RENÉ MAYET

Classes équationnelles de treillis orthomodulaires liées aux états

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 2A
« Classes équationnelles de treillis orthomodulaires liées aux états », , p. 1-39
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___2A_A1_0>

CLASSES EQUATIONNELLES DE TREILLIS ORTHOMODULAIRES

LIEES AUX ETATS

par René MAYET

I - INTRODUCTION

L'ensemble $\mathscr{C}(H)$ des sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert H est un treillis muni d'une loi unaire qui à tout élément fait correspondre son orthogonal (appelé aussi son orthocomplément). Un treillis orthocomplémenté de la forme $\mathscr{C}(H)$ est dit hilbertien.

Les treillis orthomodulaires, qui forment une classe équationnelle, ont été introduits pour obtenir une approche algébrique des treillis hilbertiens. Les conditions que doit vérifier un treillis orthomodulaire pour être isomorphe à un treillis hilbertien ont été mises en évidence, et ceci a permis de mettre sous d'autres formes le formalisme hilbertien de la mécanique quantique [11, 13, 15] , en partant de la notion primitive de question. Ces conditions ne sont pas équivalentes à des équations.

Un problème ouvert est celui de la détermination des équations vérifiées par les treillis hilbertiens, ce qui permettrait de séparer la partie "purement logique" des axiomatiques quantiques du type précédent. On ne sait d'ailleurs pas si ce problème admet une solution, car il n'est pas certain que ces équations forment un ensemble récursivement énumérable.

D'où l'intérêt de rechercher ce type d'équations, et également d'étudier par diverses méthodes les classes équationnelles de treillis orthomodulaires, en particulier celles qui contiennent la classe des treillis hilbertiens.

A ce sujet, on peut citer les travaux suivants :

En 1971-72, G. BRUNS et G. KALMBACH [2] mettent en évidence des classes équationnelles de treillis orthomodulaires, en relation avec les blocs (sous treillis booléens maximaux), et caractérisent [3] quelques unes des plus petites classes équationnelles de treillis orthomodulaires.

Jusqu'en 1975, la classe des treillis orthomodulaires était la plus petite classe équationnelle connue contenant la classe des treillis hilbertiens. A cette date, A. DAY met en évidence l'équation orthoarguésienne (cf. [10]) qui est vérifiée par les treillis hilbertiens. G. KALMBACH construit un treillis orthomodulaire ne vérifiant pas cette loi.

En 1981, R. GODOWSKI [6] étudie la classe équationnelle engendrée par les treillis orthomodulaires ayant un ensemble fort d'états. Il obtient une suite infinie d'équations vérifiées par ces treillis, et en particulier par les treillis hilbertiens. Il montre que ces équations ne sont pas vérifiées par tous les treillis orthomodulaires, et qu'elles ne se déduisent pas d'un nombre fini d'entre elles. R. GODOWSKI montre également que les treillis orthomodulaires ayant un ensemble fort d'états à valeurs dans $\{0,1\}$ forment une classe équationnelle.

Dans [8], R. GODOWSKI et R. GREECHIE donnent une série d'équations relatives à cette dernière classe équationnelle. D'autre part, ils déduisent de la loi orthoarguésienne une équation plus simple, s'écrivant avec trois variables (les treillis hilbertiens ne vérifient pas d'autres équations à deux variables que celles vérifiées par tous les treillis orthomodulaires), et construisent un treillis orthomodulaire très simple ne la vérifiant pas.

Le principal résultat du présent article (théorème 1) donne une méthode assez générale permettant d'obtenir des classes équationnelles de treillis orthomodulaires, définies par des conditions sur les états. La démonstration de ce théorème utilise la caractérisation des classes équationnelles de G. BIRKHOFF (stabilité par sous algèbre, produit, et image homomorphe). Ces classes équationnelles dépendent de plusieurs paramètres, et il paraît difficile d'en faire une étude systématique. On donne un certain nombre de classes équationnelles obtenues par cette méthode :

Si K est une partie fermée symétrique de $[0,1]$, contenant $\{0,1\}$, l'ensemble des treillis orthomodulaires L tels que, pour tout élément $x \neq 0$ de L, il existe un état α sur L, à valeurs dans K, tel que $\alpha(x) = 1$, est une classe équationnelle. On montre qu'il y a $2^{\aleph_0}$ classes différentes de cette forme.

La classe obtenue pour $K = [0,1]$ contient la classe des treillis hilbertiens. On en donne quelques propriétés.

D'autres exemples sont donnés, faisant intervenir en particulier les ensembles forts d'états (ce qui permet de résoudre une conjecture de R. GODOWSKI [7]), ainsi que les états de JAUCH-PIRON.

Pour les généralités sur les treillis orthomodulaires, on pourra consulter [1], [10], ou [12].

II - LES ETATS SUR UN TREILLIS ORTHOMODULAIRE

Un treillis orthomodulaire (en abrégé TOM) est un treillis avec plus petit élément 0 et plus grand élément 1, muni d'une loi unaire $\perp$ vérifiant les conditions : $x \wedge x^{\perp} = 0$, $x \vee x^{\perp} = 1$, $x^{\perp\perp} = x$, $(x \vee y)^{\perp} = x^{\perp} \wedge y^{\perp}$, $x \leqslant y \Rightarrow y = x \vee (x^{\perp} \wedge y)$.

Soit L un TOM. Si $p,q \in L$, on désigne par $p \to q$ l'élément $p^{\perp} \vee (p \wedge q)$. On montre que $p \leqslant q \Leftrightarrow p \to q = 1$. La notation $p \perp q$ signifie $p \leqslant q^{\perp}$.

Un état sur L est une application α de L dans l'intervalle réel $[0,1]$, telle que :

- $\alpha(1) = 1$
- $p \perp q \Rightarrow \alpha(p \vee q) = \alpha(p) + \alpha(q)$.

Ceci implique :

$\alpha(p^{\perp}) = 1 - \alpha(p)$

$p \leqslant q \Rightarrow \alpha(p) \leqslant \alpha(q)$

$\alpha(0) = 0$ (si L a au moins 2 éléments).

Un ensemble S d'états sur L est dit :

. plein si, $\forall p,q \in L,\ p \leqslant q \Leftrightarrow (\forall \alpha \in S,\ \alpha(p) \leqslant \alpha(q))$,

. fort si $\forall p,q \in L,\ p \leqslant q \Leftrightarrow (\forall \alpha \in S,\ \alpha(p) = 1 \Rightarrow \alpha(q) = 1)$.

Nous dirons que S est large si, pour tout élément $p \neq 0$ de L, il existe $\alpha \in S$ tel que $\alpha(p) = 1$ (cf. [14]).

Tout ensemble fort d'états est plein et large.

Un état α sur L est un état de JAUCH-PIRON (cf. [14]) si, quels que soient $p,q \in L$, $\alpha(p) = \alpha(q) = 1 \Rightarrow \alpha(p \wedge q) = 1$.

Si L est le treillis des sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert H, alors pour tout vecteur unitaire u de H, l'application de L dans $[0,1]$ qui à tout V de L fait correspondre le carré de la norme de la projection de u sur V, est un état sur L. L'ensemble des états de cette forme est un ensemble fort d'états de Jauch-Piron.

NOTATIONS.

On utilisera les notations suivantes :

$S(L)$: ensemble des états sur un TOM L.

$S_A(L)$: ensemble des états sur un TOM L, à valeurs dans une partie A de $[0,1]$.

OM : classe des TOM.

OM_P : classe des TOM ayant un ensemble plein d'états.

OM_F : classe des TOM ayant un ensemble fort d'états.

OM_L : classe des TOM ayant un ensemble large d'états.

ETATS ET HOMOMORPHISMES.

Si f est un homomorphisme de TOM, de L dans L', et si $\alpha' \in S(L')$, alors $\alpha' \circ f \in S(L)$.

Les résultats suivants sont démontrés dans [7] :

. Les classes OM_P et OM_F sont stables par sous-algèbres et par produit, mais ne sont pas des classes axiomatisables (car elles ne sont pas stables par ultraproduit).

. Si g est un homomorphisme surjectif d'un TOM L sur un TOM L', et si α est un état sur L constant sur $g^{-1}(1)$ (ou bien sur $g^{-1}(0)$), alors il existe un état unique α' sur L' tel que $\alpha = \alpha' \circ g$.

UNE TOPOLOGIE COMPACTE SUR L'ENSEMBLE DES ETATS.

Soit L un TOM.

$[0,1]$ étant muni de sa topologie habituelle, on munit S(L) de la topologie de la convergence simple, qui est également la topologie induite sur S(L) par la topologie produit de $[0,1]^L$. Dans ce qui suit, on supposera toujours S(L) muni de cette topologie.

LEMME 1 : S(L) *est un espace compact.*

D'après le théorème de Tychonoff, $[0,1]^L$ muni de la topologie produit est compact. Pour tout $p \in L$, l'application γ_p, de $[0,1]^L$ dans $[0,1]$, définie par $\gamma_p(\alpha) = \alpha(p)$ est continue. Si $p,q \in L$, l'application $\sigma_{p,q}$ de $[0,1]^L$ dans l'ensemble des réels définie par $\sigma_{p,q}(\alpha) = \alpha(p)+\alpha(q)-\alpha(p \vee q)$ est également continue. Or,

$$S(L) = \gamma_1^{-1}(1) \cap \Big(\bigcap_{\substack{p,q \in L \\ p \perp q}} \sigma_{p,q}^{-1}(0)\Big)$$

ce qui prouve que S(L) est fermé dans $[0,1]^L$, donc compact.

ETATS A VALEURS DANS UNE PARTIE FERMEE DE $[0,1]$.

Soit K une partie fermée de $[0,1]$, et soit $S_K(L)$ l'ensemble des états sur L, à valeurs dans K.

$S_K(L)$ est égal à $S(L) \cap \Big(\bigcap_{p \in L} \gamma_p^{-1}(K)\Big)$, donc est une partie compacte de S(L).

Une condition nécessaire pour que $S_K(L)$ soit non vide est que $\{0,1\} \subset K$. Posons :

$$K' = K \cap \{1-t \mid t \in K\}$$

Alors $K' \subset K$, K' est fermé, et symétrique (par rapport à 1/2) ; la condition

$\alpha(p^{\perp}) = 1-\alpha(p)$ vérifiée pour tout $p \in L$ et pour tout $\alpha \in S(L)$ montre que $S_{K'}(L) = S_K(L)$.

Dans ce qui suit, on considérera des états à valeurs dans une partie fermée K de $[0,1]$. D'après ce qui précède on pourra, sans diminuer la généralité, supposer que K est symétrique et contient $\{0,1\}$.

III - POLYNOMES ET HOMOMORPHISMES

Les définitions données dans ce paragraphe interviendront dans les théorèmes 1 et 2. Cependant, seuls les ensembles T' et T'_o sont utilisés dans le théorème 1.

Soit T l'ensemble des polynômes (ou termes) de la théorie des TOM. Un polynôme ϕ est noté $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ si l'ensemble de ses variables est contenu dans $\{x_1,\ldots,x_n\}$.

DEFINITIONS.

On désigne par :

T' : l'ensemble des polynômes $\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$ tels que, pour tout TOM L, et quels que soient $p,p',q_1,\ldots,q_n$ dans L :

$$(\phi(p,q_1,\ldots,q_n) = 0 \text{ et } p' \leq p) \Rightarrow (\phi(p',q_1,\ldots,q_n) = 0).$$

T_o : l'ensemble des polynômes $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ tels que, pour tout homomorphisme surjectif f d'un TOM L sur un TOM L', on ait la propriété suivante :

Quels que soient $q'_1,\ldots,q'_n$ dans L' tels que $\phi(q'_1,\ldots,q'_n) = 0$, il existe $q_1,\ldots,q_n$ dans L tels que $f(q_k) = q'_k$ pour $k = 1,\ldots,n$, et $\phi(q_1,\ldots,q_n) = 0$.

