PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. DERIGHETTI

# À propos des convoluteurs d'un groupe quotient

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1982, fascicule 4B
« Journées d'analyse harmonique », , p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___4B_A8_0>

# A PROPOS DES CONVOLUTEURS D'UN GROUPE QUOTIENT

par A. DERIGHETTI

(Université de Lausanne)

Soient G un groupe localement compact et H un sous-groupe fermé de G normal dans G. On sait que $T_H f(\dot{x}) = \int_H f(xh)\, dh$ définit une contraction de $L^1(G)$ sur $L^1(G/H)$, qui admet un prolongement naturel, noté encore $T_H$, du Banach $M^1(G)$, espace des mesures de Radon bornées sur G, sur $M^1(G/H)$. De plus, $M^1(G/H)$ est isométrique au quotient de $M^1(G)$ par le noyau de $T_H$.

Soient $1 < p < \infty$ et $CV_p(G)$ les p-convoluteurs de $L^p(G)$; $M^1(G)$ s'identifie de façon naturelle à un sous-espace de $CV_p(G)$. Si G est moyennable et H normal dans G, M. Anker a construit [1] une contraction R de $CV_p(G)$ dans $CV_p(G/H)$ qui sur les convoluteurs associés à des mesures coïncide avec $T_H$.

Nous commençons par apporter un additif concernant cette application R.

THEOREME 1. - *Supposons* G *abélien. Pour tout* $T \in CV_p(G)$ *dont la transformée de Fourier* $\hat{T}$ *est uniformément continue sur* $\hat{G}$ $R(T)^\wedge$ *coïncide localement presque partout sur* $H^\perp = \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(H) = \{1\}\}$ *avec la restriction de* $\hat{T}$ *à* $H^\perp$.

REMARQUE. - Ce résultat a été obtenu en collaboration avec M. Anker (cf. aussi [1]).

Si f est définie sur G $a, x \in G$ on pose ${}_a f(x) = f(ax)$ et $\check{f}(x) = f(x^{-1})$. Pour tout $k \in L^p(G)$ $\ell \in L^{p'}(G)$ la relation $(M_{k,\ell}(T)\phi, \psi) = \int_G dt(T\phi_{t^{-1}}(\check{k}), \psi_{t^{-1}}(\ell))dt$ avec $T \in CV_p(G)$, $\phi \in L^p(G)$, $\psi \in L^{p'}(G)$ définit un p-convoluteur de G dont la norme satisfait à la condition $|||\, M_{k,\ell}(T)\, |||_p < |||\, T\, |||_p \|k\|_p \|\ell\|_{p'}$ .

Si G est moyennable, T est limite faible, avec contrôle des normes, d'opérateurs du type $M_{k,\ell}(T)$. Au surplus, $M_{k,\ell}(T)$ est dans l'adhérence normique dans $CV_p(G)$ de l'ensemble des convoluteurs à support compact. Notons cet espace $cv_p(G)$.

Soient $\beta$ une fonction de Bruhat associée à la paire (H,G), $k \in L^p(G)$ et $\ell \in L^{p'}(G)$ $(1 < p < \infty\ ,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$. La relation

$$(\Omega_{k,\ell}(T)\phi,\psi) = \int_G dt(T\ T_H[\phi\ _{t^{-1}}(\check{k}\ \beta^{1/p'})]\ ,\ T_H[\psi\ _{t^{-1}}(\check{\ell}\beta^{1/p})])\ ,$$

où $T \in CV_p(G)$, $\phi \in L^p(G)$ $\psi \in L^{p'}(G)$ définit un convoluteur $\Omega_{k,\ell}(T)$ de G. On a en fait $\Omega_{k,\ell}(T) \in cv_p(G)$.

THEOREME 2. - *Supposons* G *moyennable et* H *sous-groupe fermé de* G *normal dans* G. *Pour tout* $K \in L^p(G)$ *et* $\ell \in L^{p'}(G)$, *on a* $R\circ\Omega_{k,\ell} = M_{k,\ell}$ *avec*

$$\dot{\check{k}} = \Delta_{G/H}^{1/p}\ T_H(\check{\Delta}_G^{1/p}\ \check{k}\ \beta^{1/p'}) \quad \textit{et} \quad \dot{\check{\ell}} = \Delta_{G/H}^{1/p'}\ T_H\ (\check{\Delta}_G^{1/p'}\ \check{\ell}\ \beta^{1/p}).$$

COROLLAIRE. - *Supposons en outre* G/H *compact. On a* $R(\Omega_{k,\ell}(T)) = T$ *pour tout* $T \in CV_p(G/H)$ *, où* $\check{k} = (\Delta_G\beta)^{1/p}$ *et* $\check{\ell} = (\Delta_G\ \beta)^{1/p'}$ ; $\Omega_{k,\ell}$ *est une isométrie de* $CV_p(G/H)$ *dans* $cv_p(G)$.

REMARQUE. - Si G est de plus abélien, on retrouve un résultat de Figà-Talamanca et Gaudry [2] et de N. Lohoué [3].

EXEMPLE. - Le Banach $cv_p(T)$ est isométrique, par une application explicite, au quotient de $cv_p(M(2))$, où M(2) est le groupe des déplacements de plan, par le noyau de R dans $cv_p(M(2))$.

THEOREME 3. - *Supposons* G *moyennable et* H *sous-groupe fermé de* G *normal dans* G, *Alors* $cv_p(G/H)$ *est isométrique au quotient de* $cv_p(G)$ *par le noyau de* R *dans* $cv_p(G)$ .

EXEMPLE. Le Banach $cv_p(\mathbb{R}^\times)$ est isométrique à un quotient de $cv_p(G)$, où G est le groupe affine de $\mathbb{R}$.

REMARQUE. - Les preuves des résultats contenus dans ce texte feront l'objet d'une publication séparée.

BIBLIOGRAPHIE.


[1] J. PH. ANKER, *Aspects de la* p-*induction en Analyse Harmonique,* Thèse, Lausanne 1982.

[2] A. FIGA-TALAMANCA, G.I. AUDRY, *Extensions of Multipliers,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) 3, 1003-1014 (1970).

[3] N. LOHOUE, *Algèbres* $A_p(G)$ *et convoluteurs de* $L^p(G)$, Thèse, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1971.


**********