ROLAND BERGER

Cohomologie différentiable des algèbres de polynômes de leurs localisées ou de leurs complétées, et des variétés

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 5A
« Cohomologie différentiable des algèbres de polynômes, de leurs localisées ou de leurs complétées et des variétés », , p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___5A_A1_0>

COHOMOLOGIE DIFFERENTIABLE DES ALGEBRES DE POLYNOMES DE LEURS LOCALISEES OU DE LEURS COMPLETEES, ET DES VARIETES

par Roland BERGER

D'après J. Vey [1] , la cohomologie de Hochschild des opérateurs multidifférentiels sur une variété différentielle est isomorphe au module des tenseurs contravariants antisymétriques sur la variété. Une preuve détaillée se trouve dans [2] . Nous retrouverons ici ce résultat (ainsi que des renseignements dans le cas des variétés analytiques) comme conséquence du théorème général suivant : la cohomologie des opérateurs multidifférentiels sur une algèbre de polynômes quelconque à coefficients dans un module quelconque est isomorphe au module des multidérivations alternées. De façon plus précise, la multidérivation $\bar{f}$ figurant dans le développement d'un cocycle différentiel f est dans la classe de f, et cette dernière est alors déterminée par l'antisymétrisé de $\bar{f}$ ou, ce qui revient au même, par l'antisymétrisé de f. Pour obtenir ce résultat, la preuve de [2], faite dans le cas réel mais essentiellement liée à la caractéristique nulle, n'est plus valable et de plus longs développements se révèlent nécessaires: réduction à la cohomologie sans constante, utilisation de suites spectrales (§1). En corollaire, on constate que le fait d'imposer aux cochaines de Hochschild d'être différentielles n'affecte pas la cohomologie.

Les opérateurs multidifférentiels sur une variété analytique ou différentielle sont localement bien définis par leurs actions sur les fonctions polynômes, ce qui permet d'appliquer notre théorème général aux variétés (§ 3). C'est par des considérations analogues que la cohomologie différentiable de localisées ou de complétées d'algèbres de polynômes est obtenue : il suffira de prouver que les opérateurs différentiels "passent" bien aux foncteurs localisation ou complétion (voir § 2 pour les hypothèses précises).

Les notations générales sont les suivantes : K est un anneau commutatif, A est une K-algèbre associative, unifère et commutative et C est un A-module. Nous désignerons par H(A,C) la cohomologie de Hochschild de A à coefficients dans C. Une n-cochaine $(a_1,\ldots,a_n) \mapsto f(a_1,\ldots,a_n)$ de A^n dans C est dite différentielle d'ordre $\leqslant$ m ($m \in \mathbb{N}$) si f est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant$ m en chaque variable a_i (pour la définition abstraite des opérateurs différentiels, voir 2.1). Les cochaines différentielles d'ordre $\leqslant$ m forment un sous-complexe du complexe de Hochschild, ce qui définit la cohomologie m-différentiable de A dans C. La cohomologie dite différentiable du complexe de toutes les cochaines différentielles est notée $H_{diff}(A,C)$. Nous verrons ainsi que $H_{diff}(A,C) = H(A,C)$ pour toute algèbre de polynômes A ; nous donnerons aussi des indications sur la cohomologie m-différentiable de telles algèbres.

1. Cohomologie différentiable des algèbres de polynômes.

Dans ce qui suit, E est un K-module libre de base $(x_i)_{i \in I}$, A est l'algèbre symétrique de E identifiée à l'algèbre de polynômes $K[x_i]_{i \in I}$.

(1.1) Notons X le complexe de Hochschild défini par le A-module gradué $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_K(\otimes_K^n A, C)$ et la différentielle ∂ qui transforme une n-cochaine f en la (n+1)-cochaine ∂f donnée par

$$(1) \qquad \partial f(a_1,\ldots,a_{n+1}) = a_1 f(a_2,\ldots,a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1,\ldots,a_i a_{i+1},\ldots,a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1,\ldots,a_n)a_{n+1} .$$

Pour une n-cochaine f et une p-cochaine g toutes deux à valeurs dans A, introduisons leur "cup-pairing" $f \smile g = \Pi(f \otimes g)$, où Π est la multiplication de A ; c'est une (n+p)-cochaine qui vérifie l'égalité

$$(2) \qquad \partial(f \smile g) = \partial f \smile g + (-1)^n f \smile \partial g.$$

Il est classique que $H^n(X)$ est isomorphe au A-module $\mathrm{Hom}_K(\Lambda_K^n E, C)$. Un isomorphisme remarquable associe à la classe d'un n-cocycle $f : A^n \to C$ l'anti-symétrisée de la restriction de f à E^n définie par :

(3) $$a\,(f|_{E^n})(x_{i_1},\dots,x_{i_n}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma\, f(x_{\sigma(i_1)},\dots,x_{\sigma(i_n)}),$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{i_1,\dots,i_n\}$ et où ε_σ est la signature de σ.

On peut exprimer cet isomorphisme de façon différente, en introduisant le sous-complexe Y de X formé de toutes les multidérivations alternées à valeurs dans C. Puisque toute multidérivation est un cocycle, Y est à différentielle nulle. A chaque cochaine $f : A^n \to C$, associons l'unique multidérivation (alternée) de A^n dans C prolongeant $a\,(f|_{E^n})$; on obtient ainsi un morphisme de complexes de X dans Y noté a', fournissant un isomorphisme $H(a')$ de $H(X)$ sur $H(Y) = Y$. Ceci nous conduit à la remarque suivante : puisque toute multidérivation alternée de A^n dans C est l'antisymétrisée d'une multidérivation de A^n dans C, toute classe de la cohomologie de X contient une multidérivation. D'autre part à côté de $a' : X \to Y$, il y a l'antisymétrisation habituelle $a : X \to X$ (qui n'est pas un morphisme de complexes). Sachant que a et a' coïncident sur les multidérivations et que, d'après (1), a est nul sur les cobords, la remarque prédédente montre que a et a' coïncident sur les cocycles.

