YVES GÉRARD

# Caractérisation des groupes de cohomologie d'un groupe topologique en termes de suites exactes

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1982, fascicule 6A
« Quelques éléments pour l'étude du groupe de Galois d'une extension transcendante », ,
p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___6A_1_0>

# CARACTERISATION DES GROUPES DE COHOMOLOGIE D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE EN TERMES DE SUITES EXACTES

par Yves GERARD

Soient G un groupe topologique et A un G-module lisse. On a défini dans [2] les groupes de cohomologie $H^n(G,A)$, qui coïncident avec les groupes usuels lorsque G est discret ou profini et définissent une cohomologie particulièrement utile pour l'étude de groupes de Galois d'extensions transcendantes. On montre ici que, pour $n \geqslant 2$ , $H^n(G,A)$ est en correspondance avec un ensemble de suites exactes commençant par A et finissant par G.

Lorsque G est discret, on obtient un résultat analogue à celui de D.F. Holt [4] , avec cependant quelques différences. D'abord, les suites exactes utilisées ici comportent le plus grand nombre possible de G-modules comme termes, de manière à simplifier les définitions. Mais surtout, on obtient une meilleure caractérisation des suites équivalentes à 0, grâce à deux notions, presque duales, de trivialisation (leur définition est plus faible que celle des suites analogues de D.F. Holt), une suite étant équivalente à 0 si elle est triviale ou cotriviale ; la notion de cotrivialisation peut sembler un peu trop technique, mais en pratique elle est très commode et permet des démonstrations élémentaires.

On obtient ainsi une caractérisation très voisine de celle de N. Yoneda [5]; il serait, sans doute, intéressant de voir comment ces caractérisations sont liées.

§ 0 . Soit G un groupe topologique. On note G-$\mathcal{M}$td la catégorie des G-modules lisses (c'est-à-dire des G-modules dont chaque élément a un stabilisateur ouvert dans G). On note H(G,.) le foncteur cohomologique dérivé à droite de $A \to A^G$ (cf. [1] et [2]). On se propose donc de construire un $\delta$-foncteur (avec la terminologie de [3] ) $\mathcal{H}(G,.)$, isomorphe à H(G,.) tel que, pour tout $n \geqslant 2$ et pour $A \in$ G-$\mathcal{M}$td, $\mathcal{H}^n(G,A)$ soit défini en termes de suites exactes.

Soit $A \in G\text{-}\mathcal{M}td$. On rappelle (cf. [1] ) que l'on note $\mathcal{D}(G,A) = (\mathcal{D}^n(G,A))_{n \geqslant 0}$ le complexe dont les n-cochaînes sont les applications $c : G^n \to A$ telles que, pour $0 \leqslant i \leqslant n$ et $(g_1, g_2, \ldots, g_i) \in G^i$, il existe un voisinage U de $1_G$ dans G tel que $c(g_n, \ldots, g_{i+2}, g_{i+1}u, g_i, \ldots, g_1) = c(g_n, \ldots, g_{i+2}, g_{i+1}, g_i, \ldots, g_1)$, $(g_n, \ldots, g_{i+1}) \in G^{n-i}$ et $u \in U$. H(G,A) est la cohomologie de ce complexe.

## § 1. Construction de $\mathcal{H}^2(G,.)$

(1.1) Soit $A \in G\text{-}\mathcal{M}td$. On note $\mathcal{S}^2(G,A)$ l'ensemble des suites exactes $(M,\mu)$

$$0 \to A \xrightarrow{\mu_1} M \xrightarrow{\mu_2} G \to 1$$

de groupes topologiques, de type A, où $\mu_1$ et $\mu_2$ sont des morphismes stricts, tels que $\mu_2$ (en tant qu'application) possède une section continue s telle que l'application $\alpha(s) : (g_1, g_2) \to s(g_1)s(g_2)s(g_1g_2)^{-1}$ appartienne à $\mathcal{D}^2(G,A)$. Si l'on désigne par $\mathcal{H}^2(G,A)$ le quotient de $\mathcal{S}^2(G,A)$ par la relation d'équivalence usuelle, on montre (cf. [1] ) qu'il existe une bijection canonique de $H^2(G, A)$ sur $\mathcal{H}^2(G,A)$ qui permet d'identifier ces deux ensembles, d'où une loi de groupe sur $\mathcal{H}^2(G,A)$. Cette loi provient d'une loi de groupe abélien sur $\mathcal{S}^2(G,A)$ : la somme de deux suites $(M,\mu)$ et $(M',\mu')$ de $\mathcal{S}^2(G,A)$ est la suite

