E. Combet

G. Patissier

2 Calcul de Weyl et déformations

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 3B « Séminaire de géométrie », , p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___3B_A2_0>

CALCUL DE WEYL ET DEFORMATIONS

par E. COMBET et G. PATISSIER

Le but de ces exposés est de donner le point de départ d'une comparaison entre deux méthodes de quantification :

- le calcul de Weyl
- les déformations.

Le calcul en question est formellement introduit au § IV.14 du livre de H. WEYL : "Theory of groups and quantum Mechanics". Ce calcul a été repris et précisé par de nombreux auteurs et notamment par A. GROSSMANN, G. LOUPIAS, E.M. STEIN [1], A. VOROS [2], A. UNTERBERGER [3] (en relation plus ou moins directe avec les problèmes de quantification) et aussi par L. HORMANDER [4]. Certains de ces articles indiquent les liens qui existent entre ce calcul de Weyl et le crochet introduit par J.E. MOYAL en quantification (Proc. Cambridge Phil. Soc., 45, 99 (1949)) et ce crochet a d'autre part été inclus par F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROVICZ et D. STERNHEIMER [5] dans une théorie générale des déformations des structures symplectiques.

Nous allons expliciter dans ces exposés quelques uns des aspects de cette relation qui existe entre le calcul de Weyl et les déformations. Nous indiquerons par exemple comment retrouver à partir de [4] les résultats spectraux obtenus dans [5].

En ce qui concerne le calcul de Weyl nous nous bornerons à exposer les premiers paragraphes de l'article [4] de L. HORMANDER négligeant ainsi certains proints fondamentaux :

- nécessité "mathématique" des relations de Heisenberg ([4] § 4)
- spectre et indice ([4] § 6-7)
- point de départ d'une extension aux fibrés cotangents ([4] § 8-9).

En ce qui concerne les déformations nous partirons de l'article [5] mais nous laisserons aussi de côté certains aspects importants de la théorie pour lesquels on voudra bien se reporter aux articles de G. PATISSIER [6] , C. MORENO [7] , M. COHEN et S. GUTT [8], [9].

NOTATIONS

Les notations utilisées sont celles de l'article [4] c'est-à-dire celles de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels :

$$\mathbb{R}^{2n}_{(x,\xi)} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \quad ; \quad D_x = D = -i\frac{\partial}{\partial x} \quad ;$$

Transformée de Fourier de $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-i<x,\xi>} u(x)\, dx$$

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i<x,\xi>}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi.$$

Forme symplectique de $\mathbb{R}^{2n}$: $\sigma(x,\xi;\, y,\eta) = <\xi,y> - <x,\eta>$.

Crochet de Poisson : $\{f,g\} = <\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial g}{\partial x}> - <\frac{\partial g}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial x}>$.

1. DEFINITIONS ET EXEMPLES ; LA FORMULE DE WEYL.

On sait qu'étant donné le symbole polynomial classique à coefficients C^∞ :

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

il lui correspond un opérateur différentiel $a(x,D)$ sur $\mathbb{R}^n$, donné par la formule :

(1) $$a(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int\int a(x,\xi)\, e^{i<x-y,\xi>} u(y)\, dy\, d\xi$$

pour $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Plus généralement cette définition s'étend aux symboles des espaces $S^k(\mathbb{R}^{2n})$ et l'on obtient ainsi le calcul classique des opérateurs pseudo-différentiels de L. HORMANDER. A certains points de vue concernant la composition des opérateurs et la conjugaison ce calcul présente quelques inconvénients auxquels on peut remédier en remplaçant (1) par une formule où les variables x et ξ jouent des rôles plus symétriques de façon à retrouver un calcul introduit par H. WEYL en quantification des systèmes classiques.

DEFINITION 1 :

Etant donnée une fonction a *de l'espace de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ *on définit pour chaque* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *la fonction*

$$v(x) = (2\pi)^{-n} \iint a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{i<x-y,\xi>} u(y)\, dy\, d\xi \tag{2}$$

REMARQUE 1 :

Cette fonction v appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; l'application $u \to v$ est continue : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; on la note $a^w(x,D)$ ou a^w : c'est l'opérateur de Weyl associé au symbole $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

On a donc la formule :

$$a^w(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{i<x-y,\xi>} u(y)\, dy\, d\xi \tag{2'}$$

REMARQUE 2 :

La "version faible" de (2') s'écrit, pour u et $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$:

$$\begin{aligned} <a^w u, v> &= (2\pi)^{-n} \iiint a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{i<x-y,\xi>} u(y) v(x)\, dy\, d\xi\, dx \\ &= (2\pi)^{-n} \iint \overset{2}{\hat{a}}\left(\frac{x+y}{2}, y-x\right) u(y)\, v(x)\, dy\, dx \\ &= (2\pi)^{-n} \iint \overset{2}{\hat{a}}(z,t)\, u\left(z + \frac{t}{2}\right) v\left(z - \frac{t}{2}\right) dz\, dt \end{aligned}$$

2
où $\hat{a}$ est la transformée de Fourier partielle de a par rapport à la deuxième variable. Tout cela s'étend sans difficulté au cas où $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ et l'on a, pour a réelle : $\langle a^w u, \bar{v}\rangle = \langle u, \overline{a^w v}\rangle$. Il vient ainsi :

PROPOSITION 1 :

(a) La formule (2') s'étend au cas où $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ et définit une application continue : $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, encore notée a^w.