$T(x_1,x_2,\ldots,x_n)$: l'ensemble des polynômes $\phi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ tels que pour tout homomorphisme surjectif f d'un TOM L sur un TOM L' on ait :

Quels que soient $q'_1,\ldots,q'_n$, $r'_1,\ldots,r'_m$ dans L', tels que $\phi(q'_1,\ldots,q'_n, r'_1,\ldots,r'_m) = 0$, et quels que soient $q_1,\ldots,q_n$ dans L tels que $f(q_k) = q'_k$ pour $k = 1,\ldots,n$, il existe $r_1,\ldots,r_m \in L$ tels que $f(r_k) = r'_k$ pour $k = 1,\ldots,m$, et $\phi(q_1,\ldots,q_n,r_1,\ldots,r_m) = 0$ (On remarque que $T(x_1,\ldots,x_n) \subset T_o$).

On pose :

$T'_o = T' \cap T_o$

$T'(x,x_1,\ldots,x_n) = T' \cap T(x,x_1,\ldots,x_n)$.

Soient $x,x_1,\ldots,x_n$, $(y_j)_{j \in J}$ des variables distinctes. Une notation de la forme $\phi(x,x_1,\ldots,x_n,(y_j)_{j \in J})$ désigne un polynôme dont l'ensemble des variables est contenu dans $\{x,x_1,\ldots,x_n\} \cup \{y_j | j \in J\}$.

Soit Ψ un ensemble de polynômes de la forme $\psi(x,x_1,\ldots,x_n,(y_j)_{j \in J})$ On dira que $\Psi \in ST'(x,x_1,\ldots,x_n)$ si $\Psi \subset T'$ et si, pour tout homomorphisme surjectif f d'un TOM L sur un TOM L', quels que soient $p',q'_1,\ldots,q'_n$ dans L', il existe $p,q_1,\ldots,q_n$ dans L tels que :

- $f(p) = p'$
- Pour $k = 1,\ldots,n$, $f(q_k) = q'_k$.
- Pour toute famille $(r'_j)_{j \in J}$ d'éléments de L' telle que, pour tout $\psi \in \Psi$, $\psi(p',q'_1,\ldots,q'_n, (r'_j)_{j \in J}) = 0$, il existe une famille $(r_j)_{j \in J}$ d'éléments de L, telle que pour tout $j \in J$ $f(r_j) = r'_j$,

et pour tout $\psi \in \Psi$, $\psi(p,q_1,\ldots,q_n, (r_j)_{j \in J}) = 0$.

EXEMPLES.

a Si $\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$ est un polynôme croissant par rapport à la première variable (c'est-à-dire si, pour tout TOM L, et quels que soient $p,p',q_1,\ldots,q_n$ dans L, tels que $p \leqslant p'$, on a $\phi(p,q_1,\ldots,q_n) \leqslant \phi(p',q_1,\ldots,q_n)$), alors $\phi(x,x_1,\ldots,x_n) \in T'$.

Mais ce n'est pas le seul cas. Par exemple, soit $\phi_1(x_1,\ldots,x_n)$ un polynôme quelconque. Posons :

$$\phi(x,x_1,\ldots,x_n) = (x \to \phi_1(x_1,\ldots,x_n))^{\perp}$$

Alors ϕ n'est pas croissant, en général, par rapport à x, et cependant $\phi(x,x_1,\ldots,x_n) \in T'$, car :

$$\phi(p,q_1,\ldots,q_n) = 0 \Longleftrightarrow p \leqslant \phi_1(q_1,\ldots,q_n) .$$

$\underline{b}$ Nous dirons qu'un terme t est normal si t n'admet aucun sous-terme d'ordre > 1 de la forme $t'^{\perp}$. Autrement dit, t est normal s'il est construit à partir de termes de la forme y ou $y^{\perp}$ (où y est une variable) en utilisant uniquement les connecteurs $\vee$ et $\wedge$. Les sous-termes de la forme y ou $y^{\perp}$ utilisés dans cette construction seront appelés sous-termes initiaux de t.

Les équations $x \wedge x^{\perp} = 0$, $x \vee x^{\perp} = 1$, $(x \vee y)^{\perp} = x^{\perp} \wedge y^{\perp}$, $(x \wedge y)^{\perp} = x^{\perp} \vee y^{\perp}$, vérifiées par tout TOM, montrent que tout polynôme est équivalent à un polynôme normal sans constantes (c'est-à-dire sans occurences de 0 et 1).

Soit $\psi\,(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ un polynôme normal sans constantes de la forme $\psi_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \wedge \psi_2(y_1,\dots,y_m)$, ne contenant pas deux sous-termes initiaux de la forme y_i et $y_i^{\perp}$ pour $i=1,\dots,m$.

Alors $\psi \in T(x_1,\dots,x_n)$. En effet, soit f un homomorphisme surjectif d'un TOM L sur un TOM L'. Soient $q'_1,\dots,q'_n$, $r'_1,\dots,r'_m$ des éléments de L' tels que $\psi(q'_1,\dots,q'_n,r'_1,\dots,r'_m) = 0$. Soient $q_1,\dots,q_n$, $s_1,\dots,s_m$ des éléments de L tels que $f(q_k) = q'_k$ pour $k = 1,\dots,n$ et $f(s_i) = r'_i$ pour $i = 1,\dots,m$.

Pour $i = 1,\dots,m$, posons :

. $r_i = s_i \vee \psi(q_1,\dots,q_n,s_1,\dots,s_m)$ si $y_i^{\perp}$ est un sous-terme initial de ψ.

. $r_i = s_i \wedge \psi(q_1,\dots,q_n,s_1,\dots,s_m)^{\perp}$ sinon.

Alors, pour $i = 1,\dots,m$, $f(r_i) = f(s_i) = r'_i$. Si $y_i^{\perp}$ est un sous-terme initial ψ, $r_i^{\perp} \leqslant s_i^{\perp}$; si y_i est un sous-terme initial de ψ, $r_i \leqslant s_i$. Il en résulte que $\psi(q_1,\dots,q_n,r_1,\dots,r_m) \leqslant \psi(q_1,\dots,q_n,s_1,\dots,s_m)$. Une récurrence évidente sur l'ordre montre que :

$$\psi_2(r_1,\dots,r_m) \leqslant \psi(q_1,\dots,q_n,s_1,\dots,s_m)^{\perp} .$$

D'où $\psi(q_1,\dots,q_n,r_1,\dots,r_m) = 0$.

Notons qu'une démonstration semblable permet de montrer que $\psi_2 \in T_o$.

c   Soit $\psi(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ un polynôme de la forme

$(y_1\wedge\dots\wedge y_m \to \psi_1(x_1,\dots,x_n))^{\perp}$.

Alors $\psi \in T(x_1,\dots,x_n)$. En effet, soit f un homomorphisme surjectif d'un TOM L sur un TOM L'. Soient $q'_1,\dots,q'_n,r'_1,\dots,r'_m$ des éléments de L' tels que $\psi(q'_1,\dots,q'_n , r'_1,\dots,r'_m) = 0$. Soient $q_1,\dots,q_n$, $s_1,\dots,s_m$ des éléments de L tels que $f(q_k) = q'_k$ pour $k = 1,\dots,n$, et $f(s_i) = r'_i$ pour $i = 1,\dots,m$. Pour $i=1,\dots,m$, posons :

$$r_i = s_i \wedge(s_1\wedge\dots\wedge s_m \to \psi_1(q_1,\dots,q_m)).$$

Alors : $f(r_i) = r'_i$

$$r_1\wedge\dots\wedge r_m = (s_1\wedge\dots\wedge s_m) \wedge (s_1\wedge\dots\wedge s_m \to \psi_1(q_1,\dots,q_n))$$

$$= s_1\wedge\dots\wedge s_m \wedge \psi_1(q_1,\dots,q_n) \lesssim \psi_1(q_1,\dots,q_n) .$$

Donc $\psi(q_1,\dots,q_n,r_1,\dots,r_m) = 0$.

d   Soit Ψ un ensemble de polynômes de la forme $\psi(x,x_1,\dots,x_n,(y_j)_{j \in J})$. On suppose que :

(i) $J = J_1 \cup J_2$ avec $J_1 \cap J_2 = \emptyset$.

(ii) Une variable de la forme y_j avec $j \in J_2$ ne figure pas dans deux polynômes différents de Ψ .

(iii) Pour tout polynôme ψ de Ψ, si $y_{j_1},\dots,y_{j_k}$ sont les variables de la famille $(y_j)_{j \in J_1}$ figurant dans ψ , alors

$\psi \in T'(x,x_1,\dots,x_n,y_{j_1},\dots,y_{j_k})$.

Alors, on voit que dans ces conditions, $\Psi \in ST'(x,x_1,\dots,x_n)$.

IV. LES CLASSES EQUATIONNELLES OM_X

THEOREME 1. - *Soient :*

. K *une partie fermée symétrique de* $[o,1]$, *contenant* $\{o,1\}$.

. $\phi(x,x_1,\dots,x_n)$ *un polynôme de* T'.

. $\psi(x,x_1,\dots,x_m)$ *un polynôme de* T'_o.

. K' *une partie fermée de* K^n.

. K'' *une partie fermée de* K^m.

On pose $X = (K,\phi,\psi,K',K'')$, *et on désigne par* OM_X *la classe des TOM* L *tels que :*

Quels que soient $p,q_1,\dots,q_n$ *dans* L *tels que* $\phi(p,q_1,\dots,q_m) \neq 0$, *il existe* $\alpha \in S_K(L)$ *(ensemble des états sur* L *à valeurs dans* K*)* *tel que :*

(i) $\alpha(p) = 1$

(ii) $(\alpha(q_1),\dots,\alpha(q_n)) \in K'$

(iii) Quels que soient $r_1,\dots,r_m$ *dans* L *tels que*

$$\psi(p,r_1,\dots,r_m) = 0 \ , \ (\alpha(r_1),\dots,\alpha(r_m)) \in K''.$$

Alors OM_X *est une classe équationnelle.*

Soit L un TOM quelconque. Si $p,q_1,\dots,q_n$ sont des éléments de L, on désigne par $S(L,X,p,q_1,\dots,q_n)$ l'ensemble des états $\alpha \in S_K(L)$ vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème.

LEMME 2 . - *Les ensembles* $S(L,X,p,q_1,\dots,q_n)$ *sont fermés dans* $S_K(L)$.

En effet, pour tout $r \in L$, l'application γ_r , de $S_K(L)$ dans K définie par $\gamma_r(\alpha) = \alpha(r)$ est continue. Quels que soient $s_1,\dots,s_k$ dans L, l'application $\gamma_{s_1,\dots,s_k}$, de $S_K(L)$ dans K^k, définie par

$$\gamma_{s_1,\dots,s_k}(\alpha) = (\alpha(s_1),\dots,\alpha(s_k)) \text{ est continue.}$$

$$S(L,X,p,q_1,\dots,q_n) = \gamma_p^{-1}(1) \cap \gamma^{-1}_{q_1,\dots,q_n}(K') \cap \Big(\bigcap_{\substack{r_1,\dots,r_m \in L \\ \psi(p,r_1,\dots,r_m)=0}} \gamma^{-1}_{r_1,\dots,r_m}(K'') \Big) .$$

Ceci montre que $S(L,X,p,q_1,\dots,q_n)$ est fermé.

LEMME 3 . - *Soit* F *un filtre de* L, *et soient* $q_1,\dots,q_n$ *des éléments de* L *tels que, pour tout* $p \in F$, $S(L,X,p,q_1,\dots,q_n) \neq \emptyset$. *Alors*

$$\bigcap_{p \in F} S(L,X,p,q_1,\dots,q_n) \neq \emptyset .$$

Posons $\mathscr{B} = \{S(L,X,p,q_1,\ldots,q_n) \mid p \in F\}$.

$\mathscr{B}$ est une base de filtre de parties de $S_K(L)$. En effet, soient $p_1,p_2 \in F$. Alors $p_1 \wedge p_2 \in F$. Soit $\alpha \in S(L,X,p_1 \wedge p_2,q_1,\ldots,q_n)$.

Alors :

(i) $\alpha(p_1 \wedge p_2) = 1$, donc $\alpha(p_1) = \alpha(p_2) = 1$.

(ii) $(\alpha(q_1),\ldots,\alpha(q_n)) \in K'$

(iii) Soient $r_1,\ldots,r_m$ des éléments de L tels que $\psi(p_1,r_1,\ldots,r_m) = 0$.

Alors, $\psi(x,x_1,\ldots,x_m)$ étant dans T'_o , donc dans T',

$\psi(p_1 \wedge p_2, r_1,\ldots,r_m) = 0$, et par conséquent $(\alpha(r_1),\ldots,\alpha(r_m)) \in K''$.