(1.2) Dans ce qui suit, les lettres grecques α,β,γ parfois indexées désigneront des multi-indices, c'est-à-dire des applications à support fini de I dans $\mathbb{N}$. Pour tout i dans I, on notera encore i le multi-indice qui envoie i sur 1 et tout $j \neq i$ sur 0. Pour tout multi-indice α, soit Δ^α l'opérateur différentiel de A dans A d'ordre $|\alpha|$ défini par

(4) $$\Delta^\alpha(x^\beta) = \begin{cases} \binom{\beta}{\alpha}\, x^{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha \leqslant \beta, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(On notera qu'avec des notations classiques $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \alpha!\Delta^\alpha$.) Signalons tout de suite la formule de Leibniz :

$$\Delta^\alpha(a.b) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \Delta^\beta(a)\Delta^\gamma(b). \tag{5}$$

Une cochaine différentielle $f : A^n \to C$ d'ordre $\leqslant m$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$f = \sum_{|\alpha_i| \leqslant m} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \Delta^{\alpha_1} \smile \ldots \smile \Delta^{\alpha_n} . \tag{6}$$

Les coefficients appartiennent à C et le terme général est dit d'ordre total $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$. La somme du second membre de (6) peut ne pas être à support fini (si I est infini), mais elle a toujours un sens puisqu'elle n'opère que sur des sommes à support fini. De plus, (6) permet de définir les opérateurs n-différentiels homogènes d'ordre total $k = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$ donné, ce qui donne une graduation évidente du A-module $\mathrm{Dif}(A^n,C)$ de tous les opérateurs n-différentiels. D'autre part, pour une n-cochaine différentielle f et pour chaque multi-indice s, posons

$$f_s = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=s} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \Delta^{\alpha_1} \smile \ldots \smile \Delta^{\alpha_n} , \tag{7}$$

si bien que l'on a la décomposition

$$f = \sum_k \sum_{|s|=k} f_s . \tag{8}$$

Pour chaque s, l'ensemble des f_s est un sous-module de $\mathrm{Dif}(A^n,C)$, et le produit direct de ces sous-modules pour tous les s vérifiant $|s| = k$ est le sous-module des n-cochaines différentielles homogènes d'ordre total k. On a ainsi démonté $\mathrm{Dif}(A^n,C)$ en une somme directe de produits directs ; nous allons voir que ce "dévissage" passe à la cohomologie.

Les cochaines différentielles forment un sous-complexe L' de X. La formule (1) montre que, si f est donné par (6), on a

(9) $$\partial f = \Sigma \; c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \; \partial\,(\Delta^{\alpha_1} \smile \ldots \smile \Delta^{\alpha_n}).$$

On a $\partial(\Delta^\circ) = \Pi$. Ensuite, la formule de Leibniz (5) prouve que pour tout $\alpha \neq 0$

(10) $$\partial(\Delta^{\alpha}) = \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta\neq 0,\gamma\neq 0}} \Delta^{\beta} \; \Delta^{\gamma} .$$

On en déduit à l'aide de (2) que

(11) $$\partial(\Delta^{\alpha_1} \smile \ldots \smile \Delta^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sum_{\substack{\beta_i+\gamma_i=\alpha_i \\ \beta_i\neq 0,\gamma_i\neq 0}} \Delta^{\alpha_1} \smile \ldots \smile \Delta^{\beta_i} \smile \Delta^{\gamma_i} \smile \ldots \Delta^{\alpha_n} .$$

Cette formule sous-entend que chaque α_i est non nul, mais on peut l'étendre au cas général en convenant que si $\alpha_i = 0$, on prend $\beta_i = \gamma_i = 0$ et on rajoute un signe - devant le terme obtenu.

La formule (11) nous indique que ∂ conserve le multi-indice somme $s = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$ et en particulier l'ordre total. On peut donc introduire le sous-complexe L'_s de L' formé des cochaines du type f_s et le sous-complexe L'_k des cochaines homogènes d'ordre total k. Comme on l'a déjà vu, on a :

(12) $$L' = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} L'_k \qquad \text{et} \qquad L'_k = \prod_{|s|=k} L'_s \; .$$

Continuons un peu plus le dévissage. Une n-cochaine différentielle f donnée par (6) sera dite sans constante (resp. avec constante) si pour chaque terme dont le coefficient $c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ est non nul, tous les α_i sont non nuls (resp. au moins un des α_i est nul) ; d'après (11), ∂f est encore sans constante (resp. avec constante). En notant L (resp. L") le sous-complexe des cochaines sans constante (resp. avec constante), on voit que $L' = L \oplus L''$. On peut encore définir les complexes L_k , L_s, L''_k , L''_s et on a des formules analogues à (12).

Si on note $(L_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la graduation du complexe L_k, il est clair que $L_k^n = 0$ quand $k < n$.

Le résultat suivant nous ramène au calcul de $H(L)$.

THEOREME 1. - *On a* $H(L'') = 0$, *Par conséquent, l'injection naturelle* $L \to L'$ *donne un isomorphisme de* $H(L)$ *sur* $H(L')$.