$$0 \to A \xrightarrow{\nu_1} (M_2 \times_G M_2')/D \xrightarrow{\nu_2} G \to 1 ,$$

où $M_1 \times_G M_2'$ <u>est le produit fibré des groupes topologiques</u> $M_2$ et $M_2'$ <u>au-dessus de G</u>, $D = \{(\mu_1(a), \mu_1'(-a)) | a \in A\}$, $\nu_1(a)$ est la classe de $(\mu_1(a),1)$ et $\nu_2$ est obtenu par passage au quotient de la projection $M_2 \times_G M_2' \to G$.

(1.2). Soient $(M,\mu) \in \mathcal{S}^2(G,A)$ et $f : A \to B$ un G-morphisme, et soit $B \ltimes_{\mu_2} M_2$ (<u>ou seulement</u> $B \ltimes M_2$) <u>le produit semi-direct (topologique) de</u> B <u>par</u> $M_2$ ($M_2$ opérant dans B à l'aide de $\mu_2$); on note $B \underset{A}{*} M_2$ le quotient de $B \ltimes_{\mu_2} M_2$ par le sous-groupe distingué discret $\{(f(a), \mu_1(-a))\}$ et on obtient alors le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \ltimes_{\mu_2} M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\mu_2"] & 1 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & B *_A M_2 \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, "f"] & M_2 \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[u] & G \arrow[r] \arrow[u, equal] & 1
\end{tikzcd}$$

La deuxième suite horizontale est dans $\mathscr{S}^2(G,B)$ et sa classe dans $H^2(G,B)$ est l'image par $H^2(f)$ de celle de $(M,\mu)$.

On le voit en remarquant que tout morphisme de la forme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, dash] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

se factorise en un unique morphisme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & B *_A M_2 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

## 2. Construction de $\mathscr{H}^n(G,A)$ pour $n \geq 3$.

(2.1) Soit $A \in G$-$\mathscr{M}$td. On note $\mathscr{S}^n(G,A)$ l'ensemble des suites exactes $(M,\mu)$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mu_1} M_2 \xrightarrow{\mu_2} \cdots \to M_n \xrightarrow{\mu_n} G \longrightarrow 1$$

de groupes topologiques telles que

(i) $M_i \in G$-$\mathscr{M}$td et $\mu_{i-1}$ est un G-morphisme si $2 \leqslant i \leqslant n-2$ ;

(ii) $M_n$ est un groupe topologique et $\mu_{n-1}$ et $\mu_n$ sont des morphismes stricts ;

(iii) $\mu_{n-1}(\mu_n(m)m') = m\,\mu_{n-1}(m')m^{-1}$ $(m \in M_n,\ m' \in M_{n-1})$ ;

(iv) $\mu_n$ possède une section continue s telle que $\alpha(s) \in \mathscr{D}^2(G,\mu_{n-1}(M_{n-1}))$ (cf. §0).

On peut remplacer ces conditions par les suivantes :

(i') $M_2 \in G\text{-}\mathcal{M}td$ et $\mu_1$ est un G-morphisme.

(ii') $0 \to M_2/\mu_1(A) \to M_3 \to \dots \to G \to 1$ est dans $\mathcal{S}^{n-1}(G,M_2/\mu_1(A))$

La suite

$$0 \to 0 \to A \to M_2 \to \dots \to G \to 1$$

appartient alors à $\mathcal{S}^{n+1}(G,0)$.

