve $L(x,0) = \| x \|$, et la semi-norme introduite sur $E \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ coïncide donc, sur E, avec la norme de E. La notation $\| x + \sum_i a_i e_i \|$ que nous avons adoptée n'est donc, en ce sens, pas abusive. Elle pourrait l'être en un autre sens, car elle sous-entend qu'il s'agit d'une norme sur $E \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Nous allons voir à quelle condition c'est bien le cas :

PROPOSITION 2

La semi-norme L *est une norme sur* $E \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ *si et seulement si la suite* $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ne converge pas dans* E.

DEMONSTRATION

a) Soient $x \in E$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tels que $\| x + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \| = 0$.

Par définition ceci signifie que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu$ tel que $\forall n_1 < \ldots < n_k$, si $\nu \leqslant n_1$,

$$\| x + \sum_i a_i x'_{n_i} \| < \varepsilon.$$

En particulier si $\nu \leqslant n < m < n_2 < \ldots < n_k$, on a simultanément

$$\| x + a_1 x'_n + a_2 x'_{n_2} + \ldots + a_k x'_{n_k} \| < \varepsilon$$

$$\| x + a_1 x'_m + a_2 x'_{n_2} + \ldots + a_k x'_{n_k} \| < \varepsilon$$

et donc

$$\| a_1 (x'_n - x'_m) \| < 2\varepsilon.$$

Si la suite (x'_n) ne converge pas, ceci implique $a_1 = 0$; on procède de même pour les autres coefficients $a_2, \ldots, a_k$.

b) Inversement, si la suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point x, il est clair que $L(x,-1) = 0$. Ceci prouve la proposition.

Remarquons au passage qu'il est évident qu'une bonne suite ne peut avoir de sous-suite convergente sans être tout entière convergente. Il résulte de cette proposition que L est une norme lorsque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite convergente.

DEFINITION

Nous appellerons suite étalante *toute bonne suite non convergente.*

Ce que nous avons vu montre que toute suite bornée sans sous-suite convergente contient une suite étalante.

DEFINITIONS

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite étalante dans un espace séparable E. Le complété de $E \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ pour la norme L définie par (3) est appelé *extension de* E *définie par la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On le notera $\mathscr{F}$. L'espace vectoriel fermé engendré par les $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\mathscr{F}$ s'appellera *modèle étalé de* E *défini par la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il sera noté F. La suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sera la *suite fondamentale* du modèle étalé (et de l'extension).

Si E est un espace de Banach quelconque, non nécessairement séparable et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans E, nous considérons $E_o = \overline{\text{span}}\ \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$; l'extension et le modèle étalé de E_o associés à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peuvent alors être définis. Ce modèle étalé sera simplement appelé modèle étalé de E construit sur $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous allons maintenant donner une seconde construction du modèle étalé, utilisant la notion d'ultrapuissance.

2. REITERATION D'ULTRAPUISSANCES :

Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non-trivial sur $\mathbb{N}$; dans le produit $E^{\mathbb{N}}$, considérons le sous-ensemble $\mathscr{B}$ des suites bornées. Sur ce sous-espace vectoriel, l'application $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to \lim_{\mathscr{U}} \| x_n \|$ définit une semi-norme. Soit $\mathscr{N}$ le sous-espace de $\mathscr{B}$ des éléments de semi-norme nulle. Le quotient $\mathscr{B}/\mathscr{N}$ s'appelle ultrapuissance de E, on le note $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. Deux suites bornées (x_n) et (y_n) définissent le même élément de $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ si $\lim\limits_{\mathcal{U}} \|x_n - y_n\| = 0$; la norme de la classe de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ est alors $\lim\limits_{\mathcal{U}} \|x_n\|$.

On démontre (voir [12]) que $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ est un espace de Banach.

L'espace E peut être plongé isométriquement dans $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$: à un point $x \in E$, on associe la suite constante $(x,x, \ldots)$; la classe de cette suite a pour norme $\|x\|$.

Notons $E_1 = E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans E, sans sous-suite convergente. Cette suite détermine un élément $\xi_1 \in E_1$ et ξ_1 n'est pas dans E : en effet, l'élément ξ_1 de E_1 serait déterminé par une suite constante $(x,x \ldots)$, ce qui signifierait $\lim \|x_n - x\| = 0$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aurait une sous-suite convergente.

Mais la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par le plongement canonique de E dans E_1, détermine aussi une suite bornée de E_1, encore notée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit E_2 l'ultrapuissance $E_1^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ détermine donc un élément ξ_2 de E_2 et cet élément n'est pas dans E_1. En effet, sinon, il serait donné par une suite $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E et les éléments $\tilde{x}_n = (x_n, \ldots, x_n \ldots)$ convergeraient vers ξ_2 dans E_1, c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \; \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_n - y_m\| = 0 ,$$

mais ceci impliquerait que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite convergente dans E.

En réitérant l'opération, on définit $E_{k+1} = E_k^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$; on obtient une suite croissante d'espaces emboîtés. On note E^∞ le complété de $\bigcup_{k \geq 1} E_k$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit pour chaque k un élément ξ_k dans E_k, n'appartenant pas à E_{k+1}, et une suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E_k.

Nous allons voir que la suite ξ_k est écartable au-dessus de E, au sens donné à la proposition 2. : en effet, pour tout x dans E,

$$\| x + \Sigma a_i \, \xi_i \|_{E^\infty} = \| x + \Sigma a_i \, \xi_{n_i} \|_{E^\infty} ,$$

pour toute suite finie de scalaires (a_i) et toute suite strictement croissante d'entiers n_i. Montrons par exemple que :

$$\| x + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_4 \|_{E^\infty} = \| x + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_3 + a_3 \xi_4 \|_{E^\infty}$$

La démonstration étant identique dans le cas général.

Les deux normes ci-dessus sont prises dans E_4. Celle de gauche vaut :

$$\operatorname*{Lim}_{\mathcal{U}} \| x + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \, x_n \|_{E_3}$$

et celle de droite

$$\lim_{\mathcal{U}} \| x + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_3 + a_3 x_n \|_{E_3}$$

Mais pour tout n,

$$\| x + a_3 x_n + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_3 \|_{E_3}$$

$$= \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \| x + a_3 x_n + a_1 \xi_1 + a_2 x_m \|_{E_2}$$

$$= \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \| x + a_3 x_n + a_1 \xi_1 + a_2 x_m \|_{E_1}$$

tandis que

$$\| x + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 x_n \|_{E_3}$$

$$= \qquad \| x + a_3 x_n + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 \|_{E_2}$$

$$= \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \| x + a_3 x_n + a_1 \xi_1 + a_2 x_m \|_{E_1},$$

ce qui prouve l'écartabilité.

Montrons maintenant que la suite (ξ_k) est donnée à partir d'une bonne sous-suite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Curieusement, l'ordre des indices est inversé par rapport à celui dans la bonne sous-suite de Brunel-Sucheston :

PROPOSITION 1

Il existe une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que,* $\forall k, \forall a_1,\dots,a_k \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, *on ait :*

$$\lim_{\substack{n_1 > n_2 > \dots > n_k \\ \to +\infty}} \| x + a_1 x'_{n_1} + \dots + a_k x'_{n_k} \| = \| x + a_1 \xi_1 + \dots + a_k \xi_k \|_{E^\infty}$$

DEMONSTRATION :

En utilisant les mêmes arguments qu'au §1, on voit qu'il suffit de montrer l'existence de cette sous-suite pour chaque x et chaque suite finie $a_1,\dots, a_k$. Il suffit même de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\| x + \sum_i a_i x'_{n_i} \| \underset{(\varepsilon)}{=} \| x + \sum a_i \xi_i \|_{E^\infty}$$

où ,la notation $a \underset{(\varepsilon)}{=} b$ signifie $|a - b| < \varepsilon$.

Pour simplifier l'écriture, limitons-nous au cas $k = 2$, c'est-à-dire $a = (a_1, a_2)$. On a :

$$\| x + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 \|_{E_2} = \lim \| x + a_1 \xi_1 + a_2 x_n \|_{E_1}$$

et donc, pour une certaine sous-suite $\left(x_{n_k^{(1)}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\| x + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 \|_{E_2} = \lim_{k \to +\infty} \| x + a_1 \xi_1 + a_2 x_{n_k^{(1)}} \|_{E_1}$$

Donc, il existe $k_o \geqslant 1$ tel que si $k \geqslant k_o$, on peut trouver un ensemble X dans l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, avec :

$$(1) \quad \| x + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 \|_{E_2} \underset{(\varepsilon)}{=} \| x + a_1 x_m + a_2 x_{n_k^{(1)}} \|$$

si $m \in X$.

Soit n_1 le premier indice de $\left(n_k^{(1)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ et soit $X_1 \in \mathcal{U}$, donné par (1). Soit $n_2 > n_1$ un entier de la suite $\left(n_k^{(1)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ appartenant à X_1. Il lui correspond un ensemble $X_2 \in \mathcal{U}$. Mais $X_1 \cap X_2 \in \mathcal{U}$. On trouve $n_3 > n_1$, dans la suite $\left(n_k^{(1)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$, appartenant à $X_1 \cap X_2$ et ainsi de suite. Pour la suite n_k ainsi extraite, on a :

$$\| x + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 \|_{E_2} \underset{(\varepsilon)}{=} \lim_{\substack{i > j \\ \to +\infty}} \| x + a_1 x_{n_i} + a_2 x_{n_j} \| ,$$

ce qui prouve la proposition.

Pour retrouver le modèle étalé construit au §2, on considère le sous-espace vectoriel de E^∞ engendré par E et la suite $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on le munit de la norme

$$\| x + a_1 e_1 + \ldots + a_k e_k \| = \| x + a_k \xi_1 + \ldots + a_1 \xi_k \|_{E^\infty} \quad ;$$

le complété de ce sous-espace vectoriel est l'espace F du §2. On peut avoir l'impression que l'approche décrite dans ce paragraphe est plus simple, en ce sens qu'elle permet d'éviter de faire appel au théorème de Ramsey. Mais c'est illusoire, car la démonstration faite est précisément celle de ce théorème.

Nous verrons au chapitre VII dans une certaine classe d'espace de Banach une troisième construction des modèles étalés, obtenue aussi au moyen d'ultrafiltres : ce sera les "types" sur un espace de Banach.

3. FINIE-REPRESENTABILITE DE L'EXTENSION :

DEFINITION

Soient G_1 *et* G_2 *deux espaces de Banach. On dit que* G_1 *est finiment représentable dans* G_2 *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *tout sous-espace* G_1^o *de dimension finie de* G_1, *il existe un sous-espace de dimension finie* G_2^o *de* G, *et un isomorphisme* T *de* G_1^o *sur* G_2^o, *vérifiant* $\|T\| . \|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$.

Cette notion a été introduite par R.C. James [39]. Elle est clairement transitive : si G_1 est finiment représentable dans G_2 et G_2 dans G_3, G_1 l'est dans G_3. En outre, si $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'espaces, chacun étant un sous-espace fermé du suivant, tous finiment représentables dans un Banach G, alors la complétion de $\bigcup_{k \geq 1} G_k$ l'est aussi.

Le fait que G_1 soit finiment représentable dans G_2 signifie que les sous-espaces de dimension finie de G_1 se retrouvent dans G_2. C'est ce qui se produit dans le "Principe de Reflexivité locale", dû à Lindenstrauss-Rosenthal [50] (voir J. Stern [65] pour une démonstration), qui établit que pour tout espace de Banach E, le bidual E'' est finiment représentable dans E.

La notion de finie-représentabilité est intimement liée à celle d'ultrapuissance, comme le montre le résultat suivant :

PROPOSITION

Soient G_1 *et* G_2 *deux espace de Banach.* G_1 *est finiment représentable dans* G_2 *si et seulement si* G_1 *est isométrique à un sous-espace fermé d'une ultrapuissance de* G_2.

Au §2, nous n'avons introduit que les ultrapuissances ayant $\mathbb{N}$ pour ensemble d'indices. Nous nous contenterons donc, et cela suffira à notre objet, de démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 1

Pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ *sur* $\mathbb{N}$, *l'ultrapuissance* $E_1 = E^{\mathbb{N}}/_{\mathcal{U}}$ *est finiment* *représentable dans* E.

DEMONSTRATION : (elle est reproduite de [65]).

Soit B un sous-espace de dimension finie de E_1. Soit $b_1 \dots b_\ell$ une base formée d'éléments de norme 1 de $E \cap B$; on complète cette base en une base $b_1 \dots b_\ell$, $c_1 \dots c_{\ell'}$ de B, faite d'éléments de norme 1. Comme B est de dimension finie, on peut trouver un nombre $M > 0$ tel que pour toutes suites de scalaires $\lambda_1 \dots \lambda_\ell$, $\mu_1 \dots \mu_{\ell'}$, on ait :

$$\sum_{k-1}^{\ell} |\lambda_k| + \sum_{k'=1}^{\ell'} |\mu_{k'}| \leqslant M \left\| \sum_1^\ell \lambda_k b_k + \sum_1^{\ell'} \mu_{k'} c_{k'} \right\|_{E_1}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ avec :

$$\frac{1 + \delta + M\,\delta(1+\delta)}{1 - \delta - M\,\delta(1+\delta)} \leq 1 + \varepsilon$$

Comme la sphère unité de B est compacte, on peut trouver une suite finie $(y_s)_{s=1,\dots,S}$ qui forme un δ-réseau dans cette sphère : ceci signifie que tout point de la sphère est à distance au plus égale à δ de l'un des y_s. On peut évidemment supposer que les éléments $b_1 \dots b_\ell$, $c_1 \dots c_{\ell'}$ de la base apparaissent dans la suite $(y_s)_{s=1,\dots,S}$. Pour chaque $s = 1,\dots,S$ on décompose y_s en :

$$y_s = \sum_{k=1}^{\ell} \beta_k^s b_k + \sum_{k'=1}^{\ell'} \gamma_{k'}^s c_{k'}$$

Pour $k' = 1,\dots,\ell'$, soit $(c_i^{k'})_{i \in \mathbb{N}}$ une suite représentant $c_{k'}$ dans l'ultrapuissance. Pour tout $s = 1,\dots,S$, on a :

$$1 = \left\| \sum_{k=1}^{\ell} \beta_k^s b_k \sum_{k'=1}^{\ell'} \gamma_{k'}^s c_{k'} \right\|_{E_1} = \lim_{i \to +\infty} \left\| \sum_{k'=1}^{\ell} \beta_k^s b_k + \sum_{k'=1}^{\ell'} \gamma_{k'}^s c_i^{k'} \right\|$$

et on peut donc trouver un indice i tel que, pour tout $s = 1,\dots,S$, on ait :

$$1 - \delta \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\ell} \beta_k^s b_k + \sum_{k'=1}^{\ell'} \gamma_{k'}^s c_i^{k'} \right\| \leq 1 + \delta$$

On note $x_{k'} = c_i^{k'}$, pour cet indice i.

Définissons un opérateur linéaire T, de b dans E, par :

$$T\left(\sum_1^\ell \lambda_k b_k + \sum_1^{\ell'} \mu_{k'} c_{k'}\right) = \sum_1^\ell \lambda_k b_k + \sum_1^{\ell'} \mu_{k'} x_{k'}$$

Soit y un élément de B de norme 1, décomposé en $y = \sum_{1}^{\ell} \lambda_k b_k + \sum_{1}^{\ell'} \mu_{k'} c_{k'}$. Soit s tel que $\|y_s - y\| \leqslant \delta$. On a :

$$\| Ty-Ty_s \| \leqslant (1+\delta)\left(\sum_{k=1}^{\ell} |\lambda_k - \beta_k^s| + \sum_{k'=1}^{\ell'} |\mu_{k'} - \gamma_{k'}^s|\right)$$

$$\leqslant M(1+\delta) \|y-y_s\| \leqslant M\delta(1+\delta).$$

et donc :

$$1 - \delta \leqslant \| Ty_s \| \leqslant 1 + \delta$$

d'où

$$1 - \delta - M\delta(1+\delta) \leqslant \| Ty \| \leqslant 1 + \delta + M\delta(1+\delta)$$

et si y est quelconque :

$$(1 - \delta - M\delta(1+\delta)) \|y\| \leqslant \|Ty\| \leqslant (1+\delta+M\delta(1+\delta)) \|y\|$$

D'où il résulte que $\|T\| . \|T^{-1}\| \leqslant 1 + \varepsilon$, et la proposition est établie. Il faut remarquer que T est l'identité sur E.

Au vu du §2, nous en déduisons :

PROPOSITION 2

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante dans* E. *L'extension de* E *construite sur la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est finiment représentable dans* E.

Nous aurions pu démontrer directement cette proposition, à partir de la définition, sans utiliser la notion d'ultrapuissance. La technique de démonstration aurait été très voisine (choix d'un δ-réseau, etc...) ; cela s'explique par le fait que les deux approches que nous avons développées sont en réalité deux langages différents pour un même objet. Très précisément, on obtient alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3

Soient $\varepsilon > 0$ *et* $N \in \mathbb{N}^*$. *Il existe un entier* ∂ *tel que, pour tous* $n_1, \ldots, n_N$ *avec* :

$$\partial \leqslant n_1 < \ldots < n_N,$$

l'application U, *définie de* $\mathrm{span}[e_1, \ldots, e_N]$ *dans* $\mathrm{span}[x_{n_1}, \ldots, x_{n_N}]$ *par* $Ue_i = x_{n_i}$ $(i = 1, \ldots, N)$ *soit un* $(1+\varepsilon)$*-isomorphisme, c'est-à-dire :*

$$(1-\varepsilon)\,\Big\|\sum_{1}^{N} a_i x_{n_i}\Big\| \leqslant \Big\|\sum_{1}^{N} a_i e_i\Big\| \leqslant (1+\varepsilon)\,\Big\|\sum_{1}^{N} a_i x_{n_i}\Big\| ,$$

pour toute suite de scalaires $a_1,\dots,a_N$.

En particulier, pour $\varepsilon = 1/2$, pour tout $k \geqslant 1$, soit $N_k = 2^k$. La sous-suite $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}^*} = (x_{\partial_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ s'appellera *sous-suite caractéristique de la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Elle jouera un rôle important au chapitre II.

4. SUITES ECARTABLES DANS LES ESPACES DE BANACH :

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser aux propriétés de la suite fondamentale $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ du modèle étalé, du point de vue de la convergence faible ou de la basicité. Un grand nombre de ces propriétés résultent simplement du fait que cette suite est écartable (voir prop. 2) et non constante, c'est-à-dire que :

$$\Big\|\sum_i a_i e_{n_i}\Big\| = \Big\|\sum_i a_i e_i\Big\| ,$$

pour toute suite finie de scalaires (a_i) et toute suite strictement croissante d'entiers $n_1 < n_2 < \dots$

L'espace vectoriel fermé engendré par la sous-suite $(e_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est alors isométrique à celui engendré par la suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Les résultats de ce paragraphe sont dus à S. Guerre et au second auteur [33].

LEMME 1

Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *une suite écartable dans un espace de Banach* G. *Une et une seule des éventualités suivantes est réalisée :*

1°) La suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *converge faiblement et sa limite faible est non-nulle.*

2°) La suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* 0.

3°) La suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *est de Cauchy faible (pour toute forme linéaire continue , la limite* $\operatorname{Lim} f(e_i)$ *existe), mais ne converge pas faiblement.*

4°) La suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *est équivalente à la base canonique de* ℓ^1.

DEMONSTRATION

D'après un résultat de H.P. Rosenthal [58], de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite qui est de Cauchy faible, ou bien équivalente à la base de ℓ^1.

Mais si une sous-suite de $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de ℓ^1, il en est de même de la suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tout entière et si $(e_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy faible, $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ l'est aussi puisque l'application T définie par $Te_{n_i} = e_i$, $i \in \mathbb{N}$, est une isométrie.

PROPOSITION 2

Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *une suite écartable de* E.

1°) *La suite* $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *est toujours basique, sauf si elle converge faiblement dans* E *vers un élément* e *non nul.*

2°) *Si* $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *converge faiblement, dans* E" *muni de* $\sigma(E'',E')$, *vers un élément* e", *alors, pour toute suite finie de scalaires* (a_i), *on a :*

a) $\|\sum_i a_i e_i\| \geqslant \|e''\| \cdot |\sum_i a_i|$

b) Si $e'' \notin E$ *et si* M *est la constante de basicité de la suite* $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$, *alors :*

$$\|\sum_i a_i e_i\| \geqslant \frac{\|e''\|}{M+1} \sup_{q \in \mathbb{N}} |\sum_{i \geqslant q} a_i|$$

3°) *Si* $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* 0, *elle est basique inconditionnelle monotone, ce qui, rappelons-le, signifie que pour toute suite finie de scalaires* (a_i), *pour tous ensembles finis d'entiers* A *et* B *avec* $A \subset B$,

$$\|\sum_{i \in A} a_i e_i\| \leqslant \|\sum_{i \in B} a_i e_i\|$$

DEMONSTRATION

1°) Dans le premier cas du lemme 1, la suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ne peut être basique (si une suite basique converge faiblement, ce ne peut être que vers 0, voir Appendice A). Dans les second et troisième cas, on peut extraire de la suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite basique, d'après des résultats de Kadec et Pełczynski ([41], cf Appendice A) ; la suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tout entière est donc basique, puisqu'elle est écartable.

2°) Soit e" la limite faible des e_i, dans E" muni de $\sigma(E'',E')$. Puisque la norme de E" est semi-continue inférieurement pour $\sigma(E'',E')$, on a, pour toute suite de scalaires $a_1,\dots,a_k$:

$$\| a_1 e_1 +\dots+ a_k e_k\| = \| a_1 e_{n_1} +\dots+ a_{k-1} e_{n_{k-1}} + a_k e_{n_k}\|$$

pour toute suite finie d'entiers $n_1 < \dots < n_k$,

$$= \lim_{n_k \to +\infty} \| a_1 e_{n_1} +\dots+ a_{k-1} e_{n_{k-1}} + a_k e_{n_k}\|$$

$$\geqslant \| a_1 e_{n_1} +\dots+ a_{k-1} e_{n_{k-1}} + a_k e'' \|$$

et donc :

$$\| a_1 e_1 +\dots+ a_k e_k\| \geqslant \lim_{n_{k-1} \to +\infty} \| a_1 e_{n_1} +\dots+ a_{k-1} e_{n_{k-1}} + a_k e''\|$$

$$\geqslant \| a_1 e_{n_1} +\dots+ a_{k-2} e_{n_{k-2}} + (a_{k-1} + a_k) e''\|$$

et ainsi de suite. Ceci montre a). Le b) s'en déduit immédiatement, puisque $\| \sum_{i \geqslant q} a_i e_i\| \leqslant (M+1) \| \sum_i a_i e_i\|$

3°) Nous allons montrer que si a_1, a_2, a_3 sont des scalaires

$$\| a_1 e_1 + a_3 e_3\| \leqslant \| a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3\| ,$$

la démonstration étant identique dans le cas général.

Si $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tend faiblement vers 0, l'enveloppe convexe fermée, pour $\sigma(E,E')$, des $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ contient 0, donc aussi l'enveloppe convexe fermée pour la norme.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc des coefficients rationnels $\frac{p_1}{N}, \dots, \frac{p_k}{N}$, avec $p_1 +\dots+ p_k = N$, tels que :

$$\frac{1}{N} \| p_1 e_1 +\dots+ p_k e_k\| \leqslant \varepsilon / |p_2|$$

On a, pour tout $j = 1,\dots,k$:

$$\| a_1 e_1 + a_2 e_{j+1} + a_3 e_{k+2}\| = \| a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3\|$$

En répétant p_1 fois cette égalité avec $j = 1,\dots,p_k$ fois avec $j = k$, sommant et divisant par N, on obtient :

$$\| a_1 e_1 + a_2\left(\frac{p_1 e_{j+1} + \ldots + p_k e_{j+k}}{N}\right) + a_3 e_{k+2}\|$$

$$\leqslant \| a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \|$$

et donc

$$\| a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3\| \geqslant \| a_1 e_1 + a_3 e_3\| - \varepsilon$$

d'où la conclusion.

On voit donc que, dans les trois cas du lemme 1 où $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement vers 0, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute suite finie de scalaires (a_i) :

(1) $\quad \|\sum_i a_i e_i\| \geqslant \delta |\sum_i a_i|$

COROLLAIRE

L'application somme S, *définie de* $\mathrm{span}\{(e_i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ *dans* $\mathbb{K}$ *par* $S(\sum_i a_i e_i) = \sum_i a_i$, *est continue de* $\overline{\mathrm{span}}\{(e_i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ *dans* $\mathbb{K}$ *si et seulement si la suite* $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *ne tend pas faiblement vers* 0 *dans* G.

DEMONSTRATION

Dire que S est continue sur $\overline{\mathrm{span}}\{(e_i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ signifie qu'il existe un $\delta > 0$ tel que (1) soit réalisé. Cette propriété est donc satisfaite dans les trois cas où la suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ne tend pas faiblement vers 0. Inversement, si la suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 faiblement, on peut, pour tout $n \geqslant 1$, trouver des coefficients positifs $a_i^{(n)}$, avec $\sum_i a_i^{(n)} = 1$ et $\|\sum a_i^{(n)} e_i\| \leqslant 1/_n$ et S ne peut être continue.

Si la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas faiblement vers 0, elle peut ne pas être inconditionnelle (dans c_o, la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $s_n = e_1 + \ldots + e_n$ ("base sommante" de c_o) est écartable, mais non inconditionnelle). Mais les différences consécutives $(e_{2n} - e_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ le sont toujours :

PROPOSITION 3

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite écartable ; la suite des différences* $(e_{2n} - e_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ *est inconditionnelle. Plus précisément, on a pour toute* *suite finie de scalaires* (a_i) *et tous ensembles finis d'entiers* A *et* B *avec* $A \subset B$:

$$\Big\| \sum_{i \in A} a_i (e_{2i} - e_{2i-1}) \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{i \in B} a_i (e_{2i} - e_{2i-1}) \Big\|$$

DEMONSTRATION

Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout i_o avec $0 \leqslant i_o \leqslant n$,

$$\Big\| \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_o}}^{n} a_i (e_{2i} - e_{2i+1}) \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{i=0}^{n} a_i (e_{2i} - e_{2i+1}) \Big\|$$

Mais pour tout $m \in \mathbb{N}$, tout $k = 0, \ldots, m-1$, on a :

$$\Big\| \sum_{i=0}^{n} a_i (e_{2i} - e_{2i+1}) \Big\| =$$

$$\Big\| \sum_{i=0}^{i_o-1} a_i (e_{2i} - e_{2i+1}) + a_{i_o} (e_{2i_o+k} - e_{2i_o+k+1})$$

$$+ \sum_{i=i_o+1}^{n} a_i (e_{2i} - e_{2i+1}) \Big\| .$$

En ajoutant ces égalités et en divisant par m, on obtient :

$$\Big\| \sum_{i=0}^{n} a_i (e_{2i} - e_{2i+1}) \Big\|$$

$$\geqslant \Big\| \sum_{i=0}^{i_o-1} a_i (e_{2i} - e_{2i+1}) + \frac{a_{i_o}}{m} (e_{2i_o} - e_{2i_o+m+1})$$

$$+ \sum_{i=i_o+1}^{n} a_i (e_{2i} - e_{2i+1}) \Big\|$$

$$\geqslant \Big\| \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_o}}^{n} a_i (e_{2i} - e_{2i+1}) \Big\| - \frac{2|a_{i_o}|}{m} \| e_1 \| ,$$

et ceci prouve la proposition.

Remarque et définition

Une suite écartable inconditionnelle est souvent appelée sous-symétrique (cf [47],[51]). Si de plus elle est monotone (au sens des propositions 2 et 3 ci-dessus), on la qualifie de *1-sous-symétrique*. Nous préférerons l'appeler *Inconditionnelle Monotone Ecartable* (en abrégé IME).

Il est facile de voir que pour une telle suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$, si $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$

est une suite de scalaires et $(\theta_n)_{n \geqslant 1}$ avec $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$, on a :

$$\|\sum_n \alpha_n \theta_n f_n\| \leqslant \|\Sigma \alpha_n f_n\|$$

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement des moyennes arithmétiques (ou "sommes de Cesàro") d'une suite écartable $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire des sommes $\left(\frac{1}{k} \sum_1^k e_i\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$

PROPOSITION 4

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite écartable non constante dans un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) L'enveloppe convexe fermée des $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *contient* 0.

b) Les sommes de Cesàro $s_k = \frac{1}{k} \sum_1^k e_i$ *convergent vers* 0 *fortement lorsque* $k \to +\infty$.

b') Les sommes s_k *convergent vers* 0 *faiblement, lorsque* $k \to +\infty$.

c) Une sous-suite $(s'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *fortement.*

c') Une sous-suite $(s'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *faiblement.*

d) La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tend vers* 0 *faiblement.*

e) La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est basique inconditionnelle et n'est pas équivalente à la base canonique de* ℓ^1.

DEMONSTRATION

a) $\Rightarrow$ e) : la démonstration du fait que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est basique inconditionnelle (et même, plus précisément, que l'on a $\|\sum_A \alpha_i e_i\| \leqslant \|\sum_B \alpha_i e_i\|$ si $A \subset B$) a déjà été donnée à la proposition précédente, 3°). La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut être équivalente à la base canonique de ℓ^1 : on aurait alors pour un $\delta > 0$ $\|\Sigma \alpha_i e_i\| \geqslant \delta$, si $\alpha_i \geqslant 0$ et $\Sigma\alpha_i = 1$.

e) $\Rightarrow$ c) : Supposons la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ basique inconditionnelle et supposons qu'aucune sous-suite des sommes de Cesàro ne converge vers 0 fortement. Nous allons montrer que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors équivalente à la base de ℓ^1.

Si aucune sous-suite de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge vers 0, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $\forall$ k,

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_1^k e_i \right\| \geq \delta$$

Puisque la suite est inconditionnelle, il existe un $\delta_1 > 0$ tel que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k = \pm 1$, on ait :

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i\, e_i \right\| \geq \delta_1$$

Il nous suffit donc de démontrer le lemme suivant :

LEMME 5 [8]

S'il existe $\delta_1 > 0$ *tel que* $\forall\, k$, $\forall\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k = \pm 1$, $\left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i\, e_i \right\| \geq \delta_1$, *alors il existe* $\delta_2 > 0$ *tel que* $\forall\, k$, $\forall\, c_1 \ldots c_k$ *scalaires*

$$\left\| \sum_1^k c_i\, e_i \right\| \geq \delta_2 \sum |c_i| .$$

DEMONSTRATION DU LEMME 5

a) Supposons d'abord les scalaires réels. Il suffit alors de démontrer le lemme pour $c_1 \ldots c_k \in \mathbb{Z}$. Mais si l'on pose $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} c_i$ et $p_i = |c_i|$ on a :

$$\begin{aligned} & \| \varepsilon_1\, p_1\, e_1 + \ldots + \varepsilon_k\, p_k\, e_k \| \\ & \geq \| \varepsilon_1 (e_1 + \ldots + e_{p_1}) + \varepsilon_2 (e_{p_1+1} + \ldots + e_{p_1+p_2}) + \\ & \ldots + \varepsilon_k (e_{p_1+\ldots+p_{k-1}} + \ldots + e_{p_1+\ldots+p_k}) \| \\ & \geq \delta (p_1 + \ldots + p_k) \end{aligned}$$

et le lemme est démontré dans ce cas.

b) Si l'espace est complexe, le calcul précédent vaut encore pour les scalaires réels. Donc, aucune sous-suite de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut être de Cauchy faible. D'après un résultat de L.E. Dor [26], ceci implique qu'une sous-suite $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de ℓ^1 complexe. Mais la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tout entière lui est alors équivalente, par écartabilité.

Revenons à la démonstration de la proposition 4 :

c) $\Rightarrow$ c') est évident.

c) $\Rightarrow$ d) : si d) n'est pas réalisé, on peut trouver une forme linéaire réelle f de norme 1, un nombre $\delta > 0$ et une sous-suite $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :

$$\forall n,\ f(e'_n) \geqslant \delta$$

Puisque les espaces vectoriels fermés engendrés par $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et par $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont isométriques, il existe une forme linéaire g, de norme 1, telle que $g(e_n) \geqslant \delta\ \forall n \in \mathbb{N}$. On a alors $g_k \geqslant \delta\ \forall k$, et c') ne peut être réalisé.

d) $\Rightarrow$ a) est évident.

Donc a), e), c), c'), d), sont bien équivalents.

c) $\Rightarrow$ b) : Soit n_k une suite d'entiers telle que $s_{n_k} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et k_o tel que $\| s_{n_{k_o}} \| \leqslant \varepsilon/2$.

Soit n_o tel que $\frac{n_{k_o}}{n_o} < \frac{\varepsilon}{2} \| e_1 \|$. Si $n > n_o$, on écrit la division euclidienne $n = mn_{k_o} + r$, $r < n_{k_o}$.

On a :

$$\| s_n \| = \| \frac{1}{n} \sum_1^n e_i \| \leqslant \frac{1}{n} \| \sum_1^{mn_{k_o}} e_i \| + \frac{1}{n} \| \sum_{mn_{k_o}+1}^{n} e_i \|$$

$$\leq \frac{m}{n} n_{k_o} \| s_{n_{k_o}} \| + \frac{r \| e_1 \|}{n}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et donc $s_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

b) $\Rightarrow$ b') est évident, b' $\Rightarrow$ a) aussi. Ceci achève la preuve de la proposition.

Revenons maintenant aux modèles étalés et examinons les liens entre la convergence faible de la suite étalante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et celle de la suite fondamentale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ces liens ont été étudiés par S. Guerre et le second auteur [34].

5. CONVERGENCE FAIBLE DE LA SUITE ETALANTE ET CONVERGENCE FAIBLE DE LA SUITE FONDAMENTALE DU MODELE :

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite étalante, $\mathscr{F}$ l'extension construite sur cette suite, F le modèle étalé et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite fondamentale du modèle.

PROPOSITION 1 ([8])

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* 0 *dans* E , *alors* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est basique inconditionnelle et, plus précisément*

$$\| \sum_{i \in A} a_i \, e_i \| \leqslant \| \sum_{i \in B} a_i \, e_i \|$$

pour toute suite finie de scalaires (a_i) *et tous ensembles finis d'entiers* A *et* B *avec* $A \subset B$.

Démonstration

Elle est voisine de celle de la propositiion 4.2 - 3°). Montrons que $\| a_1 e_1 + a_3 e_3 \| \leq \| a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe ∂ tel que si $\partial < n_1 < n_2 < n_3$, on ait :

$$\begin{cases} | \, \| a_1 e_1 + a_3 e_3 \| - \| a_1 x_{n_1} + a_3 x_{n_3} \| \, | < \varepsilon \\ | \, \| a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \| - \| a_1 x_{n_1} + a_2 x_{n_2} + a_3 x_{n_3} \| \, | < \varepsilon \end{cases}$$

Puisque $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ pour $\sigma(E,E')$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et des entiers $p_1, \dots, p_k$, avec $p_1 + \dots + p_k = N$, tels que :

$$\| \frac{1}{N} (p_1 x_{n_1+1} + \dots + p_k x_{n_1+k}) \| < \varepsilon / |a_2|$$

Pour $j = 1, \dots, k$, on a :

$$\| a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \| \geqslant \| a_1 x_{n_1} + a_2 x_{n_1+j} + a_3 x_{n_1+k+1} \| - \varepsilon$$

et donc

$$\| a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \|$$

$$\geqslant \| a_1 x_{n_1} + a_2 \frac{p_1 x_{n_1+1} + \dots + p_k x_{n_1+k}}{N} + a_3 x_{n_1+k+1} \| - \varepsilon$$

$$\geqslant \| a_1 x_{n_1} + a_3 x_{n_3} \| - 2\varepsilon$$

$$\geqslant \| a_1 e_1 + a_3 e_3 \| - 3\varepsilon$$; ce qui prouve la proposition.

Le lemme qui suit montre ce qui se passe lorsque la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tout entière est décalée d'un vecteur x quelconque :

LEMME 2

Si $(x_n)_{n \in N}$ est une suite étalante et x un point quelconque de E, la suite $(x_n - x)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore étalante. Soit $\mathcal{G}$ l'extension de E construite sur $(x_n - x)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{F}$ celle construite sur $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite fondamentale du modèle G, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ celle du modèle F. De la formule évidente :

$$\lim_{\substack{n_1 < \ldots < n_k \\ \to +\infty}} \| y + \sum_{i=1}^{k} a_i (x_{n_i} - x) \| = \lim_{\substack{n_1 < \ldots < n_k \\ \to +\infty}} \| y - (\sum_1^k a_i) x + \sum_1^k a_i x_{n_i} \|$$

($\forall$ y $\in$ E, $\forall$ k, $\forall$ $a_1, \ldots, a_k$ scalaires), résulte :

$$(6) \qquad \| y + \sum_1^k a_i g_i \| = \| y - (\sum_1^k a_i) x + \sum_1^k a_i e_i \|$$

et l'opérateur T, défini de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$ par :

$$T(y + \sum a_i g_i) = y - (\sum a_i) x + \sum a_i e_i$$

est une isométrie linéaire et surjective de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{F}$.

THEOREME 3

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante et* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite fondamentale du modèle* F *construit sur cette suite.*

Supposons que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ne soit pas équivalente à la base canonique de* ℓ^1. *Alors :*

1) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est faiblement de Cauchy dans* F,

2) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est faiblement de Cauchy dans* E,

3) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge faiblement dans* E *si et seulement si* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge faiblement dans* F *, et la limite est la même (et donc, en particulier, appartient à* E*).*

DEMONSTRATION

1) Résulte immédiatement du lemme 4.1.

2) Soit f une forme linéaire continue sur E. Si la suite $(f(x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

ne converge pas, soient $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux sous-suites telles que $\lim f(x'_n) = \lambda$, $\lim f(x''_n) = \mu$, avec $\lambda \neq \mu$.

En posant $\tilde{f}(e_{2i}) = \lambda$, $\tilde{f}(e_{2i+1}) = \mu$ pour $i \in \mathbb{N}$, on définit une forme linéaire continue sur $\mathscr{F}$, prolongeant f. Comme $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est faiblement de Cauchy, on doit avoir $\lambda = \mu$, d'où une contradiction.

3) Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in E$. Alors $(x_n - x)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0, et, d'après la proposition 1, la suite fondamentale $(e_n - x)_{n \in \mathbb{N}}$ du modèle étalé qui lui est associé est basique inconditionnelle.

Comme $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas équivalente à la base canonique de ℓ^1, $(e_n - x)_{n \in \mathbb{N}}$ non plus ; elle est donc faiblement convergente vers 0, d'après la proposition 4.4.

Réciproquement, si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers e dans $\mathscr{F}$, montrons d'abord que e est dans E. On sait qu'il existe une suite

$$\theta_n = \sum_{p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i e_i, \text{ avec } \lambda_i \geqslant 0, \ \sum_{p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i = 1 \ \forall n,$$

qui converge vers e dans $\mathscr{F}$ pour la norme.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p,q > N$, $\| \theta_p - \theta_q \| < \varepsilon$.

Pour p et q ainsi choisis, il existe (par définition de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$) un élément $t \in E$ tel que :

$$\left| \| \theta_p - \theta_q \| - \| \theta_p - t \| \right| < \varepsilon$$

Il en résulte que la distance de θ_p à E tend vers 0 lorsque $p \to +\infty$ et donc $e \in E$.

Soit maintenant f une forme linéaire sur E. Comme la suite $(x_n - e)_{n \in \mathbb{N}}$ est faiblement de Cauchy dans E, on peut, en posant

$$\tilde{f}(e_i - e) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n - e),$$

définir une forme linéaire sur $\mathscr{F}$, prolongeant f, de même norme que f. Mais $\tilde{f}(e_i - e) = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc $x_n \to e$, faiblement dans E.

Il résulte en particulier de 3) que, dans un espace réflexif, une suite étalante converge faiblement.

Dans les hypothèses du théorème ci-dessus figure le fait que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas équivalente à la base canonique de ℓ^1. Nous verrons que si elle l'est, on ne peut rien dire du comportement de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du point de vue de la topologie faible. Le chapitre suivante sera consacré à une étude particulière des espaces ayant un modèle étalé isomorphe à ℓ^1.

La proposition qui suit permet de limiter l'étude des extensions au cas où la suite étalante est basique :

PROPOSITION 4

1) Toute extension est isométrique à une extension construite sur une suite étalante basique (et dont la suite fondamentale, en conséquence est basique).

2) Tout modèle étalé est isomorphe à un modèle étalé dont la suite fondamentale est basique.

DEMONSTRATION

1) Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite fondamentale d'une extension de E construite sur une suite étalante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de ℓ^1, ou converge faiblement vers 0, ou faiblement de Cauchy non convergente, elle possède une sous-suite basique, qui détermine le même modèle étalé.

Dans le cas où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un point $x \neq o$, l'extension construite sur $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est isométrique à l'extension construite sur $(x_n - x)_{n \in \mathbb{N}}$ (lemme 2) ; une sous-suite de cette suite est basique.

2) Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite écartable faiblement convergente vers un élément non nul e, $\overline{\text{span}}\,\{(e_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ est somme directe de $\mathbb{K}\,.\,e$ et de $\overline{\text{span}}\,\{(e_n - e)_{n \in \mathbb{N}}\}$. On a un isomorphisme

$$\mathbb{K}\, e \oplus \text{span}\{(e_n - e)_{n \in \mathbb{N}}\} \to \overline{\text{span}}\,\{(e_n - e)_{n \in \mathbb{N}}\},$$

défini par :

$$(\lambda e, \sum_i a_i (e_i - e)) \to (e_1 - e) + \sum_{i>1} a_{i-1} (e_i - e)$$

et ceci prouve notre assertion, puisque $(e_n - e)_{n \in \mathbb{N}}$ est basique et écartable.

Plus précisément, on peut énoncer :

PROPOSITION 5

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite étalante convergeant faiblement vers un élément* e *de* E, *les modèles étalés sur* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et sur* $(x_n - e)_{n \in \mathbb{N}}$ *sont isomorphes.*

DEMONSTRATION

Dans le cas où la suite fondamentale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du modèle étalé converge faiblement vers e, la démonstration est celle du 2) de la proposition précédente.

Supposons maintenant que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit équivalente à la base canonique de ℓ^1. Posons $y_n = x_n - e$, et notons $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite fondamentale du modèle étalé sur $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour toute suite finie de scalaires $a_1, \dots, a_k$, on a :

$$\|(a_1 f_1 + \dots + a_k f_k) - (a_1 f_{k+1} + \dots + a_k f_{2k})\|$$

$$= \|(a_1 e_1 + \dots + a_k e_k) - (a_1 e_{k+1} + \dots + a_k e_{2k})\|$$

$$\geq 2\delta(|a_1| + \dots + |a_k|)$$

Mais $\|(a_1 f_1 + \dots + a_k f_k) - (a_1 f_{k+1} + \dots + a_k f_{2k})\|$

$\leq 2\,\|a_1 f_1 + \dots + a_k f_k\|$, et la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc bien équivalente à la base canonique de ℓ^1.

6. LE SHIFT SUR LA SUITE FONDAMENTALE DU MODELE ETALE

Sur l'espace $E \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on peut définir un opérateur T par $T(x + \sum_i a_i e_i) = x + \sum_i a_i e_{i+1}$ $(x \in E,\ (a_i) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})})$. La définition même de l'extension $\mathscr{F}$ montre que T se prolonge en une isométrie de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$, dont la restriction à E est l'identité et la restriction à F est le shift usuel sur la suite fondamentale du modèle.

Les résultats de ce paragraphe concernent les propriétés d'ergodicité de ce shift. Ils sont dus à A. Brunel et L. Sucheston [18] ; les considérations du paragraphe précédent permettent cependant de préciser les résultats de [18] tout en simplifiant les démonstrations.

Pour $n \in \mathbb{N}$, nous notons $F_n = \overline{\text{span}}\ \{(e_i)_{i \geqslant n}\}$ et $F_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

THEOREME 1

L'espace F_∞ *est l'ensemble des points fixes de* T *sur* F, *il est de dimension* 0 *ou* 1.

Le second cas se produit si et seulement si la suite fondamentale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge faiblement (dans* F*) vers une limite non nulle* e *(ce point* e *est dans* E*) ; on a alors*

$$F = F_\infty + \overline{(I - T)F} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_1^n e_j \underset{n \to +\infty}{\to} e \quad \textit{dans } F$$

DEMONSTRATION

Soit P l'ensemble des points fixes de T appartenant à F. Il est clair que $P \subset F_\infty$.

Nous allons maintenant distinguer deux cas, suivant que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ou non basique :

1) Si la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est basique, alors $P = F_\infty = 0$.
En effet, chaque $x \in F_\infty$ a alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une décomposition

$$x = \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i^{(n)} e_i$$

Mais l'unicité de la décomposition sur une suite basique implique que tout les $(\alpha_i^{(n)})_i$ sont nuls.

2) Supposons maintenant que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas basique.
On sait alors (prop. 4.2) que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un élément $e \neq 0$, dans F, et, d'après le théorème 5.3, ce point e est dans E : il est donc fixe pour T.

Considérons la suite étalante $(x_n - e)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E, qui engendre un modèle étalé G dont la suite fondamentale est $(e_n - e)_{n \in \mathbb{N}}$. Notons $G_n = \overline{\text{span}}\ (e_i - e)_{i \geqslant n}$.

On a alors :

a) la suite $(e_n - e)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 faiblement,

b) G_n est invariant par T, puisque $T(e_i - e) = e_{i+1} - e$,

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \mathbb{K}e + G_n$.

Du 1), on déduit alors que $G_\infty = \bigcap_n G_n = 0 = \{0\}$ et $F_\infty = \bigcap_n F_n = \bigcap_n (\mathbb{K}e \oplus G_n) = \mathbb{K}e \oplus \bigcap_n G_n = \mathbb{K}e$.

Pour terminer, remarquons d'abord que, d'après la proposition 4.4, $\frac{1}{n}\sum_1^n (e_j - e) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ dans F, et donc $\frac{1}{n}\sum_1^n e_j \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$ comme annoncé. Il nous reste à voir que $G = \overline{(I-T)F}$. Pour cela, il suffit de remarquer que $(I-T)F$ est engendré par les vecteurs $(e_n - e_p)$ $n,p \in \mathbb{N}$, et que les espaces $\overline{\mathrm{span}}\{(e_n - e_p)\ n,p \in \mathbb{N}\}$ et $\overline{\mathrm{span}}\{(e_n - e),\ n \in \mathbb{N}\}$ coïncident.

<u>COROLLAIRE 2</u>

L'extension $\mathcal{F}$ admet une décomposition canonique $\mathcal{F} = E \oplus G$, où G est un modèle étalé de E ; la restriction de T à G n'a que 0 pour point fixe, et T est l'identité sur E.

Nous obtenons en outre le théorème ergodique suivant pour T :

<u>THEOREME 3</u>

Si dans F la suite fondamentale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est faiblement convergente, alors, pour tout y de $\mathcal{F}$:

$$\frac{1}{n}\sum_1^n T^j y \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Pi(y) \text{ dans } \mathcal{F},$$

où $\Pi(y)$ est la projection de y sur E parallèlement à l'espace G défini au corollaire précédent.

<u>DEMONSTRATION</u>

Soit $e \in F$ la limite faible de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$; l'espace G est $\overline{\mathrm{span}}\{(e_n - e),\ n \in \mathbb{N}\}$. Tout point $y \in \mathcal{F}$ admet une décomposition unique

$$y = y_1 + y_2 \qquad y_1 \in E,\ \ y_2 \in G,$$

et l'on a $\frac{1}{n}\sum_1^n T^j y = y_1 + \frac{1}{n}\sum_1^n T^j y_2$

Mais on sait que $\frac{1}{n}\sum_1^n (e_j - e) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} T^j(e_k - e) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. La même conclusion vaut pour toute combinaison linéaire finie des $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$, donc pour tout élément de G, et $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} T^j y_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$; ceci achève la démonstration du théorème.

Concernant le comportement des sommes de Cesàro des $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$, nous avons obtenu :

PROPOSITION 4

Les sommes de Cesàro $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} e_j$ *convergent dans* F *vers un point* e (e $\neq 0$ *ou* e = 0 *) si et seulement si la suite* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* e.

Nous verrons au chapitre suivant comment traduire ces renseignements sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E.

7. SOUS-ESPACES DE MODELES ETALES

Nous allons d'abord préciser quelques notations, qui nous seront utiles à plusieurs reprises par la suite :

Notations

Si $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de points dans un espace de Banach, toute combinaison linéaire (finie) $u = \sum_k a_k z_k$ s'appellera un *bloc* sur la suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Les (a_k) sont les *coefficients* du bloc. Le *support* du bloc u sera $\{k,\ n_1 \leq k \leq n_2\}$, où n_1 est l'indice du premier coefficient non nul dans le bloc, n_2 l'indice du dernier coefficient non nul. Nous noterons $n_1 = \mathrm{deb}(u)$ (début de u), $n_2 = \mathrm{fin}(u)$. Il faut noter qu'avec cette définition, le support d'un bloc ne contient pas de "trous".

Si u_1 et u_2 sont deux blocs sur la suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, nous dirons que u_1 et u_2 sont *consécutifs*, ou que u_1 est *antérieur* à u_2, si $\mathrm{fin}(u_1) < \mathrm{deb}(u_2)$. Nous dirons que u_2 *reproduit* u_1, ou que u_1 et u_2 sont *isonômes ou* (un peu abusivement) que u_1 et u_2 *ont les mêmes* *coefficients*, si u_1 s'écrivant $u_1 = \Sigma\, a_k z_k$, on a $u_2 = \Sigma\, a_k z_{k+n}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Une suite de blocs isonômes est donc une suite de blocs dont tous les éléments reproduisent le bloc initial.

Comme au paragraphe précédent, soit $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite étalante, $\mathcal{F}$ l'extension de E, F le modèle étalé, et $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite fondamentale de celui-ci. Soient $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des blocs (non nécessairement consécutifs) sur la suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Nous nous intéressons au sous-espace fermé G engendré dans F par la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Les résultats de ce paragraphe sont dus au premier auteur [11b].

DEFINITION

Une suite de blocs $(W_n^k)_{\substack{1 \leq k \leq 2^n \\ n \in \mathbb{N}}}$ *sur la suite* $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *sera dite* cycliquement reproduite *sur la suite* $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *si :*

a) Pour tout $k \geq 1$, *tous les* W_n^k $(n \geq \log_2 k)$ *utilisent les mêmes coefficients,*

b) Pour tout n, *tout* k *avec* $1 \leq k \leq 2^n$, *tout* k' *avec* $1 \leq k' \leq 2^{n+1}$, W_n^k *est antérieur à* $W_{n+1}^{k'}$.

PROPOSITION 1

Pour tout $\varepsilon > 0$ *et toute suite* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de blocs sur la suite fondamentale* $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *du modèle étalé, il existe une suite de blocs* $(W_n^k)_{\substack{1 \leq k \leq 2^n \\ n \in \mathbb{N}}}$, *cycliquement reproduite sur la suite* $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *l'espace vectoriel engendré, dans* F, *par* $g_1 \ldots g_{2^n}$ *soit* $(1 + \frac{\varepsilon}{2^n})$ *isomorphe à l'espace vectoriel engendré, dans* E, *par :* $W_n^1, \ldots, W_n^{2^n}$.