PREUVE. Fixons un multi-indice s et f un n-cocycle de L''_s. On a la décomposition suivante (qui est d'ailleurs une somme finie) :

$$f = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=s} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \Delta^{\alpha_1}\smile\ldots\smile\Delta^{\alpha_n} \tag{13}$$

Pour tout entier $r \in \{1,\ldots,n\}$, un terme non nul de (13) est dit id_r si $\alpha_r = 0$. Montrons par récurrence sur r que modulo des bords de L''_s, on peut supprimer tous les termes id_r de f, $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Pour $r = 1$, regroupons tous les termes id_1 et écrivons leur somme sous la forme $\varphi_1 = id\smile f_1 + \Pi\smile f_2$, où f_1 est une (n-1) cochaine sans terme id_1 et f_2 est une (n-2)-cochaine.

$$\partial\varphi_1 = \Pi\smile f_1 - id\smile\partial f_1 + \Pi\smile\partial f_2 .$$

La formule (11) précise que si les termes de f_1 ne débutent jamais par id, il en est de même des termes de ∂f_1. Par suite, les seuls termes commençant par Π dans ∂f sont ceux de $\Pi\smile f_1 + \Pi\smile\partial f_2$, donc $f_1 = -\partial f_2$; en reportant, on trouve bien $\varphi_1 = \partial(id\smile f_2)$.

Soit maintenant $2 \leqslant r \leqslant n-1$ et supposons qu'il n'y ait plus dans f de termes $id_{r'}$, avec $r' < r$. Choisissons des multi-indices $\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}$ non nuls et regroupons les termes id_r de f commençant par $\Delta^{\alpha_1}\smile\ldots\smile\Delta^{\alpha_{r-1}}$ sous la forme :

$$\varphi_r = \Delta^{\alpha_1}\smile\ldots\smile\Delta^{\alpha_{r-1}}\smile(id\smile f_1 + \Pi\smile f_2), \tag{14}$$

où f_1 est sans id_1. Les seuls termes à la fois id_r et id_{r+1} de $\partial\varphi_r$ sont ceux de

$$(-1)^{r-1}\Delta^{\alpha_1}\cup\ldots\cup\Delta^{\alpha_{r-1}}\cup(\Pi\cup f_1 + \Pi\cup\partial f_2) \ ,$$

et d'après l'hypothèse de récurrence ce sont aussi les seuls termes id_r et id_{r+1} de ∂f commençant par $\Delta^{\alpha_1}\cup\ldots\cup\Delta^{\alpha_{r-1}}$. Donc $f_1 = -\partial f_2$, et en reportant dans (14), on trouve :

$$\varphi_r = (-1)^{r-1}\partial(\Delta^{\alpha_1}\cup\ldots\cup\Delta^{\alpha_{r-1}}\cup id\cup f_2) + (-1)^r\partial(\Delta^{\alpha_1}\cup\ldots\cup\Delta^{\alpha_{r-1}})\cup id\cup f_2 \ .$$

Ainsi, φ_r est modulo un bord de L''_s un élément sans termes $id_{r'}$, avec $r' \leqslant r$.

Une fois la récurrence achevée jusqu'à $r = n-1$, il est clair qu'il ne peut pas rester de termes id_n puisque dans le bord de $\Delta^{\alpha_1}\cup\ldots\cup\Delta^{\alpha_{n-1}}\cup id$ se trouve $\Delta^{\alpha_1}\cup\ldots\cup\Delta^{\alpha_{n-1}}\cup\Pi$.

1.3. On va maintenant se consacrer au théorème suivant :

<u>THEOREME 2</u>. - *Le morphisme de complexes* a' : $L \to Y$ *induit un isomorphisme de* $H(L)$ *sur* Y . *De façon équivalente, l'injection naturelle* $L \to X$ *induit un isomorphisme de* $H(L)$ *sur* $H(X)$.

Vu le théorème 1, le complexe L peut être remplacé dans cet énoncé par L', ce qui donne bien $H_{diff}(A,C) = H(A,C)$. D'autre part, il y a une partie du théorème facile à obtenir. On a déjà remarqué en effet que toute cochaine de Y est l'anti-symétrisée d'une multidérivation ; par suite le morphisme $H(L) \to Y$ est surjectif. Tout le problème est de montrer qu'un cocycle différentiel qui est cobord dans X est en fait un cobord différentiel.

<u>COROLLAIRE</u>. - *i) Toute classe de* $H_{diff}(A,C)$ *contient une multidérivation. Plus précisément, la multidérivation* $\bar{f}$ *figurant dans un cocycle* f *est dans la classe de* f. *En particulier,* $f-\bar{f}$ *est un cobord différentiel.*

ii) Si K *est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre, toute classe de* $H_{diff}(A,C)$ *contient une multidérivation alternée et une seule.*

Admettant le théorème 2, prouvons d'abord (i). Si f est donnée par (6), la multidérivation $\bar{f}$ sera par définition :

$$\bar{f} = \sum_{|\alpha_i|=1} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \Delta^{\alpha_1} \smile \ldots \smile \Delta^{\alpha_n} .$$

Il suffit de montrer le résultat quand f est un n-cocycle sans constante. Mais c'est alors immédiat puisque dans ce cas les restrictions à E^n de f et de $\bar{f}$ coïncident, d'où $a'(f) = a'(\bar{f})$.

D'autre part, (ii) résulte de ce que $a(\frac{1}{n!}\, f) = f$ pour tout $f \in Y^n$.

Pour démontrer le théorème 2, remarquons que $H^n(L) = \bigoplus_{k \geqslant n} H^n(L_k)$. On va voir que $H^n(L_n) = Y^n$, puis nous montrerons en 1.5 et 1.6 que $H^n(L_k) = 0$ pour $k > n$.

(1.4) <u>Le morphisme de complexes</u> $a' : L_n \to Y$ <u>induit un isomorphisme de</u> $H^n(L_n)$ <u>sur</u> Y^n.