(b) Si a est réelle alors a^w est symétrique par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLES :

(1) Si l'on prend une fonction $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_x)$ alors $a^w u(x) = a(x)u(x)$.

Si l'on prend un polynôme $a = P \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)$ alors $P^w u(x) = P(D)u(x)$.

Si $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ est linéaire :

$$a(x,\xi) = \sum_j (\alpha_j x_j + \beta_j \xi_j)$$

alors $a^w(x,D) = \Sigma(\alpha_j x_j - i\beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}) = a(x,D)$ (au sens classique (1)).

(2) Supposons que a soit un symbole polynomial classique : $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ avec $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à croissance lente (par exemple des polynômes) alors un calcul élémentaire donne :

$$\begin{aligned} a^w(x,D)u(x) &= \sum_{|\alpha|\leqslant m} D_t^\alpha (a_\alpha(x+\tfrac{t}{2})\ u(x+t)_{t=o} \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant m} b_\alpha(x)\ D_x^\alpha\ u(x)\ ; \end{aligned}$$

on trouve ainsi un opérateur différentiel qui diffère généralement de l'opérateur a(x,D) usuel.

REMARQUE 3 :

Il existe une relation assez simple entre opérateurs pseudo-différentiels classiques et opérateurs de Weyl. Pour $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ on a par exemple $a(x,D) = b^w(x,D)$ pourvu que $b(x,\xi) = \pi^{-n} \iint a(x+t,\xi+\eta)e^{2i\langle t,\eta\rangle}\, dt\, d\eta$.

PROPOSITION 2 (la formule de Weyl) :

Pour $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ *on a la formule de Weyl :*

$$a^w(x,D) = (2\pi)^{-2n} \iint e^{i(<y,x> + <\eta,D>)}\ \hat{a}(y,\eta)\ dy\ d\eta.$$

PREUVE :

Il s'agit de donner un sens à l'opérateur $e^{i(<y,x> + <\eta,D>)}$ et à l'intégrale ci-dessus qui porte sur une fonction à valeurs opérateurs.

Ceci découle du lemme 1 ci-dessous, d'où l'on déduit que

$$e^{i(<y,x> + <\eta,D>)}u(x) =$$
$$= (2\ )^{-n} \iint e^{i(<y + \frac{x+y}{2},\zeta> + <\eta,\zeta>)}\ e^{i<x-z,\zeta>}\ u(z)\ dz\ d\zeta$$

et donc :

$$\left((2\pi)^{-2n} \iint e^{i(<y,x> + <\eta,D>)}\ \hat{a}(y,\eta) dy\ d\eta\right) u(x) =$$
$$=(2\pi)^{-2n} \iint e^{i(<y,x> + <\eta,D>)}\ \hat{a}(y,\eta)u(x)\ dy\ d\eta$$
$$= (2\pi)^{-3n} \iiiint e^{i(<y + \frac{x+y}{2},\zeta> + <\eta,\zeta>)} e^{i<x-z,\zeta>} u(z)\hat{a}(y,\eta)\ dz\ d\zeta\ dy\ d\eta$$
$$= (2\pi)^{-n} \iint a\left(\frac{x+z}{2},\zeta\right)\ e^{i<x-z,\zeta>}\ u(z)\ dz\ d\zeta \quad \text{(utiliser la formule d'inversion)}$$
$$= a^w(x,D)\ u(x).$$

(on peut donner un sens à la formule de Weyl pour $a \in \mathscr{S}'$).

LEMME 1 :

Supposons L *linéaire réelle sur* $\mathbb{R}^{2n}$ *et posons :*

$$a_t(x,\zeta) = e^{it\ L(x,\zeta)}$$

alors a_t^w u *existe pour* $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *et est égale à* $e^{it\ L(x,D)}u$ *où* L(x,D) *dénote la fermeture dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *de l'opérateur symétrique* $L^w(x,D) = L(x,D)$.

PREUVE :

La fonction a_t est C^∞ bornée à croissance lente donc a_t^w existe sur $\mathscr{S}(R^n)$ et vaut :

$$a_t^w (x,D)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{it\, L(\frac{x+y}{2} ,\xi)} e^{i<x-y,\xi>} u(y)\, dy\, d\xi \ ;$$

on a $a_t^w u \in \mathscr{S}$ pour $u \in \mathscr{S}$ et un calcul élémentaire donne :

(3) $$L(x,D)\, a_t^w(x,D) = (L\, a_t)^w(x,D) \quad \text{(car L est très particulière et } \{L,a\} = 0)$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}\, a_t^w (x,D).$$

On a d'autre part, pour $u \in \mathscr{S}(R^n)$:

$$a_t^w(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{it\, L(\frac{x}{2},\xi)} e^{i<x,\xi>} d\xi \ .$$

$$. \int e^{-i<y,\xi>} e^{it\, L(\frac{y}{2} ,0)} u(y)\, dy$$

$$= (2\pi)^{-n} e^{it\, L(\frac{x}{2},0)} \int e^{it\, L(0,\xi)} e^{i<x,\xi>} \hat{v}(\xi)\, d\xi$$

où l'on pose :

$$\hat{v}(\xi) = \int e^{-i<y,\xi>} v(y)\, dy$$

$$v(y) = e^{it\, L(\frac{y}{2},0)} u(y)$$

et donc :

$$a_t^w(x,D)u(x) = e^{it\, L(\frac{x}{2},0)} v(x + t\beta)$$

où l'on a posé :

$$L(0,\xi) = <\beta,\xi> .$$

on obtient donc, puis que L est réelle :

$$\| a_t^w u\|_{L^2} = \| v(.+t\beta)\|_{L^2} = \| v\|_{L^2} = \| u\|_{L^2}$$

ce qui montre que a_t^w s'étend en un groupe d'opérateurs unitaires sur L^2 et, d'après (3), iL est le générateur infinitésimal de ce groupe. Sachant que L(x,D) est un opérateur symétrique (prop. 1(b)), de fermeture self-adjointe (voir par exemple K. YOSIDA, Functional analysis, p. 78 et 350), on peut, d'après le théorème de Stone définir $e^{it\,L(x,D)}$ comme groupe dans L^2 de générateur infinitésimal $iL(x,D)$ (K. YOSIDA, ibid. p. 345).