Si, à l'origine, les $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *étaient consécutifs sur la suite* $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$, *les* $(W_n^k)_{\substack{1 \leq k \leq 2^n \\ n \in \mathbb{N}}}$ *peuvent être pris consécutifs, dans l'ordre :*

(1) $$W_o^1,\ W_1^1,\ W_1^2, \ldots, W_n^1,\ W_n^2,\ \ldots\ W_n^{2^n},\ W_{n+1}^1,\ \ldots\ .$$

DEMONSTRATION

Soit $\varepsilon > 0$. Notons $g_k = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)} e_j$, et démontrons la proposition par récurrence.

Pour n=0, par définition du modèle étalé, il suffit de choisir m_o assez grand pour que

$$(1-\varepsilon) \left\| \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j^{(1)} e_j \right\| < \left\| \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j^{(1)} x_{j+m_o} \right\| < (1+\varepsilon) \left\| \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j^{(1)} e_j \right\|,$$

et on posera $W_o^1 = \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j^{(1)} x_{j+m_o}$.

Supposons $W_o^1, W_1^1, W_1^2, \ldots, W_{k-1}^1, \ldots, W_{k-1}^{2^{k-1}}$ construits. Soit m'_{k-1} le dernier indice utilisé dans la suite $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ pour cette construction. Soit $N = \max n_j$, $j \leq 2^k$. D'après la proposition 3.3, on peut trouver un entier $m_k > m'_{k-1}$ tel que, pour toute suite $(c_i)_{i \leq N}$ de scalaires, on ait :

$$(1-\frac{\varepsilon}{2^k}) \left\| \sum_{j=1}^{N} c_j e_j \right\| < \left\| \sum_{j=1}^{N} c_j x_{j+m_k} \right\| < (1+\frac{\varepsilon}{2^k}) \left\| \sum_{j=1}^{N} c_j e_j \right\|.$$

Posons alors :

$$W_k^1 = \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j^{(1)} x_{j+m_k}, \quad W_k^2 = \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_j^{(2)} x_{j+m_k}, \quad W_k^{2^k} = \sum_{j=1}^{n_{2^k}} \alpha_j^{(2^k)} x_{j+m_k}.$$

On obtient alors, pour toute suite de scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_{2^k}$,

$$(1-\frac{\varepsilon}{2^k}) \left\| \sum_1^{2^k} \beta_j g_j \right\| < \left\| \sum_{j=1}^{2^k} \beta_j W_k^j \right\| < (1+\frac{\varepsilon}{2^k}) \left\| \sum_1^{2^k} \beta_j g_j \right\| \quad \text{et donc}$$

$\mathrm{span}[g_1, \ldots, g_{2^k}]$ est $(1+\frac{\varepsilon}{2^k})$-isomorphe à $\mathrm{span}[W_k^1, \ldots, W_k^{2^k}]$. Par ailleurs, il est clair sur la construction que la suite $(W_n^k)_{\substack{1 \leq k \leq 2^n \\ n \in \mathbb{N}}}$ est cycliquement reproduite sur la suite $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$. La proposition est donc démontrée.

La proposition ci-dessus est donc une conséquence très simple de la proposition 3.3. Elle permet néanmoins de décrire, par exemple, à quelle condition le modèle étalé F est réflexif, ou à quelle condition il contient un sous-espace isomorphe à ℓ^1 (en abrégé :

contient ℓ^1).

PROPOSITION 2

Le modèle étalé F n'est pas réflexif si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ *on peut trouver une suite* $(W_n^k)_{\substack{1 \leq k \leq 2^n \\ n \in \mathbb{N}}}$ *de blocs normalisés, cycliquement reproduite sur la suite* $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, *et telle que, pour tout* $n \geq 1$, *pour tout* $k \leq 2^n$, *on ait :*

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{dist}(\operatorname{conv}(W_n^1,\dots,W_n^k),\ \operatorname{conv}(W_n^{k+1},\dots,W_n^{2^n})) \geq 1-\varepsilon.$$

DEMONSTRATION

Supposons F non réflexif. D'après un résultat de R.C. JAMES [37], on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver une suite de blocs normalisés $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur la suite fondamentale $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}(g_1,\dots,g_k),\ \operatorname{conv}(g_{k+1},\dots)) \geq 1-\varepsilon$. La suite $(W_n^k)_{\substack{1 \leq k \leq 2^n \\ n \in \mathbb{N}}}$, cycliquement reproduite sur $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, obtenue par la proposition 1, donne (2) après normalisation.

Inversement, si (2) est satisfait, notons

$$W_k^\ell = \sum_{j=1}^{n_\ell} \alpha_j^{(\ell)} x_{j+m_k}$$

et posons $g_\ell = \sum_{j=1}^{n_\ell} \alpha_j^{(\ell)} e_j$. Puisque tous les W_k^ℓ $(k \geq \log_2 \ell)$ utilisent les mêmes coefficients, on obtient, faisant tendre k vers $+\infty$:

$$\operatorname{dist}(\operatorname{conv}(g_1,\dots,g_k),\ \operatorname{conv}(g_{k+1},\dots)) \geq 1-\varepsilon$$

et F n'est pas réflexif.

PROPOSITION 3

Le modèle étalé F contient ℓ^1 *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver une suite* $(W_n^k)_{\substack{1 \leq k \leq 2^n \\ n \in \mathbb{N}}}$ *de blocs normalisés, cycliquement reproduite sur la suite* $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, *consécutifs dans l'ordre (1), et telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $W_n^1,\dots,W_n^{2^n}$ *soit* $(1+\varepsilon)$ *équivalent à la base canonique de* $\ell^1_{2^n}$.

DEMONSTRATION

Supposons que F contienne ℓ^1. Soit $\varepsilon > 0$. D'après un résultat de R.C. JAMES [38] (voir p. ex. [51]), on peut trouver une suite de blocs normalisés $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur la suite fondamentale $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour toute suite finie de scalaires $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

(3) $$(1-\frac{\varepsilon}{2}) \sum_i |a_i| \leq \|\sum_i a_i g_i\| \leq \sum_i |a_i|.$$

Nous allons les remplacer par des blocs consécutifs. Notons $g_\ell = \sum_j \alpha_j^{(\ell)} e_j$. Quitte à extraire une sous-suite de la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (qui vérifie encore (3)), on peut supposer que, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, la limite $\lim_{\ell \to +\infty} \alpha_j^{(\ell)}$ existe. En effet, ces coefficients forment une suite bornée :

LEMME 4

Si $\|\sum \gamma_j e_j\| \leq M$, *alors pour tout* j, $|\gamma_j| \leq \dfrac{2M}{\|e_1-e_2\|}$.

DEMONSTRATION DU LEMME

On a :

$$\|\Sigma\gamma_j e_j\| = \|\gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_{j-1}e_{j-1} + \gamma_j e_j + \gamma_{j+1}e_{j+2} + \dots + \gamma_L e_{L+1}\|$$

$$= \|\gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_{j-1}e_{j-1} + \gamma_j e_{j+1} + \gamma_{j+1}e_{j+2} + \dots + \gamma_L e_{L+1}\|$$

et donc

$$\|\gamma_j(e_j-e_{j+1})\| \leq 2M, \text{ d'où le lemme.}$$

Posons maintenant $g'_\ell = \frac{1}{2}(g_{2\ell} - g_{2\ell+1})$. La suite $(g'_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ vérifie encore (3), et on peut écrire :

$$g'_\ell = \sum_j \beta_j^{(\ell)} e_j, \qquad \text{avec pour tout } j, \lim_{\ell \to +\infty} \beta_j^{(\ell)} = 0.$$

Pour une sous-suite $(g''_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $(g'_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, on peut alors trouver une suite de blocs $(h_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, consécutifs sur la suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$, normalisés, et telle que $\|h_\ell - g''_\ell\| < \varepsilon/2$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. On obtient alors :

$$(4) \qquad (1-\varepsilon) \sum_i |a_i| \leqslant \|\sum_i a_i h_i\| \leqslant \sum_i |a_i|,$$

on procède alors comme pour la proposition précédente.

*

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS DE BANACH-SAKS ET MODÈLES ÉTALÉS ISOMORPHES À ℓ^1

Le but de ce chapitre est de montrer que la notion de Modèle Etalé, introduite au chapitre précédent, constitue un outil puissant pour l'étude de certaines propriétés de sommabilité. En même temps, nous résoudrons complètement la question suivante : quand la suite fondamentale du modèle est-elle équivalente à la base canonique de ℓ^1 ? Cette question a été laissée en suspens au chapitre précédent, où nous avons mentionné, lors de l'étude du comportement à l'égard de la topologie faible, qu'elle correspondait à un cas "pathologique" (sur lequel nous reviendrons aussi dans les exemples du Chapitre IV).

Les résultats de ce chapitre sont dus à A. BRUNEL et L. SUCHESTON [17] qui, les premiers, ont introduit les méthodes développées ici, à H.P. ROSENTHAL [59] (pour la proposition 6.2, obtenue par d'autres méthodes), et au premier auteur [8].

1. LES PROPRIETES DE BANACH-SAKS

Soit E un espace de Banach. On dit qu'il possède la propriété de Banach-Saks (en abrégé B.S.), si de toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les sommes de Cesàro $\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x'_k$ convergent, lorsque $n \to +\infty$. (On dira aussi que $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro).

Cette propriété a été introduite par S. BANACH et S. SAKS [7] qui ont montré qu'elle était vraie dans les espaces L^p $(1 < p < +\infty)$. Elle a ensuite été étudiée systématiquement.

Son intérêt réside dans le fait suivant : si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de solutions approchées d'une équation, ou de points approximativement fixes pour un opérateur, il arrive souvent qu'un point d'adhérence faible, c'est-à-dire la limite d'une sous-suite, $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, soit solution exacte, ou point fixe pour l'opérateur. Mais la convergence faible ne permet pas le calcul d'algorithmes pour trouver des solutions approchées. Si l'espace a la propriété de Banach-Saks, en prenant les moyennes $\frac{1}{n} \sum_1^n x'_k$, on aura une convergence forte, bien sûr vers la même limite.

La propriété de Banach-Saks est conservée si la norme d'origine est remplacée par une norme équivalente. Après le résultat, déjà mentionné, de Banach et Saks, KAKUTANI [42] a démontré que tout espace uniformément convexe la possédait. Nous verrons au cours de ce chapitre que tout espace réflexif ne contenant pas $\ell^1_{(n)}$ uniformément (c'est-à-dire dans lequel ℓ^1 n'est pas finiment représentable, voir chap. I, § 4) la possède aussi. Inversement, la propriété de Banach-Saks implique la réflexivité : soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans la boule unité de E. D'après Eberlein-Šmulian, il existe une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant, pour $\sigma(E'',E')$, vers un point z de E''. Si E a Banach-Saks, une sous-suite $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a des moyennes $\frac{1}{n} \sum_1^n x''_k$ convergentes dans E. Mais ces moyennes convergent pour $\sigma(E'',E')$ vers z, et donc $z \in E$, et E est réflexif. Une autre façon de le voir est d'utiliser un résultat de R.C. JAMES [37], déjà mentionné (Chap. I, § 8) : un espace E n'est pas réflexif si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de points de norme 1, vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$(\mathscr{J}) \qquad \mathrm{dist}(\mathrm{conv}(z_1,\dots,z_k),\ \mathrm{conv}(z_{k+1},\dots)) \geqslant 1-\varepsilon.$$

Il est clair que la suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne peut avoir de sous-suite convergente au sens de Cesàro.

Outre la propriété de Banach-Saks définie ci-dessus, nous en utiliserons deux autres, dont la définition présente avec la première certaines analogies :

E possède la *propriété de Banach-Saks alternée* (en abrégé : A.B.S.) si de toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les moyennes alternées $\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (-1)^k x'_k$ convergent. Cette propriété a été introduite et étudiée par A. BRUNEL et L. SUCHESTON [17], qui ont démontré que tout espace de Banach ne contenant pas $\ell^1_{(n)}$ uniformément la possédait. C'est une propriété plus faible que B.S., comme nous le verrons.

E possède la *propriété de Banach-Saks faible* (en abrégé W.B.S., Weak-Banach-Saks) si de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers 0 on peut extraire une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant (vers 0) au sens de Cesàro. Cette propriété est plus faible que les deux autres : ℓ^1 la possède (puisque toute suite faiblement convergente vers 0, y est convergente en norme), mais ne possède aucune des deux autres.

Nous reviendrons sur ces propriétés, les classant entre elles et par rapport à la réflexivité.

2. MODELES ETALES ISOMORPHES A ℓ^1.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer à quelle condition sur la suite étalante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le modèle étalé F est isomorphe à ℓ^1. Commençons par remarquer que ceci peut être caractérisé sur la suite fondamentale du modèle :

LEMME 1

Le modèle étalé F *est isomorphe à* ℓ^1 *si et seulement si sa suite fondamentale est équivalente à la base canonique de* ℓ^1.

DEMONSTRATION

Supposons F isomorphe à ℓ^1. D'après H.P. ROSENTHAL [58], la suite fondamentale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui, ou bien est de Cauchy faible, ou bien est équivalente à la base canonique de ℓ^1. Supposons $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy faible. Alors

$(e'_{2n}-e'_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0, donc fortement, puisque F est isomorphe à ℓ^1. Mais la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est écartable, et donc $\|e_1-e_2\| = \|e'_{2n}-e'_{2n+1}\|$, et $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut donc être de Cauchy faible. Donc elle est équivalente à la base canonique de ℓ^1, et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tout entière l'est aussi, par écartabilité.

Le théorème ci-dessous, dû au premier auteur [8], répond à la question posée :

THEOREME 2

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante normalisée. Supposons la suite fondamentale* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *du modèle* F *équivalente à la base canonique de* ℓ^1, *et, plus précisément, soit* $\delta > 0$ *tel que*

(1) $$\delta \Sigma |a_i| \leqslant \|\sum_i a_i e_i\| \leqslant \sum_i |a_i|$$

pour toute suite finie de scalaires (a_i).

On peut trouver une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *possédant les deux propriétés suivantes :*

(2) *Pour tout* $k \geqslant 1$, *tous* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k = \pm 1$, *tous* $n_1 < \ldots < n_k$,

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i x'_{n_i} \right\| \geqslant \delta/_2.$$

(3) *Pour tout* $k \geqslant 1$, *tous* $n_1 < \ldots < n_{2^k}$, *avec* $n_1 \geqslant k$, *tous*

scalaires $a_1, \ldots, a_{2^k}$,

$$\left\| \sum_1^{2^k} a_i x'_{n_i} \right\| \geqslant \frac{\delta}{2} \sum_1^{2^k} |a_i|.$$

Inversement, si l'une ou l'autre des propriétés (2) ou (3) est satisfaite par une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *la suite* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *vérifie (1) avec* δ *remplacé par un* $\delta' > 0$.

DEMONSTRATION

Soit $\varepsilon > 0$, avec $\varepsilon \leqslant 1/6$; pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit ν_k l'entier donné par la proposition I.3.3 pour $N_k = 2^{k+4}[\frac{1}{\delta}]$ ([.] désigne la partie entière). D'après cette proposition, on a, si $\nu_k \leqslant n_1 < \dots < n_{N_k}$,

(4) $$(1-\varepsilon)\|\sum_1^{N_k} a_i x_{n_i}\| \leqslant \|\sum_1^{N_k} a_i e_i\| \leqslant (1+\varepsilon)\|\sum_1^{N_k} a_i x_{n_i}\| .$$

Considérons la sous-suite $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Si $k \leqslant n_1 < \dots < n_{2^k}$, on a a fortiori, d'après (4) :

$$\|\sum_1^{2^k} a_i x'_{n_i}\| \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon} \|\sum_1^{2^k} a_i e_i\| \geqslant \frac{\delta}{1+\varepsilon} \sum_1^{2^k} |a_i| \geqslant \frac{\delta}{2} \sum_1^{2^k} |a_i| ,$$

d'où (2).

Soit maintenant $n \geqslant 1$, et soit $k = \inf \{ k', k'+N_{k'} \geqslant n \}$.

On a $n-k \leqslant N_k$, et on décompose la somme

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i x'_{n_i} \quad \text{en} \quad \frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i x'_{n_i} = \frac{1}{n}\sum_1^k \varepsilon_i x'_{n_i} + \frac{1}{n}\sum_{k+1}^n \varepsilon_i x'_{n_i} .$$

D'après (4), on a : $\|\sum_{k+1}^n \varepsilon_i x'_{n_i}\| \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon} \|\sum_{k+1}^n \varepsilon_i e_i\| \geqslant \frac{\delta}{1+\varepsilon}$ (n-k)

et donc $$\|\frac{1}{n}\sum_{k+1}^n \varepsilon_i x'_{n_i}\| \geqslant \frac{\delta}{1+\varepsilon}\,\frac{n-k}{n} \geqslant \frac{\delta}{1+\varepsilon}\cdot\frac{7}{8} , \text{ car } n \geqslant n_{k-1} \geqslant 8k,$$
$$\geqslant \frac{3}{4}\delta$$

tandis que $$\|\frac{1}{n}\sum_1^k \varepsilon_i x'_{n_i}\| \leqslant \frac{k}{n} < \frac{k}{N_{k-1}} \leqslant \frac{k}{2^{k+3}[\frac{1}{\delta}]} \leqslant \frac{\delta}{4} ,$$

d'où $\|\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i x'_{n_i}\| \geqslant \delta/2$, et on obtient (2).

Inversement, si (3) est satisfait, (1) l'est aussi, avec δ remplacé par $\frac{\delta}{2}$.

Supposons (2) vérifié ; on obtient alors, pour tout k, tous $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k = \pm 1$,

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i \, e_i \right\| > \delta/2 ,$$

et il résulte du lemme 4.5 que, pour un certain $\delta' > 0$, on a, pour tout k, tous scalaires $a_1, \dots, a_k$,

$$\left\| \sum_1^k a_i \, e_i \right\| \geqslant \delta' \sum_1^k |a_i| ,$$

et on obtient (1).

<u>Remarque</u>

Le choix du nombre $N_k = 2^{k+4} [\frac{1}{\delta}]$ n'est justifié que parce que l'on souhaite obtenir dans (2) et (3) le même δ que dans (1). Si l'on prend $N_k = 2^k$, $\varepsilon = 1/2$, c'est-à-dire si $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la sous-suite caractéristique de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on obtiendra encore (3), mais au lieu de (2), on aura seulement (pour toute suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$, toute suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$) :

(2')
$$\lim_{n \to +\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k \, x'_{n_k} \right\| \geqslant \delta$$

et donc, pour un certain $\delta' > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

(2")
$$\left\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k \, x'_{n_k} \right\| \geqslant \delta' .$$

<u>COROLLAIRE</u>

L'espace E *a un modèle étalé isomorphe à* ℓ^1 *si et seulement si :*

$(\mathcal{P}_1)$ $\begin{cases} \textit{Il existe un } \delta > 0 \textit{ et une suite normalisée } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ dans } E \\ \textit{telle que, pour tout } k \geqslant 1, \textit{ pour tous } \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k = \pm 1, \textit{ pour} \\ \textit{tous } n_1 < \dots < n_k \textit{ , on ait} \end{cases}$

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i \, x_{n_i} \right\| \geqslant \delta .$$

Ceci se produit si et seulement si :

$$(\mathcal{P}_2)\begin{cases}\textit{Il existe un } \delta > 0 \textit{ et une suite normalisée } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ dans } E \\ \textit{telle que, pour tout } k \geqslant 1, \textit{pour tous scalaires } a_1,\dots,a_{2^k}, \\ \textit{pour tous } n_1<\dots<n_{2^k}, \textit{ on ait}\end{cases}$$

$$\|\sum_1^{2^k} a_i\, x_{n_i}\| \geqslant \delta \sum_1^{2^k} |a_i| .$$

Les estimations ci-dessus peuvent être améliorées :

THEOREME 3

L'espace E a un modèle étalé isomorphe à ℓ^1 si et seulement si

$$(\mathcal{P}'_1)\begin{cases}\textit{Pour tout } \eta > 0 \textit{, il existe une suite normalisée } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \textit{dans } E \textit{ telle que, pour tout } k, \textit{ pour tous } \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k = \pm 1, \\ \textit{pour tous } n_1<\dots<n_k \textit{, on ait}\end{cases}$$

$$\|\frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i\, x_{n_i}\| \geqslant 1 - \eta$$

Ceci se produit si et seulement si

$$(\mathcal{P}'_2)\begin{cases}\textit{Pour tout } \eta > 0 \textit{, il existe une suite normalisée } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \textit{dans } E \textit{ telle que, pour tout } k, \textit{ pour tous scalaires } a_1,\dots,a_{2^k} \\ \textit{pour tous } n_1<\dots<n_{2^k} \textit{, on ait}\end{cases}$$

$$\|\sum_1^k a_i\, x_{n_i}\| \geqslant (1-\eta) \sum_1^{2^k} |a_i|$$

DEMONSTRATION

Au vu du théorème 2, il suffit évidemment d'établir la proposition suivante :

PROPOSITION 4

Si E a un modèle étalé isomorphe à ℓ^1, il a, pour tout $\eta > 0$, un modèle étalé dont la suite fondamentale est $(1+\eta)$-équivalente à la base canonique de ℓ^1.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite étalante normalisée ; on suppose que la suite fondamentale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du modèle étalé construit sur cette suite vérifie (1). Nous allons adapter un procédé dû à R.C. James [38].

Soit $K = \mathrm{Inf}\ \{\|\Sigma a_i\ e_i\|\ ;\ \Sigma|a_i| = 1\}$. On a $K \geqslant \delta$.

Pour $\eta > 0$, soit $(a_i^\circ)_{i=1,\dots,i_o}$ une suite finie de scalaires telle que :

$$\sum_{i=1}^{i_o} |a_i^\circ| = 1 \quad \text{et} \quad K \leqslant \|\sum_{i=1}^{i_o} a_i^\circ\ e_i\| \leqslant K(1+\eta/4).$$

On peut donc trouver un entier ν tel que pour tout $n \geqslant \nu$,

$$K(1-\eta/4) \leqslant \|\sum_{i=1}^{i_o} a_i^\circ\ x_{n+i}\| \leqslant K(1+\eta/2).$$

Posons, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$y_o = \frac{1}{K(1+\eta/2)} \sum_{i=1}^{i_o} a_i^\circ\ x_{\nu+i}$$

$$y_1 = \frac{1}{K(1+\eta/2)} \sum_{i=1}^{i_o} a_i^\circ\ x_{\nu+i_o+i}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_k = \frac{1}{K(1+\eta/2)} \sum_{i=1}^{i_o} a_i^\circ\ x_{\nu+ki_o+i}$$

On a $\|y_k\| \leqslant 1$, pour tout $k \geqslant 1$. Du fait que les coefficients utilisés sont toujours les mêmes, la suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite étalante. Si (a_i) sont des scalaires avec $\Sigma|a_j| = 1$, on a :

$$\|\sum_j a_j\ y_{n_j}\| = \frac{1}{K(1+\eta/2)} \|\sum_j a_j \sum_{i=1}^{i_o} a_i^\circ\ x_{\nu+n_ji_o+i}\|$$

$$\geqslant \frac{1}{K(1+\eta/2)}\ K(1-\eta/4) \quad \text{si } \eta_1 \text{ est assez grand.}$$

Si $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est la suite fondamentale du modèle construit sur les $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$, on a donc

$$\|\Sigma a_j\ f_j\| \geqslant (1-\eta) \text{ , si } \Sigma|a_j| = 1, \text{ ce qui prouve la proposition.}$$

Il est clair que si la suite fondamentale du modèle est équivalente à la base canonique de ℓ^1, on ne peut extraire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aucune sous-suite convergente au sens de Cesàro : on a en effet, pour toute sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\left\|\frac{1}{2n} \sum_1^{2n} x'_k - \frac{1}{n} \sum_1^{n} x'_k \right\| = \left\|\frac{1}{2n}[(x'_1+\ldots+x'_n) - (x'_{n+1}+\ldots+x'_{2n})]\right\| \geqslant \delta ,$$

d'après le théorème 2.

A l'inverse, nous allons voir que la convergence des moyennes $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$ implique la même propriété pour une sous-suite des $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ceci a été établi par A. Brunel et L. Sucheston [17], mais notre démonstration sera nettement plus simple.

3. SOUS-SUITES DE LA SUITE ETALANTE CONVERGENTES AU SENS DE CESARO.

THEOREME 1

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de ± 1. Si les moyennes $\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k e_k$ convergent vers 0 dans F, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle

$$\sup_{(x''_n) \subset (x'_n)} \left\|\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k x''_k \right\| \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \qquad \textit{dans} \quad E$$

(en notant $(x''_n) \subset (x'_n)$ si $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.)

DEMONSTRATION

Considérons la sous-suite caractéristique $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. D'après la proposition I.3.3, on a, pour tout $k \geqslant 1$, pour tous $n_1 \ldots n_{2^k}$ avec $k \leqslant n_1 < \ldots < n_{2^k}$, et pour toute suite de scalaires $a_1, \ldots, a_{2^k}$:

$$(1) \qquad \frac{1}{2} \left\|\sum_1^{2^k} a_i x'_{n_i} \right\| \leqslant \left\|\sum_1^{2^k} a_i e_i \right\| \leqslant \frac{3}{2} \left\|\sum_1^{2^k} a_i x'_{n_i} \right\| .$$

Pour toute sous-suite $(x''_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$, pour tout $n \geqslant 1$,

on a donc, en posant $n' = [\log_{2^n}]$,

$$\left\|\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_j\, x''_j \right\| \leqslant \left\|\frac{1}{n} \sum_1^{n'} \varepsilon_j\, x''_j\right\| + \left\|\frac{1}{n} \sum_{n'+1}^{n} \varepsilon_j\, x''_j \right\|$$

$$\leqslant \frac{n'}{n} + \frac{2}{n} \left\| \sum_{n'+1}^{n} \varepsilon_j\, e_j\right\|$$

$$\leqslant \frac{3n'}{n} + \frac{2}{n} \left\|\sum_1^n \varepsilon_j\, e_j\right\|$$

et ces deux quantités tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Ce résultat est en apparence plus faible que celui de A. Brunel et L. Sucheston , mais la démonstration en est beaucoup plus simple ; il nous permettra néanmoins (aux corollaires 2 et 3 ci-dessous) d'en déduire leurs énoncés, et nous sera en outre utile au § 5.

COROLLAIRE 2

Si la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont toutes les sous-suites convergent au sens de Cesàro.

En effet, nous avons déjà vu que si les moyennes $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$ convergeaient dans F, vers un point e, ce point était dans E. Considérant la suite $(x_n - e)_{n \in \mathbb{N}}$ on obtient pour suite fondamentale $(e_n - e)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les moyennes convergent vers 0. Il suffit donc de considérer le cas où $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ dans F : l'application du théorème, avec $\varepsilon_n = +1$ pour tout n, donne le résultat voulu.

COROLLAIRE 3

Si la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a des moyennes alternées $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$ convergentes, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont toutes les sous-suites $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même propriété.

DEMONSTRATION

Cela résulte du théorème (avec $\varepsilon_k = (-1)^k$), car pour les moyennes alternées, la seule limite possible est 0 :

LEMME 4

Si $y = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_1^n (-1)^k e_k$, *alors* $y = 0$.

DEMONSTRATION DU LEMME

Posons $s_n = \frac{1}{n} \sum\limits_1^n (-1)^k e_k$. Si $s_n \underset{n \to +\infty}{\to} y$ dans F, alors $s_n - s_{2n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

Mais $s_n - s_{2n} = \frac{1}{2n} \left(\sum\limits_1^n (-1)^k e_k - \sum\limits_{n+1}^{2n} (-1)^k e_k \right)$

et donc

$$\| s_n - s_{2n} \| = \left\| \frac{1}{2n} \left(\sum_1^{2n+1} (-1)^k e_k - (-1)^{n+1} e_{n+1} \right) \right\|$$

$$\geqslant \frac{2n+1}{2n} \| s_{2n+1} \| - \frac{1}{2n}$$

et donc $s_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, et $y = 0$.

Nous pouvons maintenant établir un premier lien entre Modèles étalés et Propriétés de Banach-Saks :

THEOREME 5

E *a la propriété de Banach-Saks alternée (A.B.S) si et seulement si* E *n'a pas de modèle étalé isomorphe à* ℓ^1.

DEMONSTRATION

Si E a ℓ^1 pour modèle étalé, d'après le corollaire du théorème 2.2, on peut trouver une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $(\mathcal{P}_1)$. Mais alors $\left\| \frac{1}{2n} \sum\limits_1^{2n} (-1)^k x'_k - \frac{1}{n} \sum\limits_1^n (-1)^k x'_k \right\| \geqslant \delta$, et aucune sous-suite de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne peut converger au sens de Cesàro.

Inversement, supposons que E n'ait pas ℓ^1 pour modèle étalé.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée quelconque. Si elle a une sous-suite convergente, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on peut en extraire une suite étalante, encore notée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par hypothèse, la suite fondamentale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du modèle étalé n'est pas équivalente à la base canonique de ℓ^1. Compte tenu du théorème 1, il nous reste donc à démontrer :

PROPOSITION 6

Les moyennes alternées $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$ *convergent (vers 0) si et seulement si* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *n'est pas équivalente à la base canonique de* ℓ^1.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 6

Supposons que $s_n = \frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$ ne tende pas vers 0. On peut alors trouver une suite strictement croissante d'entiers $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et un $\delta > 0$ tels que $\| s_{m_j} \| \geqslant \delta$, pour $j \in \mathbb{N}$. Nous allons voir qu'en fait $\| s_n \| \geqslant \delta$ pour tout n :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit j assez grand pour que $\dfrac{n. \sup_i \| e_i \|}{m_j} < \varepsilon\delta$.
On écrit la division euclidienne :

$$m_j = nk + r \ , \ r < n$$

et l'on a :

$$\delta < \frac{1}{m_j} \| \sum_1^{m_j} (-1)^\ell e_\ell \| \leqslant \frac{1}{m_j} \| \sum_1^{nk} (-1)^\ell e_\ell \| + \frac{1}{m_j} \| \sum_{nk+1}^{nk+r} (-1)^\ell e_\ell \|$$

et donc

$$\frac{1}{m_j} \| \sum_1^{nk} (-1)^\ell e_\ell \| \geqslant (1-\varepsilon)\delta.$$

Mais comme $\| \sum_1^n (-1)^\ell e_\ell \| = \| \sum_{n+1}^{2n} (-1)^\ell e_\ell \| = \dots$, on obtient

$$\frac{k}{m_j} \| \sum_1^n (-1)^\ell e_\ell \| \geqslant (1-\varepsilon)\delta$$

et donc $\frac{1}{n} \| \sum_1^n (-1)^\ell e_\ell \| \geqslant (1-\varepsilon)\delta$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\| s_n \| \geqslant \delta$.

LEMME 7

Si pour tout $n \geqslant 1$, $\|\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k\| \geqslant \delta$, *alors, pour tout choix des signes* $\varepsilon_1,\ldots, \varepsilon_n = \pm 1$, $\|\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k e_k\| \geqslant \delta/4$.

DEMONSTRATION

Soient $n \geqslant 1$, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n = \pm 1$. On peut écrire :

$$\|\varepsilon_1 e_1+\ldots+\varepsilon_n e_n\| = \|\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_3 +\ldots+ \varepsilon_n e_{2n-1}\|$$

$$= \|-\varepsilon_1 e_2 - \varepsilon_2 e_4 - \ldots - \varepsilon_n e_{2n}\|$$

et donc :

$$\|\varepsilon_1 e_1+\ldots+\varepsilon_n e_n\| \leqslant \frac{1}{2} \|\varepsilon_1(e_1-e_2) +\ldots+ \varepsilon_n(e_{2n-1}-e_{2n})\|$$

Mais nous avons vu (prop. I.4.3) que la suite des différences $e_{2n+1}-e_{2n}$ était inconditionnelle. Il en résulte que

$$\|\varepsilon_1(e_2-e_2)+\ldots+\varepsilon_n(e_{2n-1}-e_{2n})\| \geqslant \frac{1}{2} \|e_1-e_2+\ldots+e_{2n-1}-e_{2n}\| ,$$

d'où le lemme.

Par ailleurs, nous savons (lemme I.4.5) que si l'on a

$$\|\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k e_k\| \geqslant \delta \text{ , alors } \|\sum_1 a_k e_k\| \geqslant \delta' \sum |a_k|$$

pour toute suite finie de scalaires (a_k) ($\delta' = \delta$ si les scalaires sont réels). La suite (e_k) est donc équivalente à la base canonique de ℓ^1, et la proposition 6 est démontrée.

Si la suite étalante $(x_n)_{n \geqslant 1}$ tend faiblement vers 0, la suite $(e_k)_{k \geqslant 1}$ est inconditionnelle, et les moyennes $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$ convergent vers 0 si et seulement si $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$ font de même. Il en résulte :

THEOREME 8

Un espace E *a la propriété de Banach-Saks faible si et seulement si le modèle étalé construit sur chaque suite étalante faiblement convergente vers* 0 *n'est pas isomorphe à* ℓ^1.

4. COMPARAISON DES DIFFERENTES PROPRIETES DE BANACH-SAKS.

Dans ce paragraphe, nous allons préciser les liens entre les trois propriétés introduites au § 1.

PROPOSITION 1

La propriété B.S. implique la propriété A.B.S. Toutes deux coïncident pour la classe des espaces réflexifs.

DEMONSTRATION

Si E n'a pas la propriété A.B.S., E a ℓ^1 pour modèle étalé, d'après le paragraphe précédent, et donc possède la propriété $(\mathcal{P}_1)$, d'après le § 2. Mais ceci interdit, comme nous l'avons déjà remarqué, qu'il puisse avoir B.S.

Supposons E réflexif et possédant A.B.S. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite étalante dans E. Elle a une sous-suite, encore appelée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, faiblement convergente vers un point $x \in E$; quitte à considérer la suite $(x_n - x)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut supposer $x = 0$. La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors inconditionnelle (prop. I.5.1). Si E a A.B.S., d'après la proposition 4 du paragraphe précédent, les moyennes alternées $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$ tendent vers 0, donc aussi les sommes de Cesàro $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$, d'après l'inconditionnalité. Mais d'après le corollaire 3.2, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont toutes les sous-suites convergent au sens de Cesàro : E a donc la propriété de Banach-Saks.

Nous avons vu que la propriété de Banach-Saks impliquait la réflexivité, (l'inverse n'est pas vrai, comme nous le verrons). La propriété A.B.S. n'implique pas la réflexivité, car l'espace c_o la possède : ce fait a été démontré par A. Brunel et L. Sucheston [17] ; il sera conséquence immédiate du chapitre IV où nous établirons que tous les modèles étalés de c_o sont isomorphes à c_o.

PROPOSITION 2

La propriété A.B.S. implique la propriété W.B.S. Toutes deux coïncident pour la classe des espaces ne contenant pas ℓ^1.

DEMONSTRATION

Supposons que E n'ait pas W.B.S. : on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente vers 0, sans sous-suite convergente au sens de Cesàro. On peut supposer la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étalante. D'après le corollaire 3.2 les moyennes $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$ ne convergent pas dans F, donc les moyennes $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$ non plus, puisque $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est inconditionnelle. D'après la proposition 3.6 $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de ℓ^1, et E n'a pas A.B.S., d'après le théorème 3.5.

Supposons maintenant que E ne contienne pas ℓ^1, et qu'il possède la propriété $(\mathcal{P}_1)$: soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite correspondante. Cette suite ne peut avoir aucune sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ^1 , donc, d'après H.P. Rosenthal [58], elle a une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy faible. Si l'on pose, pour $n \geqslant 1$, $y_n = \frac{1}{2} (x'_{2n-1} - x'_{2n})$, on obtient une suite convergeant faiblement vers 0 et donnant encore $(\mathcal{P}_1)$, avec le même δ . Donc aucune sous-suite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut être convergente au sens de Cesàro, et E n'a pas W.B.S. La propriété A.B.S. implique que l'espace ne contient pas ℓ^1. Mais comme déjà mentionné, l'espace ℓ^1 possède W.B.S.

Si E contient ℓ^1, la propriété $(\mathcal{P}_1)$ est a fortiori satisfaite (mais pas inversement, comme nous le verrons). Si $(\mathcal{P}_1)$ est satisfaite, E a ℓ^1 pour modèle étalé, et donc ℓ^1 est finiment représentable dans E : en d'autres termes, E contient $\ell^1_{(n)}$ uniformément. Mais c_o contient des $\ell^1_{(n)}$ uniformément et n'a pas $(\mathcal{P}_1)$. La propriété $(\mathcal{P}_1)$ est donc strictement intermédiaire entre "contenir ℓ^1 " et "contenir $\ell^1_{(n)}$ uniformément".

Nous allons maintenant traduire par une propriété "géométrique" la négation de la propriété de Banach-Saks. Ceci a déjà été fait pour A.B.S., pour laquelle nous avons obtenu $(\mathcal{P}_1)$ ou $(\mathcal{P}_2)$. Il faut aussi rapprocher cette proposition de la condition $(\mathcal{J})$ de non-réflexivité de James (voir chap. I, § 7).

PROPOSITION 3

Un espace de Banach E *ne possède pas la propriété de Banach-Saks si et seulement si :*

$(\mathcal{P}_3)$ $\begin{cases} \textit{Il existe une suite bornée } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ dans } E \textit{ et un nombre } \delta > 0 \\ \textit{tels que, pour toute sous-suite } (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ de } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \textit{tout} \\ m \in \mathbb{N}^*, \textit{ tout } k \textit{ avec } 1 \leqslant k \leqslant m, \textit{ on ait :} \end{cases}$

$$\left\| \frac{1}{m} \left(\sum_1^k x'_j - \sum_{k+1}^m x'_j \right) \right\| \geqslant \delta .$$

DEMONSTRATION

Il est évident que si $(\mathcal{P}_3)$ est satisfaite, E ne peut avoir Banach-Saks.

Inversement, supposons que E n'ait pas Banach-Saks. Alors :

- Si E est réflexif, E a $(\mathcal{P}_1)$, ce qui implique $(\mathcal{P}_3)$,
- Si E n'est pas réflexif, d'après R.C. James [37] , on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de norme 1, vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$(\mathcal{J}')$: $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}(x_1 \dots x_k), \operatorname{span}(x_{k+1}, \dots)) \geqslant 9/10$,

et ceci implique $(\mathcal{P}_3)$.

Terminons ce paragraphe par un mot sur les super-propriétés associées aux propriétés que nous venons de considérer.

Si $(\mathcal{P})$ est une propriété, on dit que E a la propriété-super $(\mathcal{P})$ si tout espace finiment représentable dans E a $(\mathcal{P})$. La super-propriété de Banach-Saks est la super-réflexivité : en effet tout espace super-réflexif a la propriété de Banach-Saks (tout espace super-réflexif est réflexif et, s'il n'avait pas B.S. ℓ^1 y serait finiment représentable), et tout espace ayant B.S. est réflexif.

La super-propriété A.B.S. est le fait de ne pas contenir $\ell^1_{(n)}$ uniformément, qu'on appelle la B-convexité. En effet, si E est B-convexe, il a A.B.S., et donc super A.B.S. . Si E n'est pas B-convexe, ℓ^1 est finiment représentable dans E, et ℓ^1 n'a pas A.B.S. .

Pour la propriété W.B.S., aucune description de la super-propriété associée n'est connue. Il est clair, toutefois, que ℓ^1 et les espaces B-convexes ont cette super-propriété.

5. LA PROPRIETE DE BANACH-SAKS ALTERNEE.

Comme nous l'avons vu, elle est caractérisée par le fait que de toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les moyennes alternées $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k x'_k$ convergent. Deux questions se posent : peut-on choisir la sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de telle sorte que la convergence des moyennes alternées ait lieu aussi pour les sous-suites $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Cette question se pose aussi pour la propriété de Banach-Saks usuelle. Nous y répondrons, pour A.B.S., dans ce paragraphe, et l'étudierons plus complètement dans le suivant. La seconde question est celle-ci : la convergence de $\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k x'_k$ vers 0 a-t-elle lieu pour d'autres suites $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que la suite alternée $\varepsilon_k = (-1)^k$? C'est ce que nous allons maintenant examiner.

<u>THEOREME 1</u>

Si E a la propriété de Banach-Saks alternée, de toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour presque tout choix de signes $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (au sens de la mesure de Haar) sur $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$), on ait :

$$\sup_{(x''_n) \subset (x'_n)} \left\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k x''_k \right\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Sous cette forme, cet énoncé est dû à J.R. Partington [55]; il améliore un résultat du premier auteur [9] , qui assurait seulement que pour toute sous-suite $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour presque tout choix des signes, $\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k x''_k \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. La démonstration que nous donnons ci-dessous reprend le lemme combinatoire de J.R. Partington [55] , ce qui évite en outre de faire appel aux arguments probabilistes utilisés par le premier auteur dans [9].

DEMONSTRATION

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée ; nous pouvons la supposer étalante normalisée. Si E a A.B.S., alors les moyennes alternées $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$ convergent vers 0 dans F. Nous allons montrer que pour presque toute suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k e_k \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. Le théorème résultera alors immédiatement du théorème 3.1.

Soit $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de ± 1. Pour $m \geqslant 1$, nous notons $P_m = \text{card}\,\{k;\ \varepsilon_k = 1,\ k \leqslant m\}$.

L'ensemble des suites $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telles que $\frac{P_m}{m} \underset{m \to +\infty}{\to} 1/2$ est de mesure 1.

LEMME 2 (J.R. Partington [55])

Soit $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ *une suite de* ± 1 *telle que* $\frac{P_m}{m} \underset{m \to +\infty}{\to} 1/2$. *Pour tout* $k \geqslant 1$, *tout* $m \geqslant k$, *on peut trouver une partition de* $\{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m\}$ *en* $\bigcup_j A_j \cup R$, *où les* A_j *sont des suites alternées de longueur* k *et* R *une suite dont la longueur* ℓ_m *vérifie* $\frac{\ell_m}{m} \underset{m \to +\infty}{\to} 0$.

DEMONSTRATION DU LEMME 2

Soit $k \geqslant 1$. Il suffit de montrer que pour $\gamma > 0$ donné, il existe N tel que si $n > N$, on peut trouver une partition de $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1}\}$ en suites alternées de longueur k, disjointes, avec au plus $\gamma.k.n$ termes restants.

Choisissons $N \geqslant \frac{6}{\gamma}$ et assez grand pour que, si $m \geqslant N$, $\left|\frac{P_m}{m} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{\gamma}{k^2}$.

Pour $n \geqslant \mathbb{N}$, considérons la partition de $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{kn}\} = \bigcup_{j=1}^{k} \{\varepsilon_{(j-1)n+1},\dots,\varepsilon_{jn}\}$ en k blocs de n termes.

Pour $j \leqslant k$, on a $P_{(j-1)n} < (j-1)n\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{6k^2}\right)$ et $P_{jn} > jn\left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{6\,k^2}\right)$; le j-ème bloc contient donc au moins

$$jn\left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{6k^2}\right) - (j-1)n\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{6k^2}\right) = \frac{n}{2} - \frac{n\gamma}{6k^2}\,(2j-1) \text{ signes } + ,$$

la même estimation vaut pour les signes − . Dans chaque bloc, on peut donc extraire $\left[\frac{n}{2} - \frac{\gamma n}{3k}\right]$ signes + , et le même nombre de signes − , il reste au total $2k\left(\frac{\gamma n}{3k} + 1\right)$ termes. Les termes choisis peuvent être groupés en $2\left[\frac{n}{2} - \frac{\gamma n}{3k}\right]$ suites de longueur k, faites de signes alternés, d'où le lemme.

Soit maintenant une suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\frac{P_m}{m} \to \frac{1}{2}$. Soit $\gamma > 0$, et soit k tel que $\left\|\frac{1}{k}\sum_1^k (-1)^j e_j\right\| < \gamma/2$.

Pour $m \geqslant k$, on écrit $m = p.k + \ell_m$, avec $\frac{\ell_m}{m} \underset{m \to +\infty}{\to} 0$, et d'après le lemme :

$$\left\|\frac{1}{m}\sum_1^m \varepsilon_j e_j\right\| \leqslant \frac{p.k}{m}\left\|\frac{1}{k}\sum_1^k (-1)^j e_j\right\| + \frac{\ell_m}{m}$$
$$\leqslant \frac{\gamma}{2} + \frac{\ell_m}{m} < \gamma \text{ pour m assez grand,}$$

et donc, comme annoncé, $\frac{1}{m}\sum_1^m \varepsilon_j e_j \underset{m \to +\infty}{\to} 0$.

Nous avons donc répondu, pour la propriété A.B.S., aux deux questions que nous nous étions posées : la convergence a lieu pour toutes les sous-suites de $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et elle a lieu pour presque tous les choix de signes. Elle n'a évidemment pas lieu, en général, pour le choix $\varepsilon_k = +1 \;\forall k$, puisque A.B.S. n'implique pas B.S.

Par ailleurs, l'uniformité obtenue pour la convergence de toutes les sous-suites $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est simplement conséquence du fait que cette convergence a lieu pour toutes les sous-suites. Ceci a été remarqué par W. Szlenk [66], puis par A. Brunel et L. Sucheston [17] et J. Partington [55]. Donnons, pour terminer ce paragraphe, une démonstration de ce résultat :

LEMME 3 (W. Szlenk [66])

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de* ± 1 *, et soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite normalisée dans un espace de Banach* E. *Si, pour toute sous-suite* $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *on a* $\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k x'_k \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ *, alors*

$$\sup_{(x'_n) \subset (x_n)} \left\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k x'_k \right\| \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \quad .$$

DEMONSTRATION

Supposons la conclusion fausse : on peut trouver un $\delta > 0$, une suite strictement croissante d'entiers $(N_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et une suite $(x_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-suites de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :

$$\frac{1}{N_i} \left\| \sum_1^{N_i} \varepsilon_k x_k^{(i)} \right\| \geqslant \delta.$$

Pour i = 1, choisissons $k_1 = 1,\dots,k_{N_1} = N_1$, et $y_1 = x_1,\dots,y_{N_1} = x_{N_1}$.

Considérons ensuite les sommes :

$$\left\| \sum_{k=1}^{N_1} \varepsilon_k y_k + \sum_{N_1+1}^{N_i} \varepsilon_k x_k^{(i)} \right\|$$

Elles sont minorées par $N_i\delta - 2N_1$, et peuvent donc être rendues au moins égales à $\frac{1}{2} N_i \delta$, prenant i assez grand. Soit i_2 ainsi choisi. On prend

$$y_{n_1+1} = x_{N_1+1} , \dots , y_{N_2} = x_{N_{i_2}}^{(i_2)} ;$$

On considère ensuite

$$\left\| \sum_{k=1}^{N_1} \varepsilon_k y_k + \sum_{N_1+1}^{N_2} \varepsilon_k y_k + \sum_{N_2+1}^{N_i} \varepsilon_k x_k^{(i)} \right\|$$

que l'on rend au moins égales à $\frac{1}{2} N_i \delta$ en choisissant $i = i_3$, et ainsi de suite. Il est évident que l'on a, pour tout k,

$$\left\| \frac{1}{N_k} \sum_{1}^{N_k} \varepsilon_j y_j \right\| \geqslant \delta/2 \quad , \text{ d'où une contradiction.}$$

6. PROPRIETES DE DISJONCTION UNIFORME.

Nous allons étudier des énoncés du genre suivant : étant données deux propriétés A et B concernant les suites bornées dans un espace de Banach, telles que B implique non-A, toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- ou bien toutes les sous-suites de $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient A,
- ou bien toutes les sous-suites de $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient B.

Ces énoncés seront des conséquences très simples des résultats déjà vus. Nous les mentionnons car ils ont été étudiés par plusieurs auteurs : Erdös-Magidor [28], H.P. Rosenthal [59], J.R. Partington [55] et le premier auteur du présent ouvrage [9].

PROPOSITION 1 (Erdös-Magidor [28])

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans un espace de Banach. Il existe une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- *ou bien toutes les sous-suites de $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent au sens de Cesàro, vers la même limite,*
- *ou bien aucune ne converge au sens de Cesàro .*

DEMONSTRATION

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite dont aucune sous-suite ne converge au sens de Cesàro, la démonstration est achevée. Sinon, chaque sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient une sous-suite convergente au sens de Cesàro. On peut supposer la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étalante normalisée. Soit $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ la sous-suite caractéristique (donnée par la proposition I.3.3 pour $\varepsilon = 1/2$, $N_k = 2^k$). Cette suite $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite, encore notée $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$

qui converge au sens de Cesàro. Les moyennes $\frac{1}{n} \sum_1^n x'_k$ forment donc une suite de Cauchy, donc aussi les moyennes $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$, dans F, puisque l'on peut écrire, posant $n' = [\log_2 n]$, $m' = [\log_2 m]$:

$$\left\|\frac{1}{n} \sum_1^n e_i - \frac{1}{m} \sum_1^m e_i\right\| \leqslant \frac{3}{2}\frac{n'}{n} + \frac{3}{2}\frac{m'}{m} + \frac{3}{2}\left\|\frac{1}{n} \sum_{n'}^n x'_i - \frac{1}{m} \sum_{m'}^m x'_i\right\| .$$

Les moyennes $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$ convergent donc dans F; l'énoncé résulte alors du corollaire 2 du théorème 3.1.

Il faut remarquer que Erdös et Magidor [28] démontrent ce résultat pour les "méthodes de sommation régulières", notion qui généralise celle de somme de Cesàro $\frac{1}{n} \sum_1^n$. Nous n'avons pas introduit ici cette notion ; nous renvoyons à [28] pour les définitions . Tout ce que nous avons dit ci-dessus à propos des sommes de Cesàro s'applique, sans aucun changement si ce n'est celui des notations, aux méthodes de sommation régulières. Il faut toutefois remarquer que la sous-suite extraite dépend de la méthode de sommation utilisée.

La proposition qui suit a initialement été démontrée par H.P. Rosenthal [59] , par d'autres méthodes :

PROPOSITION 2 (H.P. Rosenthal [59])

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite convergeant faiblement vers 0 dans un espace de Banach. Il existe une sous-suite* $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que :*

- *ou bien toutes les sous-suites* $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *convergent vers* 0 *au sens de Cesàro,*
- *ou bien il existe un* $\delta > 0$ *tel que, pour tout* $k \geq 1$, *pour tous* $n_1 < \ldots < n_{2^k}$, *avec* $k \leq n_1$, *pour tous scalaires* $a_1, \ldots, a_{2^k}$:

$$\left\| \sum_1^{2^k} a_i \, x'_{n_i} \right\| \geq \sum_1^{2^k} |a_i| \, .$$

DEMONSTRATION

On peut supposer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étalante normalisée. Si $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ dans F, toutes les sous-suites de la sous-suite caractéristique $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (donnée par la proposition I.3.3), convergent vers 0 dans F, au sens de Cesàro. Sinon, $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de ℓ^1 (puisque $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est inconditionnelle), et le théorème 2.2 permet de conclure.

Le dernier énoncé est lié à la propriété A.B.S. Il a d'abord été donné par le premier auteur [9] sous une forme un peu plus faible ; la forme présente est due à J. Partington [55] :

PROPOSITION 3

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite bornée dans un espace de Banach. Il existe une sous-suite* $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *possédant l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes (qui s'excluent mutuellement)*

a) Il existe $\delta > 0$ *tel que, pour toute sous-suite* $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *tout* $n \geq 1$, *toute suite* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k \, x''_k \right\| \geq \delta$$

b) Pour presque toute suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ($\varepsilon_k = \pm 1$), *pour toute sous-suite* $(x''_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *de* $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k \, x''_k \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \, .$$

DEMONSTRATION

On peut supposer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étalante. Soit (e_k) la suite fondamentale du modèle étalé. Si $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ dans F, on est dans le cas b), en prenant pour $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la sous-suite caractéristique. Sinon, $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de ℓ^1 (prop. 3.6) et on est dans le cas a) (th. 2.2).