<u>PREUVE</u>. Les éléments de L_n^n sont des multidérivations que l'on appellera n-dérivations. Il nous suffit de montrer que toute n-dérivation f vérifiant $a(f) = 0$ est un cobord de L_n. On peut supposer que f appartient à L_s^n où s est un multi-indice donné tel que $|s| = n$. Ecrivons $s = i_1 + \ldots + i_n$ avec $i_1,\ldots,i_n$ éléments de I. On a la décomposition :

(15) $$f = \sum_{j_1+\ldots+j_n=s} c_{j_1,\ldots,j_n} \Delta^{j_1} \smile \ldots \smile \Delta^{j_n} .$$

Supposons d'abord que la suite $(i_1,\ldots,i_n)$ comporte deux indices égaux. Il en sera de même pour toute suite $(j_1,\ldots,j_n)$. Si pour une telle suite les deux indices égaux sont consécutifs, le terme correspondant est alors un bord d'après la formule :

$$\partial(\Delta^{j_1} \smile \ldots \smile \Delta^{j_\ell + j_\ell} \smile \ldots \smile \Delta^{j_n}) = (-1)^\ell \Delta^{j_1} \smile \ldots \smile \Delta^{j_\ell} \smile \Delta^{j_\ell} \smile \ldots \smile \Delta^{j_n} .$$

Sinon , on peut toujours rapprocher au moyen de la formule (16) suivante deux indices égaux non consécutifs et ensuite appliquer la formule précédente.

$$(16) \qquad \partial(\Delta^{j_1} \cup \ldots \cup \Delta^{j_\ell + j_{\ell+1}} \cup \ldots \cup \Delta^{j_n}) =$$

$$(-1)^\ell [\Delta^{j_1} \cup \ldots \cup \Delta^{j_\ell} \cup \Delta^{j_{\ell+1}} \cup \ldots \cup \Delta^{j_n} + \Delta^{j_1} \cup \ldots \cup \Delta^{j_{\ell+1}} \cup \Delta^{j_\ell} \cup \ldots \cup \Delta^{j_n}].$$

(Dans cette formule, on suppose $j_\ell \neq j_{\ell+1}$).

Supposons maintenant $i_1, \ldots, i_n$ deux à deux distincts. Dans ce cas, (15) s'écrit :

$$(17) \qquad f = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_n)} \Delta^{\sigma(i_1)} \cup \ldots \cup \Delta^{\sigma(i_n)} .$$

On ramène alors chaque $\Delta^{\sigma(i_1)} \cup \ldots \cup \Delta^{\sigma(i_n)}$ à $\Delta^{i_1} \cup \ldots \cup \Delta^{i_n}$ au moyen d'un certain nombre de transpositions portant sur des indices consécutifs ; à chaque transposition, on utilise (16).

Ainsi, f est réduite, modulo un bord de L_n , à la multidérivation $\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma c_{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_n)}\right) \Delta^{i_1} \cup \ldots \cup \Delta^{i_n}$ dont le coefficient est nul par hypothèse.

(1.5) Introduction d'une suite spectrale de L_s .

Fixons s un multi-indice tel que $|s| = k \geqslant 1$. Chaque cochaine non nulle f de L_s est une somme de termes $c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \Delta^{\alpha_1} \cup \ldots \cup \Delta^{\alpha_n}$; on note O(f) le plus grand des entiers $|\alpha_1|$ que l'on puisse trouver. Si f est nulle, on pose $O(f) = -\infty$. Pour $p \in \mathbb{N}$, soit F_p le sous-module de L_s formé des f vérifiant $O(f) \leqslant k-p$. Il est clair que $(F_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de sous-complexes de L_s telle que $F_o = L_s$ et $F_p = 0$ dès que $p \geqslant k$. Cette dernière propriété implique que la filtration de L_s ainsi obtenue est régulière et définit donc une suite spectrale $(E_r^{pq}(s))$ convergeant vers $H(L_s)$.

Nous voulons montrer par récurrence sur k la propriété (P_k) suivante : pour tout s tel que $|s| = k$, $E_2^{pq}(s) = 0$ sauf si $p = k-1$ et $q = 1$. Sachant que $E_2^{pq}(s) = 0$ pour tout $q \neq 1$, les théorèmes généraux sur les suites spectrales ([3], Prop. 5.6, p. 326) entrainent des isomorphismes $H^n(L_s) \approx E_2^{n-1,1}(s)$, et (P_k) fournit le résultat attendu : $H^n(L_s) = 0$ si $n \neq k$.

Si $(F_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la graduation de F_p, rappelons que $E_r^{pq} = Z_r^{pq} / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})$, où Z_r^{pq} (resp. B_r^{pq}) est formé des f de F_p^{p+q} dont le bord est dans F_{p+r}^{p+q+1} (resp. qui sont bords d'un élément de F_{p-r}^{p+q-1}).

Chacune des inégalités $p \geqslant k$, $p+q > k$ a pour conséquence $F_p^{p+q} = 0$, d'où $E_r^{pq}(s) = 0$. En particulier, quand $k = 1$, $E_r^{pq}(s) = 0$ dès que $p \geqslant 1$ ou que $p = 0$, $q \geqslant 2$; autrement dit, (P_1) est vérifiée.