De même, si $\psi(p_2,r_1,\ldots,r_m) = 0$, $(\alpha(r_1),\ldots,\alpha(r_m)) \in K''$.

Ceci prouve que $\alpha \in S(L,X,p_1,q_1,\ldots,q_n) \cap S(L,X,p_2,q_1,\ldots,q_n)$.

Donc $S(L,X,p_1 \wedge p_2,q_1,\ldots,q_n) \subset S(L,X,p_1,q_1,\ldots,q_n) \cap S(L,X,p_2,q_1,\ldots,q_n)$.

Les éléments de $\mathscr{B}$ sont fermés dans l'espace topologique compact $S_K(L)$, et non vides. Donc $\bigcap_{p \in F} S(L,X,p,q_1,\ldots,q_n) \neq \emptyset$.

Pour démontrer le théorème 1, il suffit, d'après le théorème de BIRKHOFF sur la caractérisation des classes équationnelles, de montrer que OM_X est stable par sous-algèbre, par produit, et par image homomorphe.

. OM_X est stable par sous-algèbre

Soit L un TOM de OM_X, et soit L' un sous TOM de L. Soient $p,q_1,\ldots,q_n \in L'$ tels que $\phi(p,q_1,\ldots,q_n) \neq 0$.

Si $\alpha \in S(L,X,p,q_1,\ldots,q_n)$, la restriction de α à L' est dans $S(L',X,p,q_1,\ldots,q_n)$. Donc $S(L',X,p,q_1,\ldots,q_n) \neq \emptyset$, et L' est dans OM_X.

. OM_X est stable par produit

Soit $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de TOM de OM_X. Soient $p,q_1,\ldots,q_n$ des éléments de $L = \prod_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$, tels que $\phi(p,q_1,\ldots,q_n) \neq 0$.

On pose $p = (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et, pour $k = 1,\ldots,n$, $q_k = (q_{k,\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$.

Il existe $\lambda_o \in \Lambda$ tel que $\phi(p_{\lambda_o}, q_{1,\lambda_o}, \ldots, q_{n,\lambda_o}) \neq 0$, et on a $S(L_{\lambda_o}, X, p_{\lambda_o}, q_{1,\lambda_o}, \ldots, q_{n,\lambda_o}) \neq \emptyset$. Soit α_o un élément de cet ensemble. On pose $\alpha = \alpha_o \circ \Pi_{\lambda_o}$, où Π_{λ_o} est la projection canonique de L sur L_{λ_o}. Alors $\alpha \in S(L,X,p,q_1,\ldots,q_n)$, car $\alpha \in S_K(L)$, et on a :

(i) $\alpha(p) = \alpha_o(p_{\lambda_o}) = 1$

(ii) $(\alpha(q_1),\ldots,\alpha(q_n)) = (\alpha_o(q_{1,\lambda_o}),\ldots,\alpha_o(q_{n,\lambda_o})) \in K'$

(iii) Quels que soient $r_1,\ldots,r_m$ dans L (avec $r_k = (r_{k,\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$) tels que $\psi(p,r_1,\ldots,r_m) = 0$, $\psi(p_{\lambda_o}, r_{1,\lambda_o},\ldots,r_{m,\lambda_o}) = 0$, et $(\alpha(r_1),\ldots,\alpha(r_m)) = (\alpha_o(r_{1,\lambda_o}),\ldots,\alpha_o(r_{m,\lambda_o}))$, d'où $(\alpha(r_1),\ldots,\alpha(r_m)) \in K''$.

Par conséquent L est dans OM_X.

.<u>OM_X est stable par image homomorphe</u>

Soit L un TOM de OM_X , et soit f un homomorphisme surjectif de L sur un TOM L'. Soient $p', q'_1,\ldots,q'_n$ des éléments de L' tels que $\phi(p',q'_1,\ldots,q'_n) \neq 0$. Soient $q_1,\ldots,q_n$ des éléments de L tels que $f(q_k) = q'_k$ pour $k = 1,\ldots,n$.

Posons $F = f^{-1}([p',1])$. Pour tout $p \in F$, $p' \leqslant f(p)$. Donc, $\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$ étant dans T', $\phi(f(p),q'_1,\ldots,q'_n) \neq 0$. Or $\phi(f(p),q'_1,\ldots,q'_n) = f(\phi(p,q_1,\ldots,q_n))$. Par conséquent $\phi(p,q_1,\ldots,q_n) \neq 0$ et $S(L,X,p,q_1,\ldots,q_n) \neq \emptyset$. F est un filtre de L. D'après le lemme 3 on a donc : $\bigcap_{p \in F} S(L,X,p,q_1,\ldots,q_n) \neq \emptyset$.

Soit α un élément de cette intersection. Pour tout $p \in F$, donc en particulier pour tout $p \in f^{-1}(1)$, $\alpha(p) = 1$. Il en résulte (cf. § II) qu'il existe un état α' sur L' tel que $\alpha = \alpha' \circ f$.

$\alpha' \in S(L',X,p',q'_1,\ldots,q'_n)$. En effet $\alpha \in S_K(L')$, et de plus :

(i) $\alpha'(p') = 1$, car si p_1 est un élément de L tel que $f(p_1) = p'$, alors $p_1 \in F$, donc $\alpha'(p') = \alpha(p_1) = 1$.

(ii) $(\alpha'(q'_1),\dots,\alpha'(q'_n)) = (\alpha(q_1),\dots,\alpha(q_n)) \in K'$.

(iii) Soient $r'_1,\dots,r'_m$ des éléments de L' tels que $\psi(p',r'_1,\dots,r'_m) = 0$.

Le polynôme $\psi(x,x_1,\dots,x_m)$ étant dans T'_o , il existe des éléments p, $r_1,\dots,r_m$ de L tels que $p' = f(p)$, $r'_k = f(r_k)$ pour $k = 1,\dots,m$, et $\psi(p,r_1,\dots,r_m) = 0$. $p \in F$, donc $\alpha \in S(L,X,p,q_1,\dots,q_n)$, et $(\alpha(r_1),\dots,\alpha(r_m)) = (\alpha'(r'_1),\dots,\alpha'(r'_m)) \in K''$.

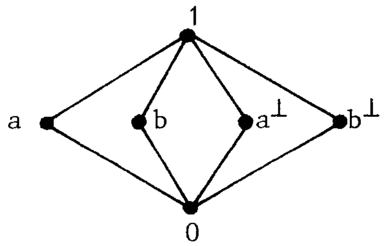
Ceci prouve que $S(L',X,p,q'_1,\dots,q'_n) \neq \emptyset$, et par conséquent que L' est dans OM_X.

REMARQUES.

. Une classe de la forme OM_X peut être triviale, c'est-à-dire constituée par les TOM réduits à un élément. C'est le cas par exemple si $X = (K,\ x \vee x^{\perp},\ 1,\ \emptyset,\ \emptyset)$.

. Pour vérifier qu'une classe OM_X est non triviale, il suffit de montrer que le treillis booléen à deux éléments est dans OM_X, car la classe des treillis booléens est la plus petite classe équationnelle de TOM. Cette vérification est très simple car il y a un seul état sur ce treillis.

. De même, pour montrer que OM_X contient strictement la classe des treillis booléens, il suffit de vérifier que le TOM à 6 éléments MO2 :



est dans OM_X. En effet, la classe équationnelle engendrée par MO2 est la plus petite classe équationnelle de TOM contenant strictement la classe des treillis booléens [3] .

. Désignons par :

$OM_{\phi,1}$ la classe des TOM vérifiant l'équation $\phi(1,x_1,\dots,x_n) = 0$

$OM_{\phi,o}$ la classe des TOM vérifiant l'équation $\phi(o,x_1,\dots,x_n) = 0$.

Alors $OM_{\phi,1} \subset OM_X \subset OM_{\phi,o}$ (cette dernière inclusion provenant du fait que si L est un TOM de OM_X , et si $p,q_1,\ldots,q_n$ sont des éléments de L tels que $\phi(p,q_1,\ldots,q_n) \neq 0$, alors il existe un état α sur L tel que $\alpha(p) = 1$, donc $p \neq 0$, sauf si L a un seul élément . On pourra noter que souvent (cf exemples suivants), $OM_{\phi,1}$ est la classe triviale et $OM_{\phi,0} = OM$.

. Si $\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$ ne dépend pas de x, c'est-à-dire si pour tout TOM L, quels que soient $p,q_1,\ldots,q_n$ dans L, $\phi(p,q_1,\ldots,q_n) = \phi(0,q_1,\ldots,q_n)$. (On remarque que cette condition implique que $\phi \in T'$), alors $OM_X = OM_{\phi,o} = OM_{\phi,1}$. On supposera donc toujours que $\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$ dépend de x, et en particulier contient effectivement la variable x.

. Par contre, il n'est pas nécessaire de supposer que $\psi(x,x_1,\ldots,x_n)$ contient effectivement la variable x. Si x ne figure pas dans ψ, la condition $\psi \in T'_o$ s'écrit simplement $\psi \in T_o$.

. Il existe des TOM n'admettant aucun état [9] . Si l'équation $\phi(x,x_1,\ldots,x_n) = 0$ n'est pas vérifiée par tous les TOM de ce type (donc en particulier si elle n'est pas vérifiée par tous les treillis booléens), alors $OM_X \neq OM$.

. Si pour tout TOM L, quel que soit $p \in L$, $p \neq 0$, il existe $q_1,\ldots,q_n \in L$ tels que $\phi(p,q_1,\ldots,q_n) \neq 0$, alors $OM_X \subset OM_L$.

. Deux classes OM_X et $OM_{X'}$, avec $X \neq X'$ ne sont pas forcément distinctes, mais on verra dans ce qui suit qu'il y a beaucoup de classes différentes de la forme OM_X.

. Toute intersection de classes de la forme OM_X est une classe équationnelle qui n'est pas nécessairement (du moins de manière évidente) de la forme OM_X.

. On note qu'il y a des relations d'inclusion évidentes entre certaines classes OM_X. Soient $X_1 = (K_1,\phi_1,\psi_1,K'_1,K''_1)$ et $X_2 = (K_2,\phi_2,\psi_2,K'_2,K''_2)$ vérifiant les conditions du théorème (les entiers n et m étant les mêmes pour X_1 et X_2). Si $K_1 \subset K_2$, $K'_1 \subset K'_2$, $K''_1 \subset K''_2$, et si les équations $\phi_2 \to \phi_1 = 1$, $\psi_1 \to \psi_2 = 1$ sont vérifiées par tous les TOM, alors $OM_{X_1} \subset OM_{X_2}$.

GENERALISATION.

Soit I un ensemble non vide. L'ensemble R^I (où R est l'ensemble des réels) est muni de sa structure de groupe additif produit. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on désigne par t_I l'élément $(t_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{R}^I$ tel que pour tout $i \in I$, $t_i = t$.

Un état généralisé sur L, à valeurs dans $[0,1]^I$ est défini comme étant une application α de L dans $[o,1]^I$ telle que :

. $\alpha(1) = 1_I$

. $p \perp q \Rightarrow \quad \alpha(p \vee q) = \alpha(p) + \alpha(q)$.

On note S(L,I) l'ensemble des états généralisés sur L à valeurs dans $[o,1]^I$. La bijection canonique qui, à élément $(\alpha_i)_{i \in I}$ de $S(L)^I$ fait correspondre l'élément α de S(L,I) défini par $\alpha(p) = (\alpha_i(p))_{i \in I}$ est un homéomorphisme de l'espace compact $S(L)^I$ (muni de la topologie produit) sur l'espace S(L,I) (muni de la topologie induite par la topologie produit de $([o,1]^I)^L$). On peut donc identifier ces deux espaces.

Pour toute partie fermée symétrique K de $[o,1]^I$, contenant $\{0_I, 1_I\}$ l'ensemble $S_K(L,I)$ des états généralisés sur L à valeurs dans K est fermé dans S(L,I), donc compact.

THEOREME 2. - *Soient :*

. I *un ensemble non vide.*

. K *une partie fermée symétrique de* $[o,1]^I$ *, contenant* $\{0_I,1_I\}$

. $\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$ *un polynôme de* T'.

. Θ *un ensemble de polynômes de la forme* $\theta(x_1,\ldots,x_n)$.