(2.2). Soient $(M,\mu)$, $(N,\nu) \in \mathcal{S}^n(G,A)$. Un <u>morphisme</u> $\phi$ <u>de</u> $(M,\mu)$ <u>dans</u> $(N,\nu)$ est une suite $(\phi_i)_{2 \leqslant i \leqslant n}$ où $\phi_2,\dots,\phi_{n-1}$ sont des G-morphismes et $\phi_n$ un morphisme (continu) tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & A & \to & M_2 & \to & \dots & \to & M_n & \to & G & \to & 1 \\
 & & \| & & \downarrow\phi_2 & & & & \downarrow\phi_n & & \| & & \\
0 & \to & A & \to & N_2 & \to & \dots & \to & N_n & \to & G & \to & 1
\end{array}$$

soit commutatif.

(2.3) On dit que $(M,\mu)$ est <u>rétractable</u> (resp. <u>sectionnable</u>) s'il existe un morphisme $M \to 0$ (resp. $0 \to M$), c'est-à-dire s'il existe un G-morphisme (resp. un morphisme) rétraction de $\mu_1$ (resp. section de $\mu_n$).

(2.4) On note $\sim$ la relation d'équivalence dans $\mathcal{S}^n(G,A)$ engendrée par $(M,\mu) \to (N,\nu)$, ($(M,\mu) \sim (N,\nu)$ s'il existe une suite de morphismes reliant $(M,\mu)$ à $(N,\nu)$ ). Et <u>on pose</u> $\mathcal{H}^n(G,A) = \mathcal{S}^n(G,A)/\sim$.

Soient $(M,\mu)$, $(M',\mu') \in \mathcal{S}^n(G,A)$ ; on note $(M,\mu) + (M',\mu')$ la suite $(N,\nu) \in \mathcal{S}^n(G,A)$ définie comme suit : $N_2 = M_2 \underset{A}{*} M'_2$ est <u>la somme amalgamée</u> <u>(dans</u> $G\text{-}\mathcal{M}td$) $(=(M_2 \times M'_2) / \{(\mu_1(-a),\mu'_1(a))/a\in A\})$; $N_i = M_i \times M'_i$ (produit dans $G\text{-}\mathcal{M}td$) pour $2 < i < n$) ; $M_n = M_n \underset{G}{\times} M'_n$ produit fibré de groupes topologiques au-dessus de G et les morphismes canoniques $\nu_i$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, equal] & M_2 \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & M_n \arrow[r, "\mu_n"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\nu_1"] \arrow[d, equal] & M_2 \underset{A}{*} M'_2 \arrow[r, "\nu_2"] & \dots \arrow[r] & M_n \underset{G}{\times} M'_n \arrow[r, "\nu_n"] \arrow[u] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mu'_1"'] & M'_2 \arrow[r, "\mu'_2"'] \arrow[u] & \dots \arrow[r] & M'_n \arrow[r, "\mu'_n"'] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} .$$

Par passage au quotient, cette loi de composition dans $\mathcal{S}^n(G,A)$ définit dans $\mathcal{H}^n(G,A)$ une loi, notée +, associative, commutative et ayant pour élément neutre la classe de

$$0 \to A = A \to 0 \to \dots \to G = G \to 1.$$

On verra, plus loin, que $\mathcal{S}^n(G,A)$ est un <u>groupe abélien</u>.

## § 3. <u>Trivialisation et cotrivialisation.</u>

On suppose toujours $n \geqslant 3$.

(3.0) La notion de morphisme définie en (2.2) se généralise pour $(M,\mu) \in \mathcal{S}^n(G,A)$ et $(N,\nu) \in \mathcal{S}^n(G,B)$ $(B \in G\text{-}\mathcal{M}\mathrm{td})$ en remplaçant $id_A$ par un G-morphisme $\phi_1$.