Supposons désormais que k soit un entier $\geqslant 2$ et que les propriétés $(P_{k'})$ soient vraies pour $k' < k$. Fixons s un multi-indice vérifiant $|s| = k$. Les entiers p et q sont assujettis aux conditions $0 \leqslant p < k$ et $0 \leqslant p+q = n \leqslant k$. Sous ces hypothèses, calculons $E_1^{pq}(s)$. Soit f dans Z_1^{pq} . Modulo un élément de $Z_o^{p+1,q-1}$, on peut dire que tous les termes $c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \Delta^{\alpha_1} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_n}$ de f vérifient $|\alpha_1| = k-p$; par suite, $|\alpha_2+\dots+\alpha_n| = p$, d'où $p \geqslant n-1$ et $q \leqslant 1$. Autrement dit, $E_1^{pq}(s) = 0$ si $q \geqslant 2$. Dans le cas où $q \leqslant 0$, regroupons dans f tous les termes débutant par Δ^α (α donné tel que $|\alpha| = k-p$) ; on obtient $\Delta^\alpha \smile f_1$, où f_1 est une (n-1)-cochaine de $L_{s-\alpha}$. L'égalité $\partial(\Delta^\alpha \smile f_1) = \partial\Delta^\alpha \smile f_1 - \Delta^\alpha \smile \partial f_1$ et l'hypothèse $f \in Z_1^{pq}$ entrainent $\partial f_1 = 0$. Or $n-1 < p = |s-\alpha|$, si bien que (P_p) donne $H^{n-1}(L_{s-\alpha}) = 0$, et on a $f_1 = \partial g_1$. Mais alors $\Delta^\alpha \smile f_1 = \partial(\Delta^\alpha) \smile g_1 - \partial(\Delta^\alpha \smile g_1)$ appartient à $Z_o^{p+1,q-1} + B_o^{pq}$; donc $E_1^{pq}(s) = 0$ si $q \leqslant 0$. En définitive, $E_2^{pq}(s) = 0$ pour tout $q \neq 1$. Un calcul immédiat donnant $E_2^{01}(s) = 0$, il nous reste à montrer la nullité de $E_2^{n-1,1}(s)$ pour $2 \leqslant n \leqslant k-1$. On notera cependant que $E_1^{p1}(s) \neq 0$ pour $0 \leqslant p \leqslant k-1$.

(1.6) <u>Calcul de $E_2^{n-1,1}(s)$, $2 \leqslant n \leqslant k-1$.</u>

Ce calcul va se faire directement, sans utiliser l'hypothèse de récurrence. Soit f un élément de $Z_2^{n-1,1}$. Modulo un élément de $Z_1^{n,o}$, on peut supposer que tous les termes $c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \Delta^{\alpha_1} \cup \ldots \cup \Delta^{\alpha_n}$ de f vérifient ou bien $|\alpha_1| = k-n+1$, ou bien $|\alpha_1| = k-n$. Dans le premier cas (resp. le second cas), on dira que le terme est principal (resp. complémentaire). Le principe de notre preuve est d'éliminer tous les termes principaux modulo des termes complémentaires ou des éléments de $B_1^{n-1,1} + Z_1^{n,o}$. Une fois ces éliminations terminées, il ne restera qu'une somme de termes complémentaires qui nécessairement devra appartenir à $Z_1^{n,o}$, c.q.f.d.

Nous montrerons d'abord des relations qui ont l'avantage de ne faire intervenir que les termes principaux.

<u>LEMME</u>. - *Soient* $j_1,\ldots,j_n$ *des éléments distincts de* I *et* β *un multi-indice tels que* $\beta + j_1 +\ldots+ j_n = s$.

On a la relation

(18) $$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \; c_{\beta+\sigma(j_1),\sigma(j_2),\ldots,\sigma(j_n)} = 0.$$

<u>PREUVE</u>. Regroupons en $\Delta^\beta \cup f'$ les termes complémentaires commençant par Δ^β; dans f' n'interviennent que les indices $j_1,\ldots,j_n$, si bien que $\partial f'$ est une somme de termes du type $\Delta^{\sigma(j_1)} \cup \ldots \cup \Delta^{\sigma(j_n)}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Au moyen de $\partial(\Delta^\beta \cup f') = \partial(\Delta^\beta) \cup f' - \Delta^\beta \cup \partial f'$, on voit que toute la contribution des termes complémentaires de f en termes-bords du type $\Delta^\beta \cup \Delta^{\sigma(j_1)} \cup \ldots \cup \Delta^{\sigma(j_n)}$ se trouve rassemblée dans $- \Delta^\beta \cup \partial f'$. Or la contribution des termes principaux de f en termes-bords du même type est exactement :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_{\beta+\sigma(j_1),\sigma(j_2),\dots,\sigma(j_n)} \Delta^{\beta} \smile \Delta^{\sigma(j_1)} \smile \dots \smile \Delta^{\sigma(j_n)} .$$

On conclut que la multidérivation

$$\varphi = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_{\beta+\sigma(j_1),\dots,\sigma(j_n)} \Delta^{\sigma(j_1)} \smile \dots \smile \Delta^{\sigma(j_n)} \quad \text{est un bord } \partial f',$$

d'où $a(\varphi) = 0$ et la relation (18).

Passons à nos éliminations que nous ferons en plusieurs étapes.

1ère étape. - On supprime d'abord tous les termes principaux $\Delta^{\alpha_1} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_n}$ tels qu'il existe ℓ et ℓ', $2 \leqslant \ell < \ell' \leqslant n$, vérifiant $\alpha_\ell = \alpha_{\ell'}$. Il suffit en effet de reprendre les mêmes arguments qu'en 1.4 (dans le cas où il y avait deux indices égaux), mais cette fois en utilisant les égalités (modulo termes complémentaires ou de $Z_1^{n,o}$) qui suivent et dont les premiers membres appartiennent à $B_1^{n-1,1}$:

$$\partial(\Delta^{\alpha_1} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_\ell + \alpha_\ell} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_n}) \equiv (-1)^\ell \, \Delta^{\alpha_1} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_\ell} \smile \Delta^{\alpha_\ell} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_n} ;$$

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\partial(\Delta^{\alpha_1} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_\ell + \alpha_{\ell+1}} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_n}) \equiv \\ &(-1)^\ell [\Delta^{\alpha_1} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_\ell} \smile \Delta^{\alpha_{\ell+1}} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_n} + \Delta^{\alpha_1} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_{\ell+1}} \smile \Delta^{\alpha_\ell} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_n}] . \end{aligned}$$

(Dans (19), on a $\alpha_\ell \neq \alpha_{\ell+1}$).