. Ψ *un ensemble de polynômes de la forme* $\psi(x,x_1,\ldots,x_n),(y_j)_{j \in J}$ · *appartenant à* $ST'(x,x_1,\ldots,x_n)$

. Θ' *un ensemble de polynômes de la forme* $\theta'(x_1,\ldots,x_n, (y_j)_{j \in J})$

. K' *une partie fermée non vide de* K^Θ

. K'' *une partie fermée non vide de* $K^{\Theta'}$

On pose $X = (I,K,\phi,\Theta,\Psi,\Theta',K',K'')$ *, et on désigne par* OM_X *la classe des* TOM L *tels que :*

Quels que soient $p, q_1, \ldots, q_n$ *dans* L *tels que* $\phi(p, q_1, \ldots, q_n) \neq 0$, *il existe* $\alpha \in S_K(L, I)$ *tel que :*

(i) $\alpha(p) = 1_I$

(ii) $(\alpha(\theta(q_1, \ldots, q_n)))_{\theta \in \Theta} \in K'$

(iii) Pour toute famille $(r_j)_{j \in J}$ *d'éléments de* L *telle que, pour tout* $\psi \in \Psi$, $\psi(p, q_1, \ldots, q_n, (r_j)_{j \in J}) = 0$, *la famille* $(\alpha(\theta'(q_1, \ldots, q_n, (r_j)_{j \in J})))_{\theta' \in \Theta'}$ *est un élément de* K".

Alors OM_X *est une classe équationnelle.*

(Nous ne donnerons pas la démonstration dont les grandes lignes sont les mêmes que pour le théorème 1).

V. LES CLASSES OM_{KL}.

Soit K une partie fermée symétrique de [o,1], contenant { o,1}. D'après le théorème 1, avec $X = \{K, x, 1, \emptyset, \emptyset\}$, la classe des TOM admettant un ensemble large d'états à valeurs dans K (qui sera notée OM_{KL}) est une classe équationnelle.

En particulier, OM_L est une classe équationnelle.

Posons U = {o,1 }. Pour toute partie K de [o,1] vérifiant les conditions précédentes, on a :

$$OM_{UL} \subset OM_{KL} \subset OM_L$$

La classe OM_{UL} contient elle-même la classe équationnelle [6] des TOM ayant un ensemble fort d'états à valeurs dans U.

COLLAGES DE TREILLIS BOOLEENS.

Dans ce qui suit, nous utiliserons souvent la méthode du collage décrite par R. GREECHIE dans [9] (et généralisée par M. DICHTL [5]) pour obtenir un TOM à partir d'un ensemble de treillis booléens. Un tel collage L peut être représenté par son diagramme de GREECHIE. Sur ce diagramme tous les atomes de L sont représentés par des points. Les blocs de L (sous-algèbres de Boole maximales) qui sont isomorphes aux treillis booléens initiaux, sont représentés par des segments de lignes droites ou courbes (mais sans angles), joignant tous les atomes du bloc considéré.

Soit L un collage de ce type, dont tous les blocs soient finis. Alors un état α sur L est déterminé par sa restriction à l'ensemble des atomes de L. Une application α_o de l'ensemble A des atomes de L dans [o,1] se prolonge en un état sur L si et seulement si, pour tout bloc B de L,

$$\sum_{a \in A \cap B} \alpha_o(A) = 1$$

Si tous les blocs de L ont exactement 3 atomes, alors $L \in OM_{KL}$ si et seulement si, pour tout atome a de L, il existe une application α_o de A dans K, vérifiant la condition précédente, telle que $\alpha_o(a) = 1$.

<u>THEOREME 3</u>. - *Il y a* $2^{\aleph_o}$ *classes équationnelles différentes de la forme* OM_{KL}.

Remarquons d'abord qu'il y a au maximum $2^{\aleph_o}$ classes équationnelles de TOM, car chacune d'elles est déterminée par l'ensemble de ses équations, et l'ensemble de toutes les équations de la théorie des TOM a pour cardinal $\aleph_o$.

Pour tout nombre dyadique de]o,1[, $r = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2^i}$ (avec $\varepsilon_i = 0$ ou 1, $\varepsilon_n = 1$), on pose :

$$r_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i}{2^i} \quad , \text{ pour } k = 1,\dots,n.$$

$$K_r = \{o,1\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} \{\frac{1}{2^k} \, , \, 1 - \frac{1}{2^k} \, , \, r_k, \, 1-r_k\}\right).$$

Dans ce qui suit, on associe à tout nombre r de cette forme un TOM L(r) ayant les propriétés suivantes :

(i) L(r) a deux atomes particuliers a et b, non situés dans deux blocs ayant un atome commun, et le diagramme de L(r) est noté simplement :

$$a \bullet\!\xrightarrow{\;L(r)\;}\!\bullet\, b$$

(ii) Pour tout état α sur L(r), $\alpha(a) = 1 \Rightarrow \alpha(b) \leqslant r$.

(iii) Il existe un état α_r unique sur L(r), tel que $\alpha_r(a) = 1$ et

$\alpha_r(b) = r$, et on a $\alpha_r(L(r)) = K_r$.

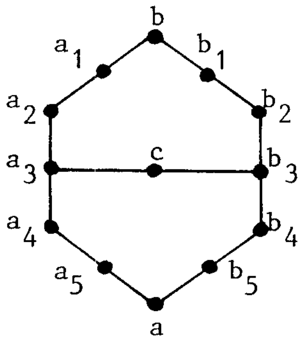
(iv) Pour tout $p \in L(r) - \{0,a\}$, il existe un état α sur L(r), à valeurs dans $\{o,1\}$, tel que $\alpha(a) = 0$ et $\alpha(p) = 1$.

On pourra vérifier que tous les diagrammes qui suivent définissent bien des TOM (cf. [9]) : toutes leurs boucles sont d'ordre $\geqslant 5$ (une boucle d'ordre n étant une suite finie de blocs distincts $B_1,\dots,B_n$ tels que les intersections $B_i \cap B_{i+1}$ (pour $i = 1,\dots,n-1$) et $B_n \cap B_1$ contiennent toutes un atome).

On définit d'abord L(r) pour $r = \frac{1}{2^n}$, par récurrence sur n.

n=1 :

(i) Le diagramme de L(1/2) est :



(noté : $a \xrightarrow{L(1/2)} b$)

(ii) Soit α un état sur L(1/2) tel que $\alpha(a) = 1$. Alors (cf. [7]), $\alpha(b) \leqslant 1/2$, car :

$$\alpha(a_2)+\alpha(a_3)+\alpha(b_2)+\alpha(b_3) = 2$$
$$2\alpha(b)+\alpha(a_2)+\alpha(b_2) \leqslant 2.$$
$$\alpha(a_3)+ \alpha(b_3) \leqslant 1.$$

(iii) Supposons que α soit un état sur L(1/2) tel que $\alpha(a) = 1$ et $\alpha(b) = 1/2$. D'après (ii), on a $\alpha(a_2)+\alpha(b_2) = 1$, d'où nécessairement $\alpha(a_2) = \alpha(b_2) = \frac{1}{2}$, $\alpha(a_3) = \alpha(b_3) = \frac{1}{2}$, et pour tout atome a' autre que les précédents $\alpha(a') = 0$. Ces conditions définissent un état $\alpha_{1/2}$ sur L(1/2), et on a :

$\alpha_{1/2}(L_{1/2}) = \{o, \frac{1}{2} , 1\} = K_{1/2}$.

(iv) Compte tenu des symétries de L(1/2), il suffit de considérer les 3 états α,α', α'' définis sur l'ensemble des atomes par :

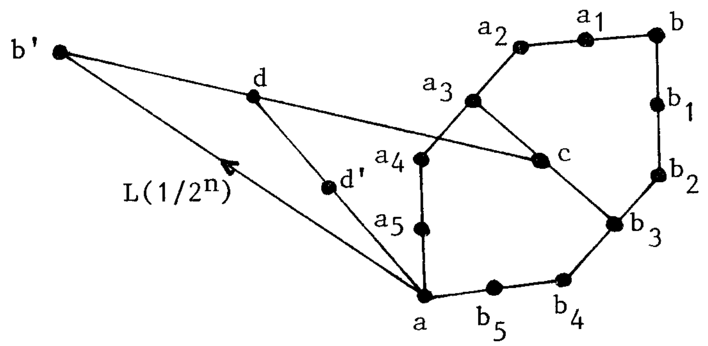
$\alpha(a') = 1$ si $a' \in \{a_1, a_3, a_5, b_1 b_4\}$, $\alpha(a') = 0$ sinon.

$\alpha'(a') = 1$ si $a' \in \{b, c, a_4, b_4\}$, $\alpha'(a') = 0$ sinon.

$\alpha''(a') = 1$ si $a' \in \{c, a_2, a_5, b_2, b_5\}$, $\alpha''(a') = 0$ sinon.

. Supposons défini $L(1/2^n)$. Alors :

(i) Le diagramme de $L(1/2^{n+1})$ est :



(noté : $a \xrightarrow{L(1/2^{n+1})} b$)

(ii) Soit α un état sur $L(1/2^{n+1})$ tel que $\alpha(a) = 1$. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, $\alpha(b') \leqslant 1/2^n$, et $\alpha(d) = 0$, d'où $\alpha(c) \geqslant 1-1/2^n$. Donc $\alpha(a_3) + \alpha(b_3) \leqslant \frac{1}{2^n}$, $\alpha(a_2) + \alpha(b_2) \geqslant 2 - \frac{1}{2^n}$, d'où $\alpha(b) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.

(iii) Supposons que α soit un état sur $L(1/2^{n+1})$ tel que $\alpha(a) = 1$ et $\alpha(b) = 1/2^{n+1}$. On a vu dans (ii) que $\alpha(a) = 1$ implique $\alpha(a_2) + \alpha(b_2) \geqslant 2 - \frac{1}{2^n}$. Il en résulte que $\alpha(a_2) = \alpha(b_2) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$, donc $\alpha(a_3) = \alpha(b_3) = \frac{1}{2^{n+1}}$, $\alpha(c) = 1 - \frac{1}{2^n}$, et $\alpha(b') = \frac{1}{2^n}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, ces conditions définissent un état unique $\alpha_{1/2^{n+1}}$ sur $L(1/2^{n+1})$, et on a :

$$\alpha_{1/2^{n+1}}(L(1/2^{n+1})) = K_{1/2^n} \cup \{1/2^{n+1}, 1-1/2^{n+1}\}$$
$$= K_{1/2^{n+1}}.$$

(iv) Il suffit de considérer les états α sur $L(1/2^{n+1})$, à valeurs dans $\{o,1\}$ tels que $\alpha(a) = 0$, en distinguant les 3 cas :

. $\alpha(b') = 1$, $\alpha(c) = 0$

. $\alpha(b') = 0$, $\alpha(c) = 1$

. $\alpha(b') = 0$, $\alpha(c) = 0$

et d'appliquer ce qu'on connait au sujet des états sur $L(1/2)$ et sur $L(1/2^n)$, à valeurs dans $\{o,1\}$, prenant la valeur 0 au point a.

. Définissons maintenant $L(r)$ pour un nombre rationnel dyadique quelconque r de $]o,1[$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $D_n = \{\frac{k}{2^n} \mid 1 \leqslant k \leqslant 2^n-1\}$.

On définit $L(r)$ pour tout $r \in D_n$, par récurrence sur n.

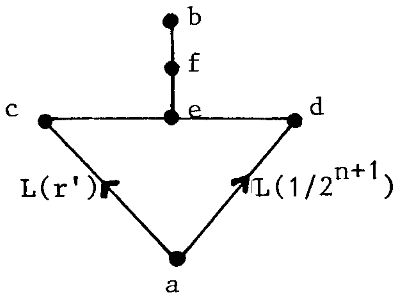
. Si $n = 1$, $L(1/2)$ est déjà défini.

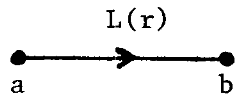
. Supposons les TOM $L(r)$ définis pour tout $r \in D_n$. Soit $r \in D_{n+1}-D_n$

Alors $r = r' + \frac{1}{2^{n+1}}$, où $r' \in D_n \cup \{0\}$. Si $r' = 0$, $L(r)$ est déjà défini.