(3.1) On dit que $(M,\mu) \in \mathcal{S}^n(G,A)$ est <u>trivialisable</u> s'il existe un morphisme $f : (N,\nu) \to (M,\mu)$, où $(N,\nu) \in \mathcal{S}^n(G,0)$ et on dit que $(f,(N,\mu))$ (ou $(N,\mu)$) est une <u>trivialisation</u> de $(M,\mu)$ ; s'il en est ainsi, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r, "\nu_2"] \arrow[d, "f_2"] & N_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & \dots \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mu_1"'] & M_2 \arrow[r, "\mu_2"'] & M_3 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

et l'on peut considérer la première ligne comme un élément de $\mathcal{S}^{n-1}(G,N_2)$ . De plus, <u>on peut supposer</u> que $N_2 = M_2$ et $f_2 = id_{M_2}$ ; en effet, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & \to & M_2 & \xrightarrow{\nu'_2} & M_2 \underset{N_2}{*} N_3 & \xrightarrow{\nu'_3} & N_4 \ldots & \to & G & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow f'_3 & & & & \| & & \\
0 & \to & A & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & \ldots & \to & G & \to & 1
\end{array}$$

(où les morphismes $\nu'_2$ , $\nu'_3$ et $f'_3$ sont définis canoniquement à partir de $\nu_2$ , $\nu_3$ et $f_3$ ; $M_2 \underset{N_2}{*} N_3$ est la somme amalgamée dans G- $\mathcal{M}$otd ou est défini comme dans (1.2) pour n = 3).

REMARQUE. - En changeant de nouveau $(N,\nu)$ on peut supposer que $f_{n-1}$ est surjectif etc. ; mais ceci ne sera pas utile pour la suite.

(3.2) Si $(M,\mu)$ est trivialisable, $(M,\mu)$ est équivalente à 0.

En effet, si $(f,(N,\nu))$ est une trivialisation de $(M,\mu)$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & A & \to & A \times N_2 & \xrightarrow{\nu_2 \circ g} & N_3 & \to & \ldots & \to & G & \to & 1 \\
 & & \| & & \downarrow \mu_1+f_2 & & \downarrow f_3 & & & & \| & & \\
0 & \to & A & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & \ldots & \to & G & \to & 1
\end{array}$$

(où g est la projection de $A \times N_2$ sur $N_2$), et la suite exacte du haut est rétractable.

(3.3) Si $(M,\mu)$ est rétractable, $(M,\mu)$ est trivialisable.

Soit r une rétraction de $\mu_1$. On considère la suite

$$0 \to 0 \to M_2 \xrightarrow{(r,\mu_2)} A \ltimes M_3 \xrightarrow{\mu_3 \circ pr} G \to 1$$

($A \ltimes M_3$ produit semi-direct)

de $\mathcal{G}^3(G,0)$ ou, si $n > 3$, la suite

$$0 \to 0 \to M_2 \xrightarrow{(r,\mu_2)} A \times M_3 \xrightarrow{\mu_3 \circ pr} M_4 \to \ldots \to G \to 1$$

de $\mathcal{G}^n(G,0)$. On a alors un morphisme évident de cette suite dans $(M,\mu)$.

(3.4) On dit que $(M,\mu) \in \mathcal{S}^n(G,A)$ est <u>faiblement cotrivialisable</u> si l'on a un diagramme commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\mu_1} & M_2 & \xrightarrow{\mu_2} & \cdots & M_{n-1} & \xrightarrow{\mu_{n-1}} & M_n & \xrightarrow{\mu_n} & G & \to 1 \\
 & & \| & & \downarrow g_2 & & & \downarrow g_{n-1} & & \downarrow g_n & & \downarrow & \\
0 & \to & A & \xrightarrow[\nu_1]{} & N_2 & \xrightarrow[\nu_2]{} & \cdots & N_{n-1} & \xrightarrow[\nu_{n-1}]{} & N_n & \to & 1 &
\end{array}$$

où $N_i \in G\text{-}\mathcal{C}\mathcal{M}\mathrm{td}$ et $\nu_{i-1}$ est un G-morphisme pour $2 \leqslant i \leqslant n-2$ , $N_{n-1}$ et $N_n$ sont des groupes topologiques et $\nu_{n-2}$ et $\nu_{n-1}$ des morphismes stricts, $g_i$ des G-morphismes pour $2 \leqslant i \leqslant n-2$, $g_{n-1}$ un morphisme et $g_n$ une application continue telle que $g_n(1) = 1$. On dit alors que $g = (g_i)_{2 \leqslant i \leqslant n}$ <u>est une cotrivialisation faible</u> de $(M,\mu)$.