2. COMPOSITION DES SYMBOLES ET INVARIANCE SYMPLECTIQUE.

REMARQUE 4 :

Etant donnée une forme quadratique réelle B sur $\mathbb{R}^k$ alors pour $D = -i\,\partial/\partial x$, la fonction $B(D)$ est un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^k$ qui vérifie :

$$B(D_x)\, e^{i\langle x,\xi\rangle} = B(\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle}.$$

Sachant que pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^k)$ on a :

$$u(x) = (2\pi)^{-k} \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\, \hat{u}(\xi)d\xi$$

on peut écrire :

$$B(D)u(x) = (2\pi)^{-k} \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\, B(\xi)\, \hat{u}(\xi)d\xi \ ;$$

Cette formule bien connue peut être généralisée pour définir $e^{iB(D)}u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^k)$:

$$\begin{aligned} e^{iB(D)}u(x) &= (2\pi)^{-k} \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\, e^{iB(\xi)}\, \hat{u}(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-k} \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\, e^{iB(\xi)} u(y)\, d\xi\, dy. \end{aligned}$$

RAPPEL :

On note σ la forme symplectique fondamentale sur $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\sigma(x,\xi;\, y\,,\eta) = \langle\xi,y\rangle - \langle x,\eta\rangle$$

pour (x,ξ) et $(y,\eta) \in \mathbb{R}^{2n}$; dans la proposition ci-dessous on va considérer σ comme forme quadratique sur $\mathbb{R}^{4n}$.

PROPOSITION 3 : (produit de Moyal sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ et composition des opérateurs de Weyl).

On définit sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ le produit de Moyal (à partir de la remarque 4) :

$$(4) \qquad (a_1 \# a_2)(x,\xi) = e^{\frac{i}{2}\sigma(D_x,D_\xi;D_y,D_\eta)}\, a_1(x,\xi)a_2(y,\eta)\big|_{(x,\xi)\,=\,(y,\eta)}$$

Alors on a, pour les opérateurs de Weyl :

(5) $$a_1^w \circ a_2^w = (a_1 \# a_2)^w .$$

PREUVE :

Voir les détails dans l'article [4] , p. 374-375.

On prend a_1, $a_2 \in \mathscr{S}(R^{2n})$ et on considère :

$$a_1^w(x,D)\,(a_2^w(.,D)u)(x) =$$

$$= (2\pi)^{-2n}\iiiint a_1(\tfrac{x+y}{2},\xi)\, e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\, a_2(\tfrac{y+z}{2},\eta)\, e^{i\langle y-z,\eta\rangle}\, u(z)\, dy\, dz\, d\eta\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-2n}\int u(y)dy \iiint a_1(\tfrac{x+y}{2},\zeta)\, a_2(\tfrac{z+y}{2},\tau)\, e^{i\langle x-z,\zeta\rangle+i\langle z-y\ \tau\rangle}.\ dz\, d\zeta\, d\tau.$$

$$= (2\pi)^{-n}\iint a(\tfrac{x+y}{2},\xi)\, e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\, u(y)\, dy\, d\xi$$

où l'on pose :

$$(2\pi)^{-n}\int a(\tfrac{x+y}{2},\xi)\, e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\, d\xi =$$

$$\iiint a_1(\tfrac{x+y}{2},\zeta)\, a_2(\tfrac{z+y}{2},\tau)\, e^{i\langle x-z,\zeta\rangle+i\langle z-y,\tau\rangle}\, dz\, d\zeta\, d\tau$$

et ceci conduit à (5) d'après la formule d'inversion de Fourier.

PROPOSITION 4 (invariance symplectique) :

Pour chaque transformation inversible symplectique affine χ *de* $(\mathbb{R}^{2n},\text{can.})$ *il existe un automorphisme* U *de* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, *unitaire dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$, *unique à un facteur constant près (de module 1), et tel que*

(6) $$U^{-1}\, a^w\, U = (a_\circ \chi)^w .$$

pour tout symbole $a \in \mathscr{S}'(R^{2n})$.

PREUVE :

Supposons cette propriété vraie lorsque a = L linéaire et réelle sur $\mathbb{R}^{2n}$:

$$U^{-1}\ L(x,D)U = (L \circ \chi)(x,D) \tag{7}$$

alors on en déduit (lemme 1) :

$$U^{-1}\ e^{iL(x,D)}U = e^{i(L \circ \chi)(x,D)}$$

et (6) en découle, d'après la formule de Weyl.

Il suffit donc de prouver (7) quand L est linéaire et réelle sur $\mathbb{R}^{2n}$. Voir les détails dans l'article [4] , p. 380-381.