Il faut remarquer que - pourvu qu'on se soit ramené à une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étalante - la sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par ces trois propositions est la même, et est indépendante du terme de l'alternative où l'on se trouve : c'est la sous-suite caractéristique, donnée par la proposition I.3.3.

*

CHAPITRE III

MODÈLES ÉTALÉS ET DUALITÉ

Dans un premier temps, considérant un modèle étalé d'un espace de Banach donné, nous allons nous intéresser à son dual. Nous appliquerons ensuite ces résultats aux cas où ce modèle étalé est isomorphe à ℓ^1 ou c_o.

Les résultats du premier paragraphe sont dus au second auteur [48] ceux du deuxième à S. Guerre et au second auteur [33].

1. SUITES PRESQU'INCONDITIONNELLES ET MODELES ETALES D'UN DUAL

Il y a une dualité naturelle entre les sous-espaces d'un espace de Banach et les quotients (par des sous-espaces fermés) de son dual. Nous allons voir que, dans une certaine mesure, cette dualité s'étend aux modèles étalés.

L'outil principal pour cette étude est le résultat suivant qui permet l'extraction de sous-suites "presqu'inconditionnelles".

THEOREME 1

Soit E *un espace de Banach, et* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite basique dans* E, *faiblement convergente vers* 0 . *Soit* $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs.*
On peut extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une sous-suite* $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *possédant la propriété suivante :*

(PI) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *tous* $n_1 < \ldots < n_k$ *avec* $k \leqslant n_1$, *l'application de projection, de* $\mathrm{span}\{(x'_n)_{n \in N}\}$ *sur* $\mathrm{span}\{x'_{n_1},\ldots,x'_{n_k}\}$, *définie par* $\sum_1^\infty a_n x'_n \to \sum_1^k a_{n_i} x'_{n_i}$ *est de norme au plus* $1+\delta_k$.

Nous dirons qu'une suite possédant la propriété ci-dessus, notée PI est presque inconditionnelle. (nous aurions pu aussi l'appeler "asymptotiquement inconditionnelle", mais ce terme a déjà été utilisé, dans un sens différent, par d'autres auteurs) .

La preuve de ce théorème va nécessiter trois lemmes :

LEMME 2

Soit E *un espace de Banach et* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite tendant faiblement vers* 0 *dans* E. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout entier non nul* D, *il existe un ensemble fini* $S \subset \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* D-*uple* $\xi_1,\dots,\xi_D$ *d'éléments de la boule unité du dual* E' *de* E , *on peut trouver un* $p \in S$ *pour lequel*

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant D} |\xi_k(x_p)| < \varepsilon.$$

DEMONSTRATION DU LEMME 2

Notons $\mathscr{B}_{E'}$ la boule unité de E' (elle est compacte pour $\sigma(E',E)$), et sur le produit $\mathscr{B}_{E'}^D$, considérons la suite de fonctions $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$, de $\mathscr{B}_{E'}^D$ dans $\mathbb{R}^+$, définie par :

$$F_i(\xi_1,\dots,\xi_D) = \sum_{k=1}^{D} |\xi_k(x_i)| .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la suite d'ensembles $K_i = \{F_i \geqslant \varepsilon\}$. Ce sont des compacts, et l'intersection $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ est vide (puisque la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend faiblement vers 0). Un nombre fini parmi eux est donc déjà d'intersection vide, ce qui prouve le lemme 2.

Dans la suite, nous notons $\mathscr{P}^{\infty}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$, et, pour tout entier d non-nul, $\mathscr{P}^{d}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ ayant d éléments. Si $\mathbb{N}_o$ est un élément de $\mathscr{P}^{\infty}(\mathbb{N})$, nous le supposerons toujours rangé en une suite strictement croissante : $\mathbb{N}_o = \{(n_k)_{k \in \mathbb{N}}\}$. Les notations $\mathscr{P}^{\infty}(\mathbb{N}_o)$ et $\mathscr{P}^{d}(\mathbb{N}_o)$ ont le même sens que ci-dessus.

LEMME 3

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite convergeant faiblement vers* 0 *dans* E, *soit* d *un entier non nul, et* $(F_A)_{A \in \mathscr{P}^d(\mathbb{N})}$ *une famille de parties finies de* $\mathscr{B}_{E'}$ *, indexée par* $\mathscr{P}^d(\mathbb{N})$.

Supposons qu'il existe un entier non nul D *tel que, pour tout* $A \in \mathscr{P}^d(\mathbb{N})$ *le cardinal de* F_A *(noté* $|F_A|$ *) soit au plus* D.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, *on peut trouver* $\mathbb{N}_o \in \mathscr{P}^\infty(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}_o = \{(p_k)_{k \in \mathbb{N}}\}$ *tel que, pour tout* $A \in \mathscr{P}^d(\mathbb{N}_o)$, *tout* $p_k \in \mathbb{N}_o \setminus A$, *tout* $\xi \in F_A$, *on ait*

$$|\xi(x_{p_k})| \leqslant \varepsilon/2^k .$$

DEMONSTRATION DU LEMME 3

Elle se fera par récurrence sur l'entier d.

1) Amorce de la récurrence : d = 1.

Soit donc $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathscr{B}_{E'}$ indexée par les entiers (en fait, par les parties de $\mathbb{N}$ à un élément), telle que

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |F_i| \leqslant D < +\infty .$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, à l'aide du premier lemme, on peut trouver un ensemble fini $S \subset \mathbb{N}$, tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe p (dépendant de j) $\in$ S, pour lequel

$$\sup_{\xi \in F_j} |\xi(x_p)| \leqslant \varepsilon/2 .$$

Evidemment, il existe un même indice, que nous appellerons p_1, qui convient pour une infinité d'éléments de $\mathbb{N}$: soit donc $\mathbb{N}^{(1)} \in \mathscr{P}^\infty(\mathbb{N})$ tel que; pour tout $j \in \mathbb{N}^{(1)}$,

$$\sup_{\xi \in F_j} |\xi(x_{p_1})| \leqslant \varepsilon/2 .$$

Comme F_{p_1} est fini et comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0, on peut extraire de $\mathbb{N}^{(1)}$ un sous-ensemble

$\mathbb{N}'^{(1)} = \{(n^1_q)_{q \in \mathbb{N}}\}$ tel que, pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{\xi \in F_{p_1}} |\xi(x_{n^1_q})| \leqslant \varepsilon/2^{q+1} .$$

Supposons qu'au rang $k > 1$ on ait choisi des entiers $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, et des parties infinies de $\mathbb{N}$, $(\mathbb{N}'^{(i)})_{i=1,\ldots,k}$, avec $\mathbb{N}'^{(i)} = \{(n^i_q)_{q \in \mathbb{N}}\}$ (q est donc le rang de n^i_q dans $\mathbb{N}'^{(i)}$), décroissantes pour l'inclusion, de telle façon que $p_i \in \mathbb{N}'^{(i-1)} \setminus \mathbb{N}'^{(i)}$ pour $i = 1,\ldots,k$ (en posant $\mathbb{N}'^{(o)} = \mathbb{N}$), et que :

a) $\forall\, i \leqslant k$, $\forall\, j \in \mathbb{N}'^{(i)}$, $\displaystyle\sup_{\xi \in F_j} |\xi(x_{p_i})| \leqslant \varepsilon/2^i$

b) $\forall\, i \leqslant k$, $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sup_{\xi \in F_{p_i}} |\xi(x_{n^i_q})| \leqslant \varepsilon/2^{q+i}$.

Alors, en appliquant le procédé initial à l'ensemble $\mathbb{N}'^{(k)}$, on peut trouver un entier $p_{k+1} \in \mathbb{N}'^{(k)}$ et une partie infinie $\mathbb{N}^{(k+1)}$ de $\mathbb{N}'^{(k)}$ tels que

$$\forall\, j \in \mathbb{N}^{(k+1)} , \quad \sup_{\xi \in F_j} |\xi(x_{p_{k+1}})| \leqslant \varepsilon/2^{k+1}$$

on extrait alors de $\mathbb{N}^{(k+1)}$ une sous-suite $\mathbb{N}'^{(k+1)} = \{(n^{k+1}_q)_{q \in \mathbb{N}}\}$ telle que

$$\forall\, q \in \mathbb{N} , \quad \sup_{\xi \in F_{p_{k+1}}} |\xi(x_{n^{k+1}_q})| \leqslant \varepsilon/2^{q+k+1} .$$

En définitive, on a trouvé un ensemble infini d'entiers $\mathbb{N}_o = \{(p_i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ tel que, si l'on considère l'un quelconque de ses éléments, p_j , on a , pour tout k :

$$\sup_{\xi \in F_{p_j}} |\xi(x_{p_k})| \leqslant \varepsilon/2^k ,$$

car, si $k < j$, $p_j \in \mathbb{N}'^{(k)}$, et, si $k > j$, $p_k \in \mathbb{N}'^{(j)}$ et l'entier $k-j$ est certainement inférieur au rang de p_k dans $\mathbb{N}'^{(j)}$. Ceci achève la construction dans le cas $d = 1$.

2) Supposons la construction effectuée au rang d ; faisons-la au rang d+1.

Soit donc $(F_A)_{A \in \mathscr{P}^{d+1}(\mathbb{N})}$ une famille de parties de $\mathscr{B}_{E'}$, avec

$$\sup_{A \in \mathscr{P}^{d+1}(\mathbb{N})} |F_A| < D < +\infty.$$

A l'aide du lemme 1, on peut encore choisir un ensemble fini $S_1 \subset \mathbb{N}$ tel que

$$\forall A \in \mathscr{P}^{d+1}(\mathbb{N}),\ \exists p \in S_1,\ \text{avec}$$

$$\sup_{\xi \in F_A} |\xi(x_p)| \leqslant \varepsilon/2 .$$

Grâce au théorème de Ramsey, on peut trouver une partie infinie $\mathbb{N}_1$ de $\mathbb{N}$ telle qu'un même indice $p_1 \in S_1$ convienne pour tous les (d+1)-uples d'éléments de $\mathbb{N}_1$, et on peut évidemment supposer que les éléments de $\mathbb{N}_1$ sont tous strictement plus grands que p_1.

A présent, à chaque $A \in \mathscr{P}^d(\mathbb{N}_1)$, on peut associer l'ensemble $A^{(p_1)} = \{p_1\} \cup A \in \mathscr{P}^{d+1}(\{p_1\} \cup \mathbb{N}_1)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on peut trouver une partie infinie $\mathbb{N}'^{(1)}$ de $\mathbb{N}_1$, $\mathbb{N}'^{(1)} = \{(n^1_q)_{q \in \mathbb{N}}\}$, telle que, pour tout q, si $n^1_q \in \mathbb{N}'^{(1)} \setminus A$, alors

$$\sup_{\xi \in F_A(p_1)} |\xi(x_{n^1_q})| < \varepsilon/2^q.$$

Enfin, une récurrence en tous points analogue à celle effectuée dans la première partie de la preuve permet d'obtenir une suite d'entiers $\mathbb{N}_o = \{(p_i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ et des parties infinies de $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}'^{(i)}$, $\mathbb{N}'^{(i)} = \{(n^i_q)_{q \in \mathbb{N}}\}$, telles que, pour tout i, $p_i \in \mathbb{N}'^{(i-1)} \setminus \mathbb{N}'^{(i)}$ et :

a) $\forall i$, $\forall A \in \mathscr{P}^{d+1}(N)$, $\sup\limits_{\xi \in F_A} |\xi(x_{p_i})| \leqslant \varepsilon/2^i$

b) $\forall i$, $\forall B \in \mathscr{P}^d(N'^{(i)})$, $\forall n^i_q \in N'^{(i)} \setminus B$,

$$\sup_{\xi \in F_B(p_i)} |\xi(x_{n^i_q})| \leqslant \varepsilon/2^{i+q} .$$

Pour terminer, soit $A \in \mathscr{P}^{d+1}(N)$, et $\xi \in F_A$.

Soit p_j le premier élément de A et $B = A \setminus \{p_j\}$. On a, pour tout $k \neq j$, $|\xi(x_{p_k})| \leqslant \varepsilon/2^k$, car, si $k < j$, $A \in \mathscr{P}^{d+1}(\mathbb{N}'^{(k)})$, et, si $k > j$, et $p_k \in \mathbb{N}_o \setminus A$, alors $p_k \in \mathbb{N}'^{(j)} \setminus B$, et $k-j$ est inférieur au rang de p_k dans $\mathbb{N}'^{(j)}$.

Ceci achève la démonstration du lemme 3.

<u>LEMME 4</u>

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite basique convergeant faiblement vers* 0.
Pour tout entier d *non-nul et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\mathbb{N}_o \in \mathscr{P}^{\infty}(N)$ *tel que, pour tout* $A \dot{\subset} \mathbb{N}_o$, *avec* $|A| = d$, *l'application de projection* P_A, *de* $\overline{\text{span}}\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}_o}\}$ *sur* $\text{span}\{(x_i)_{i \in D}\}$, *définie par* $P_A(\sum_{i \in \mathbb{N}_o} a_i x_i) = \sum_{i \in A} a_i x_i$, *vérifie* $\|P_A\| \leqslant 1+\varepsilon$.

<u>DEMONSTRATION</u>

On peut évidemment supposer $\|x_i\| = 1$ pour tout n. Soit K la constante de basicité de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons ε' tel que $(1+\varepsilon')(1+2K\varepsilon') \leqslant 1+\varepsilon$. Soit $d \geqslant 1$. Il existe alors un entier D et une famille $(F_A)_{A \in \mathscr{P}^d(\mathbb{N})}$ de parties finies de $\mathscr{B}_{E'}$, tels que pour tout A de $\mathscr{P}^d(\mathbb{N})$, $|F_A| \leqslant D$, et F_A norme span $\{(x_i)_{i \in A}\}$ à ε' près, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \text{span}\{(x_i)_{i \in A}\}, \ \exists \xi \in F_A, \text{ avec } \|x\| \leqslant (1+\varepsilon')|\xi(x)| .$$

D'après le lemme 3, on peut trouver un sous-ensemble infini $\mathbb{N}_o$ de $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_o = \{(p_j)_{j \in \mathbb{N}}\}$, tel que si $A \in \mathscr{P}^d(\mathbb{N}_o)$ et si $p_k \in \mathbb{N}_o \setminus A$, alors :

$$\forall \xi \in F_A, \ |\xi(x_{p_k})| \leqslant \varepsilon'/2^k.$$

Soit (a_i) une suite finie de scalaires. On a, pour un certain $\xi \in F_A$:

$$\Big\| \sum_{i \in A} a_i x_i \Big\| \leqslant (1+\varepsilon') \Big| \xi\Big(\sum_{i \in A} a_i x_i\Big) \Big|$$

$$\leqslant (1+\varepsilon') \Big[\Big\| \sum_{i \in \mathbb{N}_o} a_i x_i \Big\| + \xi\Big(\sum_{i \in \mathbb{N}_o \setminus A} a_i x_i\Big) \Big]$$

$$\leqslant (1+\varepsilon') \Big(\Big\| \sum_{i \in \mathbb{N}_o} a_i x_i \Big\| + \sum_{i \in \mathbb{N}_o \setminus A} |a_i| \varepsilon'/2^i \Big)$$

$$\leqslant (1+\varepsilon')(1+2K\varepsilon') \Big\| \sum_{i \in \mathbb{N}_o} a_i x_i \Big\| ,$$

car puisque la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est basique normalisée, on a, pour chaque $j \in \mathbb{N}_o$, $|a_j| \leqslant 2K \Big\| \sum_{i \in \mathbb{N}_o} a_i x_i \Big\|$.

En définitive, on obtient :

$$\Big\| \sum_{i \in A} a_i x_i \Big\| \leqslant (1+\varepsilon) \Big\| \sum_{i \in \mathbb{N}_o} a_i x_i \Big\|$$

comme annoncé.

DEMONSTRATION DU THEOREME

Soit (δ_k) une suite de réels positifs. Pour $d = 1$ et $\varepsilon = \delta_1$, le lemme 4 nous donne un ensemble $\mathbb{N}^{(1)} = \{(n_k^1)_{k \in \mathbb{N}}\}$, tel que, pour tout k

$$|a_k| \, \|x_{n_k^1}\| \leqslant (1+\delta_1) \Big\| \sum_i a_i \, x_{n_i^1} \Big\| .$$

Pour $d = 2$ et $\varepsilon = \delta_2$, on choisit $\mathbb{N}^{(2)} \subset \mathbb{N}^{(1)}$, $\mathbb{N}^{(2)} = \{(n_k^{(2)})_{k \in \mathbb{N}}\}$ et on a alors :

$$\| a_k \, x_{n_k^2} + a_{k'} \, x_{n_{k'}^2} \| \leqslant (1+\delta_2) \Big\| \sum_i a_i \, x_{n_i^2} \Big\|$$

et ainsi de suite. On considère la suite diagonale $(x_{n_k^k})_{k \in \mathbb{N}}$, et on pose $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_{n_k^k})_{k \in \mathbb{N}}$: elle possède la propriété voulue.

Le corollaire qui suit est presque immédiat :

COROLLAIRE 5

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante, basique, faiblement convergente vers 0. Soit* $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite biorthogonale à* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. *On peut trouver* $\mathbb{N}_o \in \mathscr{P}^{\infty}(\mathbb{N})$ *tel que la suite* $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}_o}$ *soit une suite étalante pour la norme du dual de l'espace* $E_o = \mathrm{span}\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_o}\}$ *dans* E .

DEMONSTRATION

Choisissons la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}} = (1/2^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_o}$ la sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par le théorème 1. Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_o}$ est étalante, on peut, d'après la proposition I.3.3, pour tout $k > 1$, trouver un entier ϑ_k tel que, pour toute suite finie de scalaires (b_i) , pour tous $n_1<\dots<n_k$, $m_1<\dots<m_k$ avec $\vartheta_k < n_1, m_1$,

$$(1-1/2^k)\left\|\sum_1^k b_i\, x_{n_i}\right\| \leqslant \left\|\sum_1^k b_i\, x_{m_i}\right\| \leqslant (1+1/2^k)\left\|\sum_1^k b_i\, x_{n_i}\right\| .$$

On en déduit que, pour toute suite finie $a_1,\dots,a_k$:

$$\begin{aligned}(1+1/2^k)^{-1} \quad & \sup\{|\sum_1^k a_i\, b_i| \;;\; \|\sum_1^k b_i\, x_{n_i}\| \leqslant 1\} \\ \leqslant\ & \sup\{|\sum_1^k a_i\, b_i| \;;\; \|\sum_1^k b_i\, x_{m_i}\| \leqslant 1\} \\ \leqslant\ & \sup\{|\sum_1^k a_i\, b_i| \;;\; \|\sum_1^k b_i\, x_{n_i}\| \leqslant 1\} .\end{aligned}$$

Si de plus on a pris $\vartheta_k \geqslant k$, on obtient d'après le théorème 1 :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_1^k a_i\, x_{n_i}^*\right\| & \leqslant (1+1/2^k)\sup\{|\sum_1^k a_i\, b_i| \;;\; \|\sum_1^k b_i\, x_{n_i}\| \leqslant 1\} \\ & \leqslant (1+1/2^k)^2 \sup\{|\sum_1^k a_i\, b_i| \;;\; \|\sum_1^k b_i\, x_{m_i}\| \leqslant 1\} \\ & \leqslant (1+1/2^k)^2 \left\|\sum_1^k a_i\, x_{m_i}^*\right\| .\end{aligned}$$

De même on obtiendrait :

$$(1-1/2^k)^2 \| \sum_1^k a_i\, x^*_{m_i} \| \leqslant \| \sum_1^k a_i\, x^*_{n_i} \| \quad ,$$

ce qui prouve que la sous-suite $(x^*_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ est une bonne sous-suite de la suite $(x^*_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En ce qui concerne la dualité des modèles étalés, on en déduit :

COROLLAIRE 6

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante, basique, faiblement convergente vers* 0, *et soit* F *le modèle étalé associé, de suite fondamentale* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La suite biorthogonale $(e^*_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *, définie dans* F', *est la suite fondamentale d'un modèle étalé d'un quotient de* E'.

DEMONSTRATION

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ la sous-suite donnée par le corollaire précédent. Puisque $(x^*_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ est étalante pour la norme de $(\overline{\text{span}}\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}\})^*$, elle définit un modèle étalé, dont la suite fondamentale, notée $(e^*_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, est la suite biorthogonale à la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. La suite $(x^*_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ est dans la quotient de E' par l'orthogonal de $\overline{\text{span}}\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}\}$ et le corollaire est ainsi établi.

Nous allons maintenant étudier les modèles étalés de E', dans le cas où E est séparable.

THEOREME 7

Soit E *un espace de Banach séparable,* $(x^*_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite dans* E', *étalante, basique, et convergeant vers* 0 *pour* $\sigma(E',E'')$. *Soit* F *le modèle étalé associé, et* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *sa suite fondamentale. La suite biorthogonale* $(e^*_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie dans* F' *est la suite fondamentale d'un modèle étalé d'un quotient de* E.

Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 8

Soit E *un espace de Banach séparable et* $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante basique dans* E', *convergeant vers* 0 *pour* $\sigma(E',E)$. *Il existe une sous-suite* $(z_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ *et une base* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *du quotient* F *de* E *par l'orthogonal de* $\overline{\mathrm{span}}\{(z_n^*)_{n \in \mathbb{N}}\}$ *telles que* $(z_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ *s'identifie à la suite biorthogonale à* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *dans la correspondance naturelle entre* F' *et* $\overline{\mathrm{span}}\{(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}\}$ *(donnée par la transposée de l'application quotient de* E *sur* F*).*

La démonstration suit celle d'un résultat de W.B. Johnson et H.P. Rosenthal [40] (voir aussi [51], tome I, prop. 1.b.7).

DEMONSTRATION DU LEMME 8

Puisque $\mathscr{B}_E$ est dense dans $\mathscr{B}_{E''}$ pour $\sigma(E'',E')$, on peut, pour tout sous-espace E'° de dimension finie de E', pour tout $\varepsilon > 0$, trouver un ensemble fini A d'éléments de norme 1 dans E tels que $\forall \xi \in (E'^\circ)'$, avec $\|\xi\| = 1$, il existe $x \in A$ avec $|\xi(x^*)-x^*(x)| \leqslant \varepsilon\|x^*\|$, $\forall x^* \in E'^\circ$. (On réalise ceci pour un ε-réseau dans la boule de $(E'^\circ)'$).

Donnons-nous une suite $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ de réels avec $0 < \varepsilon_n < 1$, et $\sum_{n \geqslant 1} \varepsilon_n < +\infty$. Nous allons montrer par récurrence que l'on peut trouver une suite croissante d'entiers $k_1 < k_2 < \ldots$ et une suite de sous-ensembles finis , $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, dans la sphère unité de E, avec

1) $E = \overline{\mathrm{span}}\{\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\}$

2) Pour tout $f \in (\mathrm{span}\{(x_{k_i}^*)_{i \leqslant n}\})'$, avec $\|f\| = 1$, il existe un $x \in A_n$, tel que

$|f(x^*) - x^*(x)| < \varepsilon_n \|x^*\|/3$, pour tout $x^* \in \mathrm{span}\{(x_{k_i}^*)_{i \leqslant n}\}$

3) $|x^*_{k_{n+1}}(x)| \leqslant \varepsilon_n/3$ pour tout $x \in A_n$.

Supposons en effet $k_1,\dots,k_m$, $A_1,\dots,A_{m-1}$ choisis. Soit $(e_i)_{i \geqslant 1}$ un ensemble dense dans la sphère unité de E. On choisit A_m contenant $e_1,\dots,e_m$ et contenant l'ensemble A donné par la remarque précédente, pour $E'^{\circ} = \mathrm{span}\{(x^*_{k_i})_{i \leqslant m}\}$: on aura 2). On choisit k_{m+1} pour obtenir 3): c'est possible puisque $(x^*_i)_{i \geqslant 1}$ tend vers 0 pour $\sigma(E',E)$ et que A_n est de dimension finie. Enfin, on aura 1) puisque la réunion des A_m , $m \geqslant 1$, contient tous les e_i, $i \geqslant 1$.

Notons $(z^*_n)_{n \geqslant 1}$ la sous-suite $(x^*_{k_n})_{n \geqslant 1}$. Soit $(z^{**}_n)_{n \geqslant 1}$ la suite biorthogonale à $(z^*_n)_{n \geqslant 1}$: c'est une suite basique, puisque $(z^*_n)_{n \geqslant 1}$ l'est.

Nous allons voir que l'opérateur T, de E dans $\overline{(\mathrm{span}\{(z^*_n)_{n \geqslant 1}\})'}$, défini par :

$$Tx(z^*) = z^*(x) ,$$

pour $z^* \in \overline{\mathrm{span}}\{(z^*_n)_{n \geqslant 1}\}$, a pour image $\overline{\mathrm{span}}\{(z^{**}_n)_{n \geqslant 1}\}$; le lemme sera démontré, car $\mathrm{Ker}T = \overline{\mathrm{span}}\{(z^*_n)_{n \geqslant 1}\}^{\perp}$. Posons $G = \overline{\mathrm{span}}\{(z^{**}_n)_{n \geqslant 1}\}$.

D'après 3), si $x \in A_n$, on a $\sum_{i \geqslant 1} |z^*_i(x)| < +\infty$, et donc $Tx = \sum_{i \geqslant 1} z^*_i(x)z^{**}_i$. De 1) on déduit donc que $TE \subset G$.

Pour montrerla surjectivité, nous allons montrer que pour chaque y^{**} de norme 1 dans G, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x \in E$, de norme 1, avec $\|Tx - y^{**}\| < 4\varepsilon$, cela suffira, grâce à des approximations successives (puisque $\|x\| = \|y^{**}\|$) .

On peut évidemment supposer que $y^{**} \in \mathrm{span}\{(z^{**}_i)_{i \leqslant n}\}$, avec n assez grand pour que $\varepsilon > \sum_{i \geqslant n} \varepsilon_i$, et $\|P_m\| < 1+\varepsilon$ si $m \geqslant n$, en notant P_m la projection naturelle de $\overline{\mathrm{span}}\{(z^*_n)_{n \geqslant 1}\}$ sur $\mathrm{span}\{(z^*_n)_{n \leqslant m}\}$.

(Il est aisé de voir que $\|P_m\| \leqslant \prod_{j \geqslant m} (1-\varepsilon_j)^{-1}$, et cette dernière quantité tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$).

Si $u \in \mathrm{span}\{(z_i^{**})_{i \leqslant n}\}$, notons $\|u\|_1$ la norme de la restriction de u à $\mathrm{span}\{(z_i^*)_{i \leqslant n}\}$. On a :

$$\|u\|_1 \leqslant \|u\| \leqslant \|P_n\| . \|u\|_1 \leqslant (1+\varepsilon)\|u\|_1 .$$

Choisissons $x \in A_n$, satisfaisant 2) pour $f = \dfrac{y^{**}}{\|y^{**}\|_1}$

on aura :

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} z_i^*(x) z_i^{**} - f \Big\|_1 < \frac{\varepsilon_n}{3} < \varepsilon/3$$

et donc

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} z_i^*(x) z_i^{**} - f \Big\| < 2\ \varepsilon/3 .$$

Comme $\|z_i^{**}\| = \|P_i - P_{i-1}\| \leqslant 4$ pour $i \geqslant n$, on déduit de 3) que :

$$\Big\| \sum_{i \geqslant n+1} z_i^*(x)\ z_i^{**} \Big\| < 4\ \varepsilon/3 .$$

En définitive :

$$\begin{aligned}
\|Tx - y^{**}\| &\leqslant \|Tx - f\| + \|y^{**} - f\| \\
&\leqslant \Big\| \sum_{i \geqslant 1} z_i^*(x) z_i^{**} - f \Big\| + 2\varepsilon \\
&\leqslant \Big\| \sum_{i \leqslant n} z_i^*(x) z_i^{**} - f \Big\| + \Big\| \sum_{i \geqslant n+1} z_i^*(x) z_i^{**} \Big\| + 2\varepsilon \\
&\leqslant 4\varepsilon
\end{aligned}$$

, ce qui achève la preuve.

2. ESPACES AYANT c_o POUR MODELE ETALE.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de caractériser - par des propriétés "duales" de celles du chapitre précédent - les espaces dont un modèle étalé est isomorphe à c_o.

A). Suites étalant la base canonique de c_o.

L'espace ℓ^1 n'a qu'une base écartable, à une équivalence près :

c'est la base canonique. Mais l'espace c_o en a au moins deux : la base canonique (notée, comme précédemment, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$) et la base sommante, que nous noterons $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et qui est définie par $s_n = e_o+\ldots+e_n$. En fait, ce sont les deux seules : nous admettons provisoirement ce fait, qui sera établi au chapitre IV (Proposition I.2) où nous étudierons aussi les modèles étalés de c_o.

Le lemme qui suit est l'analogue du lemme II.2.1 : il permet de se limiter au cas où la suite fondamentale du modèle est équivalente à la base canonique de c_o.

LEMME 1

Un espace de Banach a un modèle étalé isomorphe à c_o si et seulement si il a un modèle étalé dont la suite fondamentale est équivalente à la base canonique de c_o .

DEMONSTRATION

D'après la Proposition I.5.4, 2), nous pouvons supposer que la suite fondamentale $(e_n)_{n \geqslant 0}$ est basique, et donc elle est équivalente soit à la base canonique de c_o, soit à sa base sommante. Dans ce dernier cas, $(e_{2n+1} - e_{2n})_{n \geqslant 0}$ est la suite fondamentale d'un modèle étalé de E, et est équivalente à la base canonique de c_o.

REMARQUE 2 : Un espace de Banach E peut avoir un modèle étalé isomorphe à c_o sans avoir de modèle étalé dont la suite fondamentale soit équivalente à la base sommante de c_o. En effet, la base sommante est faiblement de Cauchy non convergente, et, si elle est équivalente à la suite fondamentale d'un modèle étalé de E, E ne peut être réflexif, d'après le théorème I.5.3. Or l'espace de Tzirelson T* que nous verrons au chapitre IV est réflexif et a c_o pour modèle étalé.

La proposition qui suit est l'analogue du corollaire du théorème II.2.2.

PROPOSITION 3

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) E *a* c_o *pour modèle étalé.*

2) *Il existe une suite étalante basique* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *et deux nombres* $m > 0$, $M > 0$ *tels que :*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, *tous* $n_1 < \ldots < n_{2^k}$ *avec* $k \leqslant n_1 < \ldots < n_{2^k}$, *toute suite de scalaires* $a_1, \ldots, a_{2^k}$, *on ait*

$$m \sup_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} |a_i| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{2^k} a_i x_{n_i} \right\| \leqslant M \sup_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} |a_i|$$

2 *bis)* *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une suite étalante basique* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que,*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, *tous* $n_1 < \ldots < n_{2^k}$ *avec* $k \leqslant n_1 < \ldots < n_{2^k}$, *toute suite de scalaires* $a_1, \ldots, a_{2^k}$, *on ait*

$$(1-\varepsilon) \sup_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} |a_i| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{2^k} a_i x_{n_i} \right\| \leqslant (1+\varepsilon) \sup_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} |a_i|$$

3) *Il existe une suite étalante basique* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et un* $M > 0$ *tels que :*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, *tous* $n_1 < \ldots < n_{2^k}$, *avec* $k \leqslant n_1 < \ldots < n_{2^k}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^k} x_{n_i} \right\| \leqslant M.$$

3 *bis)* *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une suite étalante basique normalisée* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *tous* $n_1 < \ldots < n_{2^k}$, *avec* $k \leqslant n_1 < \ldots < n_{2^k}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^k} x_{n_i} \right\| \leqslant 1 + \varepsilon.$$

DEMONSTRATION

Supposons que E ait c_o pour m.e. D'après le lemme 1, il a un m.e. dont la suite fondamentale est équivalente à la base canonique de c_o. Il suffit donc de choisir pour suite étalante $(x_n)_{n \geq 0}$ la sous-suite caractéristique de la suite sur laquelle ce m.e. a été construit (rappelons que la sous-suite caractéristique est définie après la proposition I.3.3), et 2) sera satisfait.

Pour obtenir 2 bis) à partir de 2), il suffit d'établir le lemme suivant :

LEMME 4

Si E *a un modèle étalé dont la suite fondamentale est équivalente à la base canonique de* c_o *, il a, pour tout* $\varepsilon > 0$ *, un modèle étalé dont la suite fondamentale est* $(1+\varepsilon)$ *-équivalente à la base canonique de* c_o.

La démonstration de ce lemme utilise les mêmes idées que celle de la proposition II.2.4 (et reprend un procédé dû à R.C. James [38]) ; elle est laissée au lecteur.

Il est évident que 2 bis) implique 3 bis), qui lui-même implique 3) ; reste donc à montrer que si 3) est satisfait, E a c_o pour m.e.

Pour cela, observons d'abord que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de 3) converge faiblement vers 0. Supposons en effet que ce ne soit pas le cas : il existerait une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une forme linéaire réelle f de norme 1, et un $\delta > 0$ tels que $f(x'_n) > \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on aurait, pour tout $k \geq 1$, tous $n_1<\ldots<n_{2^k}$ avec $k \leqslant n_1<\ldots<n_{2^k}$:

$$2^k\delta \leqslant f\left(\sum_1^{2^k} x'_{n_i}\right) \leqslant \left\|\sum_1^{2^k} x'_{n_i}\right\| \leqslant M ,$$

ce qui est évidemment impossible.

Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0, la suite fondamentale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du modèle étalé est basique inconditionnelle monotone (Prop. I.5.1).

D'après 3), elle vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|\sum_{1}^{2^k} e_i\| \leqslant M$, et donc, pour tout choix de signes $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2^k}$, $\|\sum_{1}^{2^k} \varepsilon_i e_i\| \leqslant 2M$. Par conséquent, pour toute suite de scalaires $a_1, \dots, a_{2^k}$

$$\|\sum_{1}^{2^k} a_i e_i\| \leqslant 2M \sup_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} |a_i| ,$$

et l'estimation $\|\sum_{1}^{2^k} a_i e_i\| \geqslant m \sup_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} |a_i|$ résulte aussi de la basicité : $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est donc équivalente à la base canonique de c_o.

3. SUITES N'ETALANT PAS LA BASE CANONIQUE DE c_o

Donnons deux définitions préliminaires :

DEFINITIONS

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'un espace de Banach* E.

a) Nous dirons que la série (y_n) *tend vers* $+\infty$ *par sous-séries si pour toute sous-suite* $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\lim_{n \to +\infty} \|\sum_{i=1}^{n} z_i\| = +\infty$.

b) Nous dirons que la série (y_n) *tend vers* $+\infty$ *uniformément par sous-séries si*

$$\lim_{k \to +\infty} \inf_{n_1 < \dots < n_k} \|\sum_{i=1}^{k} y_{n_i}\| = +\infty.$$

Le résultat que nous allons énoncer est l'analogue, pour les modèles étalés, d'un théorème de W.B. Johnson qui figure dans [51]: "un espace de Banach ne contient pas c_o si toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série (y_n) tende vers $+\infty$ par sous-séries".

THEOREME 1

Un espace de Banach E n'a pas c_o pour modèle étalé si et seulement si toute suite étalante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série (y_n) tende vers $+ \infty$ uniformément par sous-séries.

DEMONSTRATION

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite étalante, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite fondamentale du m.e. associé. D'après la proposition 1.3, il nous suffit de montrer que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas équivalente à la base canonique de c_o si et seulement si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série (y_n) converge vers $+ \infty$ uniformément par sous-séries.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement vers 0, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut être équivalente à la base canonique de c_o (th. I.5.3), et, puisqu'il existe une forme linéaire réelle f de norme 1, une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un nombre $\delta > o$ tels que $f(y_n) > \delta$, pour tout $n \in N$, la série (y_n) tend vers $+ \infty$ uniformément par sous-séries.

Supposons donc que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende faiblement vers 0; Alors $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est basique inconditionnelle et, comme nous l'avons déjà observé en démontrant la proposition 1.3, est équivalente à la base canonique de c_o si et seulement si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\sum_1^n e_i\| < + \infty$. Il nous suffit donc d'établir

LEMME 2

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite étalante basique normalisée, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite fondamentale du m.e. associé. Si $\sup_{x \in N} \|\sum_1^n e_i\| = + \infty$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+ \infty$ uniformément par sous-séries.

DEMONSTRATION DU LEMME 2

Observons d'abord que la condition $\sup_n \|\sum_1^n e_i\| = + \infty$ équivaut (par écartabilité) à $\lim_{n \to + \infty} \|\sum_1^n e_i\| = + \infty$.

Soit $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que, pour tout $k \geqslant 1$, $\|\sum_{1}^{m_k} e_i\| \geqslant 2^k$; on a $m_k > 2^k$. Choisissons maintenant pour chaque k un entier ν_k tel que si $\nu_k \leqslant n_1 < \ldots < n_{m_k}$,

$$\|\sum_{1}^{m_k} x_{n_i}\| > 2^k.$$

Posons $(y_k)_{k \geqslant 1} = (x_{\nu_k})_{k \geqslant 1}$. Pour chaque sous-suite $(z_j)_{j \geqslant 1}$ de $(y_k)_{k \geqslant 1}$, on a, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\|\sum_{1}^{k+m_k} z_j\| \geqslant \|\sum_{k+1}^{k+m_k} z_j\| - k \geqslant 2^k - k \quad .$$

Si K est la constante de basicité de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, nous obtenons donc, pour tout $n \geqslant k+m_k$, $\|\sum_{1}^{n} z_j\| \geqslant \frac{1}{K}(2^k-k)$, ce qui prouve notre assertion.

REMARQUE

Dans cette caractérisation, la situation est sensiblement différente de celle que nous avons vue dans le cas de ℓ_1 (chapitre II). Nous avions remarqué alors (§5, lemme 3) que si, pour une suite donnée, toutes les sous-suites convergeaient au sens de Cesàro, cette convergence était uniforme sur l'ensemble des sous-suites. Ici, la convergence vers $+\infty$ uniformément par sous-séries est distincte de la convergence vers $+\infty$ par sous-séries : l'espace de Tzirelson T* (que nous verrons au chapitre suivant) ne contient pas c_o mais n'a que c_o pour modèle étalé. Si donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée quelconque dans T*, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série (y_n) tend vers $+\infty$ par sous-séries (d'après le résultat de W.B. Johnson déjà mentionné), mais n'a aucune sous-suite $(y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série (y'_n) tende vers $+\infty$ uniformément par sous-séries.

Si nous nous restreignons aux suites faiblement convergentes vers O, nous obtenons l'énoncé suivant :

PROPOSITION 3

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante, faiblement convergente vers* 0. *La suite fondamentale* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *du m.e. associé n'est pas équivalente à la base canonique de* c_o *si et seulement si* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *possède une sous-suite* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que*

(1) $$\lim_{k \to +\infty} \ \inf_{n_1 < \ldots < n_k} \ \inf_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k = \pm 1} \left\| \sum_1^k \varepsilon_i \, y_{n_i} \right\| = +\infty.$$

La démonstration utilise les mêmes idées que précédemment, et est laissée au lecteur.

Le résultat qui suit est à rapprocher de la Proposition II.6.3 ; c'est un nouveau résultat de "disjonction uniforme".

PROPOSITION 4

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite faiblement convergente vers* 0 . *Il existe une sous-suite* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *qui vérifie l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes (qui s'excluent mutuellement) :*

1) $$\sup_k \ \inf_{n_1 < \ldots < n_k} \ \sup_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k = \pm 1} \left\| \sum_1^k \varepsilon_i \, y_{n_i} \right\| < +\infty$$

2) $$\lim_{k \to +\infty} \ \inf_{n_1 < \ldots < n_k} \ \inf_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k = \pm 1} \left\| \sum_1^k \varepsilon_i \, y_{n_i} \right\| = +\infty.$$

DEMONSTRATION

On se ramène aisément à une suite étalante. Le premier cas se produit alors si la suite fondamentale du m.e. associé est équivalente à la base canonique de c_o (Prop. 2.3, 2°)), le second sinon (Prop. 3).

4. LA DUALITE DANS LE CAS DE ℓ_1 et c_o .

Dans le cas de modèles étalés isomorphes à c_o ou ℓ_1 les résultats du §1 peuvent être précisés.

PROPOSITION 1

Soit E *un espace de Banach*

1) Si un quotient de E *admet* c_0 *pour modèle étalé alors* E' *admet* ℓ_1 *pour modèle étalé.*

2) Si E' *admet* ℓ_1 *pour modèle étalé alors* E'' *a un quotient qui admet* c_0 *pour modèle étalé.*

DEMONSTRATION

(1) Supposons qu'un quotient F de E admette c_0 pour modèle étalé. D'après la proposition 3, §2, 2°), il existe une suite étalante basique $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un réel $M > 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $n_1,\dots,n_{2^k}$, avec $k < n_1 < \dots < n_{2^k}$, tous $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2^k}$ complexes de module 1 :

$$\|\Sigma_{i=1}^{2^k} \varepsilon_i x_{n_i}\| \leqslant M.$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite biorthogonale à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le dual de $\overline{\text{span}}\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$.

On a $\quad \forall n \quad \|f_n\| \leqslant \frac{2K}{\delta}$,

où K est la constante de basicité de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $0 < \delta = \inf_n \|x_n\|$.

Grâce au théorème de Hahn-Banach on peut étendre les $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à F tout entier et donc considérer les f_n comme des éléments du dual de E.

Pour tout $K \in \mathbb{N}$, tous $n_1,\dots,n_{2^k}$ avec $K \leqslant n_1 < \dots < n_{2^k}$, toute suite de scalaires $a_1,\dots,a_{2^k}$ on a en posant $\varepsilon_i = \frac{\bar{a}_i}{|a_i|}$ si $a_i \neq 0$

$$M \,\|\Sigma_{i=1}^{2^k} a_i f_{n_i}\| \geqslant |(\Sigma_{i=1}^{2^k} a_i f_{n_i})(\Sigma_{a_i \neq 0} \varepsilon_i x_{n_i})|$$

$$= \Sigma_{i=1}^{2^k} |a_i| .$$

D'après le théorème II.2.2 (3), tout modèle étalé construit sur la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est isomorphe à $\ell_1((f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas a priori étalante).

(2) Deux cas sont à envisager :

α) il existe dans E' une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étalant ℓ^1 et de Cauchy pour $\sigma(E',E'')$. Alors quitte à remplacer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(x_{2n+1}-x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui a également ℓ^1 pour modèle étalé, nous sommes dans les hypothèses du corollaire 6 du § 1 et le résultat s'en déduit.

β) Il existe dans E' une suite équivalente à la base canonique de ℓ^1 et alors E'' a un quotient isomorphe à ℓ^∞ , espace qui a évidemment c_o comme modèle étalé.

Les deux alinéas α) et β) ne sont pas exclusifs l'un de l'autre, mais sont exhaustifs, et le résultat est démontré.

Si E est séparable (ou réflexif), la proposition 1 peut être précisée :

PROPOSITION 2

Si E *est séparable ou réflexif,* E' *a* ℓ^1 *pour modèle étalé si et seulement si un quotient de* E *a* c_o *pour modèle étalé.*

DEMONSTRATION

Le cas où E est réflexif est contenu dans l'énoncé de la proposition 1. Supposons donc E séparable.

S'il existe dans E' une suite étalante, de Cauchy pour $\sigma(E',E'')$, dont le modèle étalé soit ℓ^1, on raisonne comme ci-dessus (mais au lieu du corollaire 6, §1, on utilise le théorème 7 §1).

Sinon, E' contient ℓ^1. Puisque E est séparable on peut (extrayant des sous-suites et formant des différences consécutives) supposer que la suite $(x^*_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E' qui est équivalente à la base de ℓ^1 converge vers O pour $\sigma(E',E)$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 8, §1.

De cette proposition résulte immédiatement :

COROLLAIRE 3

Un espace de Banach E *a la propriété de Banach-Saks si et seulement si* E' *est réflexif et aucun quotient de* E' *n'a* c_o *pour modèle étalé.*

Ce corollaire décrit de façon duale la propriété de Banach-Saks, mais on ne peut pas considérer qu'il réponde de façon satisfaisante à la question suivante, qui reste ouverte : comment caractériser sur E' le fait que E ait la propriété de Banach-Saks ?

*

CHAPITRE IV

QUELQUES ESPACES DE BANACH ET LEURS MODÈLES ÉTALÉS - EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

****

CHAPITRE IV

QUELQUES ESPACES DE BANACH ET LEURS MODÈLES ÉTALÉS. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES.

Dans ce chapitre, nous étudions tout d'abord les modèles étalés sur les espaces de suites usuels, comme ℓ^p et c_o. Nous contruisons ensuite des espaces dont les modèles étalés jouissent de propriétés particulières, ce qui nous permet d'illustrer par des exemples les résultats démontrés aux chapitres précédents.

1. MODELES ETALES SUR LES ESPACES DE SUITES USUELS

Nous commencerons par un lemme qui nous permettra, dans bien des cas, de nous limiter à l'étude des modèles construits sur des suites de blocs consécutifs sur la base canonique de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$:

LEMME 1

Soit E *un espace de Banach, complétion de* $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ *pour une norme* $\|.\|$ *On suppose que* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une base de* E. *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante normalisée, telle que pour tout* $k, u_n(k) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

Il existe une suite étalante $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de blocs consécutifs normalisés qui définit la même extension que* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

DEMONSTRATION

Puisque E est la complétion de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on peut trouver une suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de blocs sur $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\| u_n - u'_n \| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

Notons $n_j = \text{fin}(u_j)$. La suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite strictement croissante (car $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite convergente). On la notera encore $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Notons P_j la "projection" sur $\{0,1,\dots,n_j\}$ définie par :

$$P_j u(k) = u(k) \quad \text{si } k \leqslant n_j$$
$$= 0 \text{ sinon.}$$

Puisque $u'_n(k) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, pour tout k, on peut trouver une sous-suite $(u''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout j, $\| P_j \; u''_n \| < 1/2^j$ si $n \geqslant j+1$.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{u''_n - P_{n-1} u''_n}{\| u''_n - P_{n-1} u''_n \|}$$

est une suite de blocs consécutifs, qui possède la propriété voulue.

La situation des espaces $\ell^p (1 \leqslant p < +\infty)$ et c_o vis à vis de leurs modèles étalés ou de leurs extensions est la plus simple possible ; elle est résumée dans le théorème suivant.

THEOREME 1

a) *Si* $1 \leqslant p < +\infty$, *tout modèle étalé, toute extension de* ℓ^p *sont isométriques à* ℓ^p.

b) *Tout modèle étalé, toute extension de* c_o *sont isomorphes à* c_o.

DEMONSTRATION

a) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite étalante de ℓ^p $(1 \leqslant p < +\infty)$. Si $p > 1$, elle converge faiblement vers un point x_o, et si $p = 1$, elle converge préfaiblement (c'est-à-dire pour $\sigma(\ell^1, c_o)$).

L'extension de ℓ^p associée à la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est isométrique (prop. I.5.4) à celle associée à la suite $(x_n - x_o)_{n \in \mathbb{N}}$ (qui converge faiblement - ou préfaiblement - vers 0), et, évidemment à l'extension associée à la suite normalisée $\left(\frac{x_n - x_o}{\| x_n - x_o \|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Le lemme 1 montre alors que cette extension est définie par une suite de blocs consécutifs $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur la base canonique. On en déduit que si x est à support fini sur $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite fondamentale du modèle étalé sur $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a, pour toute suite finie de scalaires :

$$\|x + \sum_i a_i g_i\| = \lim_{\substack{n_1 < n_2 < \dots \\ \to +\infty}} \|x + \sum_i a_i v_i\| = (\|x\|_p^p + \sum_i |a_i|^p)^{1/p} ,$$

la seconde égalité étant vraie dès que $n_1 > \mathrm{fin}(x)$. Ceci reste vrai pour les éléments x quelconques dans ℓ^p, puisque les suites finies y sont denses. La norme obtenue est celle du produit ℓ^p de ℓ^p par lui-même, qui est isométrique à ℓ^p.

L'espace c_o est à part, puisqu'il admet a priori au moins deux bases écartables non équivalentes : la base canonique $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la base sommante $s_n = \sum_{k \leqslant n} e_k$. L'une est inconditionnelle, l'autre ne l'est pas.

Nous allons montrer que tout modèle étalé de c_o est isomorphe à c_o.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite étalante dans c_o. Si elle est faiblement convergente, on procède comme en a). Elle ne peut pas avoir de sous-suite équivalente à la base de ℓ^1, puisque c_o ne contient pas ℓ^1 ; on peut donc la supposer faiblement de Cauchy, non convergente. La suite fondamentale $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du modèle étalé F est alors basique (prop. I.4.2). Soit M_1 sa constante de basicité.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi faiblement de Cauchy non convergente. Soit a sa limite dans F" pour $\sigma(F'',F')$ et $\alpha = \|a\|_{F''}$. Pour toute suite finie de scalaires (a_i), on a, d'après la proposition I.4.2,

$$\|\sum_i a_i f_i\| \geqslant \frac{\alpha}{M_1+1} \sup_{q \in \mathbb{N}} |\sum_{i \geqslant q} a_i| .$$

Posons $z_o = f_o$, $z_1 = f_1 - f_o, \dots, z_n = f_n - f_{n-1}$, $n \geqslant 1$; nous obtenons, pour toute suite finie de scalaires (b_i) :

$$\|\sum_i b_i z_i\| \geqslant \frac{\alpha}{M_1+1} \sup_i |b_i| .$$

Par ailleurs, les deux suites $(z_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(z_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes à la base canonique de c_o : en effet, ce sont les suites fondamentales du modèle étalé construit sur $(x_n - x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge vers 0 faiblement. On a donc :

$$\|\sum_i b_i z_i\| \leqslant |a_o| \, \|z_o\| + \|\sum_{i \geqslant 1} b_{2i} z_{2i}\| + \|\sum_{i \geqslant 0} b_{2i+1} z_{2i+1}\|$$

$$\leqslant 3 \sup_i |b_i| \times \max(\|z_o\|, \|z_1\|) .$$

Nous avons donc démontré que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était équivalente à la base canonique de c_o. Comme $\overline{\text{span}}\{(e_n)_{n \in \mathbb{N}}\} = \overline{\text{span}}\{(z_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$, le résultat est démontré.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être calculée à partir de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $f_n = \sum_{k \leqslant n} z_k$. Puisque $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de c_o, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base sommante. Nous avons donc obtenu :

PROPOSITION 2

L'espace c_o admet - à une équivalence près - exactement deux bases écartables : la base canonique et la base sommante.

La première assertion du théorème 1 est fausse pour c_o, comme le montre la proposition suivante, due à B. Maurey :

PROPOSITION 3

Il existe un modèle étalé de c_o qui n'est pas isométrique à c_o.

DEMONSTRATION

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 4

Soit ϕ une norme sur $\mathbb{R}^2$, vérifiant, pour tous $a,b \in \mathbb{R}^2$,

$$\phi(a,b) \geqslant \phi(a,0).$$

Il existe un modèle étalé de c_o, de suite fondamentale $(e_i)_{i \geqslant 1}$, tel que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| = \sup_{i \geqslant 0} \phi\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_j, a_i \right)$$

pour tout n et toute suite finie de scalaires $(a_1,\ldots,a_n)$ (avec $a_o=0$).