Supposons que $r' \in D_n$. Alors :

(i) Le diagramme de $L(r)$ est le suivant ;



(noté : 

)

(ii) Soit α un état sur $L(r)$ tel que $\alpha(a) = 1$. Alors $\alpha(c) \leqslant r'$ et $\alpha(d) \leqslant 1/2^{n+1}$, donc $\alpha(e) \geqslant 1-r$ et $\alpha(b) \leqslant r$.

(iii) Supposons que α soit un état sur $L(r)$ tel que $\alpha(a) = 1$ et $\alpha(b) = r$. D'après (ii), $\alpha(e) = 1-r$, d'où $\alpha(f) = 0$, $\alpha(c) + \alpha(d) = r$. Il en résulte que $\alpha(c) = r'$ et $\alpha(d) = 1/2^{n+1}$. Ces conditions déterminent un état unique α_r sur $L(r)$, et on a :

$$\begin{aligned}\alpha_r(L(r)) &= K_{r'} \cup K_{1/2^{n+1}} \cup \{r,1-r\}\\ &= K_r.\end{aligned}$$

(iv) Il suffit de considérer les états α sur $L(r)$, à valeurs dans $\{o,1\}$, tels que $\alpha(a) = 0$, en distinguant les 3 cas :

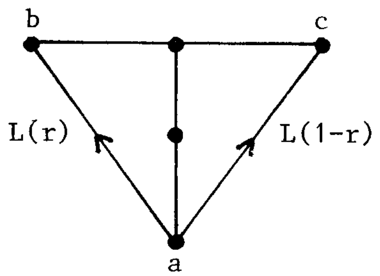
. $\alpha(e) = 1$

. $\alpha(c) = \alpha(f) = 1$

. $\alpha(b) = \alpha(d) = 1$

et d'utiliser les propriétés des états sur $L(r')$ et sur $L(1/2^{n+1})$ à valeurs dans $\{o,1\}$.

. Pour tout nombre dyadique r de $]0,1[$, on définit le TOM $L'(r)$ par le diagramme suivant :



(noté : $a \xrightarrow{L'(r)} b$)

Alors :

- Il existe un seul état α sur $L'(r)$ tel que $\alpha(a) = 1$. On a $\alpha(b) = r$, $\alpha(c) = 1-r$, et $\alpha(L) = K'_r$, où $K'_r = K_r \cup K_{1-r}$.

- Pour tout $p \in L'(r)$ tel que $p \neq 0$ et $p \neq a$, il existe un état α sur $L'(r)$ tel que $\alpha(a) = 0$ et $\alpha(p) = 1$ (Il suffit de prolonger les états sur $L(r)$ et $L(1-r)$ à valeurs dans $\{0,1\}$, qui prennent la valeur 0 en a).

- En particulier, pour tout K,

$$L'(r) \in OM_{KL} \Longleftrightarrow K'_r \subset K$$

On remarque que pour tout r, K'_r est une partie fermée symétrique de $[0,1]$, contenant $\{0,1\}$. Si r et r' sont deux nombres dyadiques différents de $]0, \frac{1}{2}]$, $K'_r \neq K'_{r'}$, donc $OM_{K'_r} \neq OM_{K'_{r'}}$.

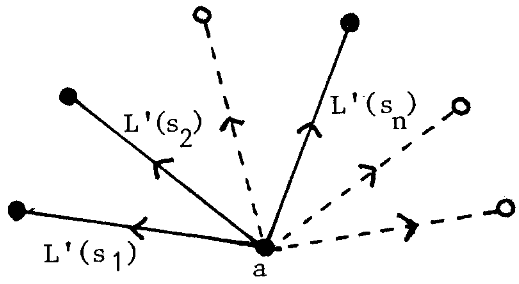
. Soit s un nombre non dyadique de $[0,1]$.

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

avec, pour tout $k \geqslant 1$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, les ε_k étant non tous nuls et non tous égaux à 1 à partir d'un certain rang.

On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$.

On définit le TOM $L'(s)$ par le diagramme :



$L'(s)$ admet pour sous TOM tous les $L'(s_n)$ pour $n \geqslant 1$. (on pourrait en fait aussi bien considérer la somme horizontale des $L'(s_n)$).

Posons $A = \bigcup_{n \geqslant 1} K'_{s_n}$.

Alors, pour tout K, $L'(s) \in OM_{KL} \iff A \subset K$

$\iff \bar{A} \subset K$

Or $A = A_1 \cup A_2$, où

$$A_1 = \bigcup_{n \geqslant 1} K_{s_n} = \{0,1\} \cup \Big(\bigcup_{n \geqslant 1} \{ \frac{1}{2^n} , 1 - \frac{1}{2^n} , s_n, 1-s_n\}\Big)$$

$$A_2 = \bigcup_{n \geqslant 1} K_{1-s_n} = \{0,1\} \cup \Big[\bigcup_{n \geqslant 1} \Big(\bigcup_{k=1}^{n} \{\frac{1}{2^k} , 1-\frac{1}{2^k}, (1-s_n)_k , 1-(s_n)_k\}\Big)\Big]$$

On voit facilement que

$$\{(1-s_n)_k \mid n \geqslant 1 , 1 \leqslant k \leqslant n\} = \{1-s_n \mid n \geqslant 1\} \cup \{(1-s)_n \mid n \geqslant 1\}$$

D'où :

$$A = \{0,1\} \cup \Big(\bigcup_{n \geqslant 1} \{ \frac{1}{2^n} , 1- \frac{1}{2^n} , s_n, 1-s_n, (1-s)_n , 1-(1-s)_n\}\Big) .$$

Il en résulte que les points d'accumulation de A sont $0,1,s,1-s$ et que $\bar{A} = A \cup \{s,1-s\}$.

$\bar{A}$ est une partie fermée symétrique de $[0,1]$, contenant $\{0,1\}$.

Posons $\bar{A} = K'_s$. Alors :

. s et $1-s$ sont les seuls nombres non dyadiques de K'_s.

. Pour tout K, $L'(s) \in OM_{KL} \iff K'_s \subset K$.

Il en résulte que l'application $s \to K'_s$ de $]0,\frac{1}{2}]$ dans l'ensemble des parties de $[0,1]$ est injective (cf. remarque précédente dans le cas où s est un nombre dyadique), et qu'il y a $2^{\aleph_0}$ classes différentes de la forme OM_{KL} , car les classes OM_{K_sL} , pour $s \in]0,\frac{1}{2}]$ sont toutes distinctes.

REMARQUES.

a Si OM_3 désigne la classe des TOM obtenus par collage de treillis booléens à 3 atomes, on a montré en fait qu'il y a $2^{\aleph_0}$ classes différentes de la forme $OM_3 \cap OM_{KL}$.

b Pour toute partie fermée symétrique K de $[0,1]$, contenant $\{0,1\}$, posons $K^* = \bigcup_{s \in K} K_s$. Alors :

. K^* est une partie fermée symétrique de $[0,1]$, contenant $\{0,1\}$.

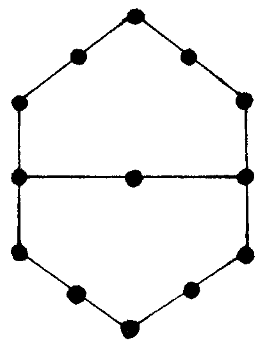
. $K^{**} = K^*$.

. $K^* = K \cup \{\frac{1}{2^n} \mid n > 1\} \cup \{1-\frac{1}{2^n} \mid n \geqslant 1\} \cup K'$, où K' est l'ensemble des nombres dyadiques de $[0,1]-K$ de la forme $\frac{k}{2^n}(n \geqslant 1)$ dont la distance à K est $< \frac{1}{2^n}$.

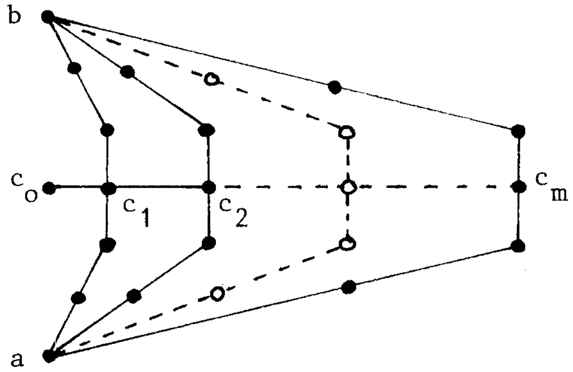
. Tous les points de $K^* - K$ sont des nombres dyadiques isolés dans K^*. En particulier K^* contient les mêmes nombres non dyadiques que K.

. $K^* \neq K'^* \Longrightarrow OM_{K^*L} \neq OM_{K'^*L}$.

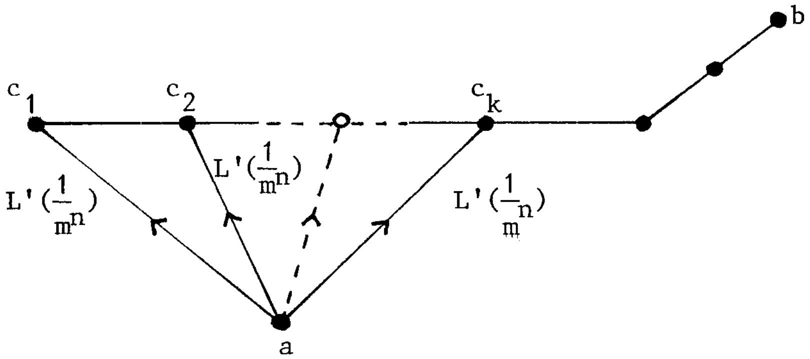
c Une construction analogue à celle du théorème 3 peut être faite en base m, avec $m > 2$. Il suffit de remplacer dans cette construction le treillis de base :



par le treillis défini par le diagramme :



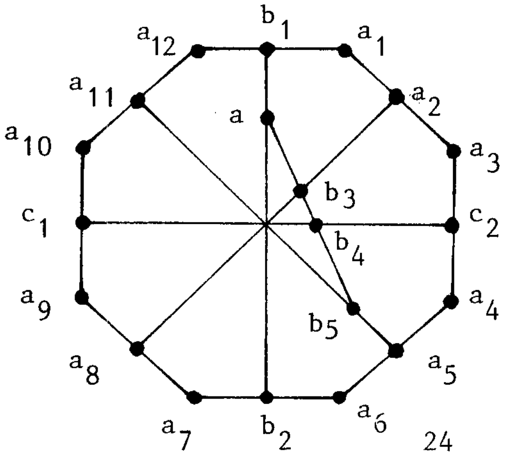
et d'ajouter une étape supplémentaire permettant de définir les treillis $L'(k/m^n)$, pour $2 \leqslant k \leqslant m-1$, à partir de $L'(1/m^n)$, par le diagramme suivant :



LA CLASSE OM_L .

La classe équationnelle OM_L des TOM ayant un ensemble large d'états présente un intérêt particulier, car elle contient la classe OM_H des treillis hilbertiens.

$OM_L \neq OM$, car les TOM n'admettant aucun état [9] ne sont pas dans OM_L. Il y a d'autres exemples de TOM n'appartenant pas à OM_L par exemple le TOM L défini par le diagramme :



En effet, supposons que α soit un état sur L tel que $\alpha(a) = 1$. Alors

$\alpha(b_i) = 0$ pour $i = 1,2,3,4,5$.

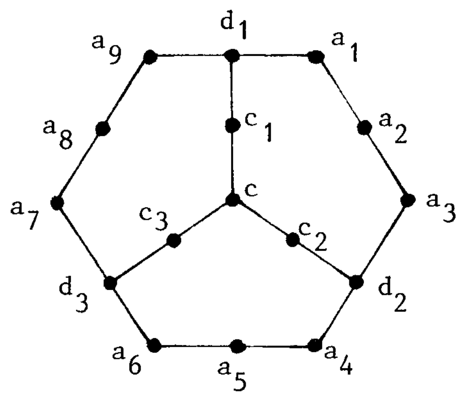
$\alpha(a_i) + \alpha(a_{i+1}) + \alpha(a_{i+2}) = 1$ pour $i = 1,4,7,10$.

$\alpha(c_1) + \alpha(c_2) = 1$.

Ce qui montre que si A est l'ensemble des atomes de L, $\sum_{a' \in A} \alpha(a') = 6$.
Or, chaque atome appartient exactement à 2 blocs différents, et il y a au total 13 blocs. Donc $\sum_{a' \in A} \alpha(a') = \frac{13}{2}$: contradiction.