Pour montrer l'existence de U on considère successivement les générateurs du groupe symplectique :

(a) χ est la translation $x \to x+x_o$; on prend :

$$U\ f(x) = f(x-x_o),$$

(b) χ est la translation $\xi \to \xi+ \xi_o$; on prend :

$$U\ f(x) = f(x)\ e^{i\langle x,\xi_o\rangle}\ ,$$

(c) χ applique (x_j,ξ_j) sur $(\xi_j,-x_j)$ et laisse les autres coordonnées fixées on prend :

$$U\ f(x_1,\ldots,x_n) = \int e^{-ix_j t}\ u(x_1,\ldots,x_{j-1},t,x_{j+1},\ldots,x_n)dt$$

(d) On prend $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ et $\chi(x,\xi) = (Tx, {}^tT^{-1}\xi)$ alors :

$$U\ f(x) = f(T^{-1}x)\ |\det T|^{-1/2}\ , \tag{8}$$

(e) Si $\chi(x,\xi) = (x, \xi-Ax)$ où A est une matrice symétrique, alors :

$$U\ f(x) = e^{-\frac{i}{2}\langle Ax,x\rangle}\ f(x).$$

Ces définitions étant posées on démontre alors (7) dans chacun de ces cas.

COROLLAIRE 1 :

Soit $T \in GL(\mathbb{R}^n)$; *il découle de (6) et (8) que si* a *est invariant par* χ_T *(au sens du cas (d) ci-dessus) alors* a^w *est un opérateur invariant par* T *dans* $\mathbb{R}^n$.

REMARQUE 5 :

Les résultats qui précèdent constituent l'aspect élémentaire du calcul de Weyl ; ils s'obtiennent avec les résultats classiques de l'analyse fonctionnelle usuelle sur les espaces $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, L^2.

Un problème fondamental se pose maintenant pour généraliser la proposition 3. Cela consiste :
(a) à donner un sens au produit de Moyal sur des espaces plus généraux que $\mathcal{S}$,
(b) à montrer, pour ces espaces, l'égalité de Weyl :

$$a_1^w \circ a_2^w = (a_1 \# a_2)^w .$$

Ce problème difficile est considéré dans les articles [1], [2] , [3] , [4] . Par exemple si l'on désigne par $\Sigma^1(\mathbb{R}^{2n})$ l'ensemble des $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tels que :

$$|D_x^\beta D^\alpha a(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|x|^2 + |\xi|^2)^{\frac{s-|\alpha|-|\beta|}{2}}$$

($s \in \mathbb{R}$), alors ce sont des ensembles de symboles auxquelles (a) et (b) s'appliquent. On peut considérer des espaces de symboles encore plus généraux (espace S(m,g) de [4]).

Par exemple on peut calculer $a_1 \# a_2$ pour a_1 à croissance lente et a_2 polynomial on a alors, pour degré $(a_2) < N$:

$$(9) \qquad a_1 \# a_2 = \sum_{j<N} \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2}\, \sigma(D_x,D_\xi;D_y,D_\eta)\right)^j a_1(x,\xi)\, a_2(y,\eta)\Big|_{(y,\eta)} = (x,\xi).$$

et on a une formule analogue pour a_2 à croissance lente et a_1 polynomial.

REMARQUE 6 :

Admettons que le calcul de Weyl s'étende aux symboles polynomiaux en x et ξ , ce qui n'est pas trop difficile à montrer alors, en utilisant le corollaire 1 de la proposition 4 on retrouve aisément les résultats spectraux de [5]. Supposons par exemple que n = 1 et prenons pour a un polynôme du second degré à coefficients réels ; en utilisant une transformation symplectique de $(\mathbb{R}^2, can)$ on réduit a à l'une des formes suivantes :

$$a_\varepsilon(x,\xi) = \varepsilon\, \xi^2 + a^2\, x^2 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$
$$a_2(x,\xi) = \xi^2 + 2b\, x$$
$$a_3(x,\xi) = x^2 + 2c\, \xi$$

et l'on obtient de façon élémentaire le symbole de $e^{it\, a^w}$ en utilisant la prop. 3) :

$$\varepsilon = 1 : \frac{1}{\cos at}\, e^{\frac{i}{a} tg(at)(\xi^2 + a^2x^2)} \qquad \text{(t voisin de 0)}$$
$$\varepsilon = -1 \; \frac{1}{ch\ at}\; e^{\frac{i}{a} th(at)(-\xi^2 + a^2\, x^2)}$$
$$a_2 : e^{ib^2\frac{t^3}{3}}\; e^{it(\xi^2 + 2bx)}$$
$$a_3 : e^{-\frac{i}{4}\frac{t^3}{3}}\; e^{it(\xi + 2c\, x^2)} \quad .$$

REMARQUE 7 :

Il existe un autre point de vue pour généraliser le produit # (ou bien $\exp(\lambda\{,\})$; ceci consiste à utiliser formellement les expression (4) ou (9) sur une variété symplectique. C'est le point de vue des déformations de [5] que nous allons rappeler dans la suite de ces exposés.

3. DEFORMATIONS DE L'ALGEBRE ASSOCIATIVE $C^\infty(M)$ [10]

M étant une variété de classe C^∞ on note N l'algèbre associative $C^\infty(M,K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E l'espace des séries formelles à coefficients dans N. Un élément de E s'écrit $u = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s a_s$ où $a_s \in N$ pour tout indice s.