Faisons davantage en fixant un ordre total sur l'ensemble des indices figurant dans s. On peut alors supprimer par l'utilisation répétée de (19) tous les termes principaux $\Delta^{\alpha_1} \smile \Delta^{\alpha_2} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_n}$ ne vérifiant pas $\alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

2ème étape. - Soit i le plus petit élément de l'ensemble des indices figurant dans s. On supprime alors tous les termes principaux pour lesquels $i \in \{\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$. En effet, un tel terme principal vérifie $\alpha_2 = i$ d'après la 1ère étape ; il suffit d'appliquer la formule :

$$\partial(\Delta^{\alpha_1 + i} \smile \Delta^{\alpha_3} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_n}) \equiv -\Delta^{\alpha_1} \smile \Delta^{i} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_n} - \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha_1 \\ |\gamma|=1, \gamma\neq i}} \Delta^{\beta+i} \smile \Delta^{\gamma} \smile \dots \smile \Delta^{\alpha_n} .$$

On notera que le premier membre est bien dans $B_1^{n-1,1}$. D'autre part, dans les termes principaux (que l'on éliminera ou arrangera à nouveau selon les procédés de la 1ère étape) du Σ du 2e membre, i ne figure plus dans $\{\gamma, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$.

<u>3ème étape</u>. - Il ne reste que des termes principaux tels que $\alpha_2 < \dots < \alpha_n$ et $i \notin \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. On peut écrire le coefficient d'un tel terme principal sous la forme $c_{\beta+i,\alpha_2,\dots,\alpha_n}$. Posons $j_1 = i$, $j_2 = \alpha_2, \dots, j_n = \alpha_n$. Comme $j_1 < j_2 < \dots < j_n$, la formule (18) du lemme donne ici :

$$c_{\beta+j_1,j_2,\dots,j_n} - c_{\beta+j_2,j_1,\dots,j_n} + \dots + (-1)^{n+1}\, c_{\beta+j_n,j_1,\dots,j_{n-1}} = 0.$$

Or les n-1 derniers termes de cette somme sont nuls d'après la 2ème étape, donc le 1er terme est nul, c.q.f.d.

(1.7) <u>Quelques remarques sur la cohomologie m-différentiable</u>.

Soient $L(m)$, $L'(m)$, $L''(m)$ les sous-complexes de L, L', L'' formés des cochaines d'ordre $\leqslant m$. On a $L'(m) = L(m) \oplus L''(m)$. La démonstration du th. 1 montre que $H(L'(m)) = H(L(m))$. Evidemment, $H(L(1)) = L(1)$. Il se pose alors le problème de déterminer, dans les cas non triviaux $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, le noyau du morphisme surjectif $H^n(L(m)) \to Y^n$ induit par a'. Notons que $H^n(L(m)) = \bigoplus_{n \leqslant k \leqslant mn} H^n(L_k(m))$.

La preuve de 1.4 indique que, si $m \geqslant 2$, $H^n(L_n(m)) = Y^n$. D'autre part, si f est un n-cocycle de $L_k(m)$ lorsque $n < k < m+n-1$, f est cobord d'une cochaine différentielle qui est nécessairement d'ordre $\leqslant m$ (vu le choix de k) ; donc $H^n(L_k(m)) = 0$ dans ce cas. En particulier, pour $2 \leqslant n < k \leqslant mn$, $H^n(L_k(mn)) = 0$. Cela prouve le résultat suivant : <u>tout n-cocycle f d'ordre $\leqslant m$ ($n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$) tel que a (f) = 0 est le cobord d'une cochaine différentielle d'ordre $\leqslant mn$.</u>

2. Extension aux localisées ou aux complétées.

Soient A une K-algèbre et B une A-algèbre, toutes deux associatives, unifères, commutatives. Le morphisme canonique $a \to a.1_B$ de A dans B permet de définir les morphismes de restriction (A-linéaires) $\rho^n : \mathrm{Dif}(B^n,C) \to \mathrm{Dif}(A^n,C)$ pour tout B-module C (considéré comme A-module de manière naturelle). La famille $(\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne de façon évidente un morphisme de complexes ρ entre cochaines différentielles. Si ρ est un isomorphisme, alors $H_{diff}(B,C) = H_{diff}(A,C)$ et on a des identifications analogues pour les cohomologies m-différentiables Dans ce cas, la connaissance de $H_{diff}(A,C)$ fournit immédiatement celle de $H_{diff}(B,C)$ sans passer par $H(B,C)$. Dire que ρ est un isomorphisme signifie que tout opérateur n-différentiel de A^n dans C s'étend de façon unique en un opérateur n-différentiel de B^n dans C, pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Mais il est clair qu'il suffit d'étudier le cas $n = 1$. Nous allons décrire deux exemples typiques de cette situation.

2.1. Rappelons brièvement la notion d'opérateur K-différentiel de A dans un A-module C. Pour tout $f \in \mathrm{Hom}_K(A,C)$ et pour tout $a \in A$, on introduit $ad(a).f \in \mathrm{Hom}_K(A,C)$ par :

$$ad(a).f(x) = a.f(x)-f(a.x).$$

On définit alors les opérateurs différentiels de A dans C d'ordre $\leqslant m$ par récurrence sur m ($m \in \mathbb{N}$). Les opérateurs d'ordre 0 sont les applications A-linéaires de A dans C. Une application K-linéaire f de A dans C est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant m$ si $ad(a).f$ est un opérateur d'ordre $\leqslant m-1$ pour tout $a \in A$.