De même, il n'existe aucun état sur L prenant la valeur 1 en l'un des points b_3, b_4, b_5. Par contre, pour tout autre atome a', il existe un état α tel que $\alpha(a') = 1$.

Désignons par OM_{EF} la classe équationnelle (étudiée par GODOWSKI dans [6]) engendrée par la classe OM_F des TOM ayant un ensemble fort d'états. Si OM_H est la classe des treillis hilbertiens, alors $OM_H \subset OM_{EF} \subset OM_L$. Cette dernière inclusion est stricte. En effet GODOWSKI [6] montre que le TOM :



n'est pas dans OM_{EF}. Les états α_1 et α_2 définis sur l'ensemble des atomes de ce treillis par :

. $\alpha_1(a) = 1$ si $a \in \{c,a_1,a_4,a_7\}$, $\alpha_1(a) = 0$ sinon,

. $\alpha_2(a) = 1$ si $a \in \{c_1,a_2,d_2,a_5,d_3,a_9\}$; $\alpha_2(a) = 0$ sinon,

montrent, compte tenu des symétries, que ce TOM est dans OM_L, et même dans OM_{UL} (où $U = \{0,1\}$).

LES ETATS SUR UN TREILLIS ORTHOMODULAIRE DE OM_L

PROPOSITION 1. - *Soit* $L \in OM_L$ *et soit* F *un filtre propre de* L. *Alors il existe un etat* α *sur* L *tel que* $\alpha(p) = 1$ *pour tout* $p \in F$.

Pour tout $p \in F$ il existe un état α tel que $\alpha(p) = 1$ (car $p \neq 0$) donc (en utilisant la même notation que dans la démonstration du théorème 1), $S(L,X,p) \neq \emptyset$.

Il en résulte, d'après le lemme 3 du paragraphe IV, que $\bigcap_{p \in F} S(L,X,p) \neq \emptyset$. Si α est un élément de cette intersection, $\alpha(p) = 1$ pour tout $p \in F$.

COROLLAIRE. - *Si* L *est le* TOM *des sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert* H *de dimension infinie, il existe un état* α *sur* L *tel que pour tout atome* a *de* L, $\alpha(a) = 0$.

En effet, $L \in OM_L$. L'ensemble des sous-espaces fermés de H de co-dimension finie est un filtre propre F_1 de L. Il existe donc un état α sur L tel que pour tout $p \in F_1$, $\alpha(p) = 1$. Si a est un atome de L, $\alpha(a^\perp) = 1$, donc $\alpha(a) = 0$.

REMARQUE.

Le corollaire précédent se déduit également du fait que OM_L est une classe équationnelle : il est bien connu que F_1 est un p-filtre [10] , ou filtre orthomodulaire [4] , donc il existe un homomorphisme surjectif f de L sur un TOM L' tel que $F_1 = f^{-1}(1)$. Le TOM L', étant une image homomorphe de L, est dans OM_L. Si α' est un état sur L', $\alpha = \alpha' \circ f$ est un état sur L tel que $\alpha(a) = 0$ pour tout atome a de L.

PROPOSITION 2. - *Un* TOM L *est dans* OM_L *si et seulement si, quels que soient* $p,q \in L - \{o\}$, *il existe un état* α *sur* L *tel que* $\alpha(p) = \alpha(q)$.

Si cette condition est vérifiée, alors pour tout $p \in L - \{o\}$, il existe un état α tel que $\alpha(p) = \alpha(1) = 1$. Donc $L \in OM_L$.

Si $L \in OM_L$, et si $p,q \in L - \{o\}$, il existe des états α_1 et α_2 sur L tels que $\alpha_1(p) = 1$ et $\alpha_2(q) = 1$. Les équations :

$$\begin{cases} \lambda\alpha_1(p) + \mu\,\alpha_2(p) = \lambda\,\alpha_1(q) + \mu\,\alpha_2(q) \\ \lambda + \mu = 1. \end{cases}$$

ont pour solution un couple (λ,μ) de nombre réels > 0. Si on pose, pour tout $r \in L$, $\alpha(r) = \lambda\alpha_1(r) + \mu\alpha_2(r)$, on obtient un état α sur L tel que $\alpha(p) = \alpha(q)$.

VI. LES CLASSES OM_{JKF}.

Soit K une partie fermée symétrique de $[0,1]$, contenant $\{0,1\}$, et soit J une partie fermée de K contenant 0. On désigne par OM_{JKF} la classe des TOM L tels que, pour tout couple (p,q) d'éléments de L tels que $p \nleq q$, il existe un état α sur L, à valeurs dans K, tel que $\alpha(p) = 1$ et $\alpha(q) \in J$.

OM_{JKF} est une classe équationnelle. En effet, si on pose :

$$X = (K, (x \to x_1)^\perp , 1 , J , \emptyset),$$

alors, le polynôme $(x \to x_1)^\perp$ étant dans T' (cf. 1er exemple du paragraphe III) OM_X est une classe équationnelle, et $OM_X = OM_{JKF}$.

Si 1 est un point isolé de K, et si $J = K - \{1\}$, OM_{JKF} est la classe des TOM ayant un ensemble fort d'états à valeurs dans K. Dans ce cas, OM_{JKF} sera notée simplement OM_{KF}.

EXEMPLES.

OM_{UF} (où $U = \{0,1\}$) est la classe des TOM ayant un ensemble fort (ou plein) d'états à deux valeurs. R. GODOWSKI a montré dans [6] que OM_{UF} (qu'il désigne par TSFSS) est une classe équationnelle. Dans [8], R. GODOWSKI et R. GREECHIE donnent une série d'équations de la classe OM_{UF}.

OM_{JKF} , avec $K = [0,1]$ et $J = \{0\}$, est notée SSFSS par GODOWSKI dans [7] où il conjecture que c'est une classe équationnelle.

REMARQUES.

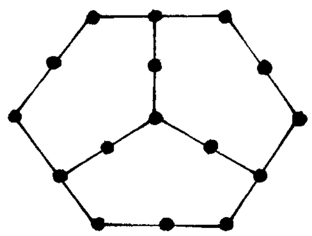
. Toute classe OM_{JKF} vérifie les inclusions :

$$OM_{UF} \subset OM_{JKF} \subset OM_{KL}$$

. Si $J = K$, $OM_{JKF} = OM_{KL}$.

. Si $1 \notin J$, $OM_{JKF} \subset OM_F$.

. Les classes de la forme OM_{JKF} , où $1 \notin J$, sont toutes différentes des classes de la forme $OM_{K'L}$. En effet, le TOM ayant pour diagramme :



est dans $OM_{UL} - OM_F$ (cf. paragraphe V). Ceci prouve que aucune classe de la forme $OM_{K'L}$ n'est contenue dans OM_F, alors que toute classe de la forme OM_{JKF} , où $1 \notin J$ est contenue dans OM_F.

. Les classes de la forme OM_{KL} , ou bien OM_{JKF} , sont stables par somme horizontale. Ceci se déduit sans difficulté du fait que, si L est la somme horizontale d'une famille $(L_i)_{i \in I}$ de TOM, la donnée d'un état α sur L est équivalente à celle d'une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$, où α_i est un état sur L_i. En particulier, toutes ces classes contiennent la classe des sommes horizontales de treillis booléens.

PROPOSITION 3. - *Pour tout* $n \geqslant 1$, *posons* $K_n = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{1}, 1\}$ *Alors les classes* OM_{K_nF} *sont toutes distinctes.*

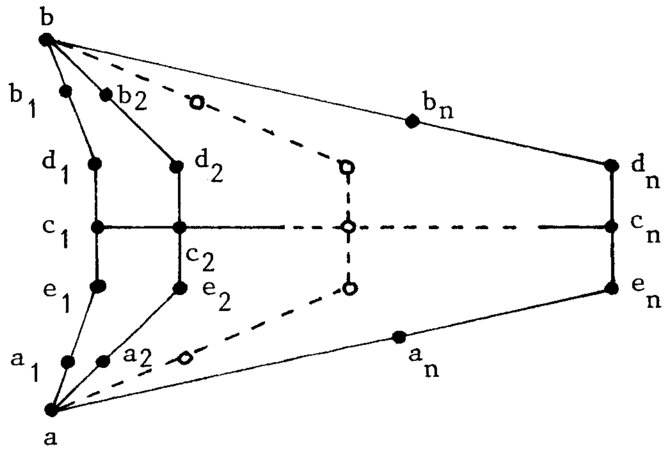
Le TOM L(1/2) défini dans la démonstration du théorème 3 a la propriété suivante :

Si p et q sont deux éléments de L(1/2) tels que $p \nleqslant q^{\perp}$, $(p,q) \neq (a,b^{\perp})$, $(p,q) \neq (b,a^{\perp})$ (les atomes étant notés comme dans le théorème 3), il existe un état α sur L(1/2), à valeurs dans $\{0,1\}$, tel que $\alpha(p) = 1$ et $\alpha(q) = 0$. Pour démontrer ceci, il suffit de considérer, outre les trois états α, α', α'' définis dans la démonstration du théorème 3, les deux états α_1 et α_2 définis sur l'ensemble des atomes par :

- $\alpha_1(a') = 1$ si $a' \in \{a,a_2,b_1,b_3\}$, $\alpha_1(a') = 0$ sinon.
- $\alpha_2(a') = 1$ si $a' \in \{a_4,a_1,b_2,b_5,c\}$, $\alpha_1(a') = 0$ sinon.

On a vu que pour tout état α sur L(1/2), $\alpha(a) = 1 \Rightarrow \alpha(b^{\perp}) \geqslant 1/2$, et on a de même par symétrie $\alpha(b) = 1 \Rightarrow \alpha(a^{\perp}) \geqslant 1/2$. D'autre part, il existe un état α' sur L(1/2), à valeurs dans K_2, tel que $\alpha'(a) = 1$ et $\alpha'(b^{\perp}) = 1/2$, et il existe un état α'', à valeurs dans K_2, tel que $\alpha''(b) = 1$ et $\alpha''(a^{\perp}) = 1/2$. Ceci prouve que L(1/2) est dans OM_{K_2F}, mais n'est pas dans $OM_{K_1F} = OM_{UF}$.

Pour tout $n \geqslant 3$, considérons le TOM L_n (cf. [7]) défini par le diagramme :



Les deux états α_1 et α_2 suivants permettent de montrer, compte tenu des symétries de L_n que, quels que soient $p,q \in L_n$ tels que $p \nleqslant q$, $(p,q) \neq (a,b^{\perp})$, $(p,q) \neq (b,a^{\perp})$, il existe un état α sur L_n à valeurs dans $\{0,1\}$, tel que $\alpha(p) = 1$ et $\alpha(q) = 0$. Pour tout atome a' de L_n :

- $\alpha_1(a') = 1$ si $a' \in \{a,c_1,b_1\} \cup \{d_k | k \geqslant 2\}$, sinon $\alpha_1(a') = 0$.
- $\alpha_2(a') = 1$ si $a' \in \{a_1,a_2,c_2,d_1,b_2\} \cup \{e_k | k \geqslant 3\} \cup \{b_k | k \geqslant 3\}$, sinon $\alpha_2(a') = 0$.

Considérons l'état α_3 défini sur l'ensemble des atomes par : $\alpha_3(a) = 1$, $\alpha_3(b) = \frac{1}{n}$, $\alpha_3(c_k) = \frac{1}{n}$ et $\alpha_3(d_k) = 1 - \frac{1}{n}$ pour $k = 1,2,\dots,n$,

$\alpha_3(a') = 0$ pour tout autre atome a'. Cet état α_3 est à valeurs dans K_n et on a $\alpha_3(a) = 1$, $\alpha_3(b^\perp) = 1 - \frac{1}{n}$. Il en résulte que $L_n \in OM_{K_nF}$.

Or (cf. [7]), pour tout état α sur L_n tel que $\alpha(a) = 1$, on a $\alpha(b^\perp) \geqslant 1 - \frac{1}{n}$. Il en résulte que pour $n' < n$, $L_n \notin OM_{K_{n'},F}$, et que les classes OM_{K_nF} $(n \geqslant 1)$ sont toutes distinctes.