(3.5) Soit g une cotrivialisation faible de $(M,\mu)$. On dit que g est une <u>cotrivialisation</u> de $(M,\mu)$ si g vérifie les conditions suivantes :

(i) $g_{n-1}(M_{n-1})$ est contenu dans le centralisateur de $\nu_{n-2}(N_{n-2})$ ;

(ii) G <u>opère continûment dans</u> $N_{n-1}$ <u>(donc</u> $M_n$ <u>opère continûment dans</u> $N_{n-1}$) et $\{(x,y)\,|\,\nu_{n-1}(x) = g_n(y)\}$ <u>est un sous-groupe de</u> $N_{n-1} \ltimes M_n$ (cf.(1.2)) <u>noté</u> $N_{n-1} \underset{N_n}{\ltimes} M_n$;

(iii) <u>Pour</u> $(x,y) \in N_{n-1} \underset{N_n}{\ltimes} M_n$ , $x' \in M_{n-1}$ et $y' \in N_{n-2}$ , <u>on a</u>

$$x(\mu_n(y).g_{n-1}(x'))(\mu_n(y).\nu_{n-2}(y'))x^{-1} = g_{n-1}(\mu_n(y).x')\nu_{n-2}(\mu_n(y).y').$$

S'il existe une cotrivialisation de $(M,\mu)$, on dit que $(M,\mu)$ est <u>cotrivialisable</u>.

(3.6) Si g est une cotrivialisation de $(M,\mu)$, on note $g \ltimes M$ la suite

$$0 \to 0 \to M_2 \xrightarrow{\pi_2} N_2 \times M_3 \to \cdots \to N_{n-2} \times M_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} N_{n-1} \underset{N_n}{\ltimes} M_n \xrightarrow{\pi_n} G \to 1$$

de $\mathcal{S}^n(G,0)$, où :

$\pi_2 = (g_2, \mu_2)$

$\pi_i(x,y) = (g_i(y).\nu_{i-1}(-x), \mu_i(y))$ pour $3 \leqslant i \leqslant n-1$,

$\pi_n = \mu_n \circ p_n$, $p_n : N_{n-1} \underset{N_n}{\ltimes} M_n \to M_n$ étant la projection.

On a alors un morphisme évident $g \ltimes M \to (M,\mu)$, donc $g \ltimes M$ est une trivialisation de $(M,\mu)$.

Ainsi, <u>si</u> $(M,\mu)$ <u>est cotrivialisable</u>, $(M,\mu)$ est <u>trivialisable</u> (donc équivalente à 0).

(3.7) Montrons maintenant que $\mathcal{H}^n(G,A)$ <u>est un groupe abélien</u>. Il suffit de voir que tout élément de $\mathcal{H}^n(G,A)$ est symétrisable. Soit donc $(M,\mu) \in \mathcal{S}^n(G,A)$ et soit $-(M,\mu)$ la suite

$$0 \to A \xrightarrow{-\mu_1} M_2 \xrightarrow{\mu_2} \to M_3 \to \dots \to G \to 1 .$$

Alors le diagramme suivant, où la première ligne est $(M,\mu)+((-(M,\mu))$, est commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & A & \to & M_2 \underset{A}{*} M_2 & \to & M_3 \times M_3 & \to & \dots & \to & M_n \underset{G}{\times} M_n & \to & G & \to & 1 \\
 & & \| & & \downarrow g_2 & & \downarrow g_3 & & & & \downarrow g_n & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & \dots & \to & \mu_{n-1}(M_{n-1}) & \to & 1 & &
\end{array}$$

où $g_2(\mathrm{cl}(x,x')) = x-x'$, $g_i(x,x') = x-x'$ si $3 \leqslant i \leqslant n-1$ et $g_n(x,x') = xx'^{-1}$.
Ainsi $(M,\mu)+(-(M,\mu))$ est cotrivialisable, donc équivalente à 0.

(3.8) <u>Si</u> $(M,\mu) \in \mathcal{S}^n(G,A)$ <u>est sectionnable,</u> $(M,\mu)$ <u>est cotrivialisable</u>.