Si $B : N^p \to E$ est un opérateur p-multilinéaire, on a

$$B(f_1,\dots,f_p) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t B_t(f_1,\dots,f_p)$$

où pour chaque t $B_t : N^p \to N$ est p-multilinéaire, on dit que B est un opérateur p-multilinéaire formel. B s'étend naturellement en un opérateur p-multilinéaire encore noté B, $B : E^p \to E$, de la manière suivante (formule donnée pour p = 2).

$$B(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{r+s+t=n} B_t\,(a_r,b_s) \text{ où } v = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s b_s\ ,$$

En particulier si $B(f,g) = f.g$ l'extension ainsi définie permet de munir E d'une structure d'algèbre associative.

<u>DEFINITION 2</u> :

Une déformation de l'algèbre associative N *est définie par la donnée d'un opérateur bilinéaire formel* B_λ *de la forme*

$$B_\lambda(f,g) = f.g + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s B_s(f,g).$$

Cette déformation sera dite associative si son extension à E^2 *est associative.*

Une déformation de l'algèbre associative N est souvent notée $f *_\lambda g$ (on parle alors de produit étoile ou de star-produit). En général ces produits ne sont pas commutatifs. Souvent on s'intéresse aux propriétés vérifiées jusqu'à l'ordre k, par exemple un produit $*_\lambda$ est associatif jusqu'à l'ordre k si sur N^3 on a

$$f *_\lambda (g *_\lambda h) - (f *_\lambda g) *_\lambda h = \sum_{s \geq k+1} \lambda^s T_s(f,g,h)$$

<u>EXEMPLE</u> : <u>le produit de Moyal.</u>

Soit $M = \mathbb{R}^{2n}_{(x,\xi)}$ et $K = \mathbb{C}$, on pose

$$P^m(f,g)(x,\xi) = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^m f(x,\xi)g(y,\eta)/_{(y,\eta)} = (x,\xi).$$

En particulier $P^o(f,g) = f.g$ et $P^1(f,g) = \{f,g\}$. On pose

$$(10) \qquad f \#_\lambda g = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} P^m(f,g)$$

Le star-produit ainsi défini est associatif et s'appelle le produit de MOYAL. On peut, pour des fonctions à décroissance rapide, donner une représentation intégrale du produit de MOYAL, pour $\lambda = -i/2$ la série 10 devient convergente et on obtient [2]

$$f \# g(x,\xi) = \frac{1}{\pi^{2n}} \int a(x+y,\xi+\eta)b(x+z,\xi+\zeta)e^{-2i\sigma(y,\eta;z,\zeta)}dy\, d\xi\, dz\, d\eta$$

Dans le cas où f et g sont des polynômes on obtient la relation 9.

La déformation B_λ sera associative si les opérateurs B_s vérifient des relations qui peuvent s'interpréter à l'aide de la cohomologie de HOSCHILD de l'algèbre associative N.

<u>DEFINITION 3</u> :

Une p-cochaîne pour la cohomologie de HOSCHILD est une application p-linéaire de N^p *dans* N. *Le cobord de la* p-*cochaîne* C *est la* (p+1)-*cochaîne* $\tilde{\partial} C$.

$$\tilde{\partial} C(u_o,u_1,\ldots,u_p) = u_o\, C(u_1,\ldots,u_p) - C(u_o u_1,u_2,\ldots,u_p)$$

$$+ C(u_o,u_1u_2,u_3,u_p)+\ldots+(-1)^p C(u_o,\ldots,u_{p-1}u_p)+(-1)^{p+1}C(u_o,u_1,\ldots,u_{p-1})u_p$$

Si C *est une* 1-*cochaine* $\tilde{\partial} C(u,v) = uC(v) + vC(u) - C(u.v)$. *Les* 1-*cocycles sont donc les dérivations du produit* u.v.

PROPOSITION 5 : *Soit* $u *_\lambda v = u.v + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} C^r(u,v)$, *on pose*

$$E_t = \sum_{r+s=t} C^s(C^r(u,v),w) - \sum_{r+s=t} C^s(u,C^r(v,w)) \textit{ pour } r,s \geqslant 1,$$

$t \geqslant 2$ *et* $E_o = E_1 = 0$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $*_\lambda$ *soit associatif est que pour tout* t: $E_t = \tilde{\partial} C_t$.

PREUVE :

On a $(u *_\lambda v) *_\lambda w = \sum_{t \geqslant 0} \lambda^t \sum_{r+s=t} C^s(C^r(u,v),w)$ et

$$u *_\lambda (v *_\lambda w) = \sum_{t \geqslant 0} \lambda^t \sum_{r+s=t} C^s(u,C^r(v,w))$$

où $C^o(u,v) = u.v$. On pose :

$$\varepsilon_t = \sum_{r+s=t} [C^s(C^r(u,v),w) - C^s(u,C^r(v,w))] \ .$$

On a $\varepsilon_t = E_t - \tilde{\partial} C^t$ d'où la conclusion

DEFINITION 4 :

Deux déformations $*_\lambda$ *et* $*'_\lambda$ *sont équivalentes si il existe un opérateur linéaire formel* T_λ *de la forme* $T_\lambda = Id + \sum_{s \geqslant 1} \lambda^s T_s$ *tel que*

$$T_\lambda(u *'_\lambda v) = T_\lambda(u) *_\lambda T_\lambda(v)$$

La déformation $*_\lambda$ *sera dite triviale si elle est équivalente au produit ordinaire des fonctions (auquel cas* $*_\lambda$ *est associative).*

REMARQUES 8 :

i) L'opérateur $T_\lambda : E \to E$ est un isomorphisme.

ii) L'obstruction à l'équivalence de deux déformations est de nature cohomologique. Par exemple à l'ordre 1 elle s'écrit $\tilde{\partial} T_1 = C'^1, C^1$ [5].