REMARQUE. La démonstration précédente montre que les classes $OM_{K'_nF}$, où $K'_n = \{ 0, \frac{1}{n} , 1 - \frac{1}{n} , 1\}$ sont toutes distinctes, ainsi que les classes équationnelles $OM_{UL} \cap OM_{K'_nF}$ (car les TOM L_n sont tous dans OM_{UL}).

L'INDICE DE FORCE.

Pour tout $t \in [0,1]$, désignons par OM_{F_t} la classe équationnelle OM_{JKF} , où $K = [0,1]$, et $J = [0,1-t]$. On a $OM_{F_0} = OM_L$, et $t \leqslant t' \Rightarrow OM_{F_{t'}} \subset OM_{F_t}$.

Pour tout TOM L de OM_L , on définit l'indice de force de L, $I_F(L)$, par :

$$I_F(L) = \mathrm{Sup}\ \{t \in [0,1] \mid L \in OM_{F_t}\} .$$

PROPOSITION 4. - *$I_F(L)$ est le plus grand élément de $\{ t \in [0,1] \mid L \in OM_{F_t} \}$.*

Soit $L \in OM_L$. Posons $t_o = I_F(L)$. Supposons $t_o \neq 0$. Il est évident que pour tout $t \in [0,t_o]$, $L \in OM_{F_t}$. Soient p,q deux éléments de L tels que $p \nleqslant q$. Pour tout $t \in [0,t_o[$ désignons par S_t l'ensemble des états α sur Ltels que $\alpha(p) = 1$ et $\alpha(q) \leqslant 1-t$. Alors la famille $(S_t)_{t \in [0,t_o[}$ est une famille de fermés non vides de l'espace topologique compact S(L) des états sur L, totalement ordonnée par l'inclusion. Il en résulte que $\bigcap_{t \in [0,t_o[} S_t \neq \emptyset$. Soit α_o un élément de cette intersection. Alors $\alpha_o(p) = 1$

et, pour tout $t < t_o$, $\alpha_o(q) \leqslant 1-t$, d'où $\alpha_o(q) \leqslant 1-t_o$, ce qui prouve que $L \in OM_{F_{t_o}}$.

REMARQUES.

- La proposition 4 montre que si $t_o \in]0,1]$, $OM_{F_{t_o}} = \bigcap_{t \in [0,t_o[} OM_{F_t}$.
- $I_F(L) = 1 \Leftrightarrow L \in OM_{JKF}$, avec $K = [0,1]$, $J = \{0\}$.
- $I_F(L(1/2)) = 1/2$, et pour tout $n \geqslant 3$ $I_F(L_n) = \frac{1}{n}$.
- Si $L \notin OM_F$, $I_F(L) = 0$.
- Si L est la somme horizontale de tous les TOM L_n, pour $n \geqslant 3$, alors $L \in OM_{UL} \cap OM_F$, et $I_F(L) = 0$.

VII. AUTRES EXEMPLES DE CLASSES DE LA FORME OM_X .

LES ETATS DE JAUCH-PIRON

PROPOSITION 5. - *Soit* K *une partie fermée symétrique de* $[0,1]$ *, contenant* $\{0,1\}$ *, dans laquelle* 1 *est isolé (ainsi que* 0*). Alors la classe* OM_{J-PKL} *des* TOM *ayant un ensemble large d'états de Jauch-Piron à valeurs dans* K *est une classe équationnelle.*

Posons $X = (K, x, (x_1 \wedge x_2 \rightarrow x_3)^{\perp}, \emptyset, K')$, où
$K' = \{(t_1,t_2,t_3) \in K^3 | t_1 = t_2 = 1 \Rightarrow t_3 = 1\}$. Alors :

- Le polynôme $((x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3)^{\perp}$ est dans T_o (cf. exemple c du paragraphe III).
- Le complémentaire de K' dans K^3 est l'ensemble $\{1\} \times \{1\} \times (K-\{1\})$ qui est un produit d'ouverts, donc K' est fermé.
  D'après le théorème 1, OM_X est une classe équationnelle, et $OM_X = OM_{J-PKL}$.

REMARQUE.

La proposition 5 peut être également démontrée en appliquant le théorème 2, avec $J = \{1,2\}$, $X = (\{0\}, K, x, \emptyset, \{y_1, y_2, y_1 \wedge y_2\}, \emptyset, K')$ ou bien avec $X = (\{0\}, K, \phi(x,x_1,x_2), \{x_1,x_2,x_1 \wedge x_2\}, \emptyset, \emptyset, K', \emptyset)$, où $\phi(x,x_1,x_2) = x$, et où K' est défini comme précédemment.

EXEMPLES.

. Le TOM $L(1/2)$ est dans OM_{J-PK_5L} , où $K_5 = \{0,1/5,2/5,3/5,4/5,1\}$.

En effet, il est facile de voir que pour tout atome a' de $L(1/2)$ il existe un état α sur $L(1/2)$ à valeurs dans K_5, tel que $\alpha(a') = 1$ et tel que $\alpha(a'') \notin \{0,1\}$ pour tout atome a" qui n'est pas dans un même bloc que a'. Un tel état α est un état de Jauch-Piron.

. On peut vérifier que pour tout $n \geqslant 3$, $L_n \in OM_{J-PKL}$, avec $K = \{0,1\} \cup [\frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}]$.

. La classe OM_{J-PUL} des TOM ayant un ensemble large d'états de Jauch-Piron à deux valeurs est la classe des treillis booléens. En effet les états de Jauch-Piron à valeurs dans $\{0,1\}$ sur un treillis booléen B sont les fonctions caractéristiques des ultrafiltres de B, et le TOM MO2 n'admet aucun état de Jauch-Piron à valeurs dans $\{0,1\}$.

Pour toute partie fermée J de K contenant 0, on définit la classe $OM_{J-P\ JKF}$ comme étant la classe des TOM L tels que, pour tout couple (p,q) d'éléments de L tels que $p \nleq q$, il existe un état de Jauch-Piron α sur L, à valeurs dans K, tel que $\alpha(p) = 1$ et $\alpha(q) \in J$. Le théorème 1, avec $X = (K, (x \to x_1)^{\perp}, (x_1 \wedge x_2 \to x_3)^{\perp}, J, K')$, où K' est la partie fermée de K^3 définie précédemment, montre que $OM_{J-P\ JKF}$ est une classe équationnelle

1 étant isolé dans K, l'ensemble $J_1 = K - \{1\}$ est fermé dans K. La classe $OM_{J-P\ J_1KF}$ est notée simplement $OM_{J-P\ KF}$:

C'est la classe équationnelle des TOM ayant un ensemble fort d'états de Jauch-Piron à valeurs dans K. La proposition suivante montre que $OM_{J-P\ KF} = OM_{J-P\ KL}$.

PROPOSITION 6. - *Soit* L *un* TOM *ayant un ensemble large d'états de Jauch-Piron à valeurs dans une partie* A *de* $[0,1]$. *Alors* L *a un ensemble fort d'états de Jauch-Piron à valeurs dans* A.

Soient $p,q \in L$ tels que $p \not\leqslant q$. Alors $(p \to q)^{\perp} \neq 0$, donc il existe un état de Jauch-Piron α, à valeurs dans A, tel que $\alpha((p \to q)^{\perp}) = 1$. Or $(p \to q)^{\perp} = p \wedge (p \wedge q)^{\perp}$. Donc $\alpha(p) = 1$ et $\alpha(p \wedge q) = 0$. Or, si on avait $\alpha(q) = 1$, α étant un état de Jauch-Piron, on aurait $\alpha(p \wedge q) = 1$. Donc $\alpha(q) < 1$.

(Ce résultat est démontré dans [14] , dans le cas où $A = [0,1]$ et où L est atomique).

LES CLASSES OM_{S_t}

Soit K une partie fermée symétrique de $[0,1]$, contenant $\{0,1\}$, et soit J une partie fermée de K contenant 1. On désigne par OM_{JKS} la classe des TOM L tels que, pour tout élément $p \neq 0$ de L, il existe un état α sur L, à valeurs dans K, tel que :

. $\alpha(p) = 1$

. Pour tout $q \in L$ tel que $p^{\perp} \vee q = 1$, $\alpha(q) \in J$.

Le théorème 1, avec $X = (K,x,x \wedge x_1^{\perp},\emptyset,J)$ montre que OM_{JKS} est une classe équationnelle (le polynôme $\psi(x,x_1) = x \wedge x_1^{\perp}$ est dans T'_0 d'après le paragraphe III).

Toutes les classes de la forme OM_{JKS} contiennent la classe des treillis booléens et sont contenues dans OM_L.

Si $t \in [0,1]$, on note OM_{S_t} la classe équationnelle OM_{JKS} où $K = [0,1]$, et $J = [t,1]$. On a $OM_{S_0} = OM_L$, et $t' \leqslant t \Rightarrow OM_{S_t} \subset OM_{S_{t'}}$.

On montre (comme dans la proposition 4) que pour tout TOM L l'ensemble $\{t \in [0,1] \mid L \in OM_{S_t}\}$ a un plus grand élément, qui sera noté $I_S(L)$.

EXEMPLES.

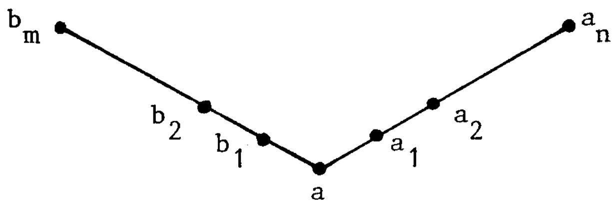
. Si L est un treillis booléen, $I_S(L) = 1$. En effet, soit $p \in L - \{0\}$ et soit α un état sur L tel que $\alpha(p) = 1$. Si q est un élément de L tel que $p^{\perp} \vee q = 1$, alors $p \leqslant q$, donc $\alpha(q) = 1$.

. $I_S(MO2) = 1/2$. Il en résulte que OM_{S_1} est la classe des treillis booléens, et qu'il n'existe aucun TOM L tel que $I_S(L) \in]\frac{1}{2}, 1[$.

. $I_S(L(1/2)) = 1/5$. En effet, si $p \in L(1/2) - \{0,a,b\}$ (cf. diagramme de $L(1/2)$, paragraphe V), il est facile de trouver un état α tel que $\alpha(p) = 1$, et $\alpha(q) \geqslant 1/4$ pour tout q tel que $p^\perp \vee q = 1$. Soit $t \in [0,1]$ et soit α un état sur $L(1/2)$ tel que $\alpha(a) = 1$, et tel que pour tout $q \in L(1/2)$, $a^\perp \vee q = 1 \Rightarrow \alpha(q) \geqslant t$. Alors $\alpha(b)$, $\alpha(a_1)$,$\alpha(b_1)$,$\alpha(c)$ sont $\geqslant t$. Or $2\alpha(b) + \alpha(a_1) + \alpha(b_1) + \alpha(c) = 1$, donc $t \leqslant 1/5$. Les conditions $\alpha(b) = \alpha(a_1) = \alpha(b_1) = \alpha(c) = 1/5$, $\alpha(a) = 1$, déterminent un état sur $L(1/2)$ vérifiant les conditions précédentes, avec $t = 1/5$.

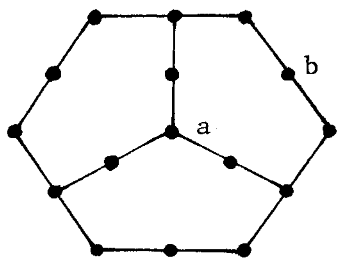
. Par une méthode similaire, on montre que pour tout $n \geqslant 3$, $I_S(L_n) = 1/2n$.