Soit $\sigma$ une section de $\mu_n$ ; on a le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \to & A & \to & M_2 & \to & \cdots & \xrightarrow{\mu_{n-2}} & M_{n-1} & \xrightarrow{\mu_{n-1}} & M_n & \to & G & \to & 1 \\
 & & \| & & \| & & & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \to & M_2 & \to & \cdots & \xrightarrow{\nu_{n-2}} & M_{n-1} \ltimes G & \xrightarrow{\nu_{n-1}} & M_n & \to & 1 & &
\end{array} ,$$

où $\nu_{n-2}(x') = (\mu_{n-2}(x'), 1_G)$ , si $x' \in M_{n-2}$ et

$\nu_{n-1}(x,g) = \mu_{n-1}(x)\sigma(g)$, si $(x,g) \in M_{n-1} \ltimes G$ (produit semi-direct)

D'où une cotrivialisation de $(M,\mu)$ ($G$ opère trivialement sur $M_{n-1} \ltimes G$).

Ainsi, si $(M,\mu)$ <u>est sectionnable</u>, $(M,\mu)$ <u>est trivialisable</u> ( ce qu'on peut voir directement ).

(3.9) On va maintenant prouver que , pour $(M,\mu) \in \mathcal{S}^n(G,A)$, les propriétés suivantes sont <u>équivalentes</u> :

i) $(M,\mu)$ <u>est équivalente</u> à 0 ;

ii) $(M,\mu)$ <u>est trivialisable</u>,

iii) $(M,\mu)$ <u>est cotrivialisable</u>.

On sait déjà que iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) , d'après (3.2) et (3.6).

a) Montrons que i) $\Rightarrow$ ii).

<u>LEMME 1</u>. - *Soient* $(M,\mu)$ *et* $(M',\mu')$, *éléments de* $\mathcal{S}^n(G,A)$, *et soit* $(N,\nu) \in \mathcal{S}^n(G,0)$.

*Si l'on a des morphismes*

$$(N,\nu) \xrightarrow{g} (M,\mu) \xleftarrow{f} (M',\mu')$$

*(M est donc trivialisable), alors il existe* $(M'',\mu'') \in \mathcal{S}^n(G,A)$ *qui est cotrivialisable, et des morphismes*

$$(M,\mu) \xleftarrow[f_1]{} (M'',\mu'') \xrightarrow[f_2]{} (M',\mu').$$

On prend pour $(M'',\mu'')$ la suite

$$0 \to A \to M'_2 \times N_2 \to \cdots \to M'_{n-1} \times N_{n-1} \to M'_n \underset{G}{\times} N_n \to G \to 1$$

qui commence par le produit des suites $(M',\mu')$ et $(N,\nu)$ dans G-$\mathcal{M}$td. On a alors un morphisme naturel $f_2 : (M'',\mu'') \to (M',\mu')$ (par projections) ainsi que $f_1 : (M'',\mu'') \to (M,\mu)$. Si l'on note $(\bar{M},\bar{\mu})$ la suite obtenue en changeant la fin de M en

$$\ldots \to M_{n-1} \to \mu_{n-1}(M_{n-1}) \to 1,$$

on a, comme en (3.7), une cotrivialisation $(\phi,(\bar{M},\bar{\mu}))$ de $(M'',\mu'')$ avec ici

$$\phi_i(x,y) = f_i(x)-g_i(y) \text{ pour } 2 \leqslant i \leqslant n-1 \quad ((x,y) \in M'_i \times N_i), \text{ et}$$

$$\phi_n(x,y) = f_n(x)g_n(y)^{-1} \in \mu_{n-1}(M_{n-1}) \quad ((x,y) \in M'_n \times_G N_n).$$

Fin de la démonstration du lemme 1.