EXEMPLE :

L'opérateur pseudo-différentiel classique associé au symbole $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}_{(x,\xi)})$ est défini par la relation

$$a(x,D).\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \quad e^{i<x,\xi>} a(x,\xi)\,\hat{\phi}(\xi)\,d\xi. \quad (11).$$

$a(x,D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur continu [4]. Si $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$
$a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ $a(x;D)$ est continu de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ce dernier résultat reste vrai dans des espaces de symboles plus généraux (cf. [10]). En particulier si a et b sont des polynômes on a $a(x,D) \circ b(x,D) = c(x,D)$ avec

$$c(x,\xi) = a * b(x,\xi) = \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D^{\alpha}_{\xi} a(x,\xi)\, D^{\alpha}_{x} b(x,\xi)$$

On voit que la relation précédente est obtenue (en faisant $\lambda = i$) à partir de la déformation (associative)

$$u *_{\lambda} v = \sum_{s \geq 0} \frac{\lambda^m}{m!} \Big(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^{\alpha}_{\xi} u\, D^{\alpha}_{x} v \Big).$$

On peut montrer que cette déformation est équivalente au produit de MOYAL. Par l'intermédiaire de l'opérateur linéaire formel $T_{\lambda} = \exp(-\frac{\lambda}{2} < D_x, D_{\xi} >)$ on a

$$T_{\lambda}(a *_{\lambda} b) = T_{\lambda}(a) \#_{\lambda} T_2(b)$$

On a aussi $\quad a(x,D) = c^{w} \quad$ avec $c = T_{\lambda}(a)_{/\lambda=i}$.

L'opérateur T_{λ} fait donc correspondre la théorie classique des opérateurs pseudo-différentiels et la théorie de WEYL, en ce sens on peut dire que ces théories sont équivalentes. Tout ceci se généralise à des symboles plus généraux que les polynômes [4].

DEFINITION 5 :

Une application p-*linéaire* $C : N^p \to N$ *est locale si pour tout élément* u_{ℓ} *de tel que* $U_{\ell} = 0$ *sur un ouvert* U *de* M *on a* $c(u_1,\dots,u_{\ell},\dots,u_p) = 0$ *sur* U *quelles que soient les fonctions* $u_1,\dots,u_{\ell-1},u_{\ell+1},\dots,u_p$ *de* N.

EXEMPLES :

Le produit ordinaire $(u,v) \to u.v$, le crochet de POISSON si M est une variété symplectique, le crochet de JACOBI si M est une variété de contact.

Si C est local $\tilde{\partial} C$ aussi.

REMARQUE 9 :

Si T est un opérateur linéaire local alors dans tout domaine de coordonnées relativement compact U T est un opérateur différentiel $T = \sum_{|\alpha| \leq d_U} a_\alpha \partial^\alpha$, le degré d_U dépendant en général de U (T est un opérateur différentiel si et seulement si les d_U sont bornés).

PROPOSITION 6 :

Si T est un endomorphisme de N tel que $\tilde{\partial} T$ soit local alors T est aussi local.

PREUVE :

Soit U un ouvert de M et $u \in N$ tel que $u_{/U} = 0$. Si $x_o \in U$, on choisit $v \in N$ tel que $v(x_o) = 1$, et supp $v \subset U$. On a $\tilde{\partial} T(u,v) = 0$ par hypothèse, d'où $uT(v) + vTu - T(uv) = 0$. Or $u.v = 0$ d'où en x_o : $T(u)(x_o) = 0$.

DEFINITION 6 :

Un opérateur p -multilinéaire $C : N^p \to N$ est un opérateur multidifférentiel de degré d (ou est d-différentiel) si localement C s'écrit :

$$C(u_1,\dots,u_p) = \sum_{|\alpha_i| \leq d} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_p} D^{\alpha_1} u_1 D^{\alpha_2} u_2 \dots D^{\alpha_p} u_p .$$

REMARQUE 10 :

Si C est d-différentiel C est local et $\tilde{\partial} C$ est (d-1)-différentiel.

EXEMPLES :

Le produit ordinaire des fonctions est 0-différentiel, le crochet de POISSON sur une variété symplectique est 1-différentiel. Dans le produit de MOYAL les opérateurs p^m sont m-différentiels.

En général on s'intéresse aux déformations différentielles du produit ordinaire. Dans ce cas les obstructions à l'associativité se trouvent dans le 3e-espace de cohomologie différentiel de HOSCHILD (proposition 5) espace qui est isomorphe à celui des trois tenseurs contravariants antisymétriques sur M (VEY).

PROPOSITION 7. [10] :

Soit C *un 2-cocycle de HOSCHILD supposé* d-*différentiel et exact* ($d\geqslant 0$). *Il existe sur* M *un opérateur* d-*différentiel* T *d'ordre* d+1 *tel que* $C = \tilde{\partial} T$.

4. DEFORMATIONS DE L'ALGEBRE DE LIE DE POISSON $C^\infty(M)$ D'UNE VARIETE SYMPLECTIQUE M [5].

Rappelons qu'une structure symplectique sur M est définie par la donnée d'une deux-forme σ fermée et partout non dégénérée. σ induit un isomorphisme μ entre l'espace des champs de vecteur et celui des 1-formes défini par $\mu(X) = -i_X(\sigma)$ (i_X produit intérieur par X). Si $u \in N$ on pose $X_u = \mu^{-1}(du)$ X_u est le champ de vecteur hamiltonien associé à u.