Démonstration du lemme 4

Nous utiliserons le fait que, pour tout espace de dimension finie F, et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un N tel que F soit $(1+\varepsilon)$-isomorphe à un sous-espace de ℓ_N^∞. Nous l'appliquons à $F = \mathbb{R}^2$, muni de la norme ϕ. On peut donc trouver deux suites de points dans c_o, $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$, à supports finis vérifiant

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{supp} u_n \cap \operatorname{supp} u_m = \emptyset \\ \operatorname{supp} u_m \cap \operatorname{supp} v_n = \emptyset \\ \operatorname{supp} v_m \cap \operatorname{supp} v_n = \emptyset \end{array}\right\} \quad \text{si } n \neq m$$

et tels que pour tout $n \geq 1$, on ait, pour tous $a,b \in \mathbb{R}$:

$$(1) \qquad 0 \leq \phi(a,b) - \| a u_n + b v_n \|_{c_o} \leq \frac{1}{n} \max(|a|,|b|) .$$

On suppose en outre

$$(2) \qquad \| u_n \|_{c_o} = \| u_m \|_{c_o} , \quad \| v_n \|_{c_o} = \| v_m \|_{c_o} \qquad \forall\, m.$$

Considérons $x_n = u_o + \ldots + u_{n-1} + v_n$.

Nous allons voir que le modèle étalé sur $(x_n)_{n \geq 1}$ satisfait notre assertion. Pour cela, calculons par exemple

$$\| a_1 x_{n_1} + a_2 x_{n_2} + a_3 x_{n_3} \| = \| (a_1 + a_2 + a_3) \sum_{i=1}^{n_1 - 1} u_i + (a_2 + a_3) \sum_{i=n_1}^{n_2-1} u_i + a_3 \sum_{i=n_2}^{n_3-1} u_i + a_1 v_{n_1} + a_2 v_{n_2} + a_3 v_{n_3} \|$$

$$= \max\{ |a_1 + a_2 + a_3| \max_{1 \leq i \leq n_1 - 1} \| u_i \|_{c_o} , \quad |a_2 + a_3| \max_{n_1+1 \leq i \leq n_2-1} \| u_i \|_{c_o}, \quad |a_3| \max_{n_2+1 \leq i \leq n_3-1} \| u_i \|_{c_o} , \| (a_2 + a_3) u_{n_1} + a_1 v_{n_1} \|_{c_o} , \| a_3 u_{n_2} + a_2 v_{n_2} \|_{c_o} , \quad |a_3| \, \| v_{n_3} \|_{c_o} \} .$$

D'après (1) et (2), cette quantité est égale, à $\frac{6}{n_1}$ près, à

$$\max\{\phi(a_1+a_2+a_3,0),\ \phi(a_2+a_3,0),\ \phi(a_3,0),\ \phi(a_2+a_3,a_1),\ \phi(a_3,a_2),\ \phi(0,a_3)\}$$

et, d'après l'hypothèse, ceci vaut :

$$\max\{\phi(a_1+a_2+a_3,0),\phi(a_2+a_3,a_1),\ \phi(a_3,a_2),\ \ \phi(0,a_3)\} = \sup_{i\geq 0} \phi(\sum_{i+1}^{\infty} a_j, a_i),$$

et le lemme est démontré.

Démontrons maintenant la proposition. Prenons $\phi(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}$.

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite étalante de c_o donnée par le lemme précédent. On a :

$$\| a_1\ e_1 + a_2\ e_2\| = \max\{|a_1+a_2|,(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}\}.$$

et donc, si $a_1.a_2 < 0$, $\| a_1\ e_1 + a_2\ e_2\| = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$.

Si e_1 et e_2 étaient des points de c_o, on pourrait trouver deux éléments f_1,f_2 de c_o, à support fini, avec :

$$\|a_1\ f_1 + a_2\ f_2\|_{c_o} = \| a_1\ e_1 + a_2\ e_2\|_{c_o} \quad \forall\ a_1,a_2 \in \mathbb{R}\ ,$$

et donc

$$\| a_1\ f_1 + a_2\ f_2\|_{c_o} = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2} \qquad a_1.a_2 < 0$$

et ceci n'est pas possible ; la démonstration de la proposition est donc achevée.

Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'espaces de Banach, nous notons $(\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} E_n)_{\ell^p}$ l'espace $(\oplus E_n)_{\ell^p} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ x_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}\}$, muni de la norme $\| (x_n)\| = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \| x_n\|_{E_n}^p)^{1/p}$.

Nous notons $(\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} E_n)_{c_o}$ l'espace

$$(\oplus E_n)_{c_o} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ x_n \in E_n, \forall_n, \| x_n\|_{E_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0\ \}$$

muni de la norme :

$$\| (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \| x_n \|_{E_n} .$$

Au moyen de techniques tout à fait analogues aux précédentes, nous obtenons :

PROPOSITION 4

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'espaces de dimension finie. Tout modèle étalé de* $(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n)_p$, $1 < p < +\infty$, *est isométrique à* ℓ^p . *Tout modèle étalé de* $(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n)_1$ (resp. $(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n)_{c_o}$) *est isomorphe à* ℓ^1 (resp. c_o).

La différence avec le cas de ℓ^p est que $(\oplus E_n)_p$ peut fort bien ne pas être super-réflexif, par exemple si $E_n = \ell^1_{(n)}$.

PROPOSITION 5

Toute extension de l'espace $\ell^p \oplus \ell^q$ $(1 \leqslant p,q < +\infty)$ *est isomorphe à* $\ell^p \oplus \ell^q$. *Tout modèle étalé de* $\ell^p \oplus \ell^q$ *est isomorphe à* ℓ^p *ou à* ℓ^q . *En particulier, si* $p \neq q$, *l'espace* $\ell^p \oplus \ell^q$ *n'admet pas de base sous-symétrique.*

DEMONSTRATION

Il nous suffit évidemment de considérer les modèles étalés sur des suites basiques et de montrer que tout modèle étalé de ce type sur $\ell^p \oplus_1 \ell^q$ est isomorphe à ℓ^p ou à ℓ^q .

Soit $(x_n, y_n)_{n \geqslant 1}$ une suite étalante dans $\ell^p \oplus_1 \ell^q$; on peut supposer que x_n , y_n convergent faiblement vers 0 dans ℓ^p , ℓ^q si p,q>1 (pour $\sigma(\ell^1, c_o)$ si $p = 1$ ou $q = 1$). Soit $\alpha = \lim_n \| x_n \|$, $\beta = \lim_n \| y_n \|$. Le même argument qu'au théorème 1 montre que si (e_i) est la suite fondamentale du modèle étalé sur $\ell^p \oplus_1 \ell^q$,

$$\left\|\sum_i a_i e_i\right\| = \alpha \left\|(a_i)_{i\geqslant 1}\right\|_p + \beta \left\|\Gamma(a_i)_{i\geqslant 1}\right\|_q ,$$

d'où la proposition.

On peut aussi se demander, E étant un espace de Banach, comment caractériser les modèles étalés de $\ell^p(E)$ en fonction de ceux de E. Ceci sera fait au chapitre V.

2. CONSTRUCTIONS UTILISANT DES ENSEMBLES ADMISSIBLES.

Tous les espaces de suites classiques, que nous avons passés en revue au paragraphe précédent, ont une norme invariante par étalement sur la base canonique. Cela rend particulièrement simple l'étude de leurs modèles étalés, mais elle est bien peu significative de ce que l'on peut rencontrer en général. Tout en restant dans le cadre des espaces de suites, nous allons introduire de nouvelles normes, qui ne seront plus invariantes par étalement sur la base canonique de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, et qui nous permettront de mieux apprécier certains phénomènes.

La construction de ces normes utilise toujours, sous une forme plus ou moins élaborée, une notion introduite pour la première fois (à notre connaissance) par J. Schreier [62], qui est celle de sous-ensemble admissible de $\mathbb{N}$:

DEFINITION :

Un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, $A = \{n_1<n_2<\ldots<n_k\}$, *est dit admissible si* $k \leqslant n_1$.

Nous noterons $\mathcal{N}$ *la classe des sous-ensembles admissibles de* $\mathbb{N}$.

Nous avons déjà rencontré cette condition à plusieurs reprises. Par exemple, le théorème III . 1.1 donne, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est basique, faiblement convergente vers 0, une sous-suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle on peut estimer la norme de la projection sur span $(x'_j)_{j \in A}$, pour tout ensemble A admissible.

Dans d'autres cas, la condition était $k \leqslant n_1 < \ldots < n_{2^k}$; on pourrait définir les ensembles admissibles de cette façon. Cela ne ferait aucune différence pour la suite : l'important est qu'il y ait une corrélation entre la longueur de l'ensemble et son premier élément.

Nous noterons $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires.

Nous aurons besoin de trois lemmes techniques, inspirés de [11]

A). TROIS LEMMES.

LEMME 1

Soit $\|\cdot\|_o$ *une norme sur* $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ *telle que* $\|\sum_i a_i e_i\|_o = \|\sum |a_i| e_i\|_o$.

(et donc $\|\sum_{i \in A} a_i e_i\|_o \leqslant \|\sum_{i \in B} a_i e_i\|_o$, *si* $A \subset B$), *et* $\|e_n\|_o = 1$ *pour tout* n. *On considère la norme* $\|x\| = \sup_{A \in \mathcal{N}} \|P_A x\|_o$, *et on note* E *le complété de* $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ *pour cette norme.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante de blocs consécutifs normalisés la suite* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. *Si* $\|u_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, *il existe pour tout* $\varepsilon > 0$, *une sous-suite* $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que, pour tout* n, $\|u'_1 + \ldots + u'_n\| < 1 + \varepsilon$.

DEMONSTRATION

Supposons au contraire que, pour un certain $\varepsilon > 0$, pour toute sous-suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe un $n \geqslant 1$ tel que $\|u'_1 + \ldots + u'_n\| \geqslant 1 + \varepsilon$.

Puisque $\|u_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ on peut extraire une sous-suite faite de blocs décroissants, en ce sens que, pour tout n,

$$\min\{|u_n(k)| \ ; \ |u_n(k)| > 0\} > \max|u_{n+1}(k)|.$$

On note encore cette sous-suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit n_1 tel que $\|u_1 + \ldots + u_{n_1}\| > 1+\varepsilon$
Il existe un ensemble A admissible tel que

$$\|P_A(u_1 + \ldots + u_{n_1})\|_o \geqslant 1 + \varepsilon.$$

Notons $A = \{k_1,\dots,k_r\}$; k_1 se trouve sur le support d'un certain bloc u_{m_1} $(m_1 \leqslant n_1)$. Définissons A' de la façon suivante : A' a le même premier élément que A, le même nombre d'éléments, mais sature les blocs u_{m_1} , $u_{m_1+1}, \dots$ dans cet ordre. Plus précisément, si $A' = \{k'_1,\dots,k'_r\}$, on a : $k'_1 = k_1$, et, si k'_p a été choisi sur le support d'un bloc u_i $(i \leqslant n_1)$, on choisit $k'_{p+1} = k'_p+1$ si $k'_p+1 \in$ support de u_i , ou $k'_{p+1} = \mathrm{deb}(u_{i+1})$ sinon . A cause de la décroissance de $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, on a $\| P_{A'}(u_1+\dots+u_{n_1})\|_o > 1+ \varepsilon$. Donc A' rencontre au moins deux (u_j) consécutifs : on a donc trouvé un indice j_1 $(j_1 \leqslant n_1-1)$ et un ensemble admissible A_1 tel que $\| P_{A_1}(u_{j_1}+u_{j_1+1})\|_o > 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Considérons maintenant la suite $(u_n)_{n \geqslant n_1}$; on trouve de même j_2 et A_2, et ainsi de suite.

Notons $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite fondamentale du modèle étalé construit sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a :

$$\| f_1+f_2\| = \lim_{p \to +\infty} \| u_{j_p}+u_{j_{p+1}}\| > 1 + \varepsilon/2 .$$

Mais pour chaque j, $\lim\limits_{k \to +\infty} \| u_j+u_k\| = 1$. Ceci est contradictoire, puisqu'on se trouve sur une suite étalante. Le lemme est ainsi démontré.

<u>LEMME 2</u>

Soit $\|\cdot\|_o$ *une norme sur* $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ *avec les propriétés suivantes :*

a) $\| e_n\|_o = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

b) $\| \sum\limits_i |a_i| e_i\|_o = \| \sum a_i e_i\|_o = \| \sum a_i e_{n_i}\|_o$, *pour toute suite croissante* $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

c) Le complété E_o *de* $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ *pour* $\|\cdot\|_o$ *ne contient pas* c_o.

Considérons sur $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ *une norme* $\|\cdot\|$ *définie à partir de* $\|\cdot\|_o$ *et possédant les propriétés suivantes (si* $z = \sum a_k e_k$, *on note* $\tau_n z = \sum\limits_k a_k e_{k+n}$) :

α) $\| x \| \leqslant \| x \|_o$ *pour tout* $x \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

β) *Pour tout* $x \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, *il existe* n *tel que* $\| \tau_n x \| = \| x \|_o$.

Soit alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de blocs consécutifs normalisés. Il existe une sous-suite, encore notée* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *pour laquelle on peut écrire, pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u'_n + u''_n$, *où :*

1°) Pour $N \geqslant 1$, $j \geqslant 0$, *si, pour un* i_o, u'_{i_o} *a* N *coordonnées qui vérifient* $\frac{1}{2^{j+1}} < | u'_{i_o}(j) | \leqslant \frac{1}{2^j}$, *il en est de même de tous les* u'_i, $i > i_o$.

2°) $\sup_i \| (u'_i|_\delta) \| \underset{\delta \to 0}{\to} 0$, *si l'on note* $u|_\delta$ *le bloc défini par* $(u|_\delta)(k) = u(k)$ *si* $|u(k)| < \delta$

$= 0$ *sinon.*

3°) $\| u''_i \|_\infty \underset{i \to +\infty}{\to} 0$.

DEMONSTRATION

Observons tout d'abord que la condition c) (avec b)) implique

$$\| e_1 + \ldots + e_n \|_o \underset{n \to +\infty}{\to} \infty$$

Soit maintenant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de blocs consécutifs normalisés. La norme ne dépendant que du module des coefficients, nous supposerons ceux-ci positifs pour simplifier les notations.

Puisque les blocs sont normalisés, on a $u_n(k) \leqslant 1$ pour tous $n,k \in \mathbb{N}$ (en effet, $\| \Sigma |a_i| \, e_i \| = \| \Sigma \, a_i \, e_i \|$, et donc

$\| \sum_{i \in A} a_i \, e_i \| \leqslant \| \sum_{i \in B} a_i \, e_i \|$ si $A \subset B$).

Dans chaque u_i, on regarde s'il y a une coordonnée $> \frac{1}{2}$. Si c'est le cas pour une infinité de u_i, on extrait la sous-suite correspondante $(u_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}$. Pour chaque u de cette sous-suite, on met dans u' la coordonnée $> \frac{1}{2}$, ou l'une d'elles s'il y en a plusieurs. On note $v_i^{(1)}$ le bloc obtenu à partir de $u_i^{(1)}$ en remplaçant par 0 la coordonnée mise dans u'.

On regarde à nouveau dans chaque $v_i^{(1)}$ s'il y a une coordonnée $> \frac{1}{2}$. Si c'est le cas pour une infinité de $v_i^{(1)}$, on extrait la sous-suite $u_i^{(2)}$ correspondante, on met dans u' la coordonnée $> \frac{1}{2}$ et on appelle $v_i^{(2)}$ le bloc obtenu en remplaçant par 0 les deux coordonnées $> \frac{1}{2}$.

Soit n_o tel que $\|e_1+\ldots+e_{n_o}\|_o \geq 2$. Il ne peut y avoir plus de n_o coordonnées $> \frac{1}{2}$ dans une infinité de blocs u_i. En effet, s'il y en avait $n > n_o$, on aurait, d'après β), $\frac{1}{2}\|e_1+\ldots+e_n\|_o \leq 1$, ce qui est contradictoire. L'opération ci-dessus, pour les coordonnées $> \frac{1}{2}$, sera donc terminée au bout d'un nombre fini d'étapes. On passe aux coordonnées $> \frac{1}{4}$: sur u_i s'il n'y avait qu'un nombre fini de coordonnées $< \frac{1}{2}$, sur $v_i^{(1)}$ ou $v_i^{(2)}$, ..., etc., si l'on avait déjà extrait des sous-suites. On répète l'opération pour $\frac{1}{4}$ un certain nombre de fois si nécessaire, (ce nombre est nécessairement fini), on passe à $1/2^3$, et ainsi de suite.

On considère la suite diagonale $(u_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Pour chaque élément de cette sous-suite, u' a un sens et est constitué de ce qu'on y a mis à chaque étape.

On appelle u" ce qui reste. Pour chaque $\alpha > 0$, on a $\max_k u_i''(k) \geq \alpha$ seulement pour un nombre fini de i, et donc $\|u_i''\|_\infty \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$

Pour chaque i_o, si une coordonnée se trouve dans u'_{i_o} avec $\frac{1}{2^{j+1}} \leq u'_{i_o}(k) \leq \frac{1}{2^j}$, on retrouve dans u'_i, $i > i_o$, une coordonnée vérifiant la même estimation. Le nombre de ces coordonnées est le même dans u'_{i_o} et u'_i, $i > i_o$.

Il nous reste à montrer que $\sup_i \|(u'_i|_\delta)\| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$. Sinon, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, $\forall\delta > 0$, on puisse trouver un i avec $\|(u'_i|_\delta)\| \geq \varepsilon$.

Soit $\delta_1 = \frac{1}{2}$, et soit u'_{i_1} le bloc vérifiant $\|(u'_{i_1}|_{\delta_1})\| \geq \varepsilon$. C'est un bloc fini, et donc pour δ_2 assez petit, $\|(u'_{i_1}|_{\delta_2})\| = 0$. Soit u'_{i_2} tel que $\|(u'_{i_2}|_{\delta_2})\| \geq \varepsilon$, et ainsi de suite : on construit une suite $\delta_n \to 0$ et une suite (u'_{i_n}) associée.

Mais, par construction, les coordonnées de chaque u'_i se retrouvent dans tous les suivants, avec le même ordre de grandeur. Pour chaque $n \geqslant 1$, on peut donc trouver $i(n)$ tel que $u'_{i(n)}$ "contienne" $u'_{i_1}|_{\delta_1}, \ldots, u'_{i_n}|_{\delta_n}$ et on peut le prendre assez loin pour que (d'après β)) , $\| u'_{i(n)} \| = \| u'_{i(n)} \|_o$.
On aura alors, dans E_o, une suite de blocs $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\| W_n \|_o > \varepsilon$ et $\| W_1 + \ldots + W_n \|_o \leqslant 1$. Ceci implique que E_o contient c_o, contredisant c).
Ceci achève la démonstration du lemme.

LEMME 3

Les hypothèses sont les mêmes qu'au lemme 2 ; on suppose en outre
d) la base $(e_n)_{n \in N}$ *est symétrique dans* E_o*, c'est-à-dire*

$$\| \Sigma\, a_i\, e_{\pi(i)} \|_o = \| \Sigma\, a_i\, e_i \|_o ,$$

pour toute permutation π *des entiers.*
Alors le modèle étalé construit sur la suite $(u'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *définie au lemme précédent est isométrique au modèle étalé engendré dans* E_o *par une suite de translatés* $(\tau_{n_k} u)_{k \in \mathbb{N}}$ *, pour un* $u \in E_o$ *et une suite* $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *strictement croissante.*

DEMONSTRATION

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que pour chaque $k \geqslant 0$, les coordonnées des u'_n comprises entre $\frac{1}{2^{k+1}}$ et $\frac{1}{2^k}$ admettent une limite. Notons $1 \geqslant \ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \ldots$ les limites ainsi obtenues. Définissons u par $u(i) = \ell_i$ (l'ordre des coefficients n'a pas d'importance, puisque la base est symétrique dans E_o). Montrons d'abord que $u \in E_o$. On sait que pour tout i, $\| u'_i \| \leqslant 1$, donc, a fortiori $\| u'_i - (u'_i|_{1/2^{k+1}}) \| \leqslant 1$.
Mais le "morceau" $u'_i - (u'_i|_{1/2^{k+1}})$ se retrouve dans tous les u'_j , $j > i$.
Ce morceau contient un nombre borné de termes (dépendant seulement de k, et non de i) et donc, pour j assez grand, d'après la propriété β),

$$2 \geqslant \| u'_j - (u'_j|_{1/2^{k+1}}) \| = \| u'_j - (u'_j|_{1/2^{k+1}}) \|_o$$

et donc $\|u\|_o \leqslant 2$, si l'on considère seulement les termes $\ell_i \geqslant 1/2^{k+1}$.
Mais ceci est vrai pour tout k, et donc $\|u\|_o \leqslant 2$

Déterminons maintenant le modèle étalé construit sur la suite $(u'_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Soient $a_1 \dots a_k$ des scalaires. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\delta > 0$ tel que

$$\sup_i \| u'_i|_\delta \| \leqslant \varepsilon \Big/ \sum_{i=1}^{k} |a_i| \quad .$$

Posons $v_i = u'_i - u'_i|_\delta$. Le nombre de termes non nuls de v_i est borné par un nombre qui ne dépend que de δ. Il en résulte que pour n_1 assez grand

$$\| \sum_1^k a_i v_{n_i} \| = \| \sum_1^k a_i v_{n_i} \|_o$$

Puisque la norme $\|\cdot\|_o$ est invariante par permutation des coordonnées, on peut ranger chaque v_i par ordre décroissant des coordonnées, admettant les limites $\ell_1 > \ell_2 > \dots$. Si l'on note m_i l'indice du premier terme non nul de v_{n_i}, on a donc :

$$\| \sum_1^k a_i v_{n_i} \|_o - \| \sum_1^k a_i \tau_{m_i} u \|_o \underset{n_1 \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Finalement, on obtient :

$$\Big| \lim_{n_1 < \dots < n_k} \| \sum_1^k a_i u'_{n_i} \| - \lim_{\substack{n_1 < \dots < n_k \\ \to +\infty}} \| \sum_1^k a_i \tau_{m_i} u \|_o \Big|$$

$$< \overline{\lim_{\substack{n_1 < \dots < n_k \\ \to +\infty}}} \| \sum_{i=1}^k a_i (u'_{n_i}|_\delta) \| \leqslant \varepsilon$$

et comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, le lemme en résulte.

B. L'ESPACE S DE SCHREIER.

Sur $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ considérons la norme

$$\|x\|_S = \sup_{A \in \mathcal{N}} \sum_{k \in A} |x(k)|$$

et appelons S la complétion de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ pour cette norme.

Cet espace est très voisin de celui introduit par J. Schreier dans [62], où la norme était $\sup_{A \in \mathcal{N}} |\sum_{k \in A} x(k)|$, et nous l'appellerons "Espace de Schreier". Il a été étudié en particulier par le premier auteur dans [8].

Il est clair que si $x \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, $\|x\|_S \leqslant \|x\|_1$. L'injection canonique de ℓ^1 dans S est de norme 1, et les points de la base canonique $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ sont de norme 1 dans S.

Il est clair également que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle monotone de S.

Si $x = (x(k))_{k \in A}$ est porté par un ensemble admissible A, on a $\|x\|_S = \|x\|_1$. Mais cependant l'espace S ne contient par ℓ^1 :

PROPOSITION 1

L'espace S *ne contient pas* ℓ^1.

DEMONSTRATION

On peut établir ce résultat de plusieurs façons. La plus simple est de remarquer (voir [51]) que :

$$\|x\|_S = \sup \{|\sum_{i \in A} x(i)\xi(i)| \ ; A \in \mathcal{N}, \ \xi(i) = \pm 1\}$$

et S est donc isométrique à un sous-espace d'un espace $\mathscr{C}(K)$, où K est compact dénombrable ; il en résulte (voir p. ex. [51]) que S ne peut contenir ℓ^1. En fait, tout sous-espace de dimension infinie contient c_o.

Nous allons donner une autre preuve, plus longue, mais contenant des informations plus précises sur les suites de blocs consécutifs sur la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

PROPOSITION 2

Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de blocs normalisés consécutifs sur la base canonique* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *on a :*

$$\limsup_{n \to +\infty} \|u_o + \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}\|_S \leqslant 1 .$$

DEMONSTRATION

Pour $n \geqslant 1$, considérons $\| u_o + \frac{u_1+\ldots+u_n}{n} \|_S$, et soit A un ensemble admissible pour lequel

$$\| u_o + \frac{u_1+\ldots+u_n}{n} \|_S = \sum_{k \in A} | u_o(k) + \frac{u_1(k)+\ldots+u_n(k)}{n} | .$$

Si A ne rencontre pas le support de u_o, cette seconde quantité est au plus égale à 1. Si A rencontre le support de u_o, A a un nombre d'éléments borné indépendamment de n, et donc

$$\sum_{k \in A} | \frac{u_1(k)+\ldots+u_n(k)}{n} | \underset{n \to +\infty}{\to} 0 ,$$ ceci prouve la proposition.

Il en résulte encore que S ne contient pas ℓ^1 : sinon, on pourrait trouver une suite de blocs consécutifs normalisés $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec pour toute suite finie de scalaires $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$,

$$\| \sum_i a_i u_i \|_S \geqslant \frac{9}{10} \sum_i |a_i|$$

et donc $$\| u_o + \frac{u_1+\ldots+u_n}{n} \|_S \geqslant \frac{18}{10} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

PROPOSITION 3

Le modèle étalé construit sur la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *dans* S *est isométrique à* ℓ^1.

DEMONSTRATION

Soit $(a_1,\ldots,a_k)$ une suite finie de scalaires. Dès que $n_1 \geqslant k$, on a $\| a_1 e_{n_1} + a_2 e_{n_2} + \ldots + a_k e_{n_k} \|_S = \sum_1^k | a_j |$, d'où la proposition.

La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne la propriété $(\mathcal{P}_1)$ dans S : pour tout n, pour toute suite finie $k_1<\ldots<k_n$, l'ensemble $\{k_{[\frac{n}{2}]+1},\ldots,k_n\}$ est admissible et en l'utilisant pour estimer $\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_i e_{k_i} \|_S$, on obtient $\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_i e_{k_i} \|_S \geqslant 1/2$.

On voit donc que $(\mathcal{P}_1)$ est une propriété strictement plus faible que le fait de contenir ℓ^1, comme annoncé au chap. II, §4.

Nous allons déterminer les modèles étalés de S.

PROPOSITION 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante de blocs consécutifs normalisés dans* S. *Posons* $\lambda_n = \|u_n\|_o$.

a) Si $\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède une sous-suite* $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui est* $(1+\varepsilon)$ *équivalente à la base canonique de* c_o

b) Si $\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$, *le modèle étalé construit sur* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est isomorphe à* ℓ^1.

DEMONSTRATION

a) Si $\|u_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, d'après A), lemme 1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout n, $\|u'_1+\dots+u'_n\|_S \leqslant 1+\varepsilon$

Si $a_1 \dots a_N$ sont des scalaires, on a :

$$\|a_1u'_1+\dots+a_Nu'_N\|_S \leqslant (\underset{1\leqslant k\leqslant N}{\text{Max}} |a_k|)\|u'_1+\dots+u'_N\|_S$$
$$\leqslant (1+\varepsilon) \underset{1\leqslant k\leqslant N}{\text{Max}} |a_k| \; .$$

Par ailleurs, soit a_{k_o} tel que $|a_{k_o}| = \underset{1\leqslant k\leqslant N}{\text{Max}} |a_k|$. On a :

$$\|a_1u'_1+\dots+a_N u'_N\|_S \geqslant |a_{k_o}| \; \|u_{k_o}\|_S = |a_{k_o}| = \underset{1<k<N}{\text{Max}} |a_k| ,$$

et la sous-suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $(1+\varepsilon)$-équivalente à la base canonique de c_o.

b) Si $\|u_n\|_\infty \not\to 0$, il existe une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, un $\delta > 0$, et une suite $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tels que $|u_{n_k}(\ell_k)| \geqslant \delta$. Si $a_1 \dots a_N$ sont des scalaires, pour k assez grand, l'ensemble $\{\ell_{k+1},\dots,\ell_{k+N}\}$ est admissible, et, en l'utilisant, on trouve

$$\|a_1u_{k+1}+\dots+a_Nu_{k+N}\|_S \geqslant \delta(|a_1|+\dots+|a_N|).$$

Comme par ailleurs $\| a_1 u_{k+1} + \ldots + a_n u_{k+N} \|_S \leqslant \sum_1^N |a_i|$, la suite fondamentale du modèle étalé est équivalente à la base canonique de ℓ^1.

COROLLAIRE 5

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite quelconque de blocs normalisés, le modèle étalé construit sur cette suite est isomorphe à c_o ou ℓ^1.

DEMONSTRATION

Puisque les formes linéaires coordonnées sont continues, on peut, quitte à passer à une sous-suite, supposer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la limite $\lim_{n \to +\infty} u_n(k)$ existe. On la note $u(k)$. Pour tout ensemble admissible A, $\sum_{k \in A} |u(k)| = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k \in A} |u_n(k)| \leqslant 1$ et donc $u = (u(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est dans S , et $\|u\|_S \leqslant 1$. Mais la suite $(u_n - u)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite qui est équivalente à une suite de blocs consécutifs, à laquelle on applique la proposition précédente.

Pour terminer cette étude de l'espace de Schreier, nous allons le "situer" par rapport à l'espace ℓ^1 .

PROPOSITION 6

L'injection canonique de ℓ^1 dans S est faiblement compacte.

DEMONSTRATION

Pour toute sous-suite $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la base canonique de S, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(1) \qquad \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} e'_i \right\|_S = \frac{1}{n} ,$$

car les ensembles $\{2^k, 2^k+1, \ldots, 2^{k+1}-1\}$ sont admissibles.

Soit $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite quelconque de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et ξ un élément du dual S. Il existe une sous-suite $(e''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \xi(e''_n)$ existe, et d'après (1), cette limite est 0. Il en résulte que la suite $(e_n)_{n \in N}$ tout entière converge faiblement vers 0 dans S. D'après le théorème de Krein-Smulian, l'enveloppe convexe fermée des $(e_n)_{n \in N}$ est faiblement compacte : ceci signifie que la boule unité fermée de ℓ^1 est un ensemble faiblement compact dans S, et donc que l'injection canonique de ℓ^1 dans S est faiblement compacte.

Remarquons que

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} e_i \right\|_{\ell^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{2^{2k}} \right]^{1/2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et il ne peut donc exister de constante C telle que

$$\| x \|_S \geqslant C \|x\|_{\ell^2} \quad , \text{ pour tout } x = \sum a_i e_i \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} .$$

Le même raisonnement vaut pour ℓ^p, p>1 : l'espace S, en ce sens, n'est pas un espace intermédiaire entre ℓ^1 et les ℓ^p , p>1.

Le fait que l'injection de ℓ^1 dans S soit faiblement compacte permet de construire, par interpolation, un espace réflexif n'ayant pas la propriété de Banach-Saks. Le premier exemple d'un tel espace a été construit par A. Baernstein [ ]. Le premier auteur a remarqué, dans [ ], que l'espace d'interpolation réel $(\ell^1,S)_{1/2,2}$ était également dans ce cas (nous renvoyons à [ ] pour une étude détaillée des espaces d'interpolation réels). Enfin, nous en venons un troisième exemple, avec l'espace de Tzirelson.

C. L'ESPACE B DE BAERNSTEIN

Cet espace a été construit par A. Baernstein [6] pour montrer que la réflexivité n'impliquait pas la propriété de Banach-Saks. On peut le considérer comme une "variante réflexive" de l'espace de Schreier précédemment décrit.

Avant de donner l'expression de la norme de B, précisons quelques notations, qui nous seront également utiles dans la suite.

Si A est un sous-ensemble de N, on note $P_A x$ la "projection" de $x \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ sur A : elle est définie par

$$(P_A x)(j) = x(j) \quad \text{si } j \in A$$
$$= 0 \text{ sinon.}$$

Rappelons que deux sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, A et B, sont dits *consécutifs* si Max A < min B.

Si $x \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on définit :

$\|x\|_B = \sup\{(\sum_k \|P_k x\|_{\ell^1}^2)^{1/2}$; $(A_k)_k$ famille finie d'ensemble admissibles consécutifs } (on a noté P_k au lieu de P_{A_k}) et on note B le complété de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ pour cette norme. Là encore, il est clair que la base canonique de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est une base inconditionnelle de B : si $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite finie de scalaires et si A,A' sont deux sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ avec $A \subset A'$, on a $\|\sum_{i \in A} a_i e_i\|_B \leqslant \|\sum_{i \in A'} a_i e_i\|_B$ et donc $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est basique inconditionnelle. Comme $\overline{\text{span}}\{(e_n)_{n \in \mathbb{N}}\} = B$, c'est une base inconditionnelle. A la différence de ce qui se produit pour S, on a :

PROPOSITION 1 : *L'espace* B *ne contient pas* c_o.

DEMONSTRATION :

Puisque la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est inconditionnelle, il suffit, d'après un résultat de R.C. James [35] , (voir p. ex. [12]) de montrer que cette base est complète ("boundedly complete"), c'est-à-dire que si $x = (x(i))_{i \in \mathbb{N}}$ vérifie

$$\sup_{n \in N} \|\sum_o^n x(i)\, e_i\|_B \leqslant 1 \text{ , alors } x \in B$$

Pour cela, soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille d'ensembles admissibles consécutifs. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$(\sum_{k=o}^N \|P_k x\|_{\ell^1}^2)^{1/2} \leqslant \|P_{A_o \cup \ldots \cup A_N} x\|_B < 1 \text{ ,}$$

et donc $(\sum_{k=o}^{\infty} \|P_k x\|_{\ell^1}^2)^{1/2} \leqslant 1$; il en résulte que $x \in B$.

PROPOSITION 2

Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de blocs consécutifs normalisés sur la base* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *on a :*

$$\limsup_{n \to +\infty} \| u_o + \frac{u_1+\dots+u_n}{n} \|_B \leqslant \sqrt{2} .$$

DEMONSTRATION

Soit $n \geqslant 1$, et $A_0 \dots A_N$ une famille finie d'ensembles admissibles consécutifs, avec :

$$\| u_o + \frac{u_1+\dots+u_n}{n} \|_B = \left(\sum_{k=o}^{N} \| P_k \left(u_o + \frac{u_1+\dots+u_n}{n}\right) \|_{\ell^1}^2 \right)^{1/2} .$$

Si A_o ne rencontre pas le support de u_o, le second membre est au plus égal à 1. Si A_o rencontre ce support, soit k_1 l'indice du dernier ensemble rencontrant le support de u_o : la longueur de A_{k_1} est bornée indépendamment de n. On écrit alors :

$$\left(\sum_{k=o}^{N} \| P_k(u_o + \frac{u_1+\dots+u_n}{n}) \|_{\ell^1}^2 \right)^{1/2} = \left[\sum_{k<k_1} \| P_k(u_o + \frac{u_1+\dots+u_n}{n}) \|_{\ell^1}^2 + \sum_{k>k_1} \| P_k \frac{u_1+\dots+u_n}{n} \| \right.$$

Mais $\displaystyle\sum_{k>k_1} \| P_k \frac{u_1+\dots+u_n}{n} \|_{\ell^1}^2 \leqslant 1$, et

$$\sum_{k \leqslant k_1} \| P_k u_o + \frac{u_1+\dots+u_n}{n} \|_1^2 < 1 = \frac{\mathrm{fin}(u_o)}{n} ,$$ (en notant, comme nous l'avons expliqué au chap. I, § 7, $\mathrm{fin}(u_o)$ l'indice du dernier coefficient non nul dans u_o).

CORÓLLAIRE 3 *L'espace B ne contient pas* ℓ^1

Puisque B est à base inconditionnelle et qu'il ne contient ni c_o, ni ℓ^1, il est réflexif, d'après un théorème de R.C. James [35] (voir [12]). Nous allons déterminer ses modèles étalés. Comme B est réflexif, il suffit de s'intéresser à ceux construits sur des suites étalantes faiblement convergentes vers 0, donc en fait aux modèles étalés construits sur des suites de blocs normalisés consécutifs sur la base canonique. Il y a deux types de modèles.

PROPOSITION 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante de blocs consécutifs normalisés.*

Posons $\lambda_n = \max_{k \in \mathbb{N}} |u_n(k)|$. *Alors :*

1) Si $\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ *le modèle étalé construit sur* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est isométrique à* ℓ^2.

2) Si $\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$ *le modèle étalé construit sur* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est isomorphe à* ℓ^1 .

Nous ne donnerons pas maintenant la démonstration de cette proposition : nous aurons un énoncé analogue lorsque nous étudierons l'espace B_ϕ , et nous démontrerons alors ce dernier énoncé : il utilise les mêmes arguments, mais est techniquement beaucoup plus compliqué. Nous préférons donc traiter le cas le plus difficile, laissant au lecteur le soin de l'adaptation au cas le plus simple.

COROLLAIRE 5

L'espace B *n'a pas la propriété de Banach-Saks.*

Les deux espaces précédents ont été obtenus en utilisant des ensembles admissibles, et partant de normes ℓ^1 ou ℓ^2. Il n'est pas étonnant, dans ces conditions, que l'on retrouve ces espaces comme modèles étalés. Pour sortir de ce cadre un peu limité, nous allons avoir recours aux espaces d'Orlicz.

D. L'ESPACE DE SHREIER-ORLICZ S_ϕ

Nous considérons la fonction d'Orlicz :

$$\phi(t) = \frac{t}{1-\text{Log}\, t} \quad \text{si } 0 < t \leqslant 1.$$

$$= 2t-1 \quad \text{si } 1 \leqslant t < +\infty.$$

et nous notons ℓ^{ϕ} l'espace d'Orlicz associé à cette fonction.

Si $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, $\|x\|_{\phi}$ est défini par :

$$\|x\|_{\phi} = \text{Inf}\,\{C \; ; \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi\left(\frac{|x(k)|}{C}\right) \leqslant 1\} \;.$$

Avec cette fonction ϕ, l'espace ℓ^{ϕ} possède les trois propriétés suivantes (qui sont établies dans l'Appendice)

a) l'espace ℓ^{ϕ} est "intermédiaire" entre ℓ^1 et les ℓ^p , $p>1$, en ce sens que l'on a les inclusions algébriques $\ell^1 \subset \ell^{\phi} \subset \ell^p$, pour tout $p>1$, avec injections continues.

b) l'espace ℓ^{ϕ} contient ℓ^1 : il y a une suite de blocs sur la base canonique qui est équivalente à la base de ℓ^1.

c) Il y a un nombre δ_o , $o < \delta_o < 4/5$, tel que si $a = (a(k))_{k \in \mathbb{N}}$, $b = (b(k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont des blocs finis disjoints, avec $\|a\|_{\phi} \geqslant \delta_o$, $\|b\|_{\phi} \geqslant \delta_o$, alors $\|a+b\|_{\phi} > 1$.

Si $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, considérons maintenant :

$$\|x\|_{S_{\phi}} = \sup_{A \in \mathcal{N}} \|P_A x\|_{\phi} \quad ,$$

et appelons S_{ϕ} le complété de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ pour cette norme. Cet espace a été étudié par B. Maurey et le premier auteur dans [13] . Là encore, la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle de S_{ϕ} .

Nous allons déterminer les modèles étalés de S_{ϕ} construits sur des suites de blocs consécutifs normalisés.

PROPOSITION 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite étalante de blocs consécutifs normalisés.*

Posons $\lambda_n = \|u_n\|_{\infty}$.

a) Si $\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ *la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *a, pour tout* $\varepsilon > o$, *une sous-suite équivalente à la base canonique de* c_o.

b) Si $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ *, le modèle étalé construit sur* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est isomorphe à un espace* ℓ^ψ*,* ψ *étant la fonction d'Orlicz*

$$\psi(t) = \sum_i \phi(u(i)t) ,$$

où $u = (u(i))_{i \in \mathbb{N}}$ *est un élément de* ℓ^ϕ

Cette fonction ψ *domine la fonction* ϕ*, mais ne lui est pas équivalente en général (elle l'est si* u *est un bloc fini).*

DEMONSTRATION

- Le a) est identique au a) de la prop. 3 pour l'espace S ; il utilise le lemme A.1

- Supposons maintenant $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$. Considérons la décomposition $u_n = u'_n + u''_n$ donnée par le lemme A.2. Les hypothèses du lemme A.3 sont satisfaite, la base de ℓ^ϕ étant symétrique.

Le modèle étalé défini par la suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc isométrique au modèle étalé engendré dans ℓ^ϕ par une suite de translatés $(\tau_{n_k} u)_{k \in \mathbb{N}}$, pour $u \in \ell^\phi$ et une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante.

LEMME 2

Le modèle étalé construit dans ℓ^ϕ *sur la suite* $(\tau_{n_k} u)_{k \in \mathbb{N}}$ *est isométrique à l'espace d'Orlicz* ℓ^ψ *, où* ψ *est la fonction d'Orlicz*

$$\psi(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi(u(i)t).$$

DEMONSTRATION

Soient $a_1 \ldots a_k$ des scalaires.

Déterminons $\|\sum_{j=1}^{k} a_j \tau_{n_j} u\|_\phi$. Pour tout $C > 0$, on a :

$$\sum_j \phi\left[\frac{\sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k \tau_{n_k} u(j)}{C}\right] = \phi\left(\frac{a_1 u(i)}{C}\right) + \ldots + \phi\left(\frac{a_1 u(n_2-n_1)}{C}\right)$$

$$+ \phi\left(\frac{a_1 u(n_2-n_1+1)}{C} + \frac{a_2 u(i)}{C}\right) + \ldots + \phi\left(\frac{a_1 u(n_3-n_1)+a_2 u(n_2-n_1)}{C}\right)$$

$$+ \ldots + \phi\left(\frac{a_1 u(n_{k-1}-n_1+1) + a_2 u(n_{k-1}-n_2+1) + \ldots + a_{k-1} u(n_{k-1}-n_1+1)}{C}\right)$$

$$+ \ldots + \phi\left(\frac{a_1 u(n_k-n_1)+a_2 u(n_k-n_2)+\ldots+a_{k-1} u(n_k-n_{k-1})}{C}\right)$$

$$+ \phi\left(\frac{a_1 u(n_k-n_1+1)+\ldots+a_{k-1} u(n_k-n_{k-1}+1)+a_k u(i)}{C}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \phi\left(\frac{a_1 u(n_k-n_1+1)+\ldots+a_{k-1} u(n_k-n_{k-1}+1)+a_k u(i)}{C}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \phi\left(\frac{a_1 u(n_k-n_1+j)+\ldots+a_k u(j)}{C}\right) + \ldots\ldots$$

On suppose que la suite $(\tau_{n_k} u)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite étalante. Faisons tendre $n_k \to +\infty$. Les termes qui contiennent n_k admettent pour limite

$$\phi\left(\frac{a_k u(1)}{C}\right) + \phi\left(\frac{a_k u(2)}{C}\right) + \ldots\ldots = \sum_{j \geq 0} \phi\left(\frac{a_k u(j)}{C}\right).$$

Faisons ensuite tendre n_{k-1} vers l'infini les termes qui contiennent n_{k-1} admettent pour limite $\sum_{j \geq 0} \phi\left(\frac{a_{k-1} u(j)}{C}\right)$: et ainsi de suite : on fait tendre $n_{k-2}, \ldots, n_2, n_1$ vers l'infini. On obtient finalement comme limite $\sum_{i=o}^{k} \sum_{j \geq 0} \phi\left(\frac{a_i u(j)}{C}\right) = \sum_{i=o}^{k} \psi\left(\frac{a_i}{C}\right)$, et ce pour tout $C > 0$: il en résulte que

$$\lim_{n_1 \to +\infty} \lim_{n_2 \to +\infty} \ldots \lim_{n_k \to +\infty} \left\| \sum_1^k a_j \tau_{n_j} u \right\|_\phi = \| (a_j) \|_\psi ,$$

ce qui prouve le lemme.

Achevons maintenant la démonstration de la proposition 1. On a :

$$\Big\| \sum_{i=1}^{k} a_i u'_{n_i} \Big\|_{S_\phi} \leqslant \Big\| \sum_{1}^{k} a_i u_{n_i} \Big\|_{S_\phi}, \text{ et donc}$$

$$\lim_{\substack{n_1<\ldots<n_k \\ \to +\infty}} \Big\| \sum_{1}^{k} a_i u_{n_i} \Big\|_{S_\phi} \geqslant \delta \| (a_i)_{i=1,\ldots,k} \|_\psi ,$$

où $\delta = \inf \| u'_i \|_\phi > 0$, puisque $\lambda_n \not\to 0$.

Par ailleurs :

$$\Big\| \sum_{1}^{k} a_i u_{n_i} \Big\|_{S_\phi} \leqslant \Big\| \sum_{1}^{k} a_i u'_{n_i} \Big\|_{S_\phi} + \Big\| \sum_{1}^{k} a_i u''_{n_i} \Big\|_{S_\phi}$$

et donc :

$$\lim_{\substack{n_1<\ldots<n_k \\ \to +\infty}} \Big\| \sum_{1}^{k} a_i u_{n_i} \Big\|_{S_\phi} \leqslant \| (a_i)_{i=1,\ldots,k} \|_\psi + \max_{1\leqslant i\leqslant k} |a_i| ,$$

d'après ce qui précède et la première partie de la proposition.

Mais $\max_i |a_i| \leqslant \|(a_i)_i\|_\psi$, la norme ℓ^ψ étant monotone inconditionnelle et la proposition est établie.

Le corollaire qui suit a été obtenu par B. Maurey et le premier auteur dans [11], par une méthode plus directe :

<u>COROLLAIRE 3</u>

L'espace S_ϕ n'a pas ℓ^1 pour modèle étalé.

<u>DEMONSTRATION</u>

Supposons que S_ϕ ait ℓ^1 pour modèle étalé sur une suite $(u_n)_{n \in N}$. On peut supposer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \to +\infty} u_n(k) = u(k)$ existe ; en remplaçant u_n par $u_{2n+1}-u_{2n}$ et utilisant le lemme 1.1, on voit que S_ϕ a ℓ^1 pour modèle étalé sur une suite de blocs consécutifs disjoints. Grâce à la proposition précédente, pour obtenir une contradiction, il suffit de montrer qu'un espace ℓ^{ψ} du type précédent ne peut être isomorphe à ℓ^1.

S'il l'était, puisqu'il est à base écartable, sa base canonique serait équivalente à la base canonique de ℓ^1. On pourrait donc trouver un $\delta > 0$ tel que, pour tout n :

$$\left\| \frac{e_1+\ldots+e_n}{n} \right\|_{\psi} \geqslant \delta$$

et donc $n\,\psi\left(\frac{1}{n\delta}\right) \geqslant 1$,

c'est-à-dire :

$$n\left[\phi\left(\frac{u(1)}{n\delta}\right)+\ldots+\phi\left(\frac{u(j)}{n\delta}\right)\right]+\ldots \quad \geqslant 1$$

d'où $$\sum_{j\geqslant 1} \frac{u(j)}{1-\mathrm{Log}\, u_j+\mathrm{Log}\, n\delta} \geqslant 1 ,$$

ce qui est impossible pour tout n.

Utilisant la proposition 1, les modèles étalés construits sur une suite étalante de blocs normalisés (non nécessairement consécutifs) sont faciles à décrire. Soit en effet $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle suite de blocs. On peut supposer que pour tout k, $\lim_{n \to +\infty} v_n(k)$ existe ; notons-la v(k). Alors $v \in S_{\phi}$, et $\|v\|_{S_{\phi}} \leqslant 1$. En effet, pour tout ensemble A admissible :

$$\|P_A v\|_{\phi} = \lim_{n \to +\infty} \|P_A v_n\|_{\phi} \leqslant 1.$$

D'après le lemme 1.1, le modèle construit sur $(v_n-v)_{n \in \mathbb{N}}$ est isométrique à un modèle construit sur une suite de blocs consécutifs , donc de l'un des types décrits par la proposition 1. Le modèle construit sur $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est isomorphe à celui construit sur $(v_n-v)_{n \in \mathbb{N}}$, d'après la proposition I.5.4.

E. L'ESPACE DE BAERNSTEIN-ORLICZ B_ϕ.

Cet espace a été introduit et étudié par le premier auteur dans [11]
Nous utilisons la même fonction ϕ qu'au paragraphe précédent.
Si $x \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on définit

$$\|x\|_{B_\phi} = \sup\{(\sum_k \|P_k x\|_\phi^2)^{1/2} \; ; \; (A_k)_k \text{ famille finie d'ensembles admissibles consécutifs}\} .$$

(on a noté P_k au lieu de P_{A_k})
et on note B_ϕ le complété de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ pour cette norme.

Là encore, il est clair que la base canonique de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est une base inconditionnelle monotone de B_ϕ .

PROPOSITION 1 *L'espace B_ϕ ne contient pas c_o.*

DEMONSTRATION

Puisque la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est inconditionnelle, il suffit, d'après un résultat de R.C. James [31] , de montrer que cette base est complete , c'est-à-dire que si $x = (x(i))_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de scalaires telle que

$$\sup_n \|\sum_{i<n} x(i)e_i\|_{B_\phi} \leqslant 1 ,$$

alors $x \in B_\phi$.

Pour cela, soit $A_1,\dots,A_N,\dots$ une famille d'ensembles admissibles consécutifs. On a, pour tout N :

$$(\sum_{k=1}^{N} \|P_k\, x\|_\phi^2)^{1/2} \leqslant \|P_{A_1 \cup \dots \cup A_N}\, x\|_{B_\phi} \leqslant 1,$$

et donc $(\sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2)^{1/2} \leqslant 1$; il en résulte que $x \in B_\phi$.

PROPOSITION 2 .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite étalante de blocs consécutifs normalisés.

Posons $\lambda_n = \|u_n\|_\infty$.

1°) Si $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *le modèle étalé construit sur la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est isométrique à* ℓ^2.

2°) Si $\lambda_n \not\to 0$ *, le modèle étalé construit sur* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est isomorphe à un espace* ℓ^ψ*,* ψ *étant la fonction d'Orlicz*

$$\psi(t) = \sum_i \phi(u(i)t),$$

où $u = (u(i))_{i\in\mathbb{N}}$ *est un élément de* ℓ^ϕ

<u>DEMONSTRATION</u>

1°) Nous supposons $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Nous dirons qu'une famille d'ensembles consécutifs (A_j) est <u>subordonnée</u> à la famille de blocs consécutifs (u_i) si, pour tout j, $P_j\, u_i$ ne peut être non nul pour deux valeurs distinctes de i : chaque ensemble rencontre au plus un bloc. Nous allons montrer que pour tout $k \geqslant 1$, toute suite finie de scalaires tous non nuls $a_1,\ldots,a_k$, on a :

$$(1)\qquad \lim_{\substack{n_1<\ldots<n_k\\ \to+\infty}} \Big\|\sum_i^k a_i\, u_{n_i}\Big\|_{B_\phi} = \lim_{\substack{n_1<\ldots<n_k\\ \to+\infty}} \sup\Big\{\Big(\sum_j \Big\|P_j \sum_i^k a_i\, u_{n_i}\Big\|_\phi^2\Big)^{1/2} ;$$

(A_j) famille finie d'ensembles admissibles consécutifs, subordonnée à la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}\}$.