LEMME 2. - *Soient* $(M,\mu)$ *et* $(M',\mu')$ *deux éléments de* $\mathcal{S}^n(G,A)$ *et* $f : (M,\mu) \to (M',\mu')$ *un morphisme. Si* $(M,\mu)$ *(resp.* $M',\mu')$*) est trivialisable alors* $(M',\mu')$ *(resp.* $(M,\mu)$*) l'est aussi.*

Si $(M,\mu)$ est trivialisable c'est évident. Si $(M',\mu')$ est trivialisable, d'après le lemme 1, on peut écrire des morphismes

$$(M',\mu') \leftarrow (M'',\mu'') \to (M,\mu)$$

où $(M'',\mu'')$ est cotrivialisable, donc trivialisable (voir (3.6)), ainsi que $(M,\mu)$. Fin de la démonstration du lemme 2.

Soit $(M,\mu) = M \in \mathcal{S}^n(G,A)$ équivalente à 0. Il existe donc une suite $(f_i)_{i \in i[0,n]}$ de morphismes reliant 0 à M et s'écrivant sous la forme

$$0 \xrightarrow[f_0]{} M_1 \xleftarrow[f_1]{} M_2 \to \ldots \quad M$$

ou bien sous la forme

$$0 \xleftarrow[f_0]{} M_1 \xrightarrow[f_1]{} M_2 \leftarrow \ldots \quad M$$

selon le sens de $f_o$ ($M_i \in \mathcal{S}^n(G,A)$ pour $i \in [1,n]$).

Dans les deux cas $M_1$ est trivialisable, puisqu'il est soit rétractable (voir (3.3)), soit sectionnable (voir (3.8)). En utilisant le lemme 2, on voit donc que M est trivialisable.

b) Montrons maintenant que ii) $\Rightarrow$ iii).

Soit $(f,(N,\nu))$ une trivialisation de $(M,\mu) \in \mathcal{S}^n(G,A)$ telle que $N_2 = M_2$ et $f_2 = id_{M_2}$ (ce qu'on peut supposer d'après (3.1)).

Si $n \geqslant 4$, on a le diagramme exact et commutatif (dans le cas n = 4, on supprime les produits directs)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 \to & A & \overset{\mu_1}{\to} & M_2 & \overset{\mu_2}{\to} & M_3 & \to & \cdots \to & M_{n-2} & \overset{\mu_{n-2}}{\to} & M_{n-1} & \overset{\mu_{n-1}}{\to} & M_n & \to & G \to 1 \\
& \| & & \downarrow \nu_2 & & \downarrow g_3 & & & \downarrow g_{n-2} & & \downarrow g_{n-1} & & \| & & \\
0 \to & A & \underset{\nu_2\circ\mu_1}{\to} & N_3 & \underset{(f_3,\nu_3)}{\to} & M_3\times N_4 & \underset{\tau_3}{\to} & \cdots \to & M_{n-2}\times N_{n-1} & \underset{\tau_{n-2}}{\to} & M_{n-1}\ltimes N_n & \underset{\tau_{n-1}}{\to} & M_n & \to & 1
\end{array}$$

où $M_{n-1} \ltimes N_n$ est toujours le produit semi-direct (topologique),

$g_i$ , l'injection canonique pour $3 \leqslant i \leqslant n-1$ ,

$\tau_i(x,y) = (\mu_i(x)-f_{i+1}(y),\ \nu_{i+1}((-1)^{i+1}y))$ pour $3 \leqslant i \leqslant n-2$,

et $\tau_{n-1}(x,y) = \mu_{n-1}(x)f_n((-1)^{n-1}y)$ ; on est alors dans une situation identique à celle rencontrée en (3.8), d'où une cotrivialisation pour $(M,\mu)$.

Si, enfin, n = 3 (on généralise $\underset{A}{*}$ défini en (1.2)) on considère dans le produit semi-direct (topologique) $M_2 \underset{\mu_3}{\ltimes} N_3$, le sous-groupe $D = \{(x,\mu_2(x)) | x \in M_2\}$ qui est distingué ((car $(N,\nu) \in \mathcal{S}^3(G,0)$). On a alors une cotrivialisation définie par le diagramme exact et commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & A & \to & M_2 & \to & M_3 & \to G \to 1 \\
& \| & & \downarrow g_2 & & \| & \\
0 \to & A & \underset{\tau_1}{\to} & (M_2 \underset{\mu_3}{\ltimes} N_3)/D & \underset{\tau_2}{\to} & M_3 &
\end{array}$$

où $\tau_1(a) = cl(\mu_1(a),1_{N_3})$, $\tau_2(cl(x,y)) = \mu_2(x)f_3(y)^{-1}$ et $g_2(x) = cl(x,1)$.