Si u et v sont dans N $\{u,v\} = \sigma(X_u,X_v) = -X_u(v)$ est le crochet de POISSON alors $(N,\{.\})$ est une algèbre de LIE.

DEFINITION 7 :

Un opérateur bilinéaire formel

$$[u,v]_\lambda = \{u,v\} + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r B^r(u,v)$$

est une déformation de l'algèbre de LIE $(N,\{,\})$ *si* $(E, [,]_\lambda)$ *est une algèbre de LIE (dans ce cas les opérateurs* B^r *sont antisymétriques).*

EXEMPLE :

Soit $u *_\lambda v = u.v + \lambda\{u,v\} + \sum_{r\geqslant 2} \lambda^r C^r(u,v)$ une déformation associative du produit ordinaire. On pose $\{u,v\}_\lambda = \dfrac{u *_\lambda v - v *_\lambda u}{2\lambda}$

alors : $\{u,v\}_\lambda = \{u,v\} + \sum_{r>1} \lambda^r Q^r(u,v)$ avec $Q^r(u,v) = \dfrac{C^{r+1}(u,v) - C^{r+1}(v,u)}{2}$

$\{u,v\}_\tau$ est une déformation du crochet de POISSON. Supposons de plus que les opérateurs bilinéaires C^r vérifient les conditions suivantes :

(C) i) $C^{2\ell+1}$ est antisymétrique, $C^{2\ell}$ est symétrique pour tous les $\ell\geqslant 0$
ii) C^r est bidifférentiel.
iii) C^r est nul sur les constantes

Alors $Q^{2\ell+1} = 0$ et $Q^{2\ell} = C^{2\ell+1}$, en posant $\nu = \lambda^2$ on obtient une déformation du crochet de POISSON

$$[u,v]_\lambda = \{u,v\} + \sum_{r\geqslant 1} \nu^r C^{2r+1}(u,v) \quad .$$

PROPOSITION 8. [10] :

$[u,v]_\lambda$ *provient d'un seul produit* $*_\lambda$ *associatif vérifiant les condition* (C).

En appliquant ce qui précède au produit de MOYAL (relation 10) on obtient une déformation du crochet de POISSON appelée crochet de MOYAL-VEY, ce crochet fournit le symbole de WEYL du commutateur de deux opérateurs de WEYL.

Il existe une cohomologie dite cohomologie de CHEVALLEY qui joue pour ces déformations le même rôle que la cohomologie de HOSCHILD pour les déformations des algèbres associatives. Une p-cochaîne pour la cohomologie de CHEVALLEY est une application p-linéaire alternée de N^p dans N, les O-cochaînes s'identifiant aux éléments de N. Le cobord de la p-cochaîne C est la (p+1)-cochaîne ∂C définie par

$$\partial C(u_o,u_1,\ldots,u_p) = \varepsilon^{\lambda_o\ldots\lambda_p}_{o\ \ldots\ p}\left[\frac{1}{p!}\{u_{\lambda_o},\ C(u_{\lambda_1},\ldots,u_{\lambda_p})\}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2(p-1)!}\ C(\{u_{\lambda_o},u_{\lambda_1}\},\ u_{\lambda_2},\ldots,u_{\lambda_p})\right]$$

avec u_λ dans N, où ε est l'indicateur d'antisymétrisation de KRONECKER. Par exemple pour une 1-cochaine C $\partial C(u,v) = \{u,C(v)\} + \{C(u),v\} - C(\{u,v\})$ et les 1-cocycles sont les dérivations du crochet de POISSON.

Supposons que M soit une variété symplectique compacte, et posons $T(u) = \int_M u.\sigma^n$.

PROPOSITION 9 : $\partial T = 0$.

PREUVE :

Soit $(\psi_i)_{i=1,\ldots,\ell}$ une partition finie de l'unité subordonnée à un atlas orienté $\{(U_i,\phi_i),\ i=1\ldots\ell\}$ de la variété orientée (M,σ^n).

On a $T(\{u,v\}) = \sum_{i=1}^{\ell} \int_M \{\psi_i u,v\}\ \sigma^n = \sum_{i=1}^{\ell} \int_{U_i} \{\psi_i u,v\}\ \sigma^n$

soit

$$T(\{u,v\}) = \sum_{i=1}^{\ell} n! \int_{\phi_i(U_i)} \{(\psi_i u)\circ\phi_i^{-1}\ ,\ v\circ\phi_i^{-1}\}\ dx_1\ \ldots\ dx_{2n} \ .$$

Des intégrations par parties prouvent que les intégrales figurant dans la somme précédente sont nulles. Donc $T(\{u,v\}) = 0$. Par ailleurs $\{T(u),v\} = \{u,T(v)\} = 0$ puisque T(u) et T(v) sont des constantes, d'où la conclusion.