Ceci établira notre assertion, car il est évident que

$\sup\{(\sum_j \|P_j \sum_i^k a_i u_{n_i}\|_\phi^2)^{1/2}$; (A_j) famille finie d'ensembles admissibles consécutifs, subordonnée à la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}\}$

$$=\Big(\sum_{i=1}^k |a_i|^2 \|u_{n_i}\|_{B_\phi}^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^k |a_i|^2\Big)^{1/2}.$$

Il est évident que le membre de gauche dans (1) est supérieur ou égal à celui de droite.

Posons $\ell = \lim\limits_{\substack{n_1<\ldots<n_k \\ \to +\infty}} \|\sum\limits_1^k a_i u_{n_i}\|_{B_\Phi}$, et pour $j = 1,\ldots,k$, posons

$\ell_j = \lim\limits_{\substack{n_1<\ldots<n_k \\ \to +\infty}} \|\sum\limits_{i\neq j} a_i u_{n_i}\|_{B_\Phi}$. Puisque les coefficients a_i sont tous non

nuls, on a $\ell > \ell_j$, du fait de l'inconditionnalité de la norme ℓ^Φ .

Soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \frac{1}{4}(\ell - \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} \ell_j)$.

Soient $\varepsilon' > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots > \varepsilon_k$, avec $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} |a_i|}$

et $(\sum\limits_{i=2}^k a_i^2 \varepsilon_i^2)^{1/2} < \varepsilon$.

Soit $\nu \geqslant 1$ tel que si $\nu \leqslant n_1 < \ldots < n_k$, on ait pour tout $j \leqslant k$ pour toute suite $1 \leqslant m_1<\ldots<m_j \leqslant k$,

$$(2) \qquad (1-\varepsilon) \|\sum_{i=1}^j a_{m_i} e_i\| \leqslant \|\sum_{i=1}^j a_{m_i} u_{n_{m_i}}\|_{B_\phi} \leqslant (1+\varepsilon) \|\sum_{i=1}^j a_{m_i} e_i\| .$$

Si n_1 est choisi $\geqslant \nu$, on peut choisir n_2 assez grand pour que tout ensemble admissible qui "touche" u_{n_1} (c'est-à-dire tel que $P_A u_{n_1} \neq 0$) vérifie

$$\| P_A(a_2 u_{n_2}+\ldots+a_k u_{n_k})\|_{B_\phi} < \varepsilon_2 ,$$

puisqu'un tel ensemble a un cardinal dépendant de n_1, et que $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On continue ainsi, et on choisit n_k assez grand pour que

$\| P_A(a_k u_{n_k})\|_{B_\phi} < \varepsilon_k$ si A touche $u_{n_{k-1}}$ et est admissible.

Les entiers $n_1<\ldots<n_k$ sont ainsi fixés.

Soient (A_j) des ensembles admissibles consécutifs servant à estimer $\|\sum\limits_1^k a_i u_{n_i}\|_{B_\phi}$ dans (2).

Nous allons voir qu'un même ensemble A_j touche au plus deux blocs u_{n_i}.

Supposons au contraire que un ensemble A_{j_o} touche $u_{n_{i_o-1}}$, $u_{n_{i_o}}$, $u_{n_{i_o+1}}$.

On aurait
$$\|\sum_1^k a_i u_{n_i}\|_{B_\phi} = (\sum_j \|P_j(\sum_{i=1}^k a_i u_{n_i})\|_\phi^2)^{1/2}$$
$$\leqslant (\sum_j \|P_j(\sum_{i\neq i_o} a_i u_{n_i})\|_\phi^2)^{1/2} + \|P_{j_o} u_{n_{i_o}}\|_\phi$$
$$\leqslant \|\sum_{i\neq i_o} a_i u_{n_i}\|_{B_\Phi} + \varepsilon' |a_2| ,$$
et ceci contredit le choix de ν, ε, ε'.

Notons $A_1,\dots,A_{p_1}$ les ensembles qui touchent u_{n_1},

$A_{p_1},\dots,A_{p_1+p_2}$ ceux qui touchent u_{n_2},

$\vdots$

$A_{p_1+\dots+p_{k-1}},\dots,A_{p_1+\dots+p_k}$ ceux qui touchent u_{n_k}

Posons $q_i = p_1+\dots+p_i$, $i \leqslant k$. On a :

$$(\sum_j\|P_j(\sum_i a_i u_{n_i})\|_\phi^2)^{1/2} \leqslant [|a_1|^2(\|P_1 u_{n_1}\|_\phi^2 +\dots+\|P_{p_1} u_{n_1}\|_\phi^2)$$
$$+\dots+ |a_k|^2(\|P_{q_{k-1}} u_{n_k}\|_\phi^2 +\dots+\|P_{q_k} u_{n_k}\|_\phi^2)]^{1/2} + (|a_2|^2\|P_p u_{n_2}\|_\phi^2 +\dots+$$
$$|a_k|^2\|P_{q_{k-1}} u_{n_k}\|_\Phi^2)^{1/2}$$

Or les ensembles $A_1,\dots,A_{p_1-1}$, A_{p_1} restreint au support de u_{n_1},

$A_{p_1+1},\dots,A_{p_2}$ restreint au support de u_{n_2}, etc..., forment une famille

subordonnée à la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On en déduit
$$\|\sum_i^k a_i u_{n_i}\|_{B_\phi} \leqslant \sup\{(\sum_j\|P'_j(\sum_{i=1}^k a_i u_{n_i})\|_\phi^2)^{1/2} \text{ ; } (A'_j) \text{ famille subordonnée}$$

aux $(u_i)\} + (|a_2|^2\ \varepsilon_2^2+\dots+|a_k|^2\ \varepsilon_k^2)^{1/2}$ et puisque $(|a_2|^2\varepsilon_2^2+\dots+|a_k|^2\varepsilon_k^2)^{1/2} < \varepsilon$ notre assertion est établie.

2°) Nous supposons maintenant que $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

Considérons la décomposition en $u_n = u'_n + u''_n$, $n \in \mathbb{N}$, donnée par le lemme A.2. D'après le lemme A3 (que l'on peut appliquer, puisque la base canonique de ℓ^ϕ est symétrique), le modèle étalé construit sur la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est isométrique au modèle étalé engendré dans ℓ^ϕ par une suite de translatés $(\tau_{n_k}u)_{k\in\mathbb{N}}$, pour un certain $u \in \ell^\phi$, et une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante. Puisque $\lambda_n \not\to 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|u'\|_\infty \geqslant \delta$; a fortiori $\|u\|_\infty \geqslant \delta$. D'après le lemme D2, le modèle étalé construit dans ℓ^ϕ sur la suite $(\tau_{n_k}u)_{k\in\mathbb{N}}$ est isométrique à l'espace ℓ^ψ, où ψ est la fonction d'Orlicz

$$\psi(t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \phi(u(i)t).$$

On a, pour tout $k \geqslant 1$, tous scalaires $a_1,\dots,a_k$:

$$\left\|\sum_1^k a_i\ u_{n_i}\right\|_{B_\phi} \geqslant \left\|\sum_1^k a_i\ u'_{n_i}\right\|_{B_\phi}$$

et donc

$$\operatorname*{Lim}_{\substack{n_1<\dots<n_k\\ \to+\infty}} \left\|\sum_1^k a_i\ u_{n_i}\right\|_{B_\phi} \geqslant \delta\ \|(a_i)\|_\phi .$$

Par ailleurs

$$\left\|\sum_1^k a_i\ u_{n_i}\right\|_{B_\phi} \leqslant \left\|\sum_1^k a_i\ u'_{n_i}\right\|_{B_\phi} + \left\|\sum_1^k a_i\ u''_{n_i}\right\|_{B_\phi}$$

et donc, d'après ce qui précède et la première partie de la proposition :

$$\operatorname*{Lim}_{n_1<\dots<n_k} \left\|\sum_1^k a_i\ u_{n_i}\right\|_{B_\phi} \leqslant \|(a_i)\|_\psi + \left(\sum_1^k |a_i|^2\right)^{1/2}.$$

Or il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\|_2 \leqslant C\ \|\cdot\|_\phi$. On en déduit

$$\left\|\sum_1^k a_i\ \tau_{n_i}\right\|_2 \leqslant C\left\|\sum_1^k a_i\ \tau_{n_i}u\right\|_\phi$$

et donc

$$\left(\sum_{1}^{k} |a_i|^2\right)^{1/2} \leqslant C \, \|(a_i)\|_{\psi} ,$$

et la proposition est établie.

COROLLAIRE 3 *L'espace B_ϕ n'a pas ℓ^1 pour modèle étalé.*

DEMONSTRATION

Elle est identique à celle du corollaire D3.

A fortiori, il ne contient pas ℓ^1 et, puisqu'il est à base inconditionnelle, il est réflexif (nous avons vu à la proposition 1 qu'il ne contenait pas c_o).

Puisque B_ϕ est réflexif et n'a pas ℓ^1 pour modèle étalé, B_ϕ a la propriété de Banach-Saks. Cependant B_ϕ a des modèles étalés qui contiennent ℓ^1 : le modèle étalé construit sur la base canonique est isométrique à ℓ^ϕ. Nous allons établir ce dernier point.

PROPOSITION 4

Le modèle étalé construit sur la base canonique de B_ϕ est isométrique à ℓ^ϕ.

DEMONSTRATION

Soit $k \geqslant 1$, $a_1,\ldots,a_k$ une suite de scalaires. Si $n_1 \geqslant k$, l'ensemble $\{n_1,\ldots,n_k\}$ est admissible, et donc

$$\| a_1 e_{n_1} + \ldots + a_k e_{n_k} \|_{B_\phi} \geqslant \| (a_1,\ldots,a_k)\|_\phi$$

Montrons par ailleurs que $\forall x \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, $\|x\|_{B_\phi} \leqslant \|x\|_\phi$.

Soient $A_1,\ldots,A_N$ des ensembles admissibles consécutifs. On va montrer que

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \| P_j x\|_\phi^2\right)^{1/2} \leqslant \|x\|_\phi .$$

On peut supposer que $||x||_\phi = 1$. On a donc $\sum_i \phi(|x(i)|) = 1$, et on veut montrer que

$$\left(\sum_{j=1}^{N} ||P_j\, x||_\Phi^2\right)^{1/2} \leqslant 1.$$

Pour cela, il suffit d'établir que $\forall\, j = 1,\dots,N$,

$$||P_j\, x||_\phi^2 \leqslant \sum_{i \in A_j} \phi(|x(i)|).$$

Observons tout d'abord que pour $0 < a < 1$, $a^2 \leqslant \phi(a)$, car $a(1+\mathrm{Log}\,{}^1/a) \leqslant 1$.

Il nous suffit donc d'établir que

$$\phi\,(\,||P_j x||_\phi) \leqslant \sum_{i \in A_j} \phi(|x(i)|)\ .$$

LEMME 5

Pour tous a,b, *avec* $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, *on a*

$$\phi(a).\phi(b) \leqslant \phi(ab)$$

(La fonction ϕ *est sur-multiplicative).*

La vérification de cette propriété est élémentaire ; elle est laissée au lecteur.

Revenons à la démonstration de la proposition. Posons $\lambda_j = ||P_j\, x||_\phi$ on a $\lambda_j \leqslant 1$, puisque $||x||_\phi = 1$. Par définition de λ_j ,

$$\sum_{i \in A_j} \phi\Big(\frac{|x(i)|}{\lambda_j}\Big) = 1\ ,$$

et, d'après le lemme,

$$\phi(\lambda_j) = \sum_{i \in A_j} \phi\,\Big(\frac{|x(i)|}{\lambda_j}\Big)\,\phi\,(\lambda_j) \leqslant \sum_{i \in A_j} \phi(|x(i)|),$$

ce qui prouve la proposition.

Puisque l'espace est réflexif, chaque suite étalante a une sous-suite faiblement convergente, et la proposition 2 décrit donc tous les modèles étalés de B_ϕ , d'après la proposition I.5.4.

F. L'ESPACE T DE TZIRELSON ET SON DUAL T*

L'espace T que nous décrivons ci-dessous est le dual de l'espace T* introduit par B.S. Tzirelson [67] . La norme de T étudiée ici a été originellement construite par T. Figiel et W.B. Johnson [30] ; elle se trouve également dans Lidenstrauss-Tzafriri [51].

Soit $A_1, \dots, A_k$ une famille finie de sous-ensembles finis consécutifs de $\mathbb{N}^*$. On dit que cette famille est *admissible* si $k \leqslant \text{deb } A_1$ (en notant deb(A) le premier élément d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, et fin(A) le dernier ; ces notations ont déjà été introduites au chapitre I, § 7).

Il faut bien noter que ceci n' implique aucune restriction sur chaque A_i individuellement : ils peuvent être, si l'on veut, très longs ou très lacunaires.

Si $x = (x(k))_{k \geqslant 1}$ est une suite finie de réels, on pose :

$$\|x\|^{(o)} = \|x\|_{c_o} ,$$

$$\|x\|^{(1)} = \max \{\|x\|^{(o)} ; \max_A \frac{1}{2} \sum_j \|P_j x\| (0)$$

où $\max\limits_A$ désigne le maximum pris sur toutes les familles admissibles d'ensembles ; comme précédemment, P_j désigne P_{A_j}

Si $\|x\|^{(n-1)}$ est défini, on pose :

$$\|x\|^{(n)} = \max \{\|x\|^{(n-1)} ; \max_A \frac{1}{2} \sum_j \|P_j x\|^{(n-1)}\} .$$

On obtient ainsi une suite croissante de nombres, tous majorés par $\|x\|_{\ell^1}$. On note $\|x\|_T = \lim\limits_{n \to +\infty} \|x\|^{(n)}$, et l'espace de Tzirelson sera la complétion de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ pour la norme $\|\cdot\|_T$.

La norme obtenue possède la propriété suivante :

$$(1) \qquad \|x\|_T = \max \{\|x\|_{c_o} ; \frac{1}{2} \sup_A \sum_j \|P_j x\|_T \},$$

pour tout $x \in T$; cette propriété s'obtient aisément au vu de la définition de $\|\cdot\|_T$.

La structure de l'espace T est maintenant bien connue, grâce notamment aux travaux de P.G. Casazza, W.B. Johnson, B.L. Lin, R.H. Lohman, T. Odell, L. Tzafriri ; voir : [20] , [21] , [22] , [23] , [24] .

Nous ne passerons pas en revue toutes ses propriétés, et ne donnerons que celles qui sont utiles pour les applications que nous avons en vue.

La base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est une base inconditionnelle de T. Par ailleurs, si $u_1,\dots,u_{2n}$ est une suite de 2n blocs consécutifs sur la base canonique, normalisés dans T, et si l'on note B_j le support de u_j , la famille $B_{n+1},\dots,B_{2n}$ est admissible, et l'on obtient d'après (1), pour toute suite de réels $a_1,\dots,a_{2n}$:

$$(2) \qquad \|\sum_{n+1}^{2n} a_i u_i\|_T = \frac{1}{2} \sum_j \|P_{B_j}(\sum_{n+1}^{2n} a_i u_i)\|_T = \frac{1}{2} \sum_{n+1}^{2n} |a_i| \quad ,$$

et la suite $u_{n+1},\dots,u_{2n}$ est donc 2-équivalente à la base canonique de $\ell^1_{(n)}$.

Cette propriété implique que T ne peut contenir ni c_o , ni aucun ℓ^p, $p > 1$ (s'il contenait l'un de ces espaces, il le contiendrait sur une suite de blocs consécutifs). La proposition qui suit montre que T ne contient pas ℓ^1. Sous une forme un peu différente, elle est donnée dans Lidenstrauss-Tzafriri [51] .

PROPOSITION 1

Soit r *un entier,* $r \geq 2$. *Soient* u_o , $u_1,\dots,u_r$ *des blocs consécutifs normalisés dans* T. *Si* u_o *finit avant* r/2, *on a :*

$$\|u_o + \frac{u_1+\dots+u_r}{r}\|_T \leq 7/4 \quad .$$

DEMONSTRATION

On a $\|u_o + \frac{u_1+\dots+u_r}{r}\|^{(o)} \leq 1$. Soit maintenant $(A_j)_{j=1,\dots,k}$ une famille admissible d'ensembles.

Si A_1 commence après le support de u_o, on a :

$$\frac{1}{2}\sum_j \| P_j\, u_o(+\frac{u_1+\ldots+u_r}{r})\|_T = \frac{1}{2}\sum_j \| \frac{u_1+\ldots+u_2}{r}\|_T \leqslant 1 .$$

Si A_1 commence avant fin(u_o), la famille $(A_j)_{j=1,\ldots,k}$ a au plus $r/2$ éléments, soit $k \leqslant r/2$. Notons :

$$\delta = \{i \geqslant 1 \; ; \; \| P_j\, u_i\|_T \neq 0 \text{ pour au moins deux valeurs de } j\}$$
$$\sigma = \{i \geqslant 1 \; ; \; \| P_j\, u_i\|_T \neq 0 \text{ pour au plus une valeur de } j\} .$$

Alors $|\delta| < \frac{r}{2} - 1$. Par ailleurs, on peut écrire :

$$\frac{1}{2}\sum_j \| P_j(u_o + \frac{u_1+\ldots+u_r}{r})_T \leqslant \frac{1}{2}\sum_j \| P_j\, u_o\|_T + \frac{1}{2}\sum_{i\in\delta}\sum_j \|P_j u_i\|_T + \frac{1}{2r}\sum_{i\in\sigma}\sum_j \|P_j\, u_i\|_T$$

$\leqslant 1 + \frac{1}{r}|\delta| + \frac{1}{2r}|\sigma|$ (en notant $|\delta|$ et $|\sigma|$ le cardinal de δ et)

$\leqslant 1 + \frac{|\delta|}{r} + \frac{r-|\delta|}{2r} = \frac{3}{2} + \frac{|\delta|}{2r} \leqslant 7/4$, et donc finalement, d'après (1) :

$$\| u_o + \frac{u_1+\ldots+u_r}{r}\|_T \leqslant 7/4, \text{ comme annoncé.}$$

Il est aisé d'en déduire que E ne contient par ℓ^1 : s'il le contenait, on pourrait, d'après un résultat de R.C. James [35] déjà utilisé à de nombreuses reprises, trouver une suite de blocs consécutifs normalisés $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\|\Sigma\, a_i\, u_i\|_T \geqslant \frac{9}{10}\Sigma\, |a_i|$, pour toute suite finie de scalaires. Mais si $n_o = \text{fin}(u_o)$, on aura, avec $r = 2n_o$:

$$\| u_o + \frac{u_1+\ldots+u_r}{r}\| \geqslant 18/10 ,$$

ce qui contredit la proposition 1.

Puisque T est à base inconditionnelle et ne contient ni c_o ni ℓ^1, il est réflexif. La détermination de ses modèles étalés est particulièrement simple :

PROPOSITION 2 *Tous les modèles étalés de T sont isomorphes à ℓ^1.*

DEMONSTRATION

Il suffit de se limiter à ceux construits sur une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

de blocs normalisés consécutifs. Mais, pour tout k, si $n_1 \geq k$, la suite $(u_{n_1},\ldots,u_{n_k})$ est 2-équivalente à la base canonique de $\ell^1_{(k)}$.

Nous allons maintenant étudier les modèles étalés du dual T*. Soit $f_1,\ldots,f_{2n}$ une suite de 2n blocs consécutifs normalisés dans T*. Par dualité à partir de (2), on obtient, pour toute suite finie de réels $a_1,\ldots,a_{2n}$:

$$\max_{n+1 \leq i \leq 2n} |a_i| \leq \|\sum_{n+1}^{2n} a_i f_i\| \leq 2 \max_{n+1 \leq i \leq 2n} |a_i|,$$

et la suite $f_{n+1},\ldots,f_{2n}$ est 2-équivalente à la base canonique de $\ell^\infty_{(n)}$. On en déduit comme précédemment que tous les modèles étalés de T* sont isomorphes à c_o.

Si, dans T, on décale un élément $x \in T$ vers la droite, c'est-à-dire si l'on fait agir le shift S sur x, il est clair que la norme de x ne peut qu'augmenter : on a $\|Sx\|_T \geq \|x\|_T$, puisqu'on peut utiliser plus d'ensembles pour estimer Sx que pour estimer x ; il est immédiat de constater sur des exemples que l'inégalité peut être stricte. Le fait de supprimer un ou plusieurs zéros au début d'un bloc fini affecte donc sensiblement sa norme. Néanmoins, nous allons démontrer la proposition ci-dessous, qui sera un ingrédient essentiel pour la construction que nous donnerons au § H. Cette proposition est due au premier auteur [11], mais la démonstration ci-dessous a été suggérée par B. Maurey ; elle est notablement plus simple que la démonstration originellement donnée par le premier auteur.

PROPOSITION 3

Si x est un bloc fini qui commence au-delà de l'entier n, on a

$$\|S^{-1}x\|_T \geq (1 - \tfrac{3}{n}) \|x\|_T.$$

DEMONSTRATION On peut évidemment supposer $\|x\|_T = 1$.

Dans la suite de cette démonstration, nous dirons qu'une famille de blocs est admissible si la famille de leurs supports l'est.

$$\text{Si } \|x\| = \|x\|^{(o)}, \text{ alors } \|S^{-1}x\| \geq \|S^{-1}x\|^{(o)} = \|x\|^{(o)},$$

et la proposition est démontrée dans ce cas.

Sinon, d'après (1) il existe une décomposition admissible

$$x = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \text{ , avec } 1 = \|x\| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} \|x_i\|_T.$$

Deux cas sont possibles :

- ou bien la famille $(S^{-1}x_i)_{i=1,\dots,\ell}$ est admissible. On ne modifie alors pas la famille $(x_i)_{i=1,\dots,\ell}$ à cette étape.

- ou bien la famille $(S^{-1}x_i)_{i=1,\dots,\ell}$ ne l'est pas : cela n'est possible que parce qu'elle a un ensemble de trop. Il faut aussi que $\ell > n$, puisque x commence après n. On supprime alors le plus petit des $\|S^{-1}x_i\|_T$, soit $\|S^{-1}x_{i_o}\|_T$. On a $\|S^{-1}x_{i_o}\|_T \leq \|x_{i_o}\|_T$, et l'un des $\|x_i\|_T$ est $\leq \frac{2}{\ell} < 2/n$.

On a donc $\|S^{-1}x_{i_o}\|_T \leq 2/n$, ou $\frac{1}{2}\|S^{-1}x_{i_o}\|_T \leq 1/n$.

Soit I_1 l'ensemble des indices restants. Si $i \in I_1$ et si $\|x_i\|_T > \|x_i\|_o$, on écrit pour chaque i une décomposition admissible $\|x_i\|_T = \frac{1}{2}\sum_j \|x_{i,j}\|_T$. Soit n_i le début de x_i. Si la famille $(S^{-1}x_{i,j})_n$ n'est pas admissible, la longueur de x_i est $> n_i$.

Soient $i_1, i_2, \dots, i_p$ les indices tels que $(S^{-1}x_{i_k,j})_j$ ne soit pas admissible. On a : $n \leq n_{i_1}$; puisque la longueur de x_{i_1} est $\geq n_{i_1}$.
On a $n_{i_2} \geq 2n_{i_1}$, $n_{i_3} \geq 2n_{i_2} > 2^2 n$, et $n_{i_k} > 2^{k-1}n$.

Pour chacun des indices $i_1 \dots i_p$, on supprime l'un des ensembles $(S^{-1}x_{i_k,j})_j$, et, pour celui qu'on supprime, on peut supposer

$$\frac{1}{2}\|S^{-1}x_{i_k,j_k}\|_T \leq \frac{1}{2}\|x_{i_k j_k}\|_T \leq \frac{1}{n_{i_k}} \quad \frac{1}{2^{k-1}n}.$$

La somme des contributions à $||x||_T$ ainsi perdues est, pour ce niveau, au plus

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{2} || x_{i_k, j_k} ||_T \right) \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots \right) = \frac{1}{n} .$$

Au niveau suivant, I_2 sera l'ensemble des couples (i,j), avec $i \in I_1$ et j non supprimé au niveau 1. Si $|| x_{i,j} ||_T > || x_{i,j} ||_o$, on écrit $|| x_{i,j} ||_T = \frac{1}{2} \sum_k || x_{i,j,k} ||_T$.

On range les $(x_{i,j})$ tels que $(S^{-1} x_{i,j,k})_k$ ne soit pas admissible en une suite, notée $z_1 \ldots z_p$. Soit n_ℓ le début de z_ℓ . Comme précédemment, $n_{\ell+1} \geqslant 2n_\ell \geqslant 2^\ell n$.

Si $z_\ell = x_{i,j}$, on supprime l'un des $x_{i,j,k}$, soit z_{ℓ,k_ℓ} ; ceci peut se faire avec $\frac{1}{2} || x_{i,j,k} ||_T \leqslant \frac{1}{n_\ell} < \frac{1}{2^{\ell-1} n}$.

La perte enregistrée à ce niveau dans la norme totale est au plus

$$\frac{1}{4} \Sigma || z_{\ell,k_\ell} ||_T \leqslant \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots \right) = \frac{1}{2n} .$$

On continue ainsi. Les pertes aux niveaux suivants sont au plus $\frac{1}{4n}$, $\frac{1}{8n}$,..., . Comme x est un bloc fini, le processus doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'étapes (i.e. on finira par tomber sur des normes $|| \cdot ||^{(o)}$). La perte totale sur $|| x ||_T$ enregistrée au cours de toutes les étapes est au plus

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} + \ldots \leqslant \frac{3}{n} .$$

Une fois éliminés tous les ensembles en trop, on obtient une décomposition admissible pour $S^{-1}x$ en décalant vers la gauche tous les ensembles ayant servi pour x ; elle donne alors $|| S^{-1} x ||_T \geqslant 1 - 3/n$. Ceci prouve la proposition.

G. L'ESPACE $\mathcal{J}$ DE JAMES

Si Si $x = (x(k))_{k\geqslant 1}$ est une suite finie de réels, on définit

$$\|x\| = \sup\{(\sum_{i=1}^{n} |x(p_{2i-1}) - x(p_{2i})|^2)^{1/2} \ ; \ n \geqslant 1, \quad p_1<\dots<p_{2n}\} \text{ et}$$

est la complétion de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{J}$ est l'ensemble des suites $(x(k))_{k\geqslant 1}$ qui tendent vers 0 à l'infini, pour lesquelles $\|x\|_{\mathcal{J}} < +\infty$.

Cet espace a été introduit par R.C. James [35] [36] , qui a démontré que $\mathcal{J}$ n'était pas réflexif, et que son bidual $\mathcal{J}''$ est l'ensemble des suites $z = (z(k))_{k>1}$ telles que $\|z\| < +\infty$ (ce qui implique que $\lim_{k\to+\infty} z(k)$ existe). Il en résulte (voir [35]) que $\mathcal{J}$ est isomorphe à $\mathcal{J}''$, et de codimension 1 dans $\mathcal{J}''$.

On vérifie aisément que la base canonique $(e_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ est une base monotone de $\mathcal{J}$. On pose, pour $n \geqslant 1$,

$$s_n = \sum_1^n e_k ,$$

et on obtient une base normalisée de $\mathcal{J}$. Pour toute suite finie de réels (b_k) , on a :

$$(1) \qquad \|\Sigma\, b_k\, s_k\|_{\mathcal{J}} = \sup\{(\sum_{j=1}^{n} |\sum_{i=p_{2j-1}}^{p_{2j}-1} b_i|^2)^{1/2} \ ; \ n \geqslant 1,\ p_1<\dots<p_{2n}\},$$

et il en résulte que s_n est une suite écartable.

Pour tous $p,q > 1$, $p < q$, on a donc :

$$(2) \qquad |\sum_p^q b_i| \leqslant \|\Sigma\, b_k\, s_k\|_{\mathcal{J}} ,$$

et, si l'on choisit $p_j = j$, $j = 1,2\dots$, ou $p_j = j+1$, $j = 1,2\dots$

$$(3) \qquad \|\Sigma\, b_k\, s_k\|_{\mathcal{J}} \geqslant \frac{1}{2}(\Sigma\, b_k^2)^{1/2} .$$

Soit maintenant $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de blocs consécutifs normalisés sur la base canonique de $\mathcal{J}$, avec fin u_n < deb $u_{n+1}-2$, pour tout $n > 1$. On a alors, pour toute suite finie de réels $(a_k)_{k\geq 1}$

(4) $$(\Sigma\, a_k^2)^{1/2} \leqslant \|\sum_k a_k\, u_k\| \leqslant \sqrt{2}(\Sigma\, a_k^2)^{1/2}.$$

L'inégalité de gauche est en effet obtenue en choisissant des entiers p_i sur le support de chaque u_i, avec éventuellement un p_i sur l'entier (deb u_n)-1 et un sur l'entier (fin u_n)+1 , et l'inégalité de droite est obtenue en remarquant que

$$|a_k\, u_k\, (p_{2i-1}) - a_{k+1}\, u_{k+1}\, (p_{2i})|^2 \leqslant 2(a_k^2\, u_k\, (p_{2i-1})^2 + a_{k+1}^2 u_{k+1} (p_{2i})^2).$$

Par conséquent, toute suite de blocs consécutifs normalisés contient une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ^2.

Il en résulte immédiatement :

PROPOSITION 1 (A. Andrew [5])

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite normalisée, faiblement convergente vers 0 dans $\mathcal{J}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ a une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ^2.

COROLLAIRE 2 (A. Andrew [5])

Tous les modèles étalés construits sur des suites normalisées faiblement convergentes sont isomorphes à ℓ^2.

En effet, si $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite normalisée faiblement convergente vers 0, c'est une conséquence de la proposition 1. Si $(v_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers $v \neq 0$, on considère $v_n - v$, et on applique la proposition I.5.4.

La détermination des modèles étalés construits sur des suites non faiblement convergentes a également été faite par A. Andrew [5] ; c'est une conséquence de la proposition suivante :

PROPOSITION 3 ([5])

Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ *une suite normalisée, sans sous-suite faiblement convergente. La suite* $(z_n)_{n\geq 1}$ *contient une sous-suite* $(z'_n)_{n\geq 1}$ *équivalente à la suite* $(s_n)_{n\geq 1}$.

DEMONSTRATION

On peut supposer que $(z_n)_{n\geq 1}$ converge, pour $\sigma(\mathcal{J}'',\mathcal{J}')$, vers un élément $z'' \in \mathcal{J}''\setminus\mathcal{J}$. Ceci implique que pour tout $k \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n(k) = z''(k)$.

Puisque $z'' \in \mathcal{J}$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} z''(k) = \lambda$, avec $\lambda \neq 0$, et $|\lambda| \leq 1$.

Considérons d'abord le cas où $z_k = P_{n_k} z''$, $z'' \in \mathcal{J}''\setminus\mathcal{J}$ (P_{n_k} est une notation abrégée pour $P_{A_{n_k}}$, $A_{n_k} = \{1,2,\dots,n_k\}$, $(n_k)_{k\geq 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers).

On note $\mathbb{1} = (1,1,\dots,1,\dots)$; $\mathbb{1} \in \mathcal{J}''\setminus\mathcal{J}$. Puisque

$z''(k) \underset{k\to+\infty}{\to} \lambda$, $|\lambda| \leq 1$, on a :

$$P_{n_k}(z'') = P_{n_k}(\lambda\mathbb{1}) + P_{n_k}(z''-\lambda\mathbb{1})$$

et $z'' - \lambda\mathbb{1} \in \mathcal{J}$. Notons $z''-\lambda\mathbb{1} = u$.

Or $P_{n_k}(\lambda\mathbb{1}) = \lambda s_{n_k}$, et $P_{n_k} u \underset{k\to+\infty}{\to} u$ fortement dans $\mathcal{J}$. La suite $P_{n_k} z''$ est donc équivalente à la suite $(\lambda s_{n_k}+u)_{k\geq 1}$.

Il reste à voir que cette dernière suite est équivalente à $(s_k)_{k\geq 1}$. Pour toute suite (b_k) de réels, on a :

$$\|\Sigma\, b_k(\lambda s_{n_k}+u)\|_{\mathcal{J}} \leq (|\lambda|+1)\|\Sigma\, b_k\, s_k\|_{\mathcal{J}} \quad ,$$

en utilisant (2).

Inversement, si l'on pose $s'_k = u+\lambda(e_1+\dots+e_{n_k})$, l'application définie par $\Sigma\, b_k(\lambda s_{n_k}+u) \longleftrightarrow \Sigma\, b_k\, s'_k$ est évidemment une isométrie, et $(s'_k)_{k\geq 1}$ s'interprète comme la suite $(s_k)_{k\geq 1}$ associée à un espace de James construit sur $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et non plus sur $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

Si maintenant $z_k \to z''$ pour $\sigma(\mathcal{J}'', \mathcal{J}')$, on peut supposer que les $(z_k)_{k\geqslant 1}$ sont des blocs finis. On va voir qu'une sous-suite $(z_{n_k})_{k\geqslant 1}$ se décompose en

$$z_{n_k} = z'_{n_k} + z''_{n_k} ,$$

où z'_{n_k}, z''_{n_k} sont des blocs finis, de norme au plus égale à 1, avec, si l'on pose $m_k = \mathrm{fin}(z'_{n_k})$:

* : $P_{m_k}(z) - z'_{n_k} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ fortement, dans $\mathcal{J}$.

* : les z''_{n_k} sont à supports disjoints.

Supposons en effet cette décomposition écrite jusqu'à un entier $k_o > 1$ avec $\| P_{m_k} z - z'_{n_{k_o}} \|_{\mathcal{J}} = \varepsilon_{k_o}$. On peut trouver un entier k_1 tel que, en prenant $m_{k_o+1} = \mathrm{fin}(z_{n_{k_o}})$, on ait $\| P_{m_{k_o+1}} z - P_{m_{k_o+1}} z_{n_{k_1}} \|_{\mathcal{J}} < \varepsilon_{k_o}/2$. On pose $z'_{n_{k_1}} = P_{m_{k_o+1}} z_{n_{k_1}}$, $z''_{n_{k_1}} = z_{n_{k_1}} - z'_{n_{k_1}}$; les propriétés annoncées sont en évidence. La suite $(z''_{n_k})_{k\geqslant 1}$ engendre ℓ^2 d'après (4) ; la proposition en résulte, d'après (3).

On peut montrer (voir [5]) que les sous-espaces engendrés par les sous-suites considérées, dans la proposition 1 ou la proposition 3, sont en fait complémentés dans $\mathcal{J}$.

4. L'ESPACE $T\mathcal{J}$ DE TZIRELSON-JAMES.

Dans ce paragraphe, nous allons construire un espace en "mélangeant" la norme de l'espace de Tzirelson (§F) et celle de l'espace de James (§G). L'espace obtenu combinera les propriétés de chacun des deux composants. Cet espace a été introduit et étudié par le premier auteur dans [11]

Mentionnons qu'une classe assez générale d'espaces utilisant la norme de James a été étudiée par P.G. Casazza et R. H. Lohman [23] . Ces espaces sont notés $\mathcal{J}(E)$. Mais dans [23] , E est à base symétrique, ce qui n'est pas le cas de l'espace de Tzirelson, et donc notre construction n'entre pas dans ce cadre. Mais il y a cependant, bien entendu, certaines analogies.

Soit à nouveau T l'espace de Tzirelson du § 1. Sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, notant $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}^*}$, on considère la norme :

$$||x||_{T\mathcal{J}} = \sup\{||(x(p_1)-x(p_2),\ldots,x(p_{2k-1})-x(p_{2k}))||_T \; ;$$

$$k \in \mathbb{N}^*,\ p_1 < p_2 < \ldots < p_{2k}\}.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit bien d'une norme sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. On note $T\mathcal{J}$ la complétion de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ pour cette norme.

Les différentes propriétés de $T\mathcal{J}$ vont provenir soit de celles de J, soit de celles de T. De ce fait, les propositions qui viennent suivront le même esprit que les propositions correspondantes pour J ou T, avec, évidemment, quelques difficultés techniques supplémentaires.

PROPOSITION 1. - *La base canonique de* $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ *est une base de* $T\mathcal{J}$.

DEMONSTRATION. - Soit $x = \sum_1^m \alpha_i e_i$, soit $p \leqslant m$, et $y = \sum_1^p \alpha_i e_i$.

Posons $\alpha'_i = \alpha_i$ si $i \leqslant p$, $\alpha'_i = 0$ si $i > p$. Pour une certaine suite $p_1 < p_2 < \ldots < p_{2k}$, on a :

$$||y||_E = ||(\alpha'_{p_1} - \alpha'_{p_2},\ldots,\alpha'_{p_{2k-1}} - \alpha'_{p_{2k}})||_T$$

et on peut supposer que dans le dernier terme $\alpha'_{p_{2k-1}}$ et $\alpha'_{p_{2k}}$ ne sont pas nuls tous les deux (sinon, ce n'est pas la peine de l'écrire).

De ce fait, $p_{2k-1} \leqslant p$, mais, bien sûr, on peut avoir $p_{2k} \geqslant p$.

Considérons maintenant $p'_1 < \ldots < p'_{2k}$, définis par :

$p'_i = p_i$ pour $i \leqslant 2k-1$,

et $p'_{2k} = \begin{cases} p_{2k} & \text{si } p_{2k} \leqslant p , \\ m+1 & \text{si } p_{2k} > p. \end{cases}$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} ||x||_{T\mathcal{J}} &\geqslant ||(\alpha_{p'_1} - \alpha_{p'_2}, \ldots, \alpha_{p'_{2k-1}} - \alpha_{p'_{2k}})||_T \\ &\geqslant ||(\alpha'_{p_1} - \alpha'_{p_2}, \ldots, \alpha'_{p_{2k-1}} - \alpha'_{p_{2k}})||_T \\ &\geqslant ||y||_{T\mathcal{J}} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une base monotone de E.

PROPOSITION 2. – $T\mathcal{J}$ *n'est pas réflexif.*

DEMONSTRATION. – Observons d'abord que pour tout x de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$,

$||x||_{c_o} \leqslant ||x||_{T\mathcal{J}}$. En effet, pour tout $k \geqslant 1$, choisissons $p_1 = k$

et p_2 assez grand. On obtient :

$|x(k)| = |x(p_1)-x(p_2| = ||(x(p_1)-x(p_2),0\ldots)||_T \leqslant ||x||_E$.

Donc $T\mathcal{J}$ est contenu dans c_o , avec injection continue.

Pour $n \geqslant 1$, considérons $y_n = \sum_1^n e_i$. Dans $T\mathcal{J}$ on a $||y_n|| = 1$:

si l'on choisit $p_1 = n$, $p_2 = n+1$, on trouve $||y_n(p_1) - y_n(p_2)||_T = 1$,

et aucun choix de $p_1 < \ldots < p_{2k}$ ne donne mieux.

Puisque $(e_i)_{i\in \mathbb{N}^*}$ est une base, les formes linéaires coordonnées sont continues, et une sous-suite faiblement convergente de la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ ne peut converger que vers la suite constante $(1,1,\ldots)$, mais celle-ci n'est pas dans c_o. La suite $(y_n)_{n > 1}$ n'admet donc aucune sous-suite faiblement convergente, et TJ n'est pas réflexif.

PROPOSITION 3.- $T\mathcal{J}$ *ne contient pas* ℓ^1

DEMONSTRATION. - Supposons le contraire : il existerait des blocs normalisés z_n , équivalents à la base canonique de ℓ^1 . Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $\forall k$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n(k)$ existe. En posant $z'_n = z_{2n+1}-z_{2n}$, qui est encore équivalent à la base de ℓ^1, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} z'_n(k) = 0$ $\forall k$; la suite (z'_n) peut être remplacée par une suite de blocs consécutifs normalisés (z''_n). Par un procédé dû à R.C. James, on peut améliorer les estimations données par (z''_n) et obtenir :

Si $T\mathcal{J}$ contient ℓ^1, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de blocs consécutifs normalisés vérifiant, pour toute suite finie de scalaires (α_i) :

(2) $$\|\sum_i \alpha_i\, u_i\| \geq \frac{9}{10} \sum_i|\alpha_i| \; .$$

Puisque $\|\cdot\|_{c_o} \leq \|\cdot\|_{TJ}$, on a $\|u_n\|_{c_o} \leq 1$, $\forall n \geq 0$.

Posons $y_o = \dfrac{u_o+\ldots+u_{15}}{16}$, $y_1 = \dfrac{u_{16}+\ldots+u_{31}}{16}$, etc ..., si bien que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie encore (2) , mais de plus $\|y_n\|_{c_o} \leq 1/16$ $\forall n\geq 0$.

Quitte à extraire une sous-suite et renuméroter, on peut également supposer qu'il y a au moins deux entiers entre le support de chaque y_n et le support du suivant.

Soit n_o l'indice du dernier terme non nul dans y_o , et, pour $r \geqslant 1$, soit $U_r = y_o + \dfrac{y_1+\ldots+y_r}{r}$. D'après (2), on a $||U_r|| \geqslant 18/10$.

Soit $p_1 <\ldots< p_{2k}$ une suite strictement croissante d'entiers. La suite $S = (U_r(p_1)-U_r(p_2),\ldots,U_r(p_{2k-1}) - U_r(p_{2k}))$ s'écrit :

$$S = (y_o^\circ(p_1^\circ)-y_o(p_2^\circ),\ldots,y_o(p^\circ_{2k_o-1})-y_o(p^\circ_{2k_o}),\widehat{y_o(p^\circ_{2k_o+1})}\widehat{-\tfrac{1}{r}\, y_1(p^1_o)},$$
$$\tfrac{1}{2}\, y_1(p_1^1)-\tfrac{1}{r}\, y_1(p_2^1),\ldots,\tfrac{1}{r}\, y_1(p^1_{2k_1-1})-\tfrac{1}{r}\, y_1(p^1_{2k_1}),\widehat{\tfrac{1}{r}\, y_1(p^1_{2k_1+1})}\widehat{-\tfrac{1}{r}\, y_2(p^2_o)}\ ,$$
$$\tfrac{1}{r}\, y_2(p_1^2)-\tfrac{1}{r}\, y_2(p_2^2)\ldots)\ ,$$

où les termes surmontés de $\widehat{\ }$ peuvent ne pas exister.

Respectant dans la suite ci-dessus l'ordre et l'emplacement des termes nous posons $v_o = (y_o(p_1^\circ)-y_o(p_2^\circ),\ldots,y_o(p^\circ_{2k_o-1})-y_o(p^\circ_{2k_o}),\widehat{y_o(p^\circ_{2k_o+1})})$,

$$v_1 = (0,\ldots,0,y_1(p_1^1)- y_1(p_2^1),\ldots,y_1(p^1_{2k_1+1})-y_1(p^1_{2k_1}),\widehat{y_1(p^1_{2k_1+1})}),$$

$$v_r = (0,\ldots,0,y_r(p_1^r)-y_r(p_2^r),\ldots,y_r(p^r_{2k_r-1})- y_2(p^r_{2k_r}),\widehat{y_r(p^r_{2k_r+1})}).$$

On a $||v_i||_T \leqslant 1 \quad \forall i =0 \ldots r$; v_o comporte au plus $\frac{n_o}{2}$ termes non nuls. Donc, si $r \geqslant n_o$, d'après la proposition 1-1, $||v_o + \dfrac{v_1+\ldots+v_r}{r}||_T \leqslant 7/4$. Mais on a

$||U_r||_{T\mathcal{J}} \leqslant ||u_o + \frac{v_1+\ldots+v_r}{r}||_T + \frac{1}{r}\,\widehat{|y_1(p_o^1)|} + \frac{1}{r}\,\widehat{|y_2(p_o^2)|} + \ldots +$
$\frac{1}{r}\,\widehat{|y_r(p_o^r)|} \leqslant \frac{7}{4} + \frac{1}{16} = \frac{29}{16}$, ce qui contredit (2), et achève la

démonstration.

PROPOSITION 4. - *Tous les modèles étalés de* $T\mathcal{J}$ *faits sur des suites de blocs normalisés consécutifs sont isomorphes à* ℓ^1

DEMONSTRATION. - Soit $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une bonne suite de blocs normalisés consécutifs.

Soit $N \geqslant 1$ et soient $\alpha_1\ldots\alpha_N$ des scalaires. On a :

(3) $||\sum_i^N \alpha_i z_{n_i}|| \geqslant ||(0,\ldots,0,\alpha_1(z_{n_1}(p_1^1)-z_{n_1}(p_2^1)),\ldots,\alpha_1(z_{n_1}(p^1_{2k_1-1})$
$-z_{n_1}(p^1_{2k_1})),\ 0,\ldots,0,\alpha_2(z_{n_2}(p_1^2)-z_{n_2}(p_2^2)),\ldots,\alpha_2(z_{n_2}(p^2_{2k_2-1})\ -$
$-z_{n_2}(p^2_{2k_2})),0,\ldots)||_T$

pour toute distribution d'entiers $p_1^1 < p_2^1 <\ldots < p^1_{2k_1} < p_1^2 < \ldots < p^2_{2k_2} < \ldots$.
le nombre des zéros avant la première différence est la moitié du nombre de zéros avant le support de z_{n_1} , le nombre de zéros du second groupe est la moitié du nombre de zéros entre z_{n_1} et z_{n_2} , etc. Respectant l'ordre des termes et le nombre des zéros,
nous posons :

$v_{n_1} = (0,\ldots,0,z_{n_1}(p_1^1) - z_{n_1}(p_2^1),\ldots,z_{n_1}(p^1_{2k_1-1}) - z_{n_1}(p^1_{2k_1}))$,

$v_{n_2} = (0,\ldots,0,z_{n_2}(p_1^2)-z_{n_2}(p_2^2),\ldots,z_{n_2}(p^2_{2k_2-1}) - z_{n_2}(p^2_{2k_2}))$,

etc. si bien que le terme de droite dans (3) vaut
$||\sum_1^N \alpha_i\, v_{n_i}||_T$.

Si $n_1 \geqslant 2N$, le nombre des premiers zéros est au moins N, et donc la famille $v_{n_1},\ldots,v_{n_N}$ est admissible ; il en résulte que :

$$\left\|\sum_{1}^{N} \alpha_i\, z_{n_i}\right\| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|\, \|v_{n_i}\|_T .$$

En choisissant convenablement les $p_1^1 \ldots p_{2k_1}^1$, on peut réaliser $\|v_{n_1}\|_T = \|z_{n_1}\|_{T\mathscr{J}}$. Pour les suivants, ce n'est pas si clair, car les p_i^1 étant choisis, le nombre de zéros avant la première différence $z_{n_2}(p_1^2) - z_{n_2}(p_2^2)$ peut être insuffisant pour que l'on puisse obtenir $\|z_{n_2}\|_{T\mathscr{J}}$ par un choix convenable des p_i^2. Il serait suffisant si les p_i^1 étaient consécutifs, mais ceci n'est pas assuré. Or le nombre de zéros qui manquent est au plus égal à la moitié de la longueur du bloc z_{n_1} , que nous notons $L(n_1)$. On peut donc trouver des p_i^2 tels que :

$$\left\|S^{\frac{1}{2}L(n_1)}\, v_{n_2}\right\|_T = \|z_{n_2}\|_{T\mathscr{J}} .$$

d'après la proposition F.3, $\|v_{n_2}\|_T \geqslant \left(1-\frac{3}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}L(n_1)} \left\|S^{\frac{1}{2}L(n_1)}\, v_{n_2}\right\|_T$

et, pour n_1 fixé, on peut donc obtenir $\|v_{n_2}\|_T \geqslant \frac{1}{2}\|z_{n_2}\|_{T\mathscr{J}}$, en choisissant n_2 assez grand. Puis n_2 étant ainsi fixé, on choisit n_3 , puis les p_i^3 , pour que :

$$\|u_{n_3}\|_T \geqslant \left(1 - \frac{3}{n_3}\right)^{\frac{1}{2}(L(n_1)+L(n_2))} \left\|S^{\frac{1}{2}L(n_1)+\frac{1}{2}L(n_2)}\, v_{n_3}\right\|_T .$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left\|S^{\frac{1}{2}L(n_1)+\frac{1}{2}L(n_2)}\, u_{n_3}\right\|_T \geqslant \frac{1}{2}\|z_{n_3}\|_{T\mathscr{J}},$$ et ainsi de suite.

On aura finalement :

$$\Big\|\sum_{1}^{N} \alpha_i\, z_{n_i}\Big\|_{T\mathcal{J}} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{1}^{N} |\alpha_i|\; \|u_{n_i}\|_T \geqslant \frac{1}{4}\sum_{1}^{N} |\alpha_i| \;,$$

ce qui prouve la proposition.

Par la suite, nous montrerons le même résultat pour des suites de blocs normalisés quelconques (non nécessairement consécutifs). Cela se déduira très simplement des informations que nous allons maintenant obtenir concernant le dual $(T\mathcal{J})'$ et le bidual $(T\mathcal{J})''$.

PROPOSITION 5. - *Les formes linéaires coordonnées* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *forment une base du dual* $(T\mathcal{J})'$.

DEMONSTRATION. - D'après un résultat de R.C.James [35] , il suffit de montrer que la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contractante, c'est-à-dire que $\forall f \in E'$, $\sup\{|f(\sum_{i\geqslant n} \alpha_i\, e_i)|\;;\; \|\sum_{i\geqslant n} \alpha_i\, e_i\| = 1\} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Supposons que ce ne soit pas le cas. On pourrait alors trouver une forme linéaire continue f, un $\delta > o$, et une suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ de blocs consécutifs normalisés avec $f(z_n) \geqslant \delta$, $\forall n \geqslant 1$. Soit m_n l'indice du dernier coefficient non nul de z_n. Puisque $T\mathcal{J}$ ne contient pas ℓ^1,$T\mathcal{J} \times T\mathcal{J}$ ne le contient pas non plus, et on peut trouver une suite de scalaires $(\gamma_i)_{i\geqslant 1}$ telle que $\sum_n \gamma_n z_n$ converge dans T $\sum_n \gamma_n e_{m_n}$ converge dans $T\mathcal{J}$, mais $\sum_n |\gamma_n| = +\infty$.

Nous allons montrer que $\sum_n |\gamma_n|\, z_n$ converge dans $T\mathcal{J}$: on aura ainsi une contradiction, car si $\sum_{n\leqslant q} |\gamma_n|\, z_n \underset{q\to+\infty}{\to} z$, on aura

$$f(z) = \lim_{q\to+\infty} \sum_{n\leqslant q} |\gamma_n|\, f(z_n) \geqslant \delta \lim_{q\to+\infty} \sum_{n\leqslant q} |\gamma_n| = +\infty.$$

Soit $q \geqslant 1$ et soient $p_1^1 < \ldots < p_{2k_1}^1 < \widehat{p_{2k_1+1}^1} < \widehat{p_o^2} < p_1^2 < \ldots$

des entiers. Considérons

$$A = ||(|\gamma_{q+1}|(z_{q+1}(p_1^1)-z_{q+1}(p_2^1)),\ldots,|\gamma_{q+1}|(z_{q+1}(p_{2k_1-1}^1)-z_{q+1}(p_{2k_1}^1)),$$

$$|\gamma_{q+1}|\widehat{z_{q+1}(p_{2k_1+1}^1)} - |\gamma_{q+2}|\widehat{z_{q+2}(p_o^2)},|\gamma_{q+2}|(z_{q+2}(p_1^2)-z_{q+2}(p_2^2)),\ldots)||_T$$

En posant $v_{q+1} = (z_{q+1}(p_1^1)-z_{q+1}(p_2^1),\ldots,z_{q+1}(p_{2k_1-1}^1)-z_{q+1}(p_{2k_1}^1),$
$\widehat{z_{q+1}(p_{2k_1+1}^1)}),$

$v_{q+2} = (0,\ldots,0,z_{q+2}(p_1^2)-z_{q+2}(p_2^2),\ldots,z_{q+2}(p_{2k_2-1}^2)-z_{q+2}(p_{2k_2}^2),$
$\widehat{z_{q+2}(p_{2k_2+1}^2)}),$ etc, on obtient :

$$A \leqslant ||\sum_{i \geqslant q+1} |\gamma_i| v_i||_T + ||(0,\ldots,0,|\gamma_{q+2}|\widehat{z_{q+2}(p_o^2)},$$
$$0,\ldots,0,(\gamma_{q+3})\widehat{z_{q+3}(p_o^3)},0,\ldots)||_T.$$

Mais la base canonique de T est inconditionnelle, et d'autre part $|z_{q+2}(p_o^2)| \leqslant 1$, et ce coefficient est précédé d'au plus $\frac{1}{2}m_{q+2}$ zéros. De même, $z_{q+3}(p_o^3)$ apparaît à un rang au plus égal à $\frac{1}{2}m_{q+3}$. En décalant éventuellement vers la droite, et supprimant les valeurs absolues, on obtient donc :

$$A \leqslant ||\sum_{i \geqslant q+1} \gamma_i v_i||_T + ||\sum_{i \geqslant q+1} \gamma_i e_{\frac{1}{2}m_i}||_T .$$

Mais $||\sum_{i \geqslant q+1} \gamma_i v_i||_T \leqslant ||\sum_{i \geqslant q+1} \gamma_i z_i||_{T\mathscr{J}}$ et

$||\sum_{i \geqslant q+1} \gamma_i e_{\frac{1}{2}m_i}||_T \leqslant ||\sum_{i \geqslant q+1} \gamma_i e_{m_i}||_{T\mathscr{J}}$ ceci prouve la proposition.