§ 4. L'isomorphisme de H(G,.) et $\mathcal{H}$(G,.).

(4.1) Soit f : A → B un G-morphisme. Si $(M,\mu) \in \mathcal{S}^n(G,A)$ $(n \geq 2)$, on note $f^*(M,\mu)$ la suite de $\mathcal{S}^n(G,B)$ obtenue en remplaçant le début de la suite $(M,\mu)$ par $0 \to B \to B \underset{A}{*} M_2 \to M_3$ .... On obtient ainsi un morphisme $f^* : \mathcal{S}^n(G,A) \to \mathcal{S}^n(G,B)$, qui a la propriété universelle suivante : tout morphisme $g : \mathcal{S}^n(G,A) \to \mathcal{S}^n(G,B)$ tel que $g_1 = f$ se factorise de manière unique à travers $f^*$. La classe de $f^*(M,\mu)$ dans $\mathcal{H}^n(G,B)$ ne dépend que de celle de $(M,\mu)$ dans $\mathcal{H}^n(G,A)$ ; on définit $\mathcal{H}^n(G,f) : \mathcal{H}^n(G,A) \to \mathcal{H}^n(G,B)$ en faisant correspondre la classe de $f^*(M,\tau)$ à celle de $(M,\tau)$. Il est facile de vérifier que l'on définit ainsi un foncteur covariant additif $\mathcal{H}^n(G,.)$ de G-$\mathcal{M}$td dans $\mathbb{Z}$-$\mathcal{M}$od.

(4.2) Soit

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$$

une suite exacte dans G-$\mathcal{M}$td. Pour toute suite $(M,\mu)$

$$0 \to A'' \xrightarrow{\mu_1} M_2 \to \dots \to G \to 1$$

de $\mathcal{S}^n(G,A'')$, la classe dans $\mathcal{H}^{n+1}(G,A')$ de la suite

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\mu_1 \circ g} M_2 \to \dots \to G \to 1 .$$

ne dépend que de la classe dans $\mathcal{H}^n(G,A'')$ de $(M,\mu)$, ce qui permet de définir un morphisme $\delta^n : \mathcal{H}^n(G,A'') \to \mathcal{H}^{n+1}(G,A')$ ; on vérifie alors que $(\mathcal{H}^n(G,.))_{n\geq 2}$ muni de $(\delta_n)_{n \geq 2}$, est un $\delta$-foncteur (au sens de [3]) ; on utilise l'équivalence de " $(M,\mu)$ est trivialisable" et " $(M,\mu) \sim 0$ ". La vérification est fastidieuse de par sa longueur, mais facile.

(4.3) On pose $\mathcal{H}^\circ(G,.) = H^\circ(G, )$ et $\mathcal{H}^1(G,) = H^1(G,)$. On définit ainsi un $\delta$-foncteur $\mathcal{H}(G,.)$. Il est universel ([3]); en effet, la catégorie G-$\mathcal{M}$td possède assez d'objets injectifs et, si I en est un , une suite de $\mathcal{S}^n(G,I)$ $(n \geq 3)$ est rétractable donc équivalente à 0 ; on a ainsi $\mathcal{H}^n(G,I) = 0$, pour $n > 0$.

Par suite, $\mathcal{H}(G,.)$ et H(G,.) sont équivalents.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>.

[1] Y. GERARD, *Cohomologie galoisienne transcendantale*, J. of Algebra, 49 (1977), p. 422-440. Cet article est développé dans le travail suivant.

[2] Y. GERARD, *Sur la cohomologie galoisienne transcendantale*. (Thèse Univ. de Lyon-1, 1977).

[3] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J., 9 (1957), p. 119-221.

[4] D.F. HOLT, *An interpretation of the cohomology groups* $H^n(G,M)$, J. of Algebra, 60 (1979). p. 307-320.

[5] N. YONEDA, *On Ext and exact sequences*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, (1960), p. 507-576.

********