. Si L est le TOM défini par le diagramme :



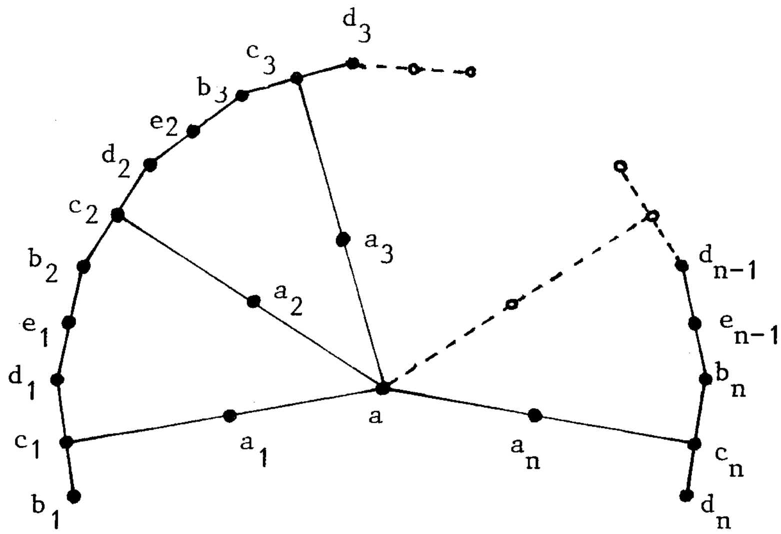
alors $I_S(L) = \frac{1}{k}$, avec $k = \max(m,n)$.

. Si L est le TOM défini par le diagramme :



alors (cf. [6]), pour tout état α sur L, $\alpha(a) = 1 \Rightarrow \alpha(b) = 0$. Donc $I_S(L) = 0$.

Soit Δ_n le TOM défini par le diagramme :



Alors $I_S(\Delta_n) = \frac{1}{n+1}$. En effet, ceci se démontre sans difficulté pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons $n \geqslant 3$. Si $p \in \Delta_n - \{0,a\}$, il est facile de trouver un état α sur Δ_n tel que $\alpha(p) = 1$ et tel que $p^\perp \vee q = 1 \Rightarrow \alpha(q) \geqslant 1/4$. Soit α un état sur Δ_n , et soit $t \in [0,1]$ tels que :

- $\alpha(a) = 1$
- Pour tout $q \in \Delta_n$ tel que $a^\perp \vee q = 1$, $\alpha(q) \geqslant t$.
  Alors $\alpha(d_1) \geqslant t$ et $\alpha(e_1) \geqslant t$, donc $\alpha(b_2) \leqslant 1-2t$. Or $\alpha(c_2) = 0$, donc $\alpha(d_2) \geqslant 2t$. Une récurrence évidente montre que $\alpha(d_n) \geqslant nt$ et $\alpha(b_n) \leqslant 1-nt$. Or $\alpha(b_n) \geqslant t$, d'où on déduit $t \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Soit α_o l'état sur Δ_n défini par $\alpha_o(a) = 0$, et, pour $k=1,\dots,n$ $\alpha_o(a_k) = \alpha_o(c_k) = 0$, $\alpha_o(b_k) = 1 - \frac{k}{n+1}$, $\alpha_o(d_k) = \frac{k}{n+1}$, et $\alpha_o(e_k) = \frac{1}{n+1}$. Alors α_o vérifie la condition précédente, avec $t = \frac{1}{n+1}$. Donc $I_S(\Delta_n) = \frac{1}{n+1}$.

<u>REMARQUE</u>.

Toutes les valeurs des indices $I_F(L)$ et $I_S(L)$ que nous avons obtenues pour les différents TOM finis que nous avons étudiés sont soit 0, soit de la forme $1/n$, où n est un entier $\geqslant 1$. Nous ignorons dans quelle mesure cette propriété est générale.

On remarque que, dans le cas de $I_S(L)$, toutes ces valeurs sont obtenues, en considérant uniquement des TOM finis dont tous les blocs ont 3 atomes.

AUTRES EXEMPLES.

Soit K une partie fermée symétrique de $[0,1]$, contenant $\{0,1\}$.

a Soit J une partie fermée de K^2. On pose :

$$\phi(x,x_1,x_2) = (x \to (x_1 \to x_2))^{\perp}$$
$$X = (K, \phi, 1, J, \emptyset).$$

Alors OM_X est une classe équationnelle.

. Si $J_1 = \{ t \in [0,1] \mid (1,t) \in J\}$, alors $OM_X \subset OM_{J_1 KF}$. En effet, si $L \in OM_X$, et si p,q sont des éléments de L tels que $p \nleq q$, alors $(p \to q)^{\perp} = \phi(p,1,q) \neq 0$, donc il existe un état α sur L, à valeurs dans K, tel que $\alpha(p) = 1$ et $(1,\alpha(q)) \in J$, d'où $\alpha(q) \in J_1$.

En particulier $OM_X \subset OM_{KL}$.

. La classe OM_X est non triviale si et seulement si $(1,0) \in J$. En effet, soit $B = \{0,1\}$ le treillis booléen à deux éléments. Si p,q_1,q_2 sont des éléments quelconques de B, alors :

$$\phi(p,q_1,q_2) = 0 \Leftrightarrow (p,q_1,q_2) = (1,1,0).$$

Il en résulte que $B \in OM_X$ si et seulement si $(1,0) \in J$.

. Si aucun élément de J n'est de la forme $(t,1)$, OM_X est la classe des treillis booléens. En effet, supposons qu'il existe un TOM non booléen L dans OM_X. Alors il existe (cf. [10]) deux éléments p et q de L ne commutant pas, c'est-à-dire tels que $(p \wedge q) \vee (p \wedge q^{\perp}) < p$. On a alors :

$$\phi(p,q,p)^{\perp} = p^{\perp} \vee ((p \wedge q^{\perp}) \vee (p \wedge q)) < 1, \text{ donc } \phi(p,q,p) \neq 0.$$

Il existe donc un état α sur L tel que $\alpha(p) = 1$, et $(\alpha(q),\alpha(p)) = (\alpha(q),1) \in J$.

. Si $\{(1,0),(0,1)\} \subset J$, OM_X contient la classe équationnelle engendrée par MO2.

. Si $\{(1,0),(1,1)\} \subset J$, $OM_{UF} \subset OM_X$. En effet, soit $L \in OM_{UF}$, et soient p,q_1,q_2 des éléments de L tels que $\phi(p,q_1,q_2) \neq 0$. Alors $p \nleq q_1 \to q_2$ donc il existe un état α, à valeurs dans $U = \{0,1\}$, tel que $\alpha(p) = 1$, et $\alpha(q_1 \to q_2) = 0$, d'où $(\alpha(q_1),\alpha(q_2)) \in \{(1,0),(1,1)\}$.

$\underline{b}$ Soit J' une partie fermée de K^2 telle que $(0,1) \in J'$ et, quels que soient t,t', $(t,t') \in J' \Rightarrow (t',t) \in J'$.

On pose :

$$\phi'(x,x_1,x_2) = (x \to ((x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1)))^{\perp}.$$

$$X' = (K,\phi',1,J',\emptyset).$$

Alors $OM_{X'}$ est une classe équationnelle.

. $OM_{X'}$ contient la classe OM_X de l'exemple $\underline{a}$ dans le cas où $J = J'$. En particulier $MO2 \in OM_{X'}$.

. On montre comme dans $\underline{a}$ que si $J'_1 = \{t \in [0,1] \mid (1,t) \in J'\}$ alors $OM_{X'} \subset OM_{J'_1KF}$.

$\underline{c}$ Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$\psi_n(x_1,\ldots,x_n) = \Big(\bigwedge_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i<j}} (x_i \vee x_j)\Big)^{\perp}$$

Alors $\psi_n \in T_o$ (cf. exemple $\underline{b}$ du paragraphe III), donc si K' est une partie fermée de K^n, et si $X_n = (K,x,\psi_n,\emptyset,K')$ (ou bien $X_n = (K,(x \to x_1)^{\perp},\psi_n,K_1,K')$, où K_1 est une partie fermée de K contenant 0), la classe OM_{X_n} est une classe équationnelle (dans certains cas non triviale).

$\underline{d}$ Dans l'exemple $\underline{c}$, le polynôme ψ_n peut être remplacé par le polynôme :

$$\psi'_n(x,x_1,\ldots,x_n) = \Big[\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (x^{\perp} \vee x_i)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i<j}} (x_i \vee x_j)\Big)\Big]^{\perp}$$

$\underline{e}$ Pour tout $n \geqslant 1$, posons :

$$\psi_n(x,(y_k)_{k\geqslant 1}) = \Big(\bigwedge_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i<j}} (y_i \vee y_j)\Big)^{\perp}$$

$$\psi'_n(x,(y_k)_{k\geqslant 1}) = \Big[\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (x^{\perp} \vee y_i)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i<j}} (y_i \vee y_j)\Big)\Big]^{\perp}$$

Considérons les deux ensembles de polynômes :

$\Psi = \{\psi_n(x,(y_k)_{k\geqslant 1}) \mid n \geqslant 1\}$

$\Psi' = \{\psi'_n(x,(y_k)_{k\geqslant 1}) \mid n \geqslant 1\}$.

Alors Ψ et Ψ' sont des éléments de ST'(x). Montrons par exemple ceci pour Ψ'. Soit f un homomorphisme surjectif d'un TOM L sur un TOM L'. Soient p', $(r'_k)_{k\geq 1}$ des éléments de L' tels que pour tout $n\geq 1$, $\psi'_n(p',(r'_k)_{k\geq 1}) = 0$. Ceci signifie que pour tout $k\geq 1$, $p'^{\perp} \vee r'_k = 1$, et pour $1 \leq i < k$ $r'_i \vee r'_k = 1$. Soit p un élément de L tel que $f(p) = p'$. Soit $(s_k)_{k\geq 1}$ une famille d'éléments de L telle que $f(s_k) = r'_k$ pour tout $k\geq 1$. Posons, pour $k\geq 1$:

$$r_k = s_k \vee (p \wedge s_k^{\perp}) \vee (\bigvee_{i<k} (s_i \vee s_k)^{\perp}) .$$

Alors, pour tout $k\geq 1$, $f(r_k) = f(s_k) = 1$, $p^{\perp} \vee r_k = 1$, et pour $1 \leq i < k$, $r_i \vee r_k = 1$, ce qui montre que pour tout $n\geq 1$ $\psi'_n(p,(r_k)_{k\geq 1}) = 0$.

Pour Ψ , la démonstration est semblable.

Posons $\Theta' = \{y_j \mid j \in J\}$. Soit J une partie fermée de $K^{\Theta'}$.

On pose :

$$Y = (\{0\},K,x,\emptyset,\Psi,\Theta',\emptyset,J)$$

$$Y' = (\{0\},K,x,\emptyset,\Psi',\Theta',\emptyset,J) .$$

Alors, d'après le théorème 2, OM_Y et $OM_{Y'}$ sont des classes équationnelles (dans certains cas non triviales).

REFERENCES.

[1] G. BELTRAMETTI et G. CASSINELLI, *The logic of Quantum Mechanics* Addison-Wesley Publishing Company (1981).

[2] G. BRUNS et G. KALMBACH, *Varieties of orthomodular lattices,* Canadian J. Math. XXIII (1971), 802-810.

[3] G. BRUNS et G. KALMBACH, *Varieties of orthomodular lattices (II),* Canadian J. Math. XXIV (1972), 328-337.

[4] G. CHEVALIER, *Congruences d'un treillis orthomodulaire,* Thèse de Doctorat de 3e cycle, Université Cl. Bernard, LYON (1981).

[5] M. DICHTL, *Astroids and pasting,* à paraître dans Algebra Universalis.

[6] R. GODOWSKI, *Varieties of orthomodular lattices with a strongly full set of states,* Demonstratio Mathematica XIV, n° 3 (1981) 725-732.

[7] R. GODOWSKI, *States on orthomodular lattices,* Demonstratio Mathematica XV, n° 3 (1982), 817-822.

[8] R. GODOWSKI et R.J. GREECHIE, *Some equations related to states on orthomodular lattices* (à paraître dans Demonstratio Mathematica).

[9] R.J. GREECHIE, *Orthomodular lattices admitting no states,* Journal of Combinatorial theory 10 (1971), 119-132.

[10] G. KALMBACH, *Orthomodular lattices,* à paraître, Academic Press, New-York.

[11] G.W. MACKEY, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics,* W.A. Benjamin, New-York (1977).

[12] S. MAEDA, *Théorie des treillis et logique quantique (en japonais).* Maki-Shoton, Tokyo (1980).

[13] C. PIRON, *Foundations of Quantum Physics,* Benjamin Inc. Reading (1976).

[14] G.T. RÜTTIMAN, *Jauch-Piron states,* J. of Math. Physics, vol. 18, n° 2 (1977), 189-193.

[15] J. VON NEUMANN, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics,* Princeton University Press, 1955.

****