Il résulte de cette proposition que $(T\mathscr{I})'$ est séparable, et donc que la boule de $(T\mathscr{I})''$ est métrisable pour $\sigma((T\mathscr{I})'',(T\mathscr{I})')$. Tout élément de $(T\mathscr{I})''$ est donc limite d'une suite d'éléments de $T\mathscr{I}$, pour $\sigma((T\mathscr{I})'',(T\mathscr{I})')$. Ce dernier fait est également la conséquence directe du fait que E ne contient pas ℓ^1, d'après Odell-Rosenthal [51].

PROPOSITION 6. - *$T\mathscr{I}$ est de codimension 1 dans $(T\mathscr{I})''$.*

LEMME 1. - *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de blocs de norme 1 dans $T\mathscr{I}$, telle que $\forall k$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n(k)$ existe (on la note $z(k)$).*

Alors $\lim\limits_{k\to+\infty} z(k)$ existe.

DEMONSTRATION DU LEMME 1. - Supposons au contraire que cette dernière limite n'existe pas. Alors $\limsup\limits_{k\to+\infty} z(k) \neq \liminf\limits_{k\to+\infty} z(k)$.

On peut alors trouver $\ell\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$ tels que, pour une infinité de k, $z(k)\geqslant \ell+\varepsilon$ et, pour une infinité, $z(k)\leqslant \ell-\varepsilon$. Extrayant une sous-suite, on peut donc trouver une suite croissante d'entiers k_j tels que, $\forall j\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} z(k_{2j}) \leqslant \ell-\varepsilon \\ z(k_{2j+1}) \geqslant \ell+\varepsilon. \end{cases}$$

Soit $N\in\mathbb{N}^*$. On peut trouver $n\in\mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{i\leqslant 2N} |z_n(k_i)-z(k_i)| < \varepsilon$. On aura alors :

$$||z_n||_E \geqslant ||(z_n(k_1)-z_n(k_2),\dots,z_n(k_{2N-1})-z_n(k_{2N}))||_T$$

$$\geqslant ||(z(k_1)-z(k_2),\dots,z(k_{2N-1})-z(k_{2N})||_T - \varepsilon.$$

Les N différences écrites sont toutes au moins égales à 2ε.

Il en résulte que :

$$||z_n||_E \geqslant 2||(\varepsilon,\dots,\varepsilon)||_T - \varepsilon \geqslant \frac{N}{2} \cdot 2\varepsilon - \varepsilon = (N-1)\varepsilon ,$$

et, si N est assez grand, ceci contredit le fait que $||z_n|| \leqslant 1$; et achève la démonstration du lemme 1.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION. - Soit $\xi \in (T\mathscr{J})''$, $\notin T\mathscr{J}$. $||\xi||_{(T\mathscr{J})''}=1$. Soit (z_n) une suite d'éléments de $T\mathscr{J}$, avec $||z_n||_{T\mathscr{J}} < 1$ convergeant vers ξ pour $\sigma((T\mathscr{J})'',(T\mathscr{J})')$; On peut supposer que $\forall k$, $\lim_{n\to+\infty} z_n(k) = z(k)$ existe ; on peut aussi supposer que les z_n sont des blocs finis.

Pour tout $k \geqslant 1$, $z_n(k) = f_k(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \xi(f_k)$

et donc $\forall k$, $\xi(f_k) = z(k)$. Puisque les $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forment une base de E', ξ est donc donné par la suite $Z=(z(1),z(2),\dots)$.

Soit $\ell = \lim_{k\to+\infty} z(k)$, donné par le lemme 1. Notons $\mathbb{1} = (1,1,\dots)$: c'est un élément de $T\mathscr{J}$, car si $y_n = \sum_1^n e_i$, on a, pour tout n :

$$||\Sigma\ \alpha_j\ f_j||_{(T\mathscr{J})} > |\Sigma\alpha_j\ f_j(y_n)| = |\sum_1^n \alpha_j| .$$

Nous allons montrer que $\ell.\mathbb{1} - Z \in T\mathscr{J}$. Pour cela, il suffit de montrer que la suite :

$$W_n = \sum_{k=o}^{n} (\ell - z(k))e_k$$

est de Cauchy dans $T\mathscr{J}$.

Soient donc, $m,n \in N$ avec $m < n$. On a :

$W_n - W_m = (0,\dots,0,\ \ell-z(m+1),\dots,\ell-z(n),0\dots)$.

La norme $||W_m - W_n||_{T\mathcal{J}}$ peut être estimée par :

$$A = ||(0,\ldots,0,\widehat{\ell - z(p_o)},z(p_1)-z(p_2),\ldots,z(p_{2k-1})-z(p_{2k}),$$
$$\widehat{\ell - z(p_{2k+1})},0\ldots)||_T,$$

où le nombre des premiers zéros est $\geqslant \left[\frac{m}{2}\right]$, $p_o < \ldots < p_{2k+1}$ sont des entiers entre m+1 et n ; les termes surmontés de $\wedge$ peuvent ne pas exister.

On a :

$$A \leqslant ||(0,\ldots,0,z(p_1)-z(p_2),\ldots,z(p_{2k-1})-z(p_{2k}))||_T$$
$$+ |\ell - z(p_o)| + |\ell - z(p_{2k+1})|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si m est assez grand, on aura $|\ell - z(p_o)| < \varepsilon/6$. et $|\ell - z(p_{2k+1})| < \varepsilon/6$. Par ailleurs, pour tout i :

$$A \leqslant ||(0,\ldots,0,z_i(p_1)-z_i(p_2),\ldots,z_i(p_{2k-1})-z_i(p_{2k}))||_T$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} |z_i(p_{2j})-z(p_{2j})| + \sum_{j=o}^{k-1} | z_i(p_{2j+1})-z(p_{2j+1})| + \varepsilon/6.$$

Mais $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} | z_i(p_{2j})-z(p_{2j})|$

$$+ \sum_{j=o}^{k-1} |z_i(p_{2j+1})-z(p_{2j+1})| \leqslant \sum_{\ell=m}^{n} | z_i(\ell)-z(\ell)|$$

et, pour chaque m et n , ceci peut être rendu inférieur à $\varepsilon/6$ en prenant i assez grand.

On obtient, donc, pour $m \geqslant m_o$, pour $i \geqslant i_o$,

$$A \leqslant \sup_{m \leqslant p_1 < \ldots < p_{2k} \leqslant n} ||(0,\ldots,0,z_i(p_1)-z_i(p_2),\ldots$$
$$\ldots, z_i(p_{2k-1})-z_i(p_{2k}))||_T + \varepsilon/3.$$

Pour achever la démonstration de la proposition, il nous reste donc à montrer :

LEMME 2. - *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de blocs comme ci-dessus. Pour $i,m,n \in \mathbb{N}$, posons :*

$$a^i_{m,n} = \sup_{m\leqslant p_1<\dots<p_{2k}\leqslant n} \|(0,\dots,0,z_i(p_1)-z_i(p_2),\dots,z_i(p_{2k-1}) - z_i(p_{2k}))\|_T$$

où le nombre des zéros est au moins $\left[\frac{m}{2}\right]$.

Posons $a_{m,n} = \lim_{i\to+\infty} a^i_{m,n}$. *Alors* $a_{m,n} \underset{m,n\to+\infty}{\to} 0$.

DEMONSTRATION. - Notons d'abord que la limite $\lim_{i\to+\infty} a^i_{m,n}$ existe car $a^i_{m,n}$ s'interprète comme :

$$a^i_{m,n} = \|P_{m+1,n-1}\, z_i\|_E$$

en notant $P_{m+1,n-1}$ la projection sur $\{m+1,m+2,\dots,n-1\}$.

Supposons la conclusion fausse : on pourrait trouver deux suites m_ℓ et n_ℓ , avec $m_\ell < n_\ell < m_{\ell+1}$, et $\varepsilon > 0$, tels que $a_{m_\ell,n_\ell} > \varepsilon\,\forall\ell$.

On pourrait alors trouver $i_o(\ell)$ tel que $\forall\ell$, $\forall i \geqslant i_o(\ell)$, $a^i_{m_\ell n_\ell} > \varepsilon$. Il existe donc des entiers $p^\ell_1 <\dots< p^\ell_{2k}$ avec $m_\ell \leqslant p^\ell_1 \leqslant p^\ell_{2k_\ell} \leqslant n_\ell$, avec, si $i \geqslant i_o(\ell)$:

$$\|(0,\dots,0,\ z_i(p^\ell_1)-z_i(p^\ell_2),\dots,z_i(p^\ell_{2k_\ell}-1)-z_i(p^\ell_{2k_\ell}))\|_T \geqslant \varepsilon.$$

Mais alors, pour i assez grand, la quantité :

$$\|(0,\dots,0,z_i(p_1^{\ell_1})-z_i(p_2^{\ell_1}),\dots,z_i(p^{\ell_1}_{2k_{\ell_1}}-1)-z_i(p^{\ell}_{2k_{\ell_1}}),0,\dots,0,$$

$$z_i(p_1^{\ell_2})-z_i(p_2^{\ell_2}),\dots,z_i(p^{\ell_2}_{2k_{\ell_2}-1})-z_i(p^{\ell_2}_{2k_{\ell_2}-1}),\dots)\|_T$$ ne peut être $\leqslant 1$. Ceci prouve le lemme.

PROPOSITION 7. - *Si* $F = (F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est un élément de* $(T\mathcal{J})''$, *on a :*

$$||F||_{(T\mathcal{J})''} = \sup_n ||P_n F||_{T\mathcal{J}},$$

en notant $P_n = P_{\{0,1,\dots,n\}}$.

Cette proposition se démontre exactement comme l'énoncé correspondant pour l'espace $\mathcal{J}$; voir [35].

On obtient une base pour $(T\mathcal{J})''$ ajoutant à $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'élément $e_o = \mathbb{1}$; un élément $F\in(T\mathcal{J})''$ s'écrit donc $F = \sum_{i\in\mathbb{N}} F'_i e_i$, avec

$$F'_o = \lambda = \lim_{k\to+\infty} F_k,$$

$$F'_i = F_i - \lambda \qquad i \geqslant 1 .$$

PROPOSITION 8. - *La norme* $|||F||| = \sup\{||(F'_{p_1}-F'_{p_2},\dots,F'_{p_{2k-1}}-F'_{p_{2k}})||_T$; $k\geqslant 1$, $0\leqslant p_1 <\dots< p_{2k}\}$ *est équivalente à la norme de* $(T\mathcal{J})''$

Avec cette norme, $(T\mathcal{J})''$ *est isométrique à* $T\mathcal{J}$.

DEMONSTRATION. - Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver n et $p_1<\dots<p_{2k}$ tels que

$$||F||_{(T\mathcal{J})''} < ||P_n F||_{(T\mathcal{J})''} + \varepsilon \leqslant ||(F_{p_1}-F_{p_2},\dots,F_{p_{2k-1}}-\widehat{F_{p_{2k}}})||_T + \varepsilon ,$$

et le terme $\widehat{F}_{p_{2k}}$ vaut $F_{p_{2k}}$ si $p_{2k}\leqslant n$, et 0 sinon.

Considérons d'abord le cas où $p_{2k}\leqslant n$,. Alors :

$$||F||_{(T\mathcal{J})''}\ \varepsilon \leqslant ||(F_{p_1}-\lambda)-(F_{p_2}-\lambda),\dots,(F_{p_{2k-1}}-\lambda)-(F_{p_{2k}}-\lambda)||_T$$

$$\leqslant ||(F'_{p_1}-F'_{p_2},\dots,F'_{p_{2k-1}}-F'_{p_{2k}})||_T \leqslant |||F|||_{(T\mathcal{J})''}.$$

Dans le cas où $p_{2k} > n$, on obtient :

$$||F||_{(T\mathcal{J})''} - \varepsilon \leq ||(F'_{p_1}-F'_{p_2},\ldots,F'_{p_{2k-1}}+\lambda)||_T$$

$$\leq ||(F'_{p_1}-F'_{p_2},\ldots,F'_{p_{2k-3}}-F'_{p_{2k-2}})||_T + |F'_{p_{2k-1}}+\lambda|$$

$$\leq |F'_o+F'_{p_{2k-1}}| + |||F|||$$

$$\leq |F'_o-F'_{p_1}| + |F'_{p_1}-F'_{p_{2k-1}}| + |||F|||$$

$$\leq 3|||F|||.$$

A l'inverse, choisissons $p_1 < p_2 < \ldots < p_{2k}$, avec :

$$|||F|||_{(T\mathcal{J})''} \leq ||(F'_{p_1}-F'_{p_2},\ldots,F'_{p_{2k-1}}-F'_{p_{2k}})||_T + \varepsilon.$$

Si $p_1 \geq 1$, on a $F'_{p_{2i-1}}-F'_{p_{2i}} = F_{p_{2i-1}}-F_{p_{2i}}$, $i=1,\ldots,k$,

et donc

$$|||F||| \leq ||F||_{(T\mathcal{J})''} + \varepsilon$$

Si $p_1 = 0$, on obtient :

$$|||F||| - \varepsilon \leq ||(2\lambda-F_{p_2},F_{p_3}-F_{p_4},\ldots,F_{p_{2k-1}}-F_{p_{2k}})||_T$$

$$\leq |2\lambda-F_{p_2}| + 3\max_i |F_{p_{2i-1}}-F_{2p_i}| + ||(0,0,0,0,F_{p_9}-F_{p_{10}},\ldots,F_{p_{2k-1}}-F_{p_{2k}})||_T.$$

Mais $||(0,0,0,F_{p_9}-F_{p_{10}},\ldots,F_{p_{2k-1}}-F_{p_{2k}})||_T \geq (1-\frac{3}{4})||(0,0,0,0,F_{p_9}-F_{p_{10}},\ldots,F_{p_{2k-1}}-F_{p_{2k}})||_T.$

Donc :

$$|||F|||-\varepsilon \leq |2\lambda - F_{p_2}| + 3||F||_{(T\mathcal{J})''} + 4||(0,0,0,F_{p_9}-F_{p_{10}},\dots,F_{p_{2k-1}}-F_{p_{2k}})||_T$$

$$\leq |2\lambda - F_{p_2}| + 3||F||_{(T\mathcal{J})''} + 4||(F_{p_2}-F_{p_3},F_{p_4}-F_{p_5},F_{p_6}-F_{p_7},F_{p_9}-F_{p_{10}},\dots$$

$$\dots, F_{p_{2k-1}}-F_{p_{2k}})||_T + 4||(F_{p_2}-F_{p_3},F_{p_4}-F_{p_5},F_{p_6}-F_{p_7})||_T$$

$$\leq 11||F||_{(T\mathcal{J})''} + |2\lambda - F_{p_2}| \ .$$

Mais $F_n \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda$. On obtient donc, pour n assez grand :

$$\leq 11||F||_{(T\mathcal{J})''} + |F_{p_1}-F_{p_2}| + |F_n| + \varepsilon \leq 13||F||_{(T\mathcal{J})''}+\varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

PROPOSITION 9. - $T\mathcal{J}$ *n'a que* ℓ^1 *pour modèle étalé.*

DEMONSTRATION. - Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une bonne suite de blocs normalisés. Il existe une sous-suite, encore notée $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $(T\mathcal{J})''$, pour $\sigma((T\mathcal{J})'',(T\mathcal{J})')$, vers un $\xi\in(T\mathcal{J})''$. Puisque $T\mathcal{J}$ est de codimension 1 dans $(T\mathcal{J})''$, on peut écrire :

$$\xi = \lambda.\ \mathbb{1} + x \ , \quad \lambda\in\mathbb{R}, \quad x\in T\mathcal{J},$$

et $\lambda \neq 0$, sinon la suite (z_n) convergerait dans E.

Notons k_n l'indice du dernier terme non nul de z_n.

Si $y_j = \sum_{o}^{j} e_j$, on sait que $y_j \to \mathbb{1}$ pour $\sigma((T\mathcal{J})'',(T\mathcal{J})')$

Donc $z_n - \lambda y_{k_n} \to x$ pour $\sigma((T\mathcal{J})'',(T\mathcal{J})')$.

Notons x_j l'élément de $T\mathcal{J}$ défini par $x_j(k) = x(k)$, $k \leq j$, $= 0$ sinon.

Alors $x_j \to x$ dans $T\mathcal{J}$ et donc $z_n-\lambda y_{k_n}-x_{k_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ pour $\sigma((T\mathcal{J})'',(T\mathcal{J})')$.

Soit $u_n = z_n - \lambda y_{k_n} - x_{k_n}$. Alors $u_n \in T\mathcal{I}$ donc $u_n \to 0$ pour $\sigma((T\mathcal{I})'', (T\mathcal{I})')$

On peut donc en extraire une suite à support presque disjoints, encore notée (u_n) : on peut trouver une suite (v_n) à supports disjoints, avec $u_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ dans E; or (u_n) et (v_n) ont le même modèle étalé ; on écrira donc :

$$z_n = \lambda y_{k_n} + x_{k_n} + u_n ,$$

avec : $y_{k_n} = \sum_{o}^{k_n} e_i$; x_{k_n} sont les tronqués de $x \in T\mathcal{I}$ et v_n des blocs consécutifs à supports disjoints.

Pour chaque n, le support de v_n s'arrête au plus à k_n ; quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il commence après $k_{n-1}+2$.

Soient $\alpha_1 \ldots \alpha_N$ des scalaires. Soit $\varepsilon > o$, et soit $\mathcal{O}_o$ tel que : si $\mathcal{O}_o \leq n_1 < \ldots < n_N$,

$$\left| \left\|\sum_1^N \alpha_i z_{n_i}\right\|_E - \left|\sum_1^N \alpha_i e_i\right| \right| \leq \varepsilon \left|\sum_1^N \alpha_i e_i\right|$$

et soit $\mathcal{O}_1$ tel que si $n \geq \mathcal{O}_1$, $\|x - x_n\|_E < \dfrac{\varepsilon \left|\sum_1^N \alpha_i e_i\right|}{\sum_1^N |\alpha_i|}$

Soit $\mathcal{O} = \max(\mathcal{O}_o, \mathcal{O}_1+1)$. Soit $\mathcal{O}+N+1 \leq n_1 < \ldots < n_N$.

Prenons : $p_1 = k_{\mathcal{O}}+2$, $p_2 = k_{\mathcal{O}+1}+1$, $p_3 = k_{\mathcal{O}+1}+2, \ldots,$

$p_{2j-1} = k_{\mathcal{O}+j-1}+2$, $p_{2j} = k_{\mathcal{O}+j}+1$, pour $j \leq N$,

puis $p_{2N+1} = k_{\mathcal{O}+N}+2$, $p_{2N+2} = k_{\mathcal{O}_1}+1, \ldots$

$p_{2N+2j-1} = k_{\mathcal{O}_{j-1}}+2$, $p_{2N+2j} = k_{\mathcal{O}_j}+1.$, $j \leq N$.

En se servant de ces 4N entiers p_i, nous allons estimer $||\alpha_1 z_{n_1}+\ldots+\alpha_n z_{n_N}||_E$. Dans les différences

$$(\alpha_1 z_{n_1}+\ldots+\alpha_N z_{n_N})(p_{2i-1}) - (\alpha_1 z_{n_1}+\ldots+\alpha_N z_{n_N})(p_{2i})$$

apparaiseent trois sortes de termes : provenant des y_i , des x_i , des v_i.

- la contribution des v_i est nulle, car tous les p_j se trouvent à l'extérieur de leurs supports.

- la contribution des x_i vaut :

$$|\alpha_1+\ldots+\alpha_N| \; ||(x(p_1)-x(p_2),\ldots,x(p_{2i-1})-x(p_{2i}),\ldots)||_T$$
$$\leq (|\alpha_1|+\ldots+|\alpha_N|)||x-x_\nu||_T \leq \varepsilon|\sum_1^N \alpha_i e_i|.$$

- reste la contribution des y_{k_i}. Elle vaut :

$$||(0,\ldots,0,0,(\alpha_1+\ldots+\alpha_N)-(\alpha_2+\ldots+\alpha_N),(\alpha_2+\ldots+\alpha_N)-(\alpha_3+\ldots+\alpha_N),\ldots,$$
$$\alpha_{N-1}+\alpha_N-\alpha_N,\alpha_N)||_T \quad = ||0,\ldots,0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N||_T.$$

Comme le nombre de zéros est N, ceci est minoré par $\frac{1}{2}\sum_1^N|\alpha_i|$. Ceci prouve la proposition.

REMARQUE. - Soit E un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans E. Les conditions :

(a) $||\frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i x_{n_i}|| \geq \delta \qquad \forall k,\ \forall n_1<\ldots<n_k,\ \forall \varepsilon_1\ldots\varepsilon_k = \pm 1,$

et

(b) $||\Sigma\, \alpha_i x_i|| \geq \delta\, \Sigma\alpha_i \quad \forall (\alpha_i) \geq 0.$

n'impliquent pas, même satisfaites simultanément, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ait une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ^1.

En effet, l'espace $T.\mathcal{J}$ que nous venons de construire n'est pas réflexif, et d'après un résultat de R.C. James, il existe dans $T.\mathcal{J}$ une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de norme 1 vérifiant $\forall k\in\mathbb{N}$:
$\mathrm{dist}(\mathrm{conv}(x_o,\ldots,x_k),\ \mathrm{span}\ (x_{k+1},\ldots)) \geq \delta$, et donc a fortiori b).
Le modèle étalé construit sur cette suite est ℓ^1 ; elle possède donc une sous-suite vérifiant a) , donc a) et b). Mais l'espace $T.\mathcal{J}$ ne contient pas ℓ^1.

On peut montrer que le dual $(T.\mathcal{J})'$ n'a que c_o pour modèle étalé. La démonstration est laissée au lecteur.

*

CHAPITRE V

SUPER-PROPRIÉTÉS ET M-PROPRIÉTÉS

Rappelons que si E est un espace de Banach et si ($\mathscr{P}$) est une propriété définie sur la classe des espaces de Banach, E a la propriété super($\mathscr{P}$)" si tout espace finiment représentable dans E a ($\mathscr{P}$). Par analogie, nous dirons que E a la propriété M-($\mathscr{P}$) si tout modèle étalé de E a ($\mathscr{P}$), c'est-à-dire si, pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E, tout modèle étalé construit sur cette suite a ($\mathscr{P}$).

Comme les modèles étalés de E sont finiment représentables dans E, il est clair que super($\mathscr{P}$) implique M-($\mathscr{P}$). L'objet de ce chapitre est de comparer les M-propriétés et les super-propriétés. Les principaux résultats sont malheureusement dans le sens négatif, le comportement de M-propriétés à l'égard de certaines opérations étant beaucoup moins satisfaisant que celui des super-propriétés, comme nous allons le voir.

Une caractéristique évidente de la finie-représentabilité est d'être transitive : si F_2 f r F_1 et F_1 f r E, alors F_2 est finiment représentable dans E. L'analogue pour les modèles étalés est faux, même à isomorphisme près, comme le montre le théorème suivant, dû à B. Maurey et au premier auteur, qui répond à une question posée par H.P. Rosenthal :

THEOREME 1

Il existe un espace de Banach E, *un modèle étalé* F_1 *de* E, *un modèle étalé* F_2 *de* F_1, *tels que* F_2 *ne soit isomorphe à aucun modèle étalé de* E.

DEMONSTRATION

Soit E l'espace S_ϕ construit au chapitre IV, D. Nous avons vu que S_ϕ a ℓ^ϕ pour modèle étalé (sur la base canonique), maix n'a pas ℓ^1 pour modèle étalé. Or l'espace ℓ^ϕ contient ℓ^1 : le théorème en résulte. On voit même qu'un sous-espace d'un modèle étalé de E peut n'être isomorphe à aucun modèle étalé de E.

Il n'est aonc pas exact en général que, si E a $\in$ M-($\mathscr{P}$), les modèles étalés de E aient M-($\mathscr{P}$).

Nous avons déjà rencontré un exemple de M-propriété. Si ($\mathscr{P}$) est le fait de ne pas être isomorphe à ℓ^1, M-($\mathscr{P}$) est la propriété de Banach-Saks alternée (A.B.S) ; de même si ($\mathscr{P}$) est le fait de ne pas être isomorphe à c_o, M-($\mathscr{P}$) a été décrite au chapitre III. Si ($\mathscr{P}$) est le fait de ne pas contenir ℓ^1, la propriété M-($\mathscr{P}$) peut également être décrite, en employant la notion, développée au chapitre I, §7, de structure cycliquement reproduite sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui a servi à construire le modèle. Cette structure sert en effet à caractériser les sous-espaces des modèles étalés. Les énoncés correspondants (pour ℓ^1 et c_o) ont été donnés au chapitre I, §7 ; nous y renvoyons le lecteur. Cette dernière propriété est, à l'évidence, plus forte que A.B.S. mais nous ne savons pas la caractériser de façon satisfaisante.

Une autre propriété intéressante est la M-réflexivité : un espace de Banach E est M-réflexif si tous ses modèles étalés sont réflexifs. Ceci implique que l'espace E lui-même est réflexif : sinon, il existe dans E une suite bornée $(x_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant la condition de James :

Pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathrm{dist}(\mathrm{conv}(x_1,\dots,x_k),\ \mathrm{conv}(x_{k+1},\dots)) \geqslant 1/2 ,$$

et le modèle étalé construit sur la suite (x_n) n'est pas non plus réflexif.

De ce fait, un espace M-réflexif a la propriété de Banach-Saks. La propriété de M-réflexivité est intermédiaire entre la super-réflexivité et la propriété de Banach-Saks. Elle ne coïncide ni avec l'une ni avec l'autre : l'espace $\ell^2(\ell^1_n)$ est M-réflexif, mais pas super-réflexif, et les espaces B_ϕ et T* sont Banach-Saks, mais ne sont pas M-réflexifs (ils ont respectivement ℓ^ϕ et c_o pour modèles étalés).

Nous ne connaissons pas non plus de description satisfaisante de la M-réflexivité. La comparaison de cette propriété avec M. Banach-Saks a été réalisée par Y. Ropars [57] .

Nous allons maintenant examiner le comportement des M-propriétés à l'égard du passage de E à $L^p(E)$ ou $\ell^p(E)$. Il est bien connu, par exemple, que si E est super-réflexif, $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu;E)$ (μ finie ou non) l'est aussi si $1 < p < +\infty$ (voir p. ex. [12]). Nous allons étudier les énoncés correspondants pour la M-propriété que nous connaissons le mieux : celle où (P) est : "ne pas être isomorphe à ℓ^1".

Les modèles étalés de $\ell^p(E)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ peuvent être facilement décrits en fonction de ceux de E. Nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>LEMME 2</u>

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'éléments normalisés de* $\ell^p(E)$, $1 \leqslant p < +\infty$. *Il existe une sous-suite* $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que chaque* x'_n *admette une décomposition*

$$x'_n = y_n + z_n \quad , \textit{avec :}$$

a) il existe $u = (u(k))_{k \in \mathbb{N}}$ *dans* ℓ^p, *avec* $\| y_n(k) \| \leqslant u(k)\ \forall\, k$.

b) les z_n *sont presque à supports disjoints : il existe une suite* $(z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *d'éléments de* $\ell^p(E)$, *à supports disjoints, telle que* $z_n - z'_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ *dans* $\ell^p(E)$.

<u>DEMONSTRATION</u>

Posons $u_n(k) = \| x_n(k) \|_E$. Quitte à extraire une sous-suite des (x_n), on peut supposer que $\forall_k$, $u_n(k)$ admet une limite $u(k)$, lorsque $n \to +\infty$, et on a $(\sum_k (u(k))^p)^{1/p} \leqslant 1$. Posons $v_n(k) = u_n(k) - u(k)$. Il existe une sous-suite de (v_n) faite d'éléments à supports presque disjoints : on peut trouver une suite $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de blocs à support disjoints avec $v_n - v'_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ dans ℓ^p .

Soit $m_n = \text{deb } v'_n$. Quitte à extraire encore une sous-suite, on peut supposer que pour tout n, $v_n(k) < u(k)$, si $k \leqslant m_n$.

Appelons (x'_n) la sous-suite de (x_n) correspondante. Posons

$$y_n(k) = x_n(k),\ k \leqslant m_n$$
$$= 0 \text{ sinon.}$$

et

$$z_n(k) = x_n(k) \quad k > m_n$$
$$= 0 \text{ sinon.}$$

On a $\quad \|y_n(k)\| = u_n(k) = u(k) + v_n(k) \quad \text{si } k \leqslant m_n$

$$= 2\,u(k) \qquad \text{si } k \leqslant m_n$$

et $\; y_n(k) = 0 \;$ si $k > m_n$, d'où a).

Pour b), posons $z'_n(k) = z_n(k)$ si $k \in \text{support } v'_n$,

$$= 0 \text{ sinon,}$$

et les z'_n forment une suite à supports disjoints, avec $z_n - z'_n \to 0$.

PROPOSITION 3

Soit (x_n) *une suite étalante dans* $\ell^p(E)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$. *Pour chaque* $k \in \mathbb{N}$, *notons* $(e_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite fondamentale du modèle étalé* F_k *construit sur* $(x_n(k))_{k \in \mathbb{N}}$. *Soit* $|\cdot|_{(k)}$ *la semi-norme de* F_k *(ce n'est pas nécessairement une norme pour tout* k*). Il existe un* $\delta \geqslant 0$ *tel que l'on ait, pour toute suite finie de scalaires* $a_1, \dots, a_j$:

$$|a_1 e_1 + \dots + a_j e_j|^p = \sum_k |a_1\ e_1\ (k) + \dots +\ a_j e_j\ (k)|^p_{(k)} + \delta(|a_1|^p + \dots + |a_j|^p)$$

(e_n) *étant la suite fondamentale du m.e. construit sur* $(x_n)_{n \in N}$ *dans* $\ell^p(E)$, *et* $|\cdot|$ *la norme de ce m.e.*

DEMONSTRATION

On peut supposer que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $(x_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ est une bonne suite dans E et que, dans la décomposition donnée par le lemme précédent $(y_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ sont de bonnes suites. La suite $(z'_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ définit le même modèle que $(z_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$, et on a :

$$\lim_{\substack{n_1<\ldots<n_j \\ \to +\infty}} \| a_1 x_{n_1} +\ldots+ a_j x_{n_j} \|^p_{\ell^p(E)} =$$

$$\lim_{\substack{n_1<\ldots<n_j \\ \to +\infty}} \sum_k (\|a_1 y_{n_1}(k) +\ldots+ a_j y_{n_j}(k) \|^p + |a_j|^p \|z_{n_1}(k)\|^p$$

$$+\ldots+ |a_j|^p \| z_{n_j}(k) \|^p),$$

d'où le résultat, puisque $\|y_n(k)\| \leqslant u(k)$, avec $u \in \ell^p$. Le nombre δ est

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_k \|z_n(k)\|^p = \lim_{n \to +\infty} \|z_n\|^p_{\ell^p(E)} .$$

COROLLAIRE 4

Si $\ell^p(E)$, $1 < p < +\infty$, *a* ℓ^1 *pour modèle étalé,* E *a* ℓ^1 *pour modèle étalé.*

En effet, d'après la proposition précédente, le produit $\ell^p(F_k)\times \ell^p$ contient ℓ^1 ; il en résulte que l'un des F_k contient ℓ^1 : on obtient donc, plus précisément, que pour une certaine coordonnée k, le modèle étalé de E construit sur $(x_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ est isomorphe à ℓ^1.

L'analogue de ce résultat pour les espaces $L^p(E)$ est faux, comme le montre le théorème suivant, dû à Aldous [1]

THEOREME 5

L'espace $L^2(c_o)$ *admet* ℓ^1 *pour modèle étalé.*

DEMONSTRATION

Soit $(\varepsilon_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ une suite double de variables aléatoires de Bernoulli $(P(\varepsilon_{i,j} = 1) = P(\varepsilon_{i,j} = -1) = 1/2)$ indépendantes.

Pour chaque $k \geq 1$, choisissons un entier $\alpha(k) \geq 1$ pour que

$$\prod_{i=1}^{\alpha(k)} P\{\omega ; \, |\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{i,j}(\omega)| < k/2\} < 1/2$$

et posons $X_k(\omega) = \sum_{j=1}^{\alpha(k)} \varepsilon_{k,j}(\omega) e_j$, où (e_j) est la base canonique de c_o.

Pour tout $K \geq 1$, toute suite $m_1 < \ldots < m_K$, on a :

$$\|\sum_{k=1}^{K} X_{m_k}\|^2_{L^2(c_o)} = \int_\Omega \|\sum_{k=1}^{K} X_{m_k}\|^2_{c_o} dP(\omega)$$

$$= \int_\Omega \|\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{\alpha(m_k)} \varepsilon_{m_k,j}(\omega) e_j\|^2_{c_o} dP(\omega)$$

$$= \int_\Omega \|\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{\alpha(K)} \varepsilon_{m_k,j}(\omega) e_j - \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=\alpha(m_k)+1}^{\alpha(K)} \varepsilon_{m_k,j}(\omega) e_j\|^2_{c_o} dP$$

$$\geq \int_\Omega \|\sum_{j=1}^{\alpha(K)} (\sum_{k=1}^{K} \varepsilon_{m_k,j}(\omega)) e_j\|^2_{c_o} dP(\omega)$$

$$\geq \int_\Omega \sup_{j \leq \alpha(K)} |\sum_{k=1}^{K} \varepsilon_{m_k,j}(\omega)| \, dP(\omega)$$

$$\geq \frac{K}{2} P\{\sup_{j<\alpha(K)} |\sum_{k=1}^{K} \varepsilon_{m_k,j}(\omega)| \geq K/2\}$$

$$\geq \frac{K}{2}[1 - \sum_{j=1}^{\alpha(K)} P\{|\sum_{k=1}^{K} \varepsilon_{m_k;j}(\omega)| \geq K/2\}]$$

$$\geq \frac{K}{2}(1 - 1/2) = K/4.$$

Il en résulte que la suite $(X_k)_{k\geq 1}$, dans $L^2(c_o)$, vérifie la propriété $(\mathscr{P}_1)$, et donc que $L^2(c_o)$ a ℓ^1 pour modèle étalé.

Le même énoncé est vrai pour $L^p(c_o)$, $1 < p < +\infty$; il prouve donc que la propriété A.B.S. ne passe pas de E à $L^p(E)$.

Nous allons maintenant voir que la propriété de Banach-Saks ne passe pas non plus de E à $L^2(E)$, ou, en d'autres termes, que E peut être réflexif et n'avoir pas ℓ^1 pour modèle étalé, tandis que $L^2(E)$ a ℓ^1 pour modèle étalé (mais, bien sûr, sera réflexif). Le premier exemple de ce type a été donné par J. Bourgain [15] . Celui que nous reproduisons ici est dû à W. Schachermayer [60] et utilise des idées assez voisines.

Commençons par quelques notations. Si $A = \{ n_1 < \ldots < n_k \}$ est un sous-ensemble admissible de $\mathbb{N}$ (voir chapitre IV, § 2), écrivons pour chaque $i = 1,\ldots,k$,

$$n_i = 2^{u_i} + v_i \ , \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant v_i < 2^{u_i}$$

et posons

$$t(n_i) = \frac{v_i}{2^{u_i}} \qquad (0 \leqslant t(n_i) < 1)$$

Nous dirons que A est totalement admissible si

1) A est admissible,

2) Pour tout j avec $0 \leqslant j \leqslant 2^{u_i+1}$, il existe au plus un $n_i \in A$ tel que $t(n_i) \in \left[\frac{j}{2^{u_i+1}} , \frac{j+1}{2^{u_i+1}}\right[$.

Par exemple un ensemble

$$A = \{ 2^{n+1}+1 \ , \ 2^{n+1}+2,\ldots,2^{n+1}+2^{n+1} \}$$

est totalement admissible.

Par ailleurs, si les $u_1 < \ldots < u_k$ sont donnés avec $k \leqslant 2^{u_1}$, on peut toujours choisi les $v_1,\ldots,v_k$ pour que $\{n_1,\ldots,n_k\}$ soit totalement admissible.

L'espace que nous allons considérer est un espace de Baernstein (chapitre IV, § 2, C) où les ensembles admissibles sont remplacés par les ensembles totalement admissibles. Nous noterons B_1 la complétion de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ pour la norme :

$$\| x \|_{B_1} = \sup \{ (\sum_j \| P_j(x)\|^2_1)^{1/2} \ ; \ (A_j) \text{ famille finie d'ensembles totalement admissibles consécutifs} \}.$$

(on a noté, comme précédemment, P_j au lieu de P_{A_j}).

<u>PROPOSITION 6</u> *L'espace B_1 a la propriété de Banach-Saks.*

<u>DEMONSTRATION</u>

On montre comme pour B que B_1 ne contient ni c_o , ni ℓ^1 ; comme il est à base inconditionnelle, il est réflexif. Nous nous contenterons donc de montrer que B_1 a la propriété W.B.S.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans la boule unité de B_1, tendant faiblement vers 0. On peut supposer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de blocs sur la base canonique $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$: chaque x_n s'écrit

$$x_n = \sum_{p_n+1}^{p_{n+1}} a_i e_i ,$$

où $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers.

Nous allons maintenant choisir par récurrence une sous-suite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties infinies de N.

Posons $n_1 = 1$, et $M_o = \mathbb{N}$. Supposons $n_1,\dots,n_k$ choisis, et $M_o,\dots,M_{k-1}$ définis.

Soit q l'entier $\geqslant 1$ tel que $2^{q-1} \leqslant p_{n_k+1} < 2^q$.

Considérons la partition de $[0,1[$ donnée par les ensembles $[j/2^q, j+1/2^q[$ $0 \leqslant j < 2^q$.

Pour $n \geqslant n_k$, soit $\mu_j^{(n)} = \max\{ |a_i| \ ; p_n < i \leqslant p_{n+1} ,$ $t(i) \in [j/2^q , j+1/2^q[\}$.

On a $\sum_{j=o}^{2^q-1} \mu_j^{(n)} \leqslant 1$, car, pour chaque n, l'ensemble $i_o,\dots,i_{2^q-1}$ des i choisis avec $t(i) \in [j/2^q , j+1/2^q[$ forme un ensemble totalement admissible qui peut servir à estimer $\|x_n\|_{B_1}$.

Choisissons alors une sous-suite $\overline{M_k}$ de $M_k \cap [n_k+1,+\infty[$ telle que, pour chaque j $(0 \leqslant j < 2^q)$, la suite $(\mu_j^{(n)})_{n \in \overline{M_k}}$ admette une limite, notée μ_j. On aura

$$\sum_0^{2^q-1} \mu_j \leqslant 1 .$$

Soit M_k la sous-suite de $\overline{M_k}$ formée des entiers n pour lesquels $\forall$ j, $0 \leqslant j < 2^q$, on ait

$$\mu_j^{(n)} \leqslant \mu_j + 2^{-q}.$$

Choisissons pour n_{k+1} n'importe quel élément de M_k. Nous allons montrer que

$$\frac{1}{N} \sum_1^N x_{n_i} \underset{N \to +\infty}{\to} 0 \quad \text{dans } B_1.$$

Notons que si A est totalement admissible, et si k est tel que $p_{n_k+1} \geqslant \min A$, on a, pour tout $\ell \geqslant 1$:

$$(1) \qquad P_A \| \sum_{i=1} x_{n_k+i} \|_1 \leqslant 2 .$$

En effet, pour chaque j avec $0 \leqslant j \leqslant 2^q$, A contient au plus un indice i avec $t(i) \in [j/2^q , j+1/2^q[$, donc la contribution de cet indice est au plus $\mu_j + 2^{-q}$, et en sommant sur j, on obtient (1).
Soit $N \geqslant 1$ et soit $x = \sum_{k=1}^N x_{n_k}$. Soit $(A_\ell)_{\ell=1,..,L}$ une famille d'ensembles totalement admissibles consécutifs. On veut estimer $\sum_{\ell=1}^L \| P_\ell x \|_1^2$.

Pour $1 \leqslant k \leqslant N$, posons

$I(k) = \{\ell \in \mathbb{N} ; \min A_\ell \in [p_{n_k}+1, p_{n_k+1}]\}$

et $\nu(k) = \max I(k)$.

Les ensembles A_ℓ dont l'indice est dans I(k) sont contenus dans le support de x_{n_k}, sauf peut être $A_{\nu(k)}$.

Les ensembles A_ℓ dont l'indice est dans $I(k)$ sont contenus dans le support de x_{n_k}, sauf peut être $A_{\nu(k)}$.

On a $\|P_\ell x\|_1 = \|P_\ell x_{n_k}\|_1$ si $\left|\begin{array}{l} \ell \in I(k) \\ \ell \neq \nu(k). \end{array}\right.$

et donc

$$\sum_{\ell \in I(k)} \|P_\ell\, x\|_1^2 = \sum_{\substack{\ell \in I(k) \\ \ell \neq \nu(k)}} \|x_{n_k}\|_1^2 + \|P_{\nu(k)}\, x\|_1^2 .$$

$$(2) \qquad \sum_{\ell \in I(k)} \|P_\ell\, x\|_1^2 \leqslant 1 + \|P_{\nu(k)}\, x\|_1^2 .$$

Décomposons $A_{\nu(k)}$ en $A_{\nu(k)} = A'_{\nu(k)} \cup A''_{\nu(k)}$, avec

$$A'_{\nu(k)} = A_{\nu(k)} \cap [0, P_{n_k+1}] , \quad A''_{\nu(k)} = A_{\nu(k)} \setminus A'_{\nu(k)}.$$

On a : $\quad \|P_{A'_{\nu(k)}}\, x\|_1 = \|P_{A'_{\nu(k)}}\, x_{n_k}\|_1 \leqslant 1$

et $\quad \|P_{A''_{\nu(k)}}\, x\|_1 = \|P_{A''_{\nu(k)}} (x_{n_{k+1}} + \ldots + x_{n_N})\|_1 \leqslant 2$, d'après (1).

D'où finalement, pour $1 \leqslant k \leqslant N$,

$$\sum_{\ell \in I(k)} \|P_\ell\, x\|_1^2 \leqslant 10 ,$$

et donc $\quad \displaystyle\sum_k \sum_{\ell \in I(k)} \|P_\ell\, x\|_1^2 \leqslant 10\, N,$

et $\|x\|_{B_1} \leqslant \sqrt{10}\, N$, ce qui prouve que $\displaystyle\left\| \frac{1}{N} \sum_1^N x_{n_k} \right\|_{B_1} \leqslant \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{N}}$, et achève la démonstration de la proposition.

<u>PROPOSITION 7</u>

L'espace $L^2(B_1)$ n'a pas la propriété de Banach-Saks.

Nous montrerons en fait que $L^2(B_1)$ a un modèle étalé isométrique à ℓ^1. Pour cela, nous aurons besoin d'un lemme :

LEMME 8

Soient $k \geq 1$ *et* $\varepsilon > 0$. *Il existe un entier* $N(k;\varepsilon)$ *tel que si* $N \geq N(k;\varepsilon)$, *si* $Z_1,\ldots,Z_k$ *sont des variables indépendantes, définies sur* $(\Omega,\mathcal{A},P)$, *à valeurs dans* $\{1,\ldots,N\}$ *et uniformément distribuées, on ait*

$$P\Big(\bigcup_{i\neq j}\{Z_i = Z_j\}\Big) < \varepsilon.$$

La démonstration de ce lemme est élémentaire ; nous la laissons au lecteur.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans B_1, chaque X_n prenant les valeurs $e_{2^n}, e_{2^n+1},\ldots,e_{2^{n+1}-1}$ avec probabilité $1/2^n$.

La suite $(X_n)_n$ tend vers 0 presque sûrement, et, puisque $\|X_n(\omega)\|_{B_1} \leq 1$ pour tout ω, elle converge faiblement vers 0, dans $L^p(B_1)$, $1 \leq p < +\infty$.

Nous allons montrer que, pour tout $k \geq 1$:

$$\lim_{u\to+\infty} \operatorname{Inf}\Big\{ \Big\|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i X_{u_i}\Big\|_{L^2(B_1)} \; ; \; u \leq u_1<\ldots<u_k,\ \varepsilon_i = \pm\Big\} = 1$$

et ceci prouvera notre assertion. Il suffit à l'évidence de supposer $\varepsilon_i = +1$.

Fixons $k \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, et soit N donné par le lemme. Choisissons u avec $2^n \geq \max(k,N)$, et $u_1<\ldots<u_k$, avec $u_1 \geq u$. Définissons des variables aléatoires $Z_1,\ldots,Z_k$ à valeurs dans $\{1,\ldots,2^{u_1+1}\}$, par :

$$Z_i(\omega) = m \quad \text{si } X_{u_i}(\omega) = e_{2^{u_i}+v_i} \quad \text{et}$$

$$t(2^{u_i}+v_i) = v_i/2^{u_i} \in \Big[\frac{m-1}{2^{u_1+1}}, \frac{m}{2^{u_1+1}}\Big[\quad .$$

On peut alors trouver $\Omega_1 \subset \Omega$, avec $P(\Omega_1) > 1-\varepsilon$, tel que si $\omega \in \Omega_1$, la suite $Z_1(\omega),\ldots,Z_k(\omega)$ a toutes ses valeurs distinctes.

Cela signifie que les indices $2^{u_1} + v_1, \ldots, 2^{u_k} + v_k$ forment un ensemble toatlement admissible noté $A(\omega)$. On peut alors écrire :

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_1^k X_{u_i}(\omega) \right\|_{B_1} > \left\| P_{A(\omega)} \frac{1}{k} \sum_1^k X_{u_i}(\omega) \right\|_1 = 1$$

Il en résulte que

$$\int \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k X_{u_i}(\omega) \right\|^2_{B_1} dP = \int_{\Omega_1} \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k X_{u_i}(\omega) \right\|^2_{B_1} dP(\omega)$$

$$+ \int_{\Omega \setminus \Omega_1} \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k X_{u_i}(\omega) \right\|^2_{B_1} dP(\omega)$$

$$\geq 1 - \varepsilon \quad ,$$

ce qui prouve notre assertion.

REMARQUE : Cette démonstration montre que $L^p(B_1)$ n'a pas la propriété de Banach-Saks si $1 < p < +\infty$, et que $L^1(B_1)$ n'a pas la propriété W.B.S.

Le dual de B_1 possède une propriété analogue relativement à c_o :

PROPOSITION 9

B_1' n'a pas c_o pour modèle étalé, mais $L^2(B_1')$ a c_o pour modèle étalé.

DEMONSTRATION

La première assertion est claire, à partir de la proposition III,4,2 : B_1 est réflexif et n'a pas ℓ_1 pour modèle étalé, donc aucun quotient de B_1' n'a c_o pour modèle étalé.

Nous allons maintenant montrer que $L^2(B_1')$ a un modèle étalé isométrique à c_o.

Considérons les v.a. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies précédemment. Nous allons montrer que, pour tout $k \geq 1$,

$$\lim_{u \to +\infty} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i X_{u_i} \right\|_{L^2(B_1')} ; u \leq u_1 < \ldots < u_k , \varepsilon_i = \pm 1 \right\} = 1,$$

et ceci prouvera notre assertion. Il suffit à l'évidence de supposer $\varepsilon_i = +1$.

Fixons $k \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ et soit N donné par le lemme 8. Choisissons u avec $2^u \geq \max(k,N)$, et $u_1 < \ldots < u_k$, avec $u_1 \geq u$, définissons des variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_k$, à valeurs dans $\{1, \ldots, 2^{u_1+1}\}$, comme à la proposition précédente. On peut alors trouver $\Omega_1 \subset \Omega$, avec $P(\Omega_1) > 1-\varepsilon$, tel que si $\omega \subset \Omega_1$, l'ensemble $A' = \{n_1 < \ldots < n_k\}$ correspondant aux indices des $X_{u_1}(\omega), \ldots, X_{u_k}(\omega)$ soit totalement admissible. On obtient :

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} X_{u_i}(\omega) \right\|_{B'} = \sup\{ | < \sum_{i=1}^{k} X_{u_i}(\omega), x > | \ , \ \|x\|_{B_1} \leqslant 1 \}$$

$$\leqslant \sup\{ | < \sum_{i=1}^{k} X_{u_i}(\omega), x > |, \ \|P_{A'} \ x\| \leqslant 1 \}$$

$$= 1.$$

En intégrant, on obtient

$$\left\| \sum_1^k X_{u_i} \right\|^2_{L^2(B_1')} \leqslant \int_{\Omega_1} \left\| \sum_{i=1}^{k} X_{u_i}(\omega) \right\|^2_{B_1'} dP(\omega) + \int_{\Omega \setminus \Omega_1'} \left\| \sum_{i=1}^{k} X_{u_i}(\omega) \right\|^2_{B_1'} dP(\omega)$$

$\leqslant 1 + k^2 \varepsilon$, et ceci prouve notre assertion.

On voit donc, en conclusion, que le comportement des M-propriétés "n'avoir pas ℓ^1 pour modèle étalé" et "n'avoir pas c_o pour modèle étalé" est loin d'être aussi satisfaisant que le comportement de la réflexivité ou de la super-réflexivité, à l'égard, tout du moins, du passage de E à $L^2(E)$. Mais l'étude, par exemple, de la M-réflexivité peut cependant avoir un certain intérêt. Une autre question que suggèrent les exemples ci-dessus est la suivante : peut-on caractériser sur E le fait que $L^2(E)$ ait la propriété de Banach-Saks ?

CHAPITRE VI

EXTENSIONS DE TYPE ℓ^p

I. EXTENSIONS LOCALEMENT DE TYPE ℓ^p

Notre but dans ce paragraphe, est de démontrer un résultat de J.L. Krivine [44] sur la finie représentabilité de ℓ^p ou c_o sur des blocs d'une suite de points dans un espace de dimension infinie.

Nous allons d'abord donner les définitions nécessaires, en termes d'extensions ou de modèles étalés. Le résultat s'énonce en effet naturellement dans ce cadre. Mentionnons que, à la différence de [44] , nous supposerons que E est un Banach complexe. Le cas réel est plus simple.