Les opérateurs différentiels passent bien à la localisation grâce au théorème suivant :

THEOREME 3. - *Soient* A *une* K-*algèbre*, $B = S^{-1}A$ *une localisée de* A *et* C *un* B-*module. Tout opérateur différentiel* $d : A \to C$ *d'ordre* $\leqslant m$ *se prolonge en un seul opérateur différentiel* d_S *d'ordre* $\leqslant m$ *de* B *dans* C. *De plus, pour tout* $a \in A$, *on a :*

$$ad(a).d_S = (ad(a).d)_S .$$

On en déduit que $H_{diff}(B,C) = H_{diff}(A,C)$. Si A est une algèbre de polynômes, on peut appliquer § 1 et affirmer que $H^n_{diff}(B,C)$ est dans ce cas isomorphe au B-module des multidérivations alternées de B^n dans C. Par exemple, si $B = C = K(x_1,\ldots,x_h)$, $H^n_{diff}(B,B)$ est un B-module libre de dimension finie $\binom{h}{n}$.

Nous démontrerons les deux assertions du théorème 3 par récurrence sur m. Le cas m = 0 est trivial. Soit $d : A \to C$ un opérateur d'ordre $\leqslant m$ $(m \geqslant 1)$, les assertions étant admises pour l'entier m-1. Soit D un opérateur de B dans C d'ordre $\leqslant m$ prolongeant d. Comme pour tout $a \in A$, $ad(a).D$ et $(ad(a).d)_S$ coïncident sur A, ils coïncident aussi sur B d'après l'hypothèse de récurrence. D'autre part, pour $a \in A$ et $s \in S$, on a :

$$D(\frac{a}{s}) = \frac{1}{s}\,(ad(s).D(\frac{a}{s}) + D(a)),$$

ce qui peut s'écrire :

$$D(\frac{a}{s}) = \frac{1}{s}\,((ad(s).d)_S(\frac{a}{s}) + d(a)), \tag{20}$$

d'où l'unicité de D. Définissons alors $d_S(\frac{a}{s})$ par le 2ème membre de (20). On vérifie aisément que cet élément ne dépend pas du choix du représentant $\frac{a}{s}$ et que l'application d_S est K-linéaire. Il reste à voir que pour tout $b \in B$, $ad(b).d_S$ est un opérateur d'ordre $\leqslant$ m-1 de B dans C. Or ceci est vrai quand $b \in A$, puisqu'on vérifie (en utilisant l'hypothèse de récurrence sur l'égalité) que $ad(b).d_S = (ad(b).d)_S$ dans ce cas. On passe au cas général $b = \frac{a}{s}$ grâce à la formule suivante :

$$ad(\frac{a}{s}).d_S(x) = \frac{1}{s}(ad(a).d_S(x) - ad(s).d_S(\frac{ax}{s}))$$

valable pour $x \in B$. Le théorème 3 ainsi obtenu étend un résultat bien connu pour les dérivations.

2.2. On se place ici dans les hypothèses suivantes : K est un anneau noethérien, $A = K[x_1,\dots,x_h]$ et $\mathfrak{a}$ un idéal propre de A . Tout opérateur différentiel de A dans un A-module C est ipso facto continu pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique. En réalité, nous montrerons la propriété d'équicontinuité suivante : quels que soient les entiers m et n, l'opérateur $f : A \to C$ d'ordre $\leqslant m$ et z dans $\mathfrak{a}^{m+n}$, f(z) appartient à $\mathfrak{a}^n.C$. Comme f s'écrit $\sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha.\Delta^\alpha$, il nous suffira de montrer l'implication :

$$(|\alpha| \leqslant m \quad \text{et} \quad z \in \mathfrak{a}^{m+n}) \Rightarrow \Delta^\alpha(z) \in \mathfrak{a}^n.$$

On raisonne par récurrence sur m, le cas m = o étant trivial. Soit α tel que $|\alpha| = m \geqslant 1$, l'implication étant vraie pour m-1. On fait alors une récurrence sur n, le cas n = 0 étant aussi trivial. En supposant la propriété vraie pour le multi-indice α choisi et pour l'entier n-1, considérons $a_1,\dots,a_{m+n}$ des éléments de $\mathfrak{a}$. La formule de Leibniz (5) donne :

$$\Delta^\alpha(a_1\dots a_{m+n}) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \Delta^\beta(a_1)\Delta^\gamma(a_2\dots a_{m+n}).$$

L'hypothèse de récurrence faite sur m (resp. sur n) indique que $\Delta^\gamma(a_2\dots a_{m+n}) \in \mathfrak{a}^n$ si $\gamma \neq \alpha$ (resp. $\Delta^\alpha(a_2\dots a_{m+n}) \in \mathfrak{a}^{n-1}$) c.q.f.d.

Ceci étant fait, on a le théorème de prolongement suivant :

THEOREME 4. - *Sous les hypothèses énoncées plus haut, soient* B *le complété de* A *pour la topologie* $\mathfrak{a}$*-adique et* C *un* B*-module. Tout opérateur différentiel* $d : A \to C$ *d'ordre* $\leqslant m$ *se prolonge en un seul opérateur différentiel* $\hat{d} : B \to C$ *d'ordre* $\leqslant m$ *. De plus, pour tout* $a \in A$ *, on a :* $ad(a).\hat{d} = \widehat{ad(a).d}$.

On a les mêmes remarques qu'après le th. 3. On obtient ainsi $H_{diff}(B,C)$ pour $B = K[[x_1,\dots,x_h]]$, ou pour $B = K((x_1,\dots,x_h))$ en réappliquant le théorème 3.