PROPOSITION 10 :

i) Si M *est une variété symplectique compacte les dérivations du crochet de POISSON sont de la forme*

$$T(u) = \mathscr{L}(Z)(u) + C\int_M u\ \sigma^n$$ où Z *est un champ de*

vecteurs tel que $\mathscr{L}(Z)\sigma + k(\sigma)\sigma = 0$ *(*$k(\sigma)$ *et* C *sont des constantes).*

ii) Si M *est une variété symplectique non compacte, les dérivations du crochet de POISSON sont de la forme*

$$T(u) = \mathscr{L}(Z)u \quad \text{où } Z \text{ est tel que } \mathscr{L}(Z)\sigma + \text{Cte}.\sigma = 0.$$

L'exemple précédent prouve que sur une variété symplectique compacte ∂T peut être local sans que T le soit (comparer avec la proposition 6). Cependant

PROPOSITION 11. [10] :

Soit M *une variété symplectique non compacte. Si* $T : N \to N$ *est tel que* ∂T *soit local alors* T *est lui aussi local.*

REMARQUE 11 :

La proposition 7 est vraie en cohomologie de CHEVALLEY.

Soit $B(u,v) = \{u,v\} + \sum_{r\geq 1} \lambda^r C^r(u,v)$ un opérateur bilinéaire formel où les C^r sont des 2 co-chaînes de CHEVALLEY. Si $u,v,w \in N$ on a

$$\oint \oint B(B(u,v),w) = \sum_{t=o}^{\infty} \lambda^t D_t(u,v,w)$$

avec $D_t(u,v,w) = \sum_{r+s=t} \oint C_r(C_s(u,v),w) \quad (r,s\geq 0)$ où $\oint$ signifie que l'on somme sur les permutations circulaires de (u,v,w) et $C^o(u,v) = \{u,v\}$. D_o étant nulle $(E,B(u,v))$ sera une algèbre de LIE si et seulement si $D_t = 0$ pour $t\geq 1$.

Posons $\quad E_t(u,v,w) = \sum_{r+s=t} \oint C_r(C_s(u,v),w). \ (r,s\geq 1) \quad (E_1=0)$. On a $D_t = E_t - \partial C_t$ pour $t\geq 1$. Pour que B soit une déformation du crochet de POISSON il faut et il suffit que pour tout $t\geq 1$

$$E_t = \partial C_t \quad . \tag{12}$$

La relation 12 est en fait une relation de récurrence puisque dans E_t ne figure que des C^s pour $s<t$. On voit ainsi que la classe de

cohomologie de E_t est l'obstruction à l'ordre t à la construction d'une déformation du crochet de POISSON.

On définit les équivalences des déformations du crochet de POISSON de manière analogue à celle des produits $*$, les remarques 8 restent vraies.

La relation (12) prouve que les obstructions à la construction d'une déformation du crochet de POISSON se trouvent dans le 3e espace de la cohomologie de CHEVALLEY de M. Explicitons les espaces $H_1^p(N)$ de cohomologie $\vdash$-différentiable de CHEVALLEY réelles. Soit $e([\sigma])$ l'opérateur de cohomologie définie sur les classes réelles de cohomologie de M (cohomologie de de RHAM) par le produit extérieur par σ. Notons $P^{p-1}(M,\sigma)$ le noyau de $e([\sigma])$: $H^{p-1}(M,\mathbb{R}) \to H^{p+1}(M,\mathbb{R})$ et $Q^p(M,\sigma)$ l'image de $H^{p-2}(M,\mathbb{R})$ par $e([\sigma])$.

PROPOSITION 12 . [5] :

$H_1^p(N)$ est isomorphe à $P^{p-1}(M,\sigma) \oplus (H^p(M,\mathbb{R})/Q^p(M,\sigma))$ en particulier si σ est exacte on a $P^{p-1}(M,\sigma) = H^{p-1}(M,\mathbb{R})$ et $Q^p(M,\sigma) = (0)$, alors $H_1^p(N)$ est isomorphe à

$$H^{p-1}(M,\mathbb{R}) \oplus H^p(M,\mathbb{R}) \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE :

[1] A. GROSSMANN, G. LOUPIAS, E.M. STEIN, *An algebra of pseudodifferential operators and quantum mechanics in phase space,* Ann. Inst. Fourier 18, 2 (1968), 343-368.

[2] A. VOROS, *An algebra of pseudodifferential operators and the asymptotics of quantum mechanics.* Journal of functional Analysis 29, 104-132 (1978).

[3] A. UNTERBERGER, *Oscillateur harmonique et opérateurs pseudodifférentiels.* Ann. Inst. Fourier. 29, 3 (1979), 201-224.

[4] L. HORMANDER, *The Weyl calculuc of pseudo-differential operators.* Communications on P. and A. Mathematics, Vol. XXXII (1979), 359-443.

[5] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROVICZ et D. STERNHEIMER, *Deformation theory and quantization.* Ann. of Physics t. 111 1978, p. 61-110 et p. 111-152.

[6] G. PATISSIER, *Déformations différentielles à coefficients constants et produits de Moyal générélisés.* Ann. Inst. Henri Poincaré Vol. XXX, 4, 1979, p. 275-293.

[7] C. MORENO, *Produits * et analyse spectrale.* Comptes-rendus des journées relativistes , Grenoble 1981.

[8] M. COHEN et S. GUTT, *Regular * representations of Lie algebras* Letters in Mathematical Physics, 6 (1982), p. 395-404.

[9] S. GUTT, *Deformation theory and its applications to mechanics and to group representation.* Preprint, 1982.

[10] A. LICHNEROVICZ, *Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique (les $*_\nu$-produits),* Annales de l'Institut Fourier. tome XXXII, fasc. 1, année 1982.

[11] L. HORMANDER, *pseudo-differential operators and hypoelliptic equations.* Amer. Math. Soc. Symp. on Singular integral operators 1966. pp. 138-183.