DEFINITION 1 :

Soit E *un espace de Banach complexe*, $(x_k)_{k \geqslant 1}$ *une suite étalante dans* E, $\mathscr{F}$ *l'extension associée. Soient* $n \geqslant 1$ *et* $\varepsilon > 0$. *Nous dirons que* $\mathscr{F}$ *est une* ε $\ell^p_{(n)}$ *extension de* E $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ *si la suite fondamentale* $(e_i)_{i \geqslant 1}$ *du modèle étalé* F *vérifie pour tout* $x \in E$ *et toute suite* $(a_1,\dots,a_n)$ *de scalaires*

- *si* $p < +\infty$:

$$(1-\varepsilon)\left\|x+\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}e_1\right\| \leqslant \left\|x+\sum_{i=1}^{n}a_i\, e_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left\|x+\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}e_1\right\|,$$

- *si* $p = +\infty$:

$$(1-\varepsilon)\left\|x+\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|\right)e_1\right\| \leqslant \left\|x+\sum_{i=1}^{n}a_i\, e_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left\|x+\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|\right)e_1\right\| .$$

Rappelons que, si $(x_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite dans un espace de Banach, les blocs $z_j = \sum_{n_j+1}^{n_{j+1}} a_i\, x_i$, consécutifs sur la suite $(x_k)_{k>1}$, sont dits *isonômes* (voir chap. I, § 7) s'ils utilisent les mêmes coefficients :

$$a_{n_j+1} = a_{n_1+1} \quad , \quad a_{n_j+2} = a_{n_1+2} \quad , \text{ etc...}$$

Le théorème de J.L. Krivine est alors :

THEOREME 2

Soit $(x_k)_{k \geqslant 1}$ *une suite étalante dans un espace de Banach. Pour un certain* p *,* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*, on peut, pour chaque* $n \geqslant 1$ *et chaque* $\varepsilon > 0$ *, trouver une suite de blocs isonômes* $(z_k)_{k \geqslant 1}$*, construits sur* $(x_k)_{k \geqslant 1}$ *telle que l'extension de* E *construite sur* $(z_k)_{k \geqslant 1}$ *soit une* ε-$\ell^p_{(n)}$ *extension.*

Utilisant la définition de l'extension, il en résulte immédiatement :

COROLLAIRE 3

Soit $(x_k)_{k\geqslant 1}$ *une suite bornée dans un espace de Banach, sans sous-suite convergente. Pour un certain* $p, 1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *, on peut, pour chaque* $n \geqslant 1$ *et chaque* $\varepsilon > 0$ *, trouver une suite de blocs isonômes* $(z_k)_{k\geqslant 1}$ *, construits sur* $(x_k)_{k\geqslant 1}$ *, telle que* n *quelconques parmi les* z_k *engendrent un sous-espace* $(1+\varepsilon)$*-isomorphe à* $\ell^p_{(n)}$.

La démonstration sera décomposée en plusieurs étapes. Les résultats obtenus au cours de ces étapes présentent par eux-mêmes un certain intérêt.

Pour préciser quantitativement le caractère inconditionnel des suites fondamentales, nous aurons besoin de la notion suivante :

DEFINITION 4

Soit G *un sous-groupe du cercle trigonométrique. Soit* $(e_i)_{i\geqslant 1}$ *la suite fondamentale d'une extension de* E. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Nous dirons que la suite* $(e_i)_{i\geqslant 1}$ *est* $(1+\varepsilon)$-G-invariante au dessus de E *si,* *pour tout* x *de* E, *pour toute suite finie* $(a_i)_{i\geqslant 1}$ *de scalaires, pour toute suite finie* $(\gamma_i)_{i\geqslant 1}$ *d'éléments de* G, *on a :*

$$\left| \|x + \sum_{i\geqslant 1} \gamma_i a_i e_i\| - \|x + \sum_{i\geqslant 1} a_i e_i\| \right| \leqslant \varepsilon \|\sum_{i\geqslant 1} a_i e_i\|$$

Si $G = \mathscr{C}$, le cercle trigonométrique, nous dirons simplement que $(e_i)_{i\geqslant 1}$ est $(1+\varepsilon)$-*inconditionnelle au-dessus de* E. Cela implique, bien entendu, que la suite $(e_i)_{i\geqslant 1}$ est inconditionnelle au sens usuel, avec une constante de basicité inconditionnelle au plus égale à $1+\varepsilon$.

THEOREME 5

Pour $M\geqslant 1$, *soit* $G_M = \{ e^{2ip\pi/2^M} ; 0 \leqslant p < 2^M\}$. *Si* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite étalante d'un espace de Banach* E, *on peut, pour tout* $\varepsilon >0$ *trouver une suite* $(z_k)_{k\geqslant 1}$ *de blocs isonômes sur la suite* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *telle que la suite fondamentale* $(f_i)_{i\geqslant 1}$ *du modèle étalé défini sur* $(z_k)_{k\geqslant 1}$ *soit* $(1+\varepsilon)$-G_M *invariante au-dessus de* E.

DEMONSTRATION (l'idée en est empruntée à D.J.H. Garling [31])

Soit $\varepsilon >0$, $M\geqslant 1$. Soit $(e_i)_{i\geqslant 1}$ la suite fondamentale du modèle étalé sur $(x_n)_{n\geqslant 1}$. La suite $(e_i)_{i\geqslant 1}$ est écartable au-dessus de E, et quitte à la remplacer, si nécessaire, par $(e_{2i}-e_{2i+1})_{i\geqslant 1}$, on peut la supposer 1-sous-symétrique au-dessus de E, ce que nous ferons désormais.

Pour $p = 0,\dots,2^M-1$, posons $\varepsilon_p = e^{2ip\pi/2^M}$. Notons S l'opérateur de shift sur la suite $(e_i)_{i\geqslant 1}$ (défini par $S e_i = e_{i+1}$).

Posons $u = \sum_{p=0}^{2^M-1} \varepsilon_p e_p$, et fixons un entier N, $N > 1/\varepsilon$.

Posons enfin :

$$f_1 = \sum_{j=1}^{8N-1} \left(1 - \left|\frac{4N-j}{4n}\right|\right) S^{j.2^M} u$$

et, si $i \geqslant 1$:

$$f_i = S^{8N(i-1)2^M} f_1 \quad .$$

Il est clair sur la définition que les $(f_i)_{i\geq 1}$ sont des blocs isonômes sur la suite $(e_i)_{i\geq 1}$.

Par ailleurs, si l'on pose

$$y = \sum_{p=0}^{2^M-1} \varepsilon_p\, x_p \quad \text{et}$$

$$z_1 = \sum_{j=1}^{8N-1} \left(1 - \left|\frac{4N-j}{4N}\right|\right) S^{j.2^M}\, y \quad ,$$

et pour $i \geq 1$,

$$z_i = S^{8N(i-1)2^M}\, z_1 \ ,$$

(S étant cette fois le shift sur $(x_n)_{n\geq 1}$), il est clair que la suite $(f_i)_{i\geq 1}$ est la suite fondamentale du modèle étalé défini sur la suite $(z_i)_{i\geq 1}$, suite de blocs isonômes sur les x_n.

Soient $m \geq 1$ $p(1),\ldots,p(m)$ des entiers entre 0 et 2^M-1. Pour montrer le théorème, nous allons estimer des différences du genre :

$$A = \left|\, \left\| x + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{p(i)}\, a_i\, f_i \right\| - \left\| x + \sum_{i=1}^{m} a_i\, f_i \right\| \,\right| \ .$$

Posons $f'_i = S^{p(i)}\, f_i \quad i = 1,\ldots,m$.

Puisque la suite $(f_i)_{i\geq 1}$ est écartable, on a

$$\left\| x + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{p(i)}\, a_i\, f_i \right\| = \left\| x + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{p(i)}\, a_i\, f'_i \right\|$$

On en déduit que

$$A \leq \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i\, (\varepsilon_{p(i)}\, f'_i - f_i) \right\|$$

Posons maintenant, pour $i = 1,\ldots,m$:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{4N} S^{j.2^M} \sum_{k=0}^{p(i)} \varepsilon_k\, e_k \quad ,$$

$$\zeta_i = S^{8N(i-1)2^M}\, (\eta_i) \quad .$$

$$\Theta_i = S^{4N}(\zeta_i)$$

$$K_i = S^{2N}(\zeta_i)$$

On vérifie directement par le calcul (utilisant l'identité $\varepsilon_p\ \varepsilon_q = \varepsilon_{p+q}$) que, pour $i = 1,\dots,m$:

$$f_i - \varepsilon_{p(i)}\ f'_i = \frac{1}{4N}\ (\zeta_i - \Theta_i)$$

Il en résulte :

$$A \leqslant \frac{1}{4N}\ \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i(\zeta_i - \Theta_i) \right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{4N}\ \left(\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i\ \zeta_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i\ \Theta_i \right\| \right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2N}\ \left\| \sum_{i=1}^{M} a_i\ K_i \right\| .$$

Or, on peut écrire :

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i\ K_i \right\| \leqslant 2 \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i\ f_i \right\| .$$

En effet, le support de chaque K_i correspond au "centre" du support du f_i : la condition $2N+1 \leqslant j \leqslant 6N$ implique que $1 - \left| \frac{4N-j}{4N} \right| \geqslant 1/2$, et la 1-sous-symétrie montre l'inégalité.

Il en résulte que $A \leqslant \frac{1}{N}\ \left\| \sum_1^m a_i\ f_i \right\| \leqslant \varepsilon \left\| \sum_1^m a_i\ f_i \right\|$, et le théorème 5 est démontré.

COROLLAIRE 6

Pour $\varepsilon > 0$ *et* $K \geqslant 1$ *fixés, si* M *a été choisi suffisament grand pour que les points de* G_M *forment un* $\frac{\varepsilon}{K}$ *réseau dans le cercle trigonométrique, tout* K*-uple de blocs isonômes sur les* $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *est* $(1+2\varepsilon)$*-inconditionnel au-dessus de* E.

Nous aurons besoin d'avoir une suite fondamentale indexée par $\mathbb{Q}^+$ et non par $\mathbb{N}$. Ceci est aisément réalisé de la façon suivante : Soit $(z_j)_{j\geq 1}$ la suite de blocs sur $(n_u)_{u\geq 1}$ donnée par le théorème 5 ; définissons pour $\ell \geq 1$ $d_1,\dots,d_\ell \in \mathbb{Q}^+$ avec $d_1<\dots<d_\ell$, pour $x \in E$ et $a_1,\dots,a_\ell \in \mathbb{C}$:

$$(1) \qquad \|x + \sum_{i=1}^{j} a_i\, g_{d_i}\| = \lim_{\substack{n_1<\dots<n_j \\ \to +\infty}} \| x + \sum_{i=1}^{j} a_i\, z_{n_i}\| = \|x + \sum_{i=1}^{j} a_i\, f_i\|$$

La quantité $\|x + \sum_{i=1}^{j} a_i\, g_{d_i}\|$ ne dépend pas de $d_1<\dots<d_j$, pourvu que ces rationnels soient dans cet ordre, et l'on a, d'après le théorème 5 :

$$(2) \qquad \|x + \sum_{i\geq 1} \gamma_i\, a_i\, g_{d_i}\| \leq (1+\varepsilon)\, \|x + \sum_{i\geq 1} a_i\, g_{d_i}\| \quad ,$$

pour tout $x \in E$, toute suite finie $(\gamma_i)_{i\geq 1}$ d'éléments de G_M, toute suite finie de scalaires $(a_i)_{i\geq 1}$ et toute suite finie strictement croissante de rationnels d_i.

Cette suite $(g_d)_{d \in \mathbb{Q}^+}$ vérifie également les conclusions du corollaire 6.

Pour démontrer le théorème de J.L. Krivine, nous suivrons partiellement H. Lemberg [49] , et nous aurons besoin de quelques résultats concernant les points-frontières du spectre d'un opérateur. Ces résultats sont bien connus (voir p. ex. H. Dowson [27]) ; nous en donnons la démonstration par souci d'être complet.

LEMME 6 :

Soit E un espace de Banach, T une application linéaire continue de E dans E, λ un point de la frontière du spectre de T. Il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de points de E, de norme 1, avec

$$Tu_n - du_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad .$$

DEMONSTRATION

On se ramène, en remplaçant T par $T-\lambda I$, au cas où T est non inversible et 0 est dans la frontière de son spectre. Si la conclusion est fausse, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|Tx\| \geqslant C\|x\|.$$

Puisque 0 est dans la frontière du spectre on peut trouver $\mu \in \mathbb{C}$ $|\mu| < C/2$, tel que $T-\mu I$ soit inversible. Posons

$$Q = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \mu^n (T-\mu I)^{-(n+1)}.$$

Si $x \in E$, si $y = (T-\mu I)^{-1}$, on a $x = Ty - \mu y$, , et donc
$\|x\| \geqslant \|Ty\| - \|\mu y\| \geqslant \frac{C}{2}\|y\|$, donc $\|(T-\mu I)^{-1}\| \leqslant 2/C$. Comme $|\mu| < C/2$, la série qui définit Q est normalement convergente, et l'on a $TQ = QT = I$; Il en résulte que T est inversible, ce qui contredit l'hypothèse.

LEMME 7

Soit E *un espace de Banach,* T *et* U *deux applications linéaires continues sur* E, *qui commutent, et* λ *un point de la frontière du spectre de* T.
Il existe un point μ *du spectre de* U *et une suite* $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *de points de norme 1 dans* E, *tels que*

$$Tv_n - \lambda v_n \underset{n+\infty}{\to} 0 \quad ; \quad Uv_n - \mu v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

DEMONSTRATION

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$, et $\tilde{E} = E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ l'ultrapuissance associée. Les opérateurs T et U s'étendent naturellement à $\tilde{E}$, en des opérateurs $\tilde{T}, \tilde{U}$. Si $\tilde{u} = (u_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite donnée par le lemme 6, pour un λ dans la frontière du spectre de S, on obtient :

$$\tilde{T}\tilde{u} = \lambda \tilde{u}.$$

Soit $Z = \{y \in \tilde{E}, \tilde{T}y = \lambda y\}$. C'est un sous-espace fermé de $\tilde{E}$, non réduit à $\{0\}$, et invariant par $\tilde{u}$, puisque $\tilde{T}$ et $\tilde{U}$ commutent.

Soit μ un point frontière du spectre de $\tilde{U}_{|Z}$. D'après le lemme 6, on peut trouver une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ normalisée dans Z, telle que

$$\tilde{U}\, z_n - \mu z_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \quad .$$

Par conséquent, dans l'ultrapuissance $\tilde{\tilde{E}} = \tilde{E}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, il existe un élément ω de norme 1, avec $\tilde{\tilde{U}}\, \omega = \mu\omega$ et $\tilde{\tilde{T}}\omega = \lambda\omega$. (on a noté $\tilde{\tilde{U}}$ et $\tilde{\tilde{T}}$ les extensions de $\tilde{U}$ et $\tilde{T}$ à $\tilde{\tilde{E}}$).

Mais $\tilde{\tilde{E}}$ se plonge isométriquement dans une ultrapuissance $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}'$, où $\mathcal{U}'$ est l'image par une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ d'un ultrafiltre plus fin que $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$. Il existe donc une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de points de E, de norme 1, telle que

$$Tv_n - \lambda v_n \underset{\mathcal{U}'}{\to} 0 \qquad ; \qquad Uv_n - \mu v_n \underset{\mathcal{U}'}{\to} 0$$

On en déduit que cette convergence a lieu pour une sous-suite des v_n, et le lemme est démontré.

De la même façon, on obtient :

<u>LEMME 8</u> :

Soit $(S_i)_{i=1,\ldots,N}$ une famille finie d'endomorphismes, commutant deux à deux, et λ_1 un élément de la frontière du spectre de S_1. Il existe $\lambda_2,\ldots,\lambda_N$, appartenant aux spectres respectifs de $S_2,\ldots,S_N$, et une suite normalisée $(v_k)_{k\geq 1}$ dans E, avec, pour tout $j \geq 1$:

$$S_j\, v_k - \lambda_j\, v_k \underset{k \to +\infty}{\to} 0 \quad .$$

Donnons à présent la preuve du théorème 2.

Soit $\varepsilon > 0$ et $K > 1$ fixés. Considérons M tel que G_M constitue un $\varepsilon/16K^2$ réseau dans le cercle trigonométrique et prenons la suite $(g_d)_{d \in \mathbb{Q}^+}$ donnée par la remarque suivant le corollaire 6.

Cette suite est donc

- I.M.E. au-dessus de E.
- $(1+\varepsilon) - G_M$ inconditionnelle au-dessus de E.
- tout K-uple de blocs isonômes de $(g_d)_{d \in \mathbb{Q}^+}$ est $(1+\frac{\varepsilon}{8K})$ inconditionnel au-dessus de E.

Nous noterons $\mathcal{G}$ la complétion de $E \times \mathbf{C}^{(\mathbf{Q}^+)}$ pour la norme définie en (1) et G le sous-espace engendré par les $(g_d)_{d \in \mathbf{Q}^+ \cap [0\ 1[}$.

Si $f \in \mathcal{G}$, nous notons f_E sa composante dans E et f(d) sa coordonnée sur g_d : ces composantes sont bien définies et sont uniques à cause de l'inconditionnalité de (g_d) au-dessus de E.

Pour $i > 1$, on définit un endomorphisme S_i , de $\mathcal{G}$ dans lui-même, par :

$$(S_i f)(d) = \sum_{k=0}^{i-1} f(id-k)\, 1_{[\frac{k}{i}, \frac{k+1}{i}[}, \quad d \in \mathbf{Q} \cap [0,1[\quad \text{et } (S_i f)_E = f_E.$$

En d'autres termes, S_i se réduit à l'identité sur E, et, sur G, consiste à reproduire i fois les éléments de G sur les segments consécutifs $[\frac{k}{i}, \frac{k+1}{i}[$, $0 \leqslant k < i$. Par exemple, pour i=2,

$$\begin{aligned}(S_2 f)(d) &= f(2d) \quad \text{si } d \in [0,1/2[\ ,\\ &= f(2d-1) \quad \text{si } d \in [1/2,1[\ .\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $S_i\, S_j = S_j\, S_i = S_{ij}$ et que $S_1 = Id_{\mathcal{G}}$.

<u>LEMME 9</u>

Si $f \in G$, *on a, pour tout* $i \geqslant 1$ $\|f\| \leqslant \|S_i f\| \leqslant i\ \|f\|$. *De plus, si* λ_i *est un élément de la frontière de* $S_i|_G$, *on a* $1 \leqslant |\lambda_i| \leqslant i$.

<u>DEMONSTRATION</u>

$$\begin{aligned}\text{On a} \quad \|S_i f\| &= \Big\|\sum_d \sum_{k=0}^{i-1} f(id-k)\, 1_{[\frac{k}{i}, \frac{k+1}{i}[}(d)\, g_d\Big\| ,\\ &\geqslant \Big\|\sum_d f(id)\, 1_{[0, \frac{1}{i}[}(d)\ g_d\Big\| ,\\ &= \Big\|\sum_{d'} f(d')\, g_{d'/i}\Big\| = \|f\| .\end{aligned}$$

et de même

$$\Big\|\sum_d \sum_{k=0}^{i-1} f(id-k)\, 1_{[\frac{k}{i}, \frac{k+1}{i}[}(d)\ g_d\Big\|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{i-1} \Big\| \sum_{d} f(id-k)\, 1_{[\frac{k}{i}, \frac{k+1}{i}[}(d)\, g_d \Big\| ,$$

$$\leqslant i \, \|f\| .$$

D'après le lemme 7 si λ_i est un point frontière du spectre de S_i, il existe une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $S_i f_n - {}_i f_n \to 0$; on en déduit que $1 \leqslant |\lambda_i| \leqslant i$.

Choisissons donc un élément frontière, λ_2, du spectre de S_2 et posons

$$p = \frac{\text{Log } 2}{\text{Log}|\lambda_2|} \qquad \text{si } |\lambda_2| > 1$$

$$p = +\infty \qquad \text{si } |\lambda_2| = 1.$$

Soit alors N un entier tel que chaque point de la boule unité positive de $\ell^{\infty}_{(K)}$ soit à distance au plus $\frac{\varepsilon}{8K}$ d'un point dont les coordonnées sont de la forme $(\frac{iK}{N})^{1/p}$, $i \leqslant \frac{N}{K}$ ceci en norme dans $\ell^1_{(K)}$.

D'après le corollaire 9 on peut trouver des $(\lambda_i)_{3\leqslant i\leqslant N}$ et une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\|v_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in G$ et

$$S_i v_n - \lambda_i v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad i = 1,\ldots N$$

$(\lambda_1 = 1$; λ_2 a déjà été choisi).

On peut supposer que chaque v_n et à support fini sur les g_d , soit

$$v_n = \sum_{k=1}^{k(n)} \alpha_K^{(n)} g_{d_k}$$

Posons alors $g_{n,m} = \sum_{k=1}^{k(n)} \alpha_k^{(n)} g_{d_{k+n}}$.

Pour n fixé, $g_{n,m}$ est une suite de blocs isonômes sur les $(g_d)_{d \in \mathbb{Q}^+}$ et $g_{n,m}$ a son "support" dans $[m,m+1[$ (par définition, le support de $g_{n,m}$ est l'ensemble des $d \in \mathbb{Q}^+$ tels que $g_{n,m}(d) \neq 0$).

Nous noterons supp f < supp g si $\forall d \in$ supp f, $\forall d' \in$ supp g, $d < d'$.

LEMME 10

Soient n, ℓ *deux entiers* $\geqslant 1$ *et* $f, g \in \mathcal{G}$ *, avec :*

$$\text{supp } f < \text{supp } S_i(g_{n,\ell}) < \text{supp } g$$

$$\text{supp } f < \text{supp } \Big(\sum_{j=0}^{i-1} g_{n,\ell+i}\Big) < \text{supp } g .$$

Alors $\|f + S_i(g_{n,\ell}) + g\| = \|f + \sum_{j=0}^{i=1} g_{n,\ell+i} + g\|$.

DEMONSTRATION

C'est une conséquence immédiate de la propsirét d'écartabilité de la famille (g_d).

En particulier, pour chaque ℓ, on a :

$$\| S_i\, g_{n,\ell} - \lambda_i\, g_{n,\ell}\| = \| S_i\, f_n^{(N)} - \lambda_i f_n^{(N)}\|$$

et ceci peut être rendu $< \varepsilon$, pour tout $i \leqslant N$, en choisissant n assez grand. On aura alors :

(3) $$\Big|\, \|f + \sum_{j=0}^{i} g_{n,\ell+i} + g\| - \| f + \lambda_i\, g_{n,\ell} + g\|\, \Big| \leqslant \varepsilon .$$

Soit maintenant $\mathcal{U}$, n un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. Définissons une norme sur $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ par :

$$\|\sum_i a_i\, e_i\| = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|\sum_i a_i\, g_{n,i}\|$$

LEMME 11

1° Pour tout $\ell \leqslant N$ *et* $k \geqslant 1$ $\|\sum_{i=0}^{\ell^k - 1} e_i\| = |\lambda_\ell|^k$.

2°) Pour tout $\ell \leqslant N$ $|\lambda_\ell| = \ell^{1/p}$.

DEMONSTRATION 1) Pour $\ell \leqslant N$ on a d'après (3) :

$$\|\sum_{i=0}^{\ell-1} e_i\| = \lim_{n, \mathcal{U}} \|\sum_{i=0}^{\ell-1} g_{n,i}\| = |\lambda_\ell| .$$

Ceci prouve 1) pour k = 1 ; admettons la propriété pour l'entier k. On a :

$$\left\| \sum_{i=0}^{\ell^{k+1}} e_i \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=(j-1)\ell^k}^{j\ell^k-1} e_i \right\| = \lim_{n,} \left\| \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=(j-1)\ell^k}^{j\ell^k-1} g_{n,i} \right\|$$

et en utilisant (3) et l'hypothèse de récurrence on obtient

$$= |\lambda_\ell|^{k+1} \| e_1 \|$$

2°) Pour chaque n, la suite $(g_{n,m})_{m\geqslant 1}$ est IME , la suite $(e_i)_{i\geqslant 1}$ l'est donc aussi.

En particulier la suite des normes :

$$\left(\left\| \sum_{i=1}^{\ell} e_i \right\| \right)_{\ell \geqslant 1} \text{ est croissante.}$$

Donc si i et j sont inférieurs ou égaux à N, on a pour tout $m \geqslant 1$ et tout $k \geqslant 1$

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{si } i^m \leqslant j^k & \text{alors } |\lambda_i|^m \leqslant |\lambda_j|^k , \\ \text{si } i^m \geqslant j^k & \text{alors } |\lambda_i|^m \geqslant |\lambda_j|^k . \end{cases}$$

Les conditions (4) impliquent que si l'un des λ_i vérifie $|\lambda_i| = 1$ avec $i > 1$, il en est de même de tous les autres : dans ce cas $p = +\infty$

Exception ce cas et pour chaque $N \geqslant \ell > 1$ définissons p_ℓ (avec $1 \leqslant p_\ell < +\infty$) par $p_\ell = \dfrac{\log \ell}{\log |\lambda_\ell|}$.

Supposons que pour deux indices $i,j > 1$ on ait $p_i < p_j$ et choisissons m et k en sorte que

$$m \frac{\mathrm{Log}\ i}{\mathrm{Log}\ j} \leqslant k < \frac{p_j}{p_i} \frac{m \,\mathrm{Log}\ i}{\mathrm{Log}\ j} ,$$

on aura $j^k \geqslant i^m$ et $|\lambda_j|^k \leqslant |\lambda_i|^m$, ce qui contredit (4).

Donc $\forall\, i,j \quad 1 < i,j \leqslant N$, $p_i = p_j$ et le lemme est établi (rappelons que l'on a toujours $\lambda_1 = 1 = 1^{1/p}$ pour tout $p \in [1+\infty]$!).

LEMME 13

Si k, ε, M, p *et* N *sont choisis comme précédemment, si* n *est assez grand, la suite* $(g_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ *de blocs isonômes à* v_n *définit une* ε-$\ell^p_{(k)}$ *extension de* E.

DEMONSTRATION

Distinguons 2 cas.

1) $p < +\infty$.

Choisissons n assez grand pour que si $i \leqslant N$

$$\| T_i v_n - \lambda_i v_{n_i} \| \leqslant \varepsilon/8k$$

On a donc, si $\mathrm{supp}(x) < \mathrm{supp}(\sum_{j=1}^{i} g_{n,q+j}) < \mathrm{supp}(y)$

$$\left| \left\| x + \sum_{j=0}^{i-1} g_{n,q+j} + y \right\| - \| x + \lambda_i g_{n,q} + y \| \right| < \varepsilon/8k \quad .$$

A présent, si les m_q $1 \leqslant q \leqslant k$ sont des entiers avec $m_q \leqslant \frac{N}{k}$ et $x \in E$, on a :

$$\left| \left\| x + \sum_{q=1}^{k} \frac{\lambda_{m_q}}{|\lambda_{m_q}|} m_q^{1/p} g_{n,q} \right\| - \left\| x + \sum_{q=1}^{P} g_{n,q} \right\| \right| < k\, \varepsilon/8k$$

où $P = \sum_{q=1}^{k} m_q \leqslant k \frac{N}{k} \leqslant N$. $\quad (|\lambda_{m_q}| = m_q^{1/p})$.

Mais puisque $P \leqslant N$:

$$\left| \left\| x + \sum_{q=1}^{P} g_{n,q} \right\| - \left\| x + \frac{\lambda_P}{|\lambda_P|} P^{1/p} g_{n,1} \right\| \right| \leqslant \varepsilon/8k.$$

La $(1+\varepsilon/8k)$ inconditionalité de $(g_{n,q})_{1 \leqslant q \leqslant k}$ permet alors d'écrire :

$$\left| \left\| x + \sum_{q=1}^{k} m_q^{1/p} g_{n,q} \right\| - \left\| x + \left(\sum_{q=1}^{k} m_q\right)^{1/p} g_{n,1} \right\| \right|$$

$$\leqslant (k+1)\,\varepsilon/8k + P^{1/p} \varepsilon/8k + \left(\sum_{q=1}^{k} m_q^{1/p}\right)\varepsilon/8k$$

Soit encore

$$\left| \left\| x + \sum_{q=1}^{k} \left(\frac{m_q k}{N}\right)^{1/p} g_{n,q} \right\| - \left\| x + \left(\sum_{q=1}^{k} \frac{m_q k}{N} \right)^{1/p} g_{n,1} \right\| \right|$$

$$\leqslant \left(\frac{1+k}{N}\right)^{1/p} \varepsilon/8k + \left(\frac{kP}{N}\right)^{1/p} \varepsilon/8k + \left(\sum_{q=1}^{k} \left(\frac{m_q k}{N}\right)^{1/p}\right) \varepsilon/8k.$$

A présent pour terminer :

Soit $(\alpha_q)_{q\leqslant k}$ une suite de complexes avec $\left(\sum_{q=1}^{k} |\alpha_q|^{p}\right)^{1/p} \leqslant 1.$

On choisit des $(m_q)_{q\leqslant k}$ tels que $\sum_{q=1}^{k} \left| |\alpha_q| - \left(\frac{m_q k}{N}\right)^{1/p}\right| \leqslant \varepsilon/8k$; en particulier $\sum_{q=1}^{k} \left(\frac{m_q k}{N}\right)^{1/p} \leqslant 1 + \varepsilon/8k.$

D'où $$A = \left| \left\| x + \sum_{q=1}^{k} \alpha_q g_{n,q} \right\| - \left\| x + \left(\sum_{1}^{k} |\alpha_q|^{p}\right)^{1/p} g_{n,1} \right\| \right|$$

$$\leqslant \left| \left\| x + \sum_{q=1}^{k} |\alpha_q| g_{n,q} \right\| - \left\| x + \left(\sum_{1}^{k} |\alpha_q|^{p}\right)^{1/p} g_{n,1} \right\| \right|$$

$$+ k\, \varepsilon/8k$$

par $(1 + \varepsilon/8k)$ inconditionnalité.

Enfin

$$A \leqslant \frac{k\varepsilon}{8k} + \left(\frac{1+k}{N}\right)^{1/p} \frac{\varepsilon}{8k} + \left(\frac{k\,P}{N}\right)^{1/p} \frac{\varepsilon}{8k} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{8k}\right) \frac{\varepsilon}{8k}$$

$\leqslant \varepsilon$. Ce qui achève la preuve pour $p < +\infty$.

2) $p = +\infty$:

La preuve est beaucoup plus simple, elle est laissée au lecteur.

A présent pour montrer le théorème 2, il suffit de prouver qu'il existe un même $p \in [1+\infty]$ valable pour tout $\varepsilon > 0$ et tout k entier.

Pour cela fixons k en un premier temps, et considérons l'ensemble $A_k = \{ p(\frac{1}{n},k) \ ; \ n \in \mathbb{N} \}$.

Si cet ensemble est fini, il existe un p(k) qui convient pour une infinité de valeurs de n et la question ne se pose pas.

Dans le cas contraire soit p(k) un point d'accumulation de l'ensemble A_k dans $[1 + \infty]$.

Choisissons n en sorte que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$ et si $\alpha_1 \dots \alpha_k$ sont des complexes

$$\left| \, \|(\alpha_i)\|_{p(k)} - \|(\alpha_i)\|_{p(\frac{1}{n},k)} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \|(\alpha_i)\|_{p(k)}$$

(où $\|(\alpha_i)\|_q = (\sum_1^k |\alpha_i|^q)^{1/q}$) .

Alors

$$\left| \, \|x + \sum_{q=1}^{k} \alpha_i \, g_{n,q}\| - \|x + (\sum_{q=1}^{k} |\alpha_i|^{p(k)})^{1/p(k)}\| \right| \leqslant$$

$$\leqslant \quad \frac{1}{n} (\|(\alpha_i)\|_{p(\frac{1}{n},k)} + \frac{\varepsilon}{4} \|(\alpha_i)\|_{p(k)}$$

$$\leqslant \quad (\frac{\varepsilon}{4} (1 + \frac{\varepsilon}{4}) + \frac{\varepsilon}{4}) \, \|(\alpha_i)\|_{p(k)}$$

ce qui prouve que la suite $g_{n,q}$ qui donnait une $\frac{\varepsilon}{4} - \ell_k^{p(\frac{1}{n},k)}$ extension donne également une $\varepsilon - \ell_k^{p(k)}$ extension.

A présent nous avons montré que pour chaque k il existe $p(k) \in [1 + \infty]$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on puisse trouver des blocs isonômes de notre suite de départ, dont l'extension est une $\varepsilon - \ell_k^{p(k)}$ extension.

Un raisonnement en tout point semblable au précédent , permet de trouver un $p \in [1+ \infty]$ valable pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in N$.

2. EXTENSION DE TYPE ℓ^p.

Nous dirons qu'une extension $\mathscr{F}$ est une ε-ℓ^p extension de E ($\varepsilon > 0$, $1 < p < + \infty$) si, pour tout $n \geqslant 1$, c'est une ε-$\ell^p_{(n)}$ extension au sens de la définition 1, du paragraphe précédent. Pour $p = + \infty$, nous parlerons de c_o-extension .

En particulier (pour $\varepsilon = 0$), $\mathscr{F}$ sera une ℓ^p-extension si sa suite fondamentale (e_n) vérifie

$$\| x + \Sigma a_i e_i \| = \| x + (\Sigma |a_i|^p)^{1/p} e_1 \|$$

pour tout $x \in E$ et toute suite finie de scalaires (a_i) .

THEOREME 1

Si $\mathscr{F}$ est une ℓ^p-extension de E ($1 \leqslant p < +\infty$) (resp. une c_o-extension), définie par une suite étalante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \geqslant 1$, $(y_n)_{n \geqslant k}$ soit $(1 + \frac{1}{k})$ équivalente à la base canonique de ℓ^p (resp. c_o) c'est-à-dire vérifie

$$(1 - \frac{1}{k})(\sum_{i \geqslant k} |a_i|^p)^{1/p} \leqslant \| \sum_{i \geqslant k} a_i y_i \| \leqslant (1 + \frac{1}{k})(\sum_{i \geqslant k} | a_i|^p)^{1/p}$$

pour toute suite finie de scalaires a_k , $a_{k+1}, \dots,$.

DEMONSTRATION

Fixons $\varepsilon > 0$. Nous allons construire une suite décroissante de parties infinies de $\mathbb{N}$, notées $\mathbb{N}_k$, avec $n_k = \min N_k$ strictement croissant.

Choisissons un ensemble infini $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tel que, si $m, n \in \mathbb{N}_1$, on ait $\forall \alpha \beta \in \mathbb{R}$,

$$| \|\alpha x_m + \beta x_n\| - \| (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} x_n\| | < \varepsilon/2$$

et prenons $n_1 = \min \mathbb{N}_1$.

Supposons $\mathbb{N}_1,\dots,\mathbb{N}_k$ choisis et soient $n_1 = \min \mathbb{N}_1,\dots,n_k = \mathrm{Min}\, \mathbb{N}_k$, avec $n_1 < \dots < n_k$. Considérons l'espace vectoriel engendré par $x_{n_1},\dots,x_{n_k}$. Choisissons un $\frac{\varepsilon}{6.2^k}$ - réseau dans la boule unité de cet espace vectoriel : appelons-le F_k.De même, choisissons G_k qui soit un $\varepsilon/6.2^k$ réseau dans la boule unité de $\ell^p_{(2)}$, pour la norme de $\ell^1_{(2)}$.

Par définition d'une ℓ^p extension, on peut trouver $\mathbb{N}_{k+1} \subset \mathbb{N}_k$ tel que

$$\forall x \in F_k \ , \ \forall (\alpha, \beta) \in G_k \ , \ \forall m,n \in \mathbb{N}_{k+1}$$

$$\big| \, \| x + \alpha x_m + \beta x_n \| - \| x + (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} x_n \| \, \big| \leqslant \varepsilon/3.2^k \ .$$

On en déduit que pour tout $x \in \operatorname{span}\{ x_{n_1}, \dots, x_{n_k} \}$, tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tous $m,n \in \mathbb{N}_{k+1}$:

$$(1) \qquad \big| \, \| x + \alpha x_m + \beta x_n \| - \| x + (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} x_n \| \, \big|$$

$$\leqslant 2^{-k} \varepsilon \ \max\{ \| x \| , (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} \} \ .$$

Nous posons $n_{k+1} = \min \mathbb{N}_{k+1}$. Nous allons montrer que la suite $(x_{n_k}) = (y_k)$ ainsi construite possède la propriété annoncée.

Soient maintenant $N \geqslant 1$ et $a_1, \dots, a_N$ des scalaires avec $\sum_{k=1}^{N} |a_i|^p = 1$. En appliquant N-1 fois l'inégalité (1), on obtient :

$$(2) \qquad \Big| \, \Big\| \sum_{k=1}^{N} a_k x_{n_k} \Big\| - 1 \, \Big| \leqslant \varepsilon \max \Big\{1 \ ; \ \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \Big\| \sum_{1}^{j} a_k x_{n_k} \Big\| \Big\} \ .$$

Supposons le maximum de $\| \sum_{1}^{j} a_k x_{n_k} \|$ atteint pour j_o $1 \leqslant j_o \leqslant N$; on aura, appliquant à nouveau ce raisonnement :

$$\Big\| \sum_{k=1}^{j_o} a_k x_{n_k} \Big\| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{j_o} |a_k|^p \Big)^{1/p} + \varepsilon \max\Big(1, \Big\| \sum_{k=1}^{j_o} a_k x_{n_k} \Big\| \Big)$$

et donc $\displaystyle \Big\| \sum_{k=1}^{j_o} a_k x_{n_k} \Big\| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}$.

Il en résulte alors de (2) que $\displaystyle \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \leqslant \Big\| \sum_{1}^{N} a_k x_{n_k} \Big\| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}$.

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit maintenant, prenant $\varepsilon = 1, 1/2, \dots, 1/m, 1/m+1, \dots$, d'extraire des sous suites $(x^{(m)}_{n_k})_{k \geqslant 1}$, $m \geqslant 1$, la suite $(x^{(m)}_{n_k})_{k \geqslant 1}$ étant une sous-suite de $(x^{(m-1)}_{n_k})_{k \geqslant 1}$, et de prendre la suite diagonale $(x^{(m)}_{n_m})_{m \geqslant 1}$.

Le théorème 2 du précédent paragraphe et le théorème 1 ci-dessus montrent bien la différence entre des $\ell^p_{(n)}$-extensions et des ℓ^p-extensions les premières peuvent être réalisées sur des blocs de n'importe quelle suite étalante, les secondes exigent que la suite ait elle-même une sous-suite équivalente à la base de ℓ^p.

*

CHAPITRE VII

ESPACES DE BANACH STABLES

Dans ce chapitre, nous étudions une classe d'espaces de Banach, qui a été introduite par J.L. Krivine et B. Maurey [46] pour étendre le théorème suivant, dû à A. Aldous [2] :

THEOREME

Si E est un sous-espace fermé de dimension infinie de L^1, il existe un p, $1 \leqslant p < +\infty$, tel que E contienne un sous-espace isomorphe à ℓ^p.

Suivant J.L. Krivine et B. Maurey, nous allons maintenant développer la théorie des espaces stables et examiner comment les notions introduites se rattachent à celles de modèle étalé et d'extension. Comme [46], nous nous limitons aux espaces séparables.

1. TYPES SUR UN ESPACE DE BANACH SEPARABLE.

Soit E un espace de Banach séparable. Pour chaque $a \in E$, on note $\tau_a(x)$ la fonction

$$\tau_a(x) = \|a + x\|, \tag{1}$$

et on l'appelle type sur E réalisé par a. Notons $\mathscr{E} = \{\tau_a \; ; \; a \in E\}$ l'ensemble des types réalisés ; c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+^E$. L'espace $\mathbb{R}_+^E$ est muni de la topologie produit (topologie de la convergence simple sur les éléments de E) ; on note $\mathscr{T}$ et on appelle espace des types sur E la fermeture de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}_+^E$.

PROPOSITION 1

L'espace $\mathscr{T}$ est métrisable, séparable, et localement compact.

DEMONSTRATION

Les types sur E sont des fonctions contractantes sur E : $|\tau(x) - \tau(y)| \leqslant \|x-y\|$ (cette propriété est vraie pour les types réalisés, elle s'étend aux autres par densité de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{T}$). Notons Δ une partie dénombrable dense dans E. L'espace $\mathscr{T}$ est donc un sous-espace de $\mathbb{R}^{\Delta}$ muni de la topologie produit, qui est un espace métrisable et séparable.

Pour chaque $r > 0$, notons $\mathscr{T}_r = \{\tau \in \mathscr{T} ; \ \tau(0) \leqslant r\}$. Cet ensemble est compact, car il est fermé dans le compact $\prod_{x \in E} [0, r + \|x\|]$ ($\mathscr{T}_r$ est contenu dans ce compact, car, pour chaque x, $\tau(x) \leqslant \tau(0) + \|x\|$).

Si donc τ est un type quelconque sur E, l'ensemble $\{\sigma \in \mathscr{T}; \sigma(0) \leqslant \tau(0) + 1\}$ est un voisinage compact de τ.

L'ensemble $\mathscr{T}$ étant métrisable, chaque type τ est limite d'une suite d'éléments de $\mathscr{E}$. On peut donc trouver une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de E et un ultrafiltre U sur N tels que :

$$(2) \quad \tau(x) = \lim_{n,U} \|a_n + x\|.$$

La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ peut être prise bornée dans E, puisque $\lim_U \|x_n\| = \tau(0)$.

Il est clair que si x'_n est une autre suite avec $a_n - a'_n \underset{U}{\to} 0$ dans E, on a aussi $\tau(x) = \lim_U \|a'_n + x\|$; en d'autres termes, si $\tilde{a}$ est l'élément de l'ultrapuissance $E^{\mathbb{N}}/U$, on a :

$$\tau(x) = \|\tilde{a} + x\|_{E^{\mathbb{N}}/U} .$$

Si on extrait de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite $(a'_n)_{n\geqslant 1}$ étalante, le type τ associé est

$$\tau(x) = \|x + e_1\| ,$$

avec les notations du chapitre I.

Inversement, il est clair que si une suite bornée $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et un ultrafiltre U sur $\mathbb{N}$ sont donnés, la formule (2) définit un type sur E, qui est limite des types réalisés τ_{a_n}. Ce type sera noté $\tau_{(a_n),U}$, ou plus simplement $\tau_{(a_n)}$.

La seule opération qui puisse a priori être définie sur $\mathscr{T}$ est la dilatation par un scalaire λ. Sur $\mathscr{E}$, elle est définie par

$$D_\lambda \tau_a(x) = ||x + \lambda a|| = |\lambda| \tau_a(\frac{x}{\lambda}) = \tau_{\lambda a}(x) \quad ,$$

et cette définition s'étend par densité à $\mathscr{T}$. Il en résulte que si $\tau \in \mathscr{T}$, si $\tau_{a_n} \underset{\mathscr{U}}{\to} \tau$, on a :

$$D_\lambda \tau(x) = \operatorname*{Lim}_U ||x + \lambda a_n|| \quad .$$

2. ESPACES DE BANACH STABLES.

DEFINITION :

On dira qu'un espace de Banach E *est stable si, pour toutes suites* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(y_m)_{m\geqslant 1}$, *tous ultrafiltres* U, V *sur* $\mathbb{N}$, *on a :*

(3) $$\operatorname*{Lim}_{n,U} \operatorname*{Lim}_{m,V} ||x_n + y_m|| = \operatorname*{Lim}_{m,V} \operatorname*{Lim}_{n,U} ||x_n + y_m|| \; .$$

L'exemple le plus immédiat d'espace stable est l'espace de Hilbert, puisque

$$||x_n + y_m||^2 = ||x_n||^2 + ||y_m||^2 + 2 \operatorname{Re} < x_n, y_m > ,$$

et si $x = \operatorname*{Lim}_U x_n$, pour $\sigma(E,E')$

$y = \operatorname*{Lim}_V y_m$

$$\operatorname*{Lim}_{n,U} \operatorname*{Lim}_{m,V} <x_n,y_m> = <x,y>$$
$$= \operatorname*{Lim}_{m,V} \operatorname*{Lim}_{n,U} <x_n,y_m> .$$

A l'inverse, l'espace c_o n'est pas stable : si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est la base canonique et $(y_m)_{m\geqslant 1}$ la base sommante, il est aisé de voir que (3) n'est pas satisfait.

Les espaces L^p $(1 < p < +\infty)$ sont stables. Nous renvoyons à [46] pour la démonstration de ce résultat.

Dans un espace stable, on peut définir une nouvelle opération sur l'ensemble des types, appelée convolution.

PROPOSITION 2

Soit E *un espace stable,* σ *et* τ *deux types sur* E.

La formule :

(4) $$(\sigma * \tau)(x) = \lim_{n,U} \lim_{m,V} \|x + x_n + y_m\| \quad , x \in E,$$

si $\tau_{x_n} \xrightarrow[U]{} \sigma$ *et* $\tau_{y_m} \xrightarrow[V]{} \tau$,

définit un type sur E, *appelé produit de convolution de* σ *et* τ.

Cette opération est commutative, et séparément continue.

DEMONSTRATION

Il faut tout d'abord vérifier que cette définition a un sens, c'est-à-dire qu'elle est indépendante des suites bornées $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_m)_{m\geq 1}$ et des ultrafiltres U et V, tels que

$$\tau_{x_n} \xrightarrow[U]{} \sigma \quad \text{et} \quad \tau_{y_m} \xrightarrow[V]{} \tau \ .$$

Soient donc $(x'_n)_{n\geq 1}$, $(y'_m)_{m\geq 1}$, U', V' avec les mêmes propriétés.

On a, pour $x \in E$:

$$\begin{aligned} \lim_{n,U} \lim_{m,V} \|x + x_n + y_m\| &= \lim_{n,U} \tau(x+x_n) \\ &= \lim_{n,U} \lim_{m,V'} \|x + x_n + y'_m\| \\ &= \lim_{m,V'} \lim_{n,U} \|x + x_n + y'_m\| \quad , \text{par stabilité} \\ &= \lim_{m,V'} \sigma(x + y'_m) \\ &= \lim_{m,V'} \lim_{n,U'} \|x + x'_n + y'_m\| , \end{aligned}$$

et la définition a donc bien un sens.

Elle s'écrit encore

$$(\sigma * \tau)(x) = \lim_{n,U} \tau(x+x_n) \ .$$

Or, pour chaque n, l'appplication $x \to \tau(x+x_n)$ est un type sur E, défini par la suite bornée $(y_m+x_n)_{m\geq 1}$, donc $\sigma * \tau$ est limite d'une suite de types sur E, et c'est donc un type sur E.

Il est clair que, du fait de la stabilité, le produit de convolution est commutatif. Nous allons maintenant montrer qu'il est séparément continu.

Nous utiliserons le lemme élémentaire suivant :

LEMME 3

Soit $\mathcal{T}$ un espace métrique , D une partie dense de $\mathcal{T}$, et ϕ une application de $\mathcal{T}$ dans R telle que si $\tau \in \mathcal{T}$, si $\delta_n \in D$ et $\delta_n \to \tau$, alors $\phi(\delta_n) \to \phi(\tau)$. Alors ϕ est continue sur $\mathcal{T}$.

Fixons $\sigma \in \mathcal{T}$ et $x \in E$. Prenons pour D l'ensemble $\{\tau_a \ ; a \in \Delta\}$ (Δ dénombrable dense dans E), et pour ϕ l'application $\tau \to \tau * \sigma(x)$.

L'hypothèse du lemme est réalisée : si $\tau \in \mathcal{T}$, si $(\tau_{d_m})_{m\geq 1}$ est une suite d'éléments de D avec $\tau_{d_m} \underset{V}{\to} \tau$ on a $\tau(x) = \operatorname{Lim}_V \|d_m+x\|$, et donc :

$$\operatorname*{Lim}_{m,V} \sigma * \tau_{d_m}(x) = \operatorname*{Lim}_{m,V} \operatorname*{Lim}_{n,U} \|x + d_m + x_n\|$$

$$= \operatorname*{Lim}_{n,U} \operatorname*{Lim}_{m,V} \|x + d_n + y_m\| = \operatorname*{Lim}_{n,U} \tau(x + x_n)$$

$$= \sigma * \tau (x),$$

et la conclusion résulte du lemme.

Une conséquence immédiate de la définition de la stabilité est que, si E est stable, la suite fondamentale de tout modèle étalé de E est symétrique au-dessus de E :

Pour toute permutation π de N et toute famille finie (a_i) de scalaires, on a :

$$(5) \qquad \|x + \Sigma\, a_i\, e_i\| = \|x + \Sigma\, a_{\pi(i)}\, e_{\pi(i)}\| .$$

En particulier, si $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est basique, c'est une suite basique symétrique, donc inconditionnelle.

Avec les notations du produit de convolution, si $(x_n)_{n\geq 1}$ est la suite étalante de E définissant le modèle étalé considéré, si U est un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$, si τ est le type défini par $(x_n)_{n\geq 1}$ et U , (5) s'écrit :

$$\|x + \sum_1^k a_i\, e_i\| = (D_{\alpha_1} \tau * \cdots * D_{\alpha_k} \tau)(x).$$

3. CLASSES CONIQUES DANS L'ENSEMBLE DES TYPES

Soit E un espace de Banach séparable, stable. Nous désignons par G l'ensemble $\{-1,+1\}$ si E est réel, ou le cercle trigonométrique si E est complexe.

Nous notons $\mathscr{S}$ le sous-ensemble des types sur E qui sont G-invariants, c'est-à-dire qui vérifient :

$$\tau(gx) = \tau(x) \quad , \forall\, g \in G.$$

De tels types seront aussi appelés types symétriques.

Il n'est pas difficile de voir que dans un espace de dimension infinie, $\mathscr{S}$ n'est jamais réduit à $\{\tau_o\}$. Mais si E est stable, on peut remarquer que, pour tout $\tau \in \mathscr{T}$:

- Si E est réel, $\tau * (D_{-1}\tau)$ est G-invariant,
- Si E est complexe, $\lim\limits_{n,U} \mathop{*}\limits_{k=1}^{2^n} (D_{e^{\frac{2ik\pi}{2^n}}}\tau) \,/\, (\mathop{*}\limits_{k=1}^{2^n} D_{e^{\frac{2ik\pi}{2^n}}}\tau)(0)$

  est G-invariant.

DEFINITION :

Une partie C *non vide de* $\mathscr{S}$ *sera appelée classe conique si :*

a) C *est fermée dans* $\mathscr{T}$, *et n'est pas réduite au type trivial* τ_o $(\tau_o(x) = \|x\|)$.

b) si $\tau \in C$ *et* $\lambda > 0$, $D_\lambda\tau \in C$.

c) si $\tau,\sigma \in C$, $\tau * \sigma \in C$.

Nous noterons $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S} \cap \{\tau \in \mathscr{T} , \tau(0) = 1\}$; c'est une partie compacte (non vide) de $\mathscr{S}$, et $C_1 = C \cap \mathscr{S}_1$ est un compact (non-vide), qui détermine C, puisque $C = \{D_\lambda\tau \ ; \ \tau \in C_1, \ \lambda > 0\}$.

L'ensemble des classes coniques sera ordonné par inclusion.

LEMME 4

Toute classe conique contient une classe conique minimale.

DEMONSTRATION

Montrons que l'ensemble des classes coniques est inductif : soit $(C^{(i)})_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée. L'intersection $\bigcap_{i \in I} C_1^{(i)}$ est une famille décroissante de compacts non vides, donc $\bigcap_{i \in I} C^{(i)}$ n'est pas réduite au type trivial τ_o : c'est donc une classe conique. D'après l'axiome de Zorn, chaque classe conique contient donc une classe conique minimale.