Avant le théorème 4, prouvons que tout opérateur $f : B \to C$ d'ordre $\leqslant m$ est continu pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique. Il suffit d'utiliser la propriété d'équicontinuité pour remarquer que, quels que soient $z \in \mathfrak{a}^{m+n}$ et $b \in B$, l'élément

$$f(z.b) = b.f(z) - ad(b).f(z)$$

appartient à $\mathfrak{a}^n.C$. Montrons alors le théorème 4 par récurrence sur m. Soit $d : A \to C$ d'ordre $\leqslant m$. Ce que l'on vient de voir indique qu'il ne peut y avoir qu'un seul prolongement de d. Prenons donc pour $\hat{d}$ le prolongement K-linéaire continu de d à B. Les deux applications K-linéaires continues $ad(a).\hat{d}$ et $\widehat{ad(a).d}$ $(a \in A)$ coïncident sur A, donc sur B ; par suite, $ad(a).\hat{d}$ est un opérateur d'ordre $\leqslant m-1$ de B dans C. Cette dernière propriété équivaut à dire que, quels que soient $b_1,\dots,b_m$, b dans B, on a :

$$ad(b_1)\dots ad(b_m).ad(a).\hat{d}(b) = 0.$$

Le prolongement des identités permet de remplacer a par n'importe quel b_{m+1} de B, ce qui prouve que $\hat{d}$ est bien un opérateur d'ordre $\leqslant m$.

3. Extension aux variétés analytiques ou différentielles.

3.1. Soit K un corps valué complet non discret.

Considérons V un ouvert non vide de K^h, B l'algèbre des fonctions analytiques (ou C^∞ selon le cas) sur V et le B-module $C = B^N$ $(N \geqslant 1)$. Si A désigne l'algèbre des fonctions polynômes sur K^h, le morphisme de restriction de A dans B définit des morphismes $\rho^n : Dif(B^n,C) \to Dif(A^n,C)$, lesquels forment un morphisme de complexes ρ. La description usuelle des opérateurs multidifférentiels sur V [4] montre que ρ est un isomorphisme. Les résultats de 1.3 fournissent alors un isomorphisme explicite de $H_{diff}(B,C)$ sur le B-module des multidérivations alternées, en associant à la classe d'un cocycle f l'antisymétrisé $a(f)$ de f.

3.2. Soient M une variété analytique sur K (ou différentielle suivant le cas choisi) localement de dimension finie, et F un fibré vectoriel de rang fini de base M. Les opérateurs multidifférentiels sur M à valeurs dans F seront pris ici dans le sens le plus général, à savoir qu'un tel opérateur est entièrement déterminé par ses actions locales ; en particulier, l'ordre maximum de différentiation (qui est bien défini localement) peut ne pas être borné sur M. Pour le cobord de Hochschild, ces opérateurs forment un complexe dont la cohomologie est notée $H_{diff}(M,F)$.

En se plaçant sur un ouvert de carte trivialisant F et utilisant 3.1, on voit que pour tout cocycle f, $a(f)$ est une multidérivation alternée sur M. De façon évidente, on a ainsi un morphisme τ de $H_{diff}(M,F)$ dans le module $\mathrm{Der}_{\wedge}(M,F)$ des multidérivations alternées sur M. Si le corps K est de caractéristique nulle, τ est surjectif, car toute n-dérivation alternée f sur M est l'image de la classe de $\frac{1}{n\,!} f$.

3.3 <u>THEOREME 5</u>. - *Si* $K = \mathbb{R}$ *et si* M *est une variété différentielle paracompacte,* τ *est un isomorphisme de* $H_{diff}(M,F)$ *sur* $\mathrm{Der}_{\wedge}(M,F)$.

Cela résulte du lemme suivant :

<u>LEMME</u>. - *Dans les hypothèses du théorème 5, soit* f *un cocycle différentiel sur* M *tel que tout point de* M *a un voisinage ouvert* U *sur lequel* $f|_U$ *est un cobord différentiel. Il existe alors une cochaine différentielle* g *sur* M *telle que* $f = \partial g$ *. En outre, si* f *est d'ordre borné sur* M *(ou seulement sur un ouvert), on peut choisir* g *d'ordre borné sur* M *(sur cet ouvert).*

<u>PREUVE</u>. Soit (U_j) un recouvrement localement fini de M composé d'ouverts de cartes trivialisant F, et soit (θ_j) une partition de l'unité C^{∞} subordonnée à ce re-

recouvrement. Pour chaque j, il existe une cochaine g_j différentielle sur U_j telle que $f|_{U_j} = \partial g_j$. La somme $\sum_j \theta_j\, g_j$ définit une cochaine différentielle g sur M telle que $f = \partial g$. D'où le théorème. La deuxième assertion du lemme vient de ce qui a été vu en 1.7 : si f est un n-cocycle ($n \geqslant 2$) et si chaque $f|_{U_j}$ est d'ordre $\leqslant m$, on peut choisir g_j d'ordre $\leqslant mn$. Ceci montre que la cohomologie du sous-complexe des cochaines différentielles d'ordre borné sur M (ou seulement sur un ouvert) est encore obtenue comme dans le théorème 5. Dans le cas où F est le fibré trivial $M \times \mathbb{R}$, $\mathrm{Der}_\wedge(M,F)$ s'identifie au module des tenseurs contravariants antisymétriques sur M, et on retrouve les résultats de [2] , § 2.

Références.

[1] VEY J., *Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique,* Comment. Math. Helvet. 50, 421 (1975).

[2] CAHEN M., GUTT S., DE WILDE M., *Local cohomology of the algebra of C^∞ functions on a connected manifold,* Lett. in Math. Phy. 4, 157-167 (1980).

[3] CARTAN H., EILENBERG S., *Homological algebra,* Princeton.

[4] BOURBAKI N., *Variétés différentielles et analytiques,* § 8 à 15, Hermann (1971).

****