Nous avons vu au chapitre VI, § I , déf. 1, la définition d'une ε-$\ell^p_{(n)}$ extension $\mathscr{F}$ de E.

LEMME 5

Soit C *une classe conique. Il existe un* p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $n \geqslant 1$, *on puisse trouver une suite étalante* $(z_k)_{k \geqslant 1}$, *définissant une* ε-$\ell^p_{(n)}$ *extension de* E, *et telle que le type associé* $\tau_{(z_k)}$ *soit dans* C.

DEMONSTRATION

Soit $\tau = \tau_{(x_n)}$ un type dans C. Appliquons le théorème de Krivine (th. 2, § I, chap. VI), à la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$: il existe un p tel que, pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque $n \geqslant 1$, on puisse trouver une suite de blocs isonômes $(z_k)_{k \geqslant 1}$, définissant une ε-$\ell^p_{(n)}$ extension de E. Si par exemple $z_k = a_1 x_{Nk+1} + \ldots + a_N x_{N(k+1)}$, on aura :

$$\tau_{(z_k)}(x) = \lim_{k \to +\infty} \|x+z_k\|$$
$$= (D_{a_1}\tau * \ldots * D_{a_n}\tau)(x).$$

et donc $\tau_{(z_k)} \in C$, d'après les propriétés b) et c) des classes coniques. Ceci prouve le lemme.

Soit $\tau = \tau_{(x_n),U}$ un type non réalisé sur E. Puisque E est séparable on peut trouver une sous-suite $(x'_n)_{n \geqslant 1}$ telle que

$$\tau(x) = \lim_{n \to +\infty} \|x+x'_n\| \quad , \text{ pour tout } x \in E \ ,$$

c'est-à-dire considérer τ comme défini par une suite étalante, au sens du chapitre I. C'est ce que nous ferons désormais. On peut alors dire que $\tau_{(x_k)}$ définit une ε-$\ell^p_{(n)}$ extension si cette suite $(x_k)_{k>1}$ définit une ε-$\ell^p_{(n)}$ extension.

DEFINITION

Soit $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ une suite de types sur E, et soit p, $1 \leq p \leq +\infty$.
Nous dirons que la suite $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ est p-approximante si :

a) $\sup_n \sigma_n(0) < +\infty$.

b) il existe une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que chaque σ_n définisse une ε_n-$\ell^p_{(2)}$ extension de E.

LEMME 6

Soit C une classe conique minimale. Il existe un p, $1 \leq p \leq +\infty$ tel que tout élément de C soit limite d'une suite p-approximante.

DEMONSTRATION

Soit p donné par le lemme 5. Prenons ε_k une suite tendant vers 0, n=2 ; le lemme 5 nous donne dans C un type τ_k qui définit une ε_k-$\ell^p_{(2)}$ extension de E. Puisque $\sup_k \tau_k(0) \leq 2$, les (τ_k) se trouvent dans un ensemble compact de $\mathscr{T}$; il existe donc une sous-suite convergeant vers un $\tau \in C$: ce τ est donc limite d'une suite p-approximante. De plus, comme $\tau_k(0) \geq 1/2$, $\tau(o) \geq 1/2$.

Soit maintenant C' l'ensemble des types de C qui sont limites de suites p-approximantes. Un argument diagonal montre que C' est fermé. Nous venons de voir que C' n'est pas réduit au type trivial τ_0. C'est évidemment stable par dilatation. Enfin, si τ_n et σ_n sont des suites p-approximantes convergeant vers τ et σ, on peut trouver, puisque le produit de convolution est séparément continu, une suite d'entiers m_n telle que $\tau_n * \sigma_{m_n} \to \tau * \sigma$, et on vérifie immédiatement que $\tau_n * \sigma_{m_n}$ est encore p-approximante.

C'est donc une classe conique contenue dans C, et par conséquent C' = C puisque C est minimale. Ceci prouve le lemme.

LEMME 7

Soit C *une classe conique minimale. Il existe un* p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *et un* $\tilde{\tau} \in C$, *avec* $\tilde{\tau}(0) \neq 0$, *tels que, pour tout* $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, *on ait*

$$D_\alpha \tilde{\tau} * D_\beta \tilde{\tau} = D_{(|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p}} \tilde{\tau} .$$

DEMONSTRATION

Soit $\mathcal{S}'_1 = \{\tau \in \mathcal{S} \ ; \ \tau(0) \leqslant 1\}$. C'est un sous-ensemble compact de $\mathcal{S}$. Soit Δ, comme précédemment, une partie dénombrable dense dans E. Pour chaque couple $\alpha,\beta \in \mathbb{Q}^+$ et chaque $a \in \Delta$, définissons une fonction de $\mathcal{S}'_1$ dans R^+ par :

$$\psi_{\alpha,\beta,a}(\tau) = (D_\alpha \tau * D_\beta \tau)(a).$$

On obtient ainsi une famille dénombrable de fonctions. Nous allons voir qu'elles ont un point de continuité en commun $\tilde{\tau}$, dans l'ouvert $0 = \{\tau \in C \ ; \ 0 < \tau(0) < 1\}$.

Pour cela, il suffit de démontrer que chacune de ces fonctions est de première classe de Baire (i.e. limite simple d'une suite de fonctions continues). Mais, pour $\alpha,\beta \in \mathbb{Q}^+$ fixés, $a \in D$, la fonction $\phi : (\tau,\sigma) \to (D_\alpha \tau * D_\beta \sigma)(a)$ est séparément continue, donc de première classe de Baire : il existe donc une suite $(\phi_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions continues, convergeant simplement vers ϕ, et $\phi_n(\tau,\tau)$ converge vers $\psi_{\alpha,\beta,a}(\tau)$.

Soit $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ une suite p-approximante, convergeant vers $\tilde{\tau}$. Puisque $\tilde{\tau}$ est point de continuité, on a :

$$\Psi_{\alpha,\beta,a}(\tau_n) \underset{n \to +\infty}{\to} \psi_{\alpha,\beta,a}(\tilde{\tau}).$$

Il en résulte que

$$(D_\alpha \tilde{\tau}) * (D_\beta \tilde{\tau}) = D_{(|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p}} \tilde{\tau}.$$

Mais $\tilde{\tau}$ est G-invariant, et on en déduit la formule ci-dessus pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$.

Par réitération, on obtient pour toute suite finie de scalaires $a_1,\ldots,a_k$: $\overset{k}{\underset{1}{*}} D_{a_i} \tilde{\tau} = D_{(\sum_1^k |a_i|^p)^{1/p}} \tilde{\tau}$, et nous avons obtenu :

PROPOSITION 8

Soit E *un espace stable. Il existe un* p , $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *tel que* E *possède une* ℓ^p*-extension , c'est-à-dire :*

$$\left\| x + \sum_1^k a_i\, e_i \right\| = \left\| x + \left(\sum_1^k |a_i|^p \right)^{1/p} e_1 \right\|$$

pour tout k, *toute suite finie de scalaires* $a_1 \ldots a_k$.

Il résulte alors du théorème 1, § 2 , chapitre VI, que si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite étalante définissante cette ℓ^p-extension, elle possède une sous-suite $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ équivalente à la base canonique de ℓ^p. Nous avons donc obtenu :

THEOREME (J.L. Krivine - B. Maurey, [46])

Soit E *un espace stable. Il existe un* p, $1 \leqslant p < +\infty$ *tel que* E *contienne un sous-espace isomorphe à* ℓ^p

Notons que c_o ne peut être obtenu puisque cet espace n'est pas stable.

4. PROPRIETES TOPOLOGIQUES DES ESPACES STABLES.

Les résultats de ce paragraphe sont dus à S. Guerre et au second auteur [34] . Un outil essentiel pour cette étude sera donné par la proposition suivante :

PROPOSITION 9

Soit E *un espace stable,* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite étalante dans* E $(e_i)_{i\geqslant 1}$ *la suite fondamentale du modèle étalé associé. On suppose que :*

a) il existe un $K \geqslant 1$ *tel que la suite* $(e_i)_{i\geqslant 1}$ *soit* K-*équivalente à la base canonique d'un espace* ℓ^p, $1 \leqslant p < +\infty$

b) le type τ *défini par* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *est* G-*invariant.*

Il existe alors une suite de blocs disjoints sur $(x_n)_{n\geqslant 1}$

$$u_n = \sum_{p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i \; x_i \qquad \text{avec } \lambda_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \quad ,$$

telle que :

1) pour tout $k \geqslant 1$ *, la suite* $(u_n)_{n\geqslant k}$ *soit* $(1+\frac{1}{k})$-*équivalente à la base canonique de* ℓ^p,

2) pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{K} \leqslant \left(\sum_{p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i^{\;p} \right)^{1/p} \leqslant K$.

DEMONSTRATION

Considérons la classe conique C_τ engendrée par le type τ. C'est l'adhérence, dans l'espace des types symétriques, de l'ensemble des types de la forme $D_{\lambda_1}\tau * D_{\lambda_2}\tau * \ldots * D_{\lambda_k}\tau$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in \mathbb{K}$ (cet ensemble forme bien une classe conique : si

$$\sigma = \operatorname{Lim}_n D_{\lambda_1(n)}\tau * \ldots * D_{\lambda_k(n)}\tau \ , \ \sigma' = \operatorname{Lim}_n D_{\mu_1(n)}\tau * \ldots * D_{\mu_k(n)}\tau \ ,$$

il existe une sous-suite $(n_j)_{j\geqslant 1}$ telle que

$$\sigma * \sigma' = \operatorname{Lim}_j D_{\lambda_1(j)}\tau * \ldots * D_{\lambda_k(j)}\tau * D_{\mu_1(n_j)}\tau * \ldots * D_{\mu_{k'}(n_j)}\tau \ ) \ .$$

Montrons que tout type $\sigma \in C_\tau$ avec $\sigma(0) = 1$ définit un modèle étalé dont la suite fondamentale est K^2-équivalente à la base canonique de ℓ^p , c'est-à-dire vérifie pour toute suite $a_1,\ldots,a_k$ de scalaires :

$$\frac{1}{K^2} \left(\sum_1^k |a_i|^p \right)^{1/p} \leqslant (D_{a_1}\tau * \ldots * D_{a_k}\tau)(0) \leqslant K^2 \left(\sum_1^k |a_i|^p \right)^{1/p} .$$

Or, tout type $\sigma \in C_\tau$, avec $\sigma(0) = 1$, s'écrit $\sigma(x) = \lim_{n,U} \tau_n(n)$, avec :

$$(6)\qquad \begin{cases} \tau_n = D_{\lambda_1^{(n)}}\tau * \dots * D_{\lambda_{p_n}^{(n)}}\tau\ , \\ \lambda_i^{(n)} \geqslant 0\ , \text{ pour tous } i,n, \\ \tau_n(0) = 1. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse a) on a, puisque $\tau_n(0) = 1$:

$$\frac{1}{K}\Big[\sum_{i=1}^{p_n}(\lambda_i^{(n)})^p\Big]^{1/p} \leqslant 1 = (D_{\lambda_1^{(n)}}\tau * \dots * D_{\lambda_{p_n}^{(n)}}\tau)(0) \leqslant K\Big[\sum_{i=1}^{p_n}(\lambda_i^{(n)})^p\Big]^{1/p}\ .$$

Soient maintenant $a_1,\dots,a_k$ des scalaires. On a, puisque le produit de convolution est séparément continu :

$$(D_{a_1}\sigma * \dots * D_{a_k}\sigma)(0) = \lim_{n_1,U} \dots \lim_{n_k,U} (D_{a_1}\tau_{n_1} * \dots * D_{a_k}\tau_{n_k})(0)\ ,$$

et donc, d'après a) :

$$\frac{1}{K}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_{n_i}}|a_i\lambda_j^{(n_i)}|^p\Big)^{1/p} \leqslant (D_{a_1}\tau_{n_1} * \dots * D_{a_k}\tau_{n_k})(0)$$
$$\leqslant K\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_{n_i}}|a_i\lambda_j^{(n_i)}|^p\Big)^{1/p}.$$

et donc :

$$\frac{1}{K^2}\Big(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant (D_{a_1}\sigma * \dots * D_{a_k}\sigma)(0) \leqslant K^2\Big(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^p\Big)^{1/p}\ ,$$

ce qui prouve notre assertion.

D'après le lemme 7, la classe C_τ contient un type σ vérifiant pour un certain q, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$:

$$D_{a_1}\sigma * \dots * D_{a_k}\sigma = D_{(\Sigma |a_i|^q)^{1/q}}\sigma.$$

D'après la première partie du raisonnement, on doit avoir $p = q$. D'après le théorème 1, § 2, chap. VI, toute suite de E définissant le type σ admet une sous-suite définissant le même type et vérifiant la conclusion 1).

Pour achever la démonstration, il reste donc à montrer que σ peut être défini par une suite de blocs sur $(x_i)_{i\geqslant 1}$ vérifiant la conclusion 2) de l'énoncé.

Comme $\sigma \in C_\tau$ et vérifie $\sigma(0) = 1$, il existe une suite $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ de types convergeant vers σ et vérifiant (6). La suite $(x_i)_{i\geqslant 1}$ est étalante ; le type τ_n est défini par la suite de blocs $(z_k^{(n)})_{k\geqslant 1}$, avec :

$$z_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{p_n} \lambda_i^{(n)} x_{kp_n+i} .$$

Puisque $\tau_n(0) = 1$, les coefficients $\lambda_i^{(n)}$ vérifient de plus, pour tout $n\geqslant 1$:

$$\frac{1}{K^p} \leqslant \sum_{i=1}^{p_n} (\lambda_i^{(n)})^p \leqslant K^p.$$

On peut donc écrire :

$$\sigma(x) = \lim_{n,U} \lim_{k,U} ||x+ z_k^{(n)}||.$$

Par un procédé diagonal, on détermine une suite d'entiers $(k(n))_{n\geqslant 1}$ telle que

$$\sigma(x) = \lim_{n,U} ||x + z_{k(n)}^{(n)}|| .$$

Extrayant une sous-suite, notée $(z_n)_{n\geqslant 1}$, des $(z_{k(n)}^{(n)})_{n\geqslant 1}$ on peut obtenir des blocs à supports disjoints ; la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ définit σ et vérifie 2).

<u>REMARQUE</u> : La démonstration de la proposition 8 reste vraie si l'on remplace ℓ^p $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ par c_o. Comme c_o n'est pas stable, la conclusion devient : "un espace stable n'a pas de modèle étalé dont la suite fondamentale soit équivalente à la base canonique de c_o et dont le type associé soit G-invariant.

La proposition 9 permet d'obtenir :

<u>THEOREME 10</u>

Tout espace de Banach stable est faiblement séquentiellement complet et possède la propriété W.B.S.

En particulier un tel espace est réflexif si et seulement si il ne contient pas de sous-espace isomorphe à ℓ^1

DEMONSTRATION

Supposons qu'il existe dans E une suite $(y_n)_{n\geq 1}$, faiblement de Cauchy non convergente. Par extraction, on peut supposer (y_n) basique et étalante. La suite fondamentale $(e_i)_{i\geq 1}$ du modèle étalé associé est équivalente à la base canonique de ℓ^1, d'après le théorème I.5.3.

Posons $x_n = y_{2n-1} - y_{2n}$. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est étalante, converge faiblement vers 0, et la suite fondamentale du modèle étalé associé est $e'_n = e_{2n-1} - e_{2n}$, qui est encore équivalente à la base de ℓ^1. En outre, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définit un type symétrique, car :

$$\lim_U \|x + x_n\| = \|x + e_{2n-1} - e_{2n}\| = \|x + e_{2n} - e_{2n\pm 1}\|$$

(puisque l'espace est stable, la suite $(e_n)_{n>1}$ est symétrique au-dessus de E) et $\|x + e_{2n} - e_{2n-1}\| = \lim_U \|x - x_n\|$.

On peut donc trouver, d'après la proposition 9, une constante $K > 0$ et une suite de blocs $(u_n)_{n\geq 1}$ sur $(x_n)_{n\geq 1}$, avec

$$u_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} a_i x_i \quad , \qquad a_i \geq 0 \text{ , et } \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} a_i^p \leq K \text{ pour tout } n\geq 1,$$

la suite (u_n) étant équivalente à la base canonique de ℓ^1 . Mais elle tend faiblement vers 0 : nous avons donc obtenu une contradiction.

De plus, ce raisonnement montre que, dans un espace stable, une suite qui tend vers 0 faiblement ne peut déterminer un modèle étalé isomorphe à ℓ^1 : il en résulte qu'un espace stable a la propriété de Banach-Saks faible, d'après le théorème II.3.8. Ceci achève la démonstration du théorème.

PROPOSITION 11

Soit E *un espace stable. Si* E *a un modèle étalé* F *qui contient un sous-espace isomorphe à* ℓ^p $(1 \leq p < +\infty)$, E *contient un sous-espace isomorphe à* ℓ^p .

DEMONSTRATION

D'après la proposition I.5.4, on peut supposer que la suite on peut supposer que la suite fondamentale $(e_i)_{i>}$ du modèle étalé F est basique. Par une technique standard de bosse glissante, on peut, si F contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p, trouver une suite de blocs consécutifs $(u_n)_{n\geqslant 1}$,

$$u_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i e_i ,$$

équivalente à la base canonique de ℓ^p.

Soit τ_n le type sur E défini par u_n :

$$\tau_n(x) = \| x + u_n \| = \lim_{n_1,U} \dots \lim_{n_k,U} \| x + \sum_{p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i x_{n_i} \| .$$

Quitte à extraire une sous-suite de la suite $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$, on peut supposer que cette suite converge vers un type τ sur E.

Par définition du produit de convolution, comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de blocs disjoints sur $(e_n)_{n\geqslant 1}$, on a, pour tout $k\geqslant 1$, toute suite de scalaires $a_1,\dots,a_k$:

$$(D_{a_1} \tau * \dots * D_{a_k} \tau)(0) = \lim_{n_1,U} \dots \lim_{n_k,U} \| a_1 u_{n_1} + \dots + a_k u_{n_k} \| ,$$

ce qui prouve que la suite fondamentale du modèle étalé associé à τ est équivalente à la base canonique de ℓ^p. Le type symétrique $\tau * D_{-1}\tau$ définit un modèle étalé avec la même propriété, et on applique la proposition 9.

De la même façon, on obtient :

PROPOSITION 12 : *Aucun modèle étalé d'un espace stable ne contient* c_o.

Pour terminer ce chapitre, nous allons montrer la stabilité des extensions des espaces stables.

THEOREME 13 : *Toute extension d'un espace de Banach stable est stable.*

DEMONSTRATION

En vertu de la proposition I.5.4, il suffit de montrer ce résultat pour les extensions dont la suite fondamentale est basique.

Soit donc $\mathscr{F} = E \oplus \text{span}\{(e_i)_{i\geq 1}\}$ une telle extension, et soient $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_m)_{m\geq 1}$ deux suites bornées de $\mathscr{F}$. On les décompose en

$$f_n = x_n + u_n \ , \ g_m = y_m + v_m \ ,$$

avec x_n, $y_m \in E$, $u_n, v_m \in F = \text{span}\{(e_i)_{i\geq 1}\}$. On peut supposer les (u_n) et (v_m) à support fini sur les (e_i).

Dans un premier temps, supposons que les supports des (u_n) et des (v_n) vérifient, pour tout $n\geq 1$

(S) $$\text{supp } u_n < \text{supp } v_n < \text{supp } u_{n+1} < \text{supp } v_{n+1}.$$

Posons, pour $x \in E$, $\sigma(x) = \lim\limits_{n,U} \|x + x_n + u_n\|$,

$$\tau(x) = \lim_{m,U} \|x + y_m + v_n\| ,$$

et $\mu_z(x) = \|x + z\|$, $z \in E$. Ce sont des types sur E.

Si $z = z_1 + z_2$, $z_1 \in E$ et $z_2 \in F$ à support fini, dès que n et m sont assez grands, les supports de z_2, u_n, v_m sont disjoints et l'on obtient, par définition du produit de convolution des types :

$$\lim_{n,U} \lim_{m,U} \|z_1 + z_2 + (x_n+u_n) + (y_m+v_m)\| = (\mu_z * \sigma * \tau)(0)$$

$$= \lim_{m,U} , \lim_{n,U} \|z_1 + z_2 + (x_n + u_n) + (y_m + v_m)\| .$$

Il en résulte par densité que pour tout $z \in F$:

(L) $$\lim_{n,U} \lim_{m,U} \|z + f_n + g_m\| = \lim_{m,U} \lim_{n,U} \|z + f_n + g_m\| .$$

Supposons maintenant les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_m)_{m\geq 1}$ quelconques. On va se ramener à l'hypothèse (S) de la manière suivante :

L'espace F ne contient pas de sous-espace isomorphe à c_o (prop. 12) et est à base inconditionnelle. Cette base est donc complète ("boundedly complete"). Ceci implique que de $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_m)_{m\geq 1}$ on peut extraire des sous-suites (u'_n) et (v'_m) qui convergent coordonnée par coordonnée vers des éléments u et v de F. Par un procédé de bosse glissante, on peut alors montrer qu'il existe des sous-suites $(u''_n-u)_{n\geq 1}$ et $(v''_n-v)_{m\geq 1}$ extraites de $(u'_n-u)_{n\geq 1}$ et $(v'_n-v)_{n\geq 1}$ et des suites $(u^\circ_n)_{n\geq 1}$ et $(v^\circ_m)_{m\geq 1}$ vérifiant la condition (S) telles que $u_n^{(o)} - (u''_n-u) \xrightarrow[U]{} 0$ et $v^o_m - (v''_m-v) \xrightarrow[U]{} 0$.

En appliquant l'égalité (L) aux suites $(u^\circ_n)_{n\geq 1}$ et $(v^\circ_m)_{m\geq 1}$ avec $z = u + v$, on en déduit, pour des sous-suites $(f'_n)_{n\geq 1}$ et $(g'_m)_{m\geq 1}$ de (f_n) et (g_m) :

$$\lim_{n,U} \lim_{m,U} \| f'_n + g'_m \| = \lim_{n,U} \lim_{n,U} \| f'_n + g'_m \| ,$$

ce qui prouve la stabilité de $\mathcal{F}$.

On peut remarquer que la propriété de stabilité ne se conserve pas par passage au bidual, comme le montre l'exemple de l'espace $\ell^1(\ell^\infty_n)$ qui est stable mais dont le bidual contient ℓ^∞ (puisque le dual $\ell^\infty(\ell^1_n)$ contient ℓ^1 1-complémenté). Cet exemple nous a été communiqué par G. Godefroy.

Nous avons vu au chapitre V que si F est un modèle étalé de E et G un modèle étalé de F, G pouvait n'être isomorphe à cuaun modèle étalé de E. Mais si E est stable, on obtient :

THEOREME 14

Soit F *une extension d'un espace stable* E. *Tout modèle étalé sur* F *est isométrique à un modèle étalé sur* E.

DEMONSTRATION

Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite étalante d'éléments de F. Chaque z_n , étant un élément d'une ultrapuissance de E, définit un type sur E par :

$$\tau_n(x) = \| x + z_n \| ,$$

et on peut trouver une suite $(u_k^{(n)})_{k\geq 1}$ d'éléments de E telle que

$$\tau_n(x) = \| x + z_n \| = \lim_{k,U} \| x + u_k^{(n)} \| .$$

La suite $(z_n)_{n\geq 1}$ définit un type sur F par :

$$\tau(x) = \lim \| z_n + x \| = \lim \tau_n(x) = \lim_n \lim_k \| x + u_k^{(n)} \|$$

Puisque E est séparable, on peut trouver une suite k(n) telle que pour tout x de E :

$$\tau(n) = \lim_n \| x + u_{k(n)}^{(n)} \|$$

et τ est dans un type sur E.

On n'a pas utilisé jusqu'ici la stabilité de E. Mais nous l'utiliserons maintenant en écrivant

$$\Big(\mathop{*}_{1}^{k} D_{a_i}\tau\Big)(0) = \lim_{n_1}\dots\lim_{n_k}\Big(\mathop{*}_{1}^{k} D_{a_i}\tau_{n_i}\Big)(0)$$

or $$\Big(\mathop{*}_{1}^{k} D_{a_i}\tau_{n_i}\Big)(0) = \lim_{p_1}\dots\lim_{p_k}\Big\|\sum_{i=1}^{k} a_i\, u_{p_i}^{(n_i)}\Big\| = \Big\|\sum_{1}^{k} a_i\, z_{n_i}\Big\|\,.$$

On a donc trouvé un type sur E, à savoir τ , qui définit un modèle étalé isométrique au modèle étalé construit dans $\mathscr{F}$ sur la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ et la démonstration est achevée.

*

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALDOUS D., Unconditional bases and Martingales in $L_p(F)$, Math. Proc. Cambridge (1979), 85-117.

[2] ALDOUS D., Subspaces of L_1 via random measures. Trans. A.M.S. 267 (1981) n° 2, 445-463.

[3] ALTSCHULER Z., A Banach space with a symmetric basis which contains no ℓ_p or c_o ..., Compositio Math. 35 (1977), 189-195.

[4] ALTSCHULER Z., CASAZZA P.G., BOR-LUH LIN, On symmetric basic sequences in Lorentz sequence spaces. Israël J. of Maths 15/2 (1973), 140-155.

[5] ANDREW A., Spreading basic sequences and subspaces of James' quasi reflexive space. Math. Scand. 48 (1981), 108-118

[6] BAERNSTEIN A., On reflexivity and summability. Studia Math. 42 (1972), 91-94.

[7] BANACH S. - SAKS S., Sur la convergence forte dans les champsL^p Studia Math. 2 (1930), 51-57.

[8] BEAUZAMY B. , Banach-Saks properties and Spreading Models. Math. Scand. 44 (1979), 357-384.

[9] BEAUZAMY B., Convergence ou divergence presque sûres des sommes de Cesàro dans un espace de Banach. Note C.R.A.S. Paris, t. 287 (25 sept. 78), 457-459.

[10] BEAUZAMY B., Espaces d'Interpolation réels, Topologie et Geométrie. Lecture Notes n° 666, Springer-Verlag.

[11] BEAUZAMY B., Deux espaces de Banach et leurs modèles étalés. Publ. du Dép. de Math. . Univ. Lyon I, 1980, t. 17/2.

[11 b] BEAUZAMY B., Sous-espaces de Modèles étalés et structures cycliquement reproduites dans les espaces de Banach. Bull. des Sc. Math., 1982.

[12] BEAUZAMY B., Introduction to Banach spaces and their geometry. North Holland, Collection "Notas de Matematica", vol. 68 , Août 1982.

[13] BEAUZAMY B., MAUREY B., Iteration of Speading Models. Arkiv for Math 17/2 (1979) 193-198.

[14] BESSAGA, C. PELCZYNSKI A., On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. Studia Math. 17 (1958) 165-174.

[15] BOURGAIN J., On the Banach-Saks property in Lebesgue spaces. A paraître.

[16] BRUNEL A., Espaces associés à une suite bornée dans un espace de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz, exposés 15, 16, 18. Ecole Polytechnique. 1973/74.

[17] BRUNEL A., SUCHESTON L. , On B-convex Banach spaces. Math System Theory, 7 (1974), 294-299.

[18] BRUNEL A. , SUCHESTON L. , On $\mathcal{J}$-convexity and ergodic superproperties of Banach spaces. Trans. A.M.S., 204 (1975), 79-90.

[19] BRUNEL A., FONG H., SUCHESTON L. , An ergodic super-property of Banach spaces, defined by a class of matrices.

[20] CASAZZA P.G. , Tzirelsohn's spaces. Dep. of Math. Univ. of Alabama, 1982.

[21] CASAZZA P.G., JOHNSON W.B., TZAFRIRI L.T., Tzirelsohn's space (in preparation).

[22] CASAZZA P.G., LIN B.L., LOHMAN R.H., On non-reflexive Banach spaces which contain no c_o or ℓ_p , Can. J. of Math. 32/6 (1980) 1382-1389.

[23] CASAZZA P.G., LOHMAN R.H., A general construction of spaces of the type of R.C. James, Can. J. of Math, 27 (1975) 1263-1270.

[24] CASAZZA P.G., ODELL E., Tzirelsohn's space II (in preparation).

[25] DACUNHA-CASTELLE D., KRIVINE J.L., Application des ultraproduits à l'étude des espaces et des Algèbres de Banach , Studia Math. 41 (1973), 315-334.

[26] DOR L.E., On sequences spanning a complex ℓ_1-space, Proc. A.M.S. 47 (1975), 515-516.

[27] DOWSON H.P., Spectral theory of linear operators, Academic Press 1977.

[28] ERDOS P., MAGIDOR M., A note on regular methods of summability and the Banach-Saks property. Proc. A.M.S., 59 (1976).

[29] FARAHAT J., Espaces de Banach contenant ℓ_1, d'après H.P. Rosenthal Séminaire Maurey-Schwartz, exposé 1973-74, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[30] FIGIEL T., JOHNSON W.B., A uniformly convex space which contains no ℓ_p. Compositio Math. 29 (1974), 179-190.

[31] GARLING D.J.H., Stable Banach Spaces. Lecture Notes, University of Cambridge, 1981.

[32] GUERRE S., La propriété de Banach-Saks ne passe pas de E à $L^2(E)$, d'après J. Bourgain. Exposé VIII, Séminaire d'Analyse fonctionnelle 1979/80. Ecole Polytechnique. Palaiseau.

[33] GUERRE S., LAPRESTE J.T., Quelques propriétés des modèles étalés sur un espace de Banach. Ann. I.H.P., Section B, 16-4 (1980) 339-347.

[34] GUERRE S., LAPRESTE J.T., Quelques propriétés des espaces de Banach stables. Israël J. of Math 39-3 (1981), 247-254.

[35] JAMES R.C., Bases and reflexivity of Banach spaces. Ann. of Math., 52 (1950), 518-527.

[36] JAMES R.C., A non-reflexive Banach space isometric to its second conjugate. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 37 (1951) 174-177.

[37] JAMES R.C., Weak compactness and reflexivity. Israël J. of Math 2 (1964) 101-109.

[38] JAMES R.C., Uniformly non-square Banach spaces. Ann. of Maths. 80 (1964), 542-550.

[39] JAMES R.C., Some self-dual properties of normed linear spaces. Ann. Math. Studies, 69 (1972), 159-175.

[40] JOHNSON W.B., ROSENTHAL H.P., On W* basic sequences and their applications to the study of Banach spaces. Studia Math. 43 (72), 77-92.

[41] KADEC M.I., PELCZYNSKI A., Basic sequences, biorthogonal systems and norming sets in Banach and Fréchet spaces. Studia Math 25 (1965), 297-323.

[42] KAKUTANI S., Weak convergence in uniformly convex Banach spaces. Tohuku Math. J. 45 (1938), 188-193.

[43] KRASNOELSKI M.A., RUTIKII Y.B., Convex functions and Orlicz spaces, Groningen, Netherlands, 1961 (traduit du Russe).

[44] KRIVINE J.L., Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés. Ann. of Math., 104 (1976), 1-29.

[45] KRIVINE J.L., Plongement de ℓ^p dans certains espaces de Banach. Exposé XII séminaire d'Analyse fonctionnelle 1979-80. Ecole Polytechnique. Palaiseau.

[46] KRIVINE J.L. , MAUREY B., Espaces de Banach stables. Israël J. of Math. 39-4 (1981), 273-281.

[47] LAPRESTE J.T., Suites écartables dans les espaces de Banach Exposé XX, Séminaire sur la géométrie des Espaces de Banach, 1977-78. Ecole Polytechnique. Palaiseau

[48] LAPRESTE J.T., Suites asymptotiquement inconditionnelles. Exposé XXX, Séminaire d'Analyse fonctionnelle, 1978-79. Ecole Polytechnique. Palaiseau.

[49] LEMBERG H., Nouvelle démonstration d'un théorème de J.L. Krivine sur la finie représentation de ℓ_p dans un espace de Banach. Israël J. of Math., vol. 39, n°4 (1981), 341-348.

[50] LIDENSTRAUSS-ROSENTHAL, $\mathscr{L}_p$-spaces, Israël J. of Math. 7 (1969), 325-349.

[51] LIDENSTRAUSS J., TZAFRIRI L.T., Classical Banach spaces, I et II, Springer-Verlag. 1977.

[52] MILMAN V.D., The geometric theory of Banach spaces. English translation: Russian Math. Surveys, 25 (1970), 111-170.

[53] ODELL E., Applications of Ramsey theorem to Banach spaces theory. University of Texas at Austin-Press, 1981.

[54] ODELL E., WAGE W., Weakly null normalized sequences equivalent to unit basis of c_o. Preprint, University of Texas at Austin.

[55] PARTINGTON J.R., Almost sure summability of subsequences of Banach spaces. Studia Math. 71 (1982), 23-35.

[56] RAMSEY F.P., On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc., 2-30 (1929), 264-286.

[57] ROPARS Y., Modèles étalés des Espaces de Banach. Thèse 3è cycle Université de Paris 7, mai 1983.

[58] ROSENTHAL H.P. , A characterization of Banach spaces not containing ℓ_1. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 71 (1974), 2411-2413.

[59] ROSENTHAL H.P., Weakly independent sequences and the Banach-Saks property. Proc. of the Durham Symposium, Juillet 1975.

[60] SCHACHERMAYER W., A Banach space E such that $L^2(E)$ is not Banach-Saks. Israël Journal of Math., 40, 3-4 (1981), 340-344.

[61] SCHAHERMAYER W., The class of Banach spaces, which do not have c_o as a spreading model, is not hereditary. A paraître.

[62] SCHREIER J., Eim gegensbiespel zur Theorie der Scwachen Konvergenz. Studia Math. 2 (1930), 58-62.

[63] SIMMONS S., Local reflexivity and (p,q)-summing maps. Math. Ann. 198, (1972), 335-344.

[64] SINGER I., Bases in Banach spaces I et II; Springer-Verlag. 1970.

[65] STERN J., Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach. Exposés 7 et 8. Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75. Ecole Polytechnique. Palaiseau.

[66] SZLENK W., Sur les suites faiblement convergentes dans l'espace L. Studia Math. 25 (1965), 337-341.

[67] TZIRELSON B.S., Not every Banach space contains ℓ_p or c_o. Functional Anal. Appl. 8 (1974), 138-141 (Traduit du Russe).

*

APPENDICE A

Extractions de suites basiques

Nota : Les résultats de cet appendice sont classiques et peuvent être trouvés dans Milman [52] ou Singer [64]; ils sont présentés ici par souci d'être complet.

Rappelons rapidement qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace de Banach est dite basique si tout élément x de $\overline{\text{span}}\ [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ admet une représentation unique de la forme

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_n x_n$$

où la série converge en norme ;

Ou encore de manière équivalente, il existe une constante $K \geqslant 1$ appelé constante de basicité de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que si $1 \leqslant p < q < +\infty$, on ait

$$\left\| \sum_{i=0}^{p} \alpha_i x_i \right\| \leqslant K \left\| \sum_{i=0}^{q} \alpha_i x_i \right\|$$

pour tout choix des scalaires $\alpha_1 \dots \alpha_q$.

Enfin on dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de l'espace E, si elle est basique et $\overline{\text{span}}\ [(x_n)_n] = E$.

THEOREME 1 : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'un espace de Banach* E *telle que*

$$0 < \inf \|x_n\| \leqslant \sup \|x_n\| < +\infty.$$

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergeant faiblement vers* 0, *alors* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *admet une sous-suite basique.*

Comme tout Banach séparable, l'espace $\overline{\text{span}}\,[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ se plonge isométriquement dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ qui admet une base ; donc pour prouver le théorème il suffit de démontrer

<u>PROPOSITION 2</u> : *Soit* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une base d'un espace de Banach* E *et* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E, *convergeant faiblement vers* 0. *Il existe une sous-suite de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *qui est une suite basique équivalente à une base bloc des* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *dès que*

$$0 < \inf \| x_n \| < \sup \| x_n \| < +\infty$$

Rappelons, qu'une suite bloc-basique d'une suite basique donnée, n'est autre par définition qu'une suite de blocs consécutifs sur cette dernière.

Nous avons besoin du lemme de stabilité suivant :

<u>LEMME 2</u> : *Soit* (y_n) *une suite basique (avec* $\inf \| y_n \| > \delta$*) d'un espace de Banach* E, *de constante de basicité* K, *et soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs de* E *avec*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \| y_n - x_n \| < \frac{\delta}{2K}$$

Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite basique de* E *(équivalente à* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$*)* .

<u>PREUVE</u> : Pour $y = \sum_0^{+\infty} a_n y_n$, posons

$$T y = \sum_0^{+\infty} a_n x_n$$

Comme $\| \sum_p^q a_n x_n \| \leqslant \sum_p^q \| y_n - x_n \| + \| \sum_p^q a_n y_n \|$,

série $\sum_0^{+\infty} a_n x_n$ est convergente.

D'autre part

$$\begin{aligned} \| y - Ty \| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, \| x_n - y_n \| , \\ &\leqslant \sup |a_n| \sum_0^{+\infty} \|x_n - y_n\| , \\ &\leqslant 2\frac{K}{\delta} \| y \| \sum_0^{+\infty} \| x_n - y_n \| , \\ &\leqslant 1. \end{aligned}$$

Donc l'application linéaire T est un isomorphisme de $\overline{\text{span}}\,[(y_n)_n]$ dans $\overline{\text{span}}[(x_n)_n]$ ce qui prouve notre assertion.

- Démontrons à présent la proposition 2.

Chaque x_n de notre suite peut s'écrire :

$$x_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k \, y_n$$

et par hypothèse pour chaque entier n

$$\lim_{k \to \infty} a_n^k = 0.$$

Par récurrence, il est aisé de construire une suite de blocs u_{k_i} de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjoints deux à deux

$$u_{k_o} = \sum_{p_i+1}^{p_{i+1}} a_n^{k_i} \, y_n$$

en sorte que $\| x_{k_i} - u_{k_i} \| < \frac{\delta}{2^{i+2}K}$, et donc $\| u_{k_i} \| > \frac{\delta}{2}$.

Il est évident alors, par le lemme qui précède, que $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite basique, extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La preuve qui précède est empruntée à [51] et est due à Bessaga et Pelczynski.

Ce qui suit est la reproduction de la preuve de I. SINGER d'un résultat de Kadets et Pelczynski.

<u>PROPOSITION 3</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite bornée d'un espace de Banach* E x'' *un élément de* E'' *tel que* $d(\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}, x'') = d > 0$ *(par abus de langage on considérera* E *plongé dans* E'' *) qui soit un point faiblement adhérent à* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *pour* $\sigma(E'', E')$

Alors, il existe une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et une forme linéaire* $f \in E'$ *telles que :*

1) $\lim_{K \to \infty} f(x_{n_k}) = x''(f) \geqslant \frac{1}{2} \| x'' \|$.

2) $(x_{n_k} - x'')$ *est une suite basique de* E'' .

3) Si $x'' \neq 0$ *alors* $x'' \notin \overline{\text{span}}[(x_n - x'')]$.

PREUVE : Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(0 < \varepsilon_n < 1)$ une suite telle que si $1 \leqslant p < q < +\infty$

$$\prod_p^q (1-\varepsilon_i) \geq 1 - \varepsilon_o$$

et soit $f \in E'$ une forme linéaire telle que $x''(f) \geq \frac{1}{2} \| x'' \|$

Comme x'' est un point limite faible $\sigma(E'',E')$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe x_{n_1} tel que

$$|x''(f) - f(x_{n_1})| < 1 .$$

Supposons que nous ayons construit $x_{n_1} \dots x_{n_\ell}$ avec

$$| x''(f) - f(x_{n_k})| < \frac{1}{k} \qquad k = 1,\dots,\ell \quad (*)$$

$$\| \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, (x_{n_i} - x'') \| \geqslant \prod_{i=p}^{q-1} (1-\varepsilon_i) \| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, (x_{n_i} - x'') \| \qquad (**)$$

pour tous p,q $1 < p < q \leqslant \ell$ et tous scalaires $\alpha_1 \dots \alpha_q$, (quand $\ell = 1$ la condition (**) est vide).

Soit $E_\ell = \text{span}[(x_{n_i} - x'')_{i \leqslant \ell}] \subset E''$. E_ℓ est évidement de dimension finie ; choisissons dans sa sphère unité un $\frac{\varepsilon_n}{3}$ -réseau $y_1 \dots y_{m(\ell)}$ et $h_1 \dots h_{m(\ell)}$, éléments de E' de norme 1, tels que

$$| y_i(h_i)| > 1 - \frac{\varepsilon_n}{3} .$$

Comme x'' est limite faible des $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut trouve $n_{\ell+1}$ tel que

$$| f(x_{n_{\ell+1}}) - x''(f)| < \frac{1}{\ell+1}$$

$$| h_i(x_{n_{\ell+1}}) - x''(h_i)| < \frac{d\varepsilon_\ell}{6} \qquad i = 1 \dots m(\ell).$$

On a alors : si $y \in E_\ell$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\| y + \alpha(x_{n_{\ell+1}} - x'')\| \geqslant (1-\varepsilon_\ell)\| y\| \quad ;$$

en effet(supposons que $\| y\| = 1$,ce qui ne restreint en rien la généralité) :

Si $|\alpha| > \frac{2}{d}$

$$\|\alpha(x_{n_{\ell+1}} - x'') + y\| > \frac{2}{d}\|x_{n_{\ell+1}} - x''\| - \|y\|$$

$$\geqslant 1 \geqslant (1-\varepsilon_\ell)\|y\| \;.$$

Si $\alpha \leqslant \frac{2}{d}$, en choisissant i ,$1 \leqslant i \leqslant m(\ell)$ en sorte que $\|y-y_i\| < \frac{\varepsilon_\ell}{3}$,

on a

$$\begin{aligned}\|\alpha(x_{n_{\ell+1}} - x'') + y\| &\geqslant |(\alpha(x_{n_{\ell+1}}-x'')+y)(h_i)| \\ &\geqslant |y_i(h_i) - |\alpha(x_{n_{\ell+1}} - x'')(h_i)| - \|h_i\| \; \|y-y_i\| \\ &\geqslant 1 - \frac{\varepsilon_\ell}{3} - \frac{2}{d}\frac{d\varepsilon_\ell}{6} - \frac{\varepsilon_\ell}{3} \\ &\geqslant (1-\varepsilon_\ell) \\ &= (1-\varepsilon_\ell)\|y\| \;.\end{aligned}$$

A présent en prenant $\alpha = \alpha_{\ell+1}$ et $y = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i(x_{n_i}-x'')$ et en utilisant l'hypothèse (**) on voit que la récurrence est vérifiée à l'ordre $\ell+1$.

Evidemment la condition (*) implique le résultat de 1) .

La basicité de $(x_{n_i}-x'')_{n \in \mathbb{N}}$ provient de la condition (**) qui indique que la constante de basicité de notre suite est inférieure ou égale à $(1-\varepsilon_0)^{-1}$.

Enfin si x'' est non nul, comme $(x_{n_i}-x'')_{i \in \mathbb{N}}$ est basique, il existe un h_o tel que

$$x'' \notin \overline{\text{span}}\,[(x_{n_i}-x'')_{i>k_o}] \;.$$

La suite $(x_{n_i})_{i>k_o}$ répond à toutes nos exigences. On en déduit :

<u>THEOREME 4</u> : *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy faible, non faiblement convergente, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite basique.*

<u>PREUVE</u> : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ces conditions converge pour $\sigma(E'',E')$ vers un élément $x'' \in E'' \setminus E$. La distance de x'' à la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est évidemment alors strictement positive.

Considérons une forme linéaire f et une sous-suite (x_{n_i}) de (x_n) vérifiant les conditions de la proposition précédente.

Soit $Z = \overline{\text{span}}\ [\ x'', (x_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}]$. Comme $x'' \notin \overline{\text{span}}[(x_{n_k})_k]$ et $x'' \notin \overline{\text{span}}\ [(x''-x_{n_k})_k]$ on a

$$\underset{Z}{\text{codim}}\ \overline{\text{span}}\ [(x_{n_k})_k] = \underset{Z}{\text{codim}}\ \overline{\text{span}}\ [(x_{n_k}-x'')_k] = 1.$$

Soient donc Π_1 et Π_2 des projections de Z respectivement sur ces deux sous-espaces de codimension 1, vérifiant $\Pi_1(x'') = \Pi_2(x'') = 0$.

Evidemment si $y \in Z$

$$\Pi_1(y) - y = \lambda\ x''.$$

pour un scalaire λ dépendant de y.
Donc si $y \in \text{span}\ [(x_{n_k}-x'')_k\ ]$, alors

$$y = \Pi_2(y) = \Pi_2(\ \Pi_1(y))$$

et de même si $x \in \text{span}\ [\ (x_{n_k})_k]$

$$x = \Pi_1(x) = \Pi_1(\Pi_2(x))$$

En conséquence Π_1 est un isomorphisme de $\overline{\text{span}}\ [(x_{n_k}-x'')_k]$ sur $\text{span}[(x_{n_k})_k\ ]$. Comme $\Pi_1(x_{n_k}-x'') = x_{n_k}$, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est donc une suite basique.

Appendice B

Propriétés de l'espace d'Orlicz ℓ^{ϕ}

où ϕ est la fonction d'orlicz $\phi(t) = \frac{t}{1-\mathrm{Log}t}$, $0 < t \leqslant 1$

$= 2t - 1 \qquad t \geqslant 1$.

Rappelons que la norme de $x = (x(k))_{k\geqslant 1}$ est donnée par :

$\|x\|_{\phi} = \mathrm{Inf}\,\{C,\ \sum_{k\geqslant 1} \phi(\frac{x(k)}{C}) \leqslant 1\}$. La fonction ϕ étant continue, si x est un bloc fini, il existe C tel que $\sum_{k\geqslant 1} \phi(\frac{x(k)}{C}) = 1$.

On note comme précédemment $(e_n)_{n\geqslant 1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

a) ℓ^1 est contenu dans ℓ^{ϕ} , avec injection continue.

Cela signifie simplement que $\|\sum_{i\geqslant 1} \alpha_i e_i\|_{\phi} \leqslant \sum |\alpha_i|$, si $(\alpha_i)_{i\geqslant 1}$ sont des scalaires. Supposons donc $\sum|\alpha_i| = 1$; il suffit de vérifier que $\sum \frac{|\alpha_i|}{1-\mathrm{Log}|\alpha_i|} \leqslant 1$, ce qui est clair.

b) ℓ^{ϕ} est contenu dans ℓ^p $(p>1)$ avec injection continue.

Soit $C_p > o$ tel que $\forall t > o$, $t^p < C_p \frac{t}{1-\mathrm{Log}t}$. Si $\sum \frac{|\alpha_i|}{1-\mathrm{Log}|\alpha_i|} = 1$, on aura $\sum |\alpha_i|^p \leqslant C_p$.

c) L'espace ℓ^{ϕ} contient un sous-espace isomorphe à ℓ^1.

Nous allons construire une suite de blocs $(u_n)_{n\geqslant 1}$, normalisés, équivalente à la base canonique de ℓ^1. Ces blocs seront consécutifs, de longueur croissante ; à l'intérieur de chaque bloc, tous les coefficients seront égaux. Appelons h_n le coefficient dans u_n. La longueur ℓ_n de u_n , pour que u_n soit normalisé, devra être :

$$(1) \qquad \frac{h_n}{\mathrm{Log}\ 1/h_n} \sim \ell_n .$$

Soient maintenant $(\beta_n)_n$ une suite finie de réels avec $\sum_{n\geq 1} |\beta_n| = 1$.

Soit $I = \{ n \geq 1,\ |\beta_n| \geq 1/e^n\}$, on a

$$(2) \qquad \sum_I |\beta_n| \geq \frac{e-2}{e-1} .$$

Pour montrer que $\|\Sigma\, \beta_n\, u_n\|_\phi \geq \delta\, \Sigma|\beta_n|$, il suffit de montrer

que si $\Sigma|\beta_n| = 1$, $\sum_n \sum_{k\in U_n} \phi(\beta_n\, u_n(k)) \geq \delta$, où U_n est le support de u_n.

Or ceci signifie :

$$\sum_n \frac{\mathrm{Log}\ 1/h_n}{h_n} \frac{|\beta_n|\ h_n}{\mathrm{Log}\ 1/|\beta_n|h_n} \geq \delta .$$

Or : $\displaystyle\sum_n \frac{|\beta_n|\mathrm{Log} 1/h_n}{\mathrm{Log} 1/|\beta_n|\ h_n} = \sum_n \frac{|\beta_n|\ A_n}{\mathrm{Log} 1/|\beta_n|+A_n}$, avec $A_n = \mathrm{Log}\ 1/h_n$

$\displaystyle\geq \sum_{n\in I} |\beta_n| \frac{A_n}{n+A_n} \geq \frac{1}{2} \sum_{n\in I} |\beta_n| \geq \frac{1}{2}\ \frac{e-2}{e-1}$, pourvu que la

suite A_n vérifie $\displaystyle\frac{A_n}{n+A_n} \geq \frac{1}{2}$, ou $A_n \geq n$; il suffit donc que $h_n \leq e^{-n}$

et l'on aura $\displaystyle\delta = \frac{1}{2}\,\frac{e-2}{e-1}$.

d) Soient $a = (a(k))_{k\geq 1}$, $b = (b(k))_{k\geq 1}$, deux suites finies à supports disjoints avec pour tout k , $|a(k)|\leq 1$, $|b(k)| \leq 1$. On va montrer que si $\| a\|_\phi \geq \frac{4}{5}$ et $\| b \|_\phi \geq \frac{4}{5}$, $\| a+b\|_\phi > 1,1$.

Avec $\alpha = 4/5$,, on a :

$$\sum_n \phi\left(\frac{|a_n|}{\alpha}\right) \geq 1 , \quad \sum_n \phi\left(\frac{|b_n|}{\alpha}\right) \geq 1 .$$

Mais pour tout t, $0 < t < 1$, $\displaystyle\frac{t}{1+\mathrm{Log}\alpha-\mathrm{Log}t} \leq \frac{1}{1+\mathrm{Log}\alpha} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{Log}t}$.

D'où

$$\alpha \leqslant \sum_n \frac{|a_n|}{1+\mathrm{Log}\alpha-\mathrm{Log}|a_n|} \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{Log}\alpha} \sum_n \frac{a_n}{1+\mathrm{Log}|a_n|}$$

et donc

$$\Sigma \frac{|a_n|}{1-\mathrm{Log}|a_n|} \geqslant \alpha(1+\mathrm{Log}\alpha)$$

$$\Sigma \frac{|b_n|}{1-\mathrm{Log}|b_n|} \geqslant \alpha(1+\mathrm{Log}\alpha) \; .$$

Soit $t = a+b$, $t = (t_n)$. La suite t est faite en mettant bout à bout (a_n) et (b_n) ; on a donc

$$\Sigma \frac{|t_n|}{1-\mathrm{Log}|t_n|} \geqslant 2\alpha\,(1+\mathrm{Log}\alpha) \approx 1{,}24,$$

et comme par ailleurs, si $0 < \beta < 1$,

$$\frac{\beta}{1-\mathrm{Log}\beta+\mathrm{Log}C} \geqslant (1-\mathrm{Log}C)\,\frac{\beta}{1-\mathrm{Log}\beta}$$

on obtient

$$\Sigma\,\phi\left(\frac{t_n}{C}\right) \geqslant 1{,}24\,\frac{1-\mathrm{Log}C}{C} \geqslant 1{,}24\,\frac{2-C}{C} \geqslant 1 \text{ pour } C = 1{,}1.$$

*

INDEX

****