PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. CAILLEZ

J. OBERDOERFFER

Sous-groupes paraboliques des groupes classiques et séries complémentaires

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 4B « Journées d'analyse harmonique », , p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___4B_A6_0>

SOUS-GROUPES PARABOLIQUES DES GROUPES CLASSIQUES ET SERIES COMPLEMENTAIRES

par J. CAILLEZ et J. OBERDOERFFER
(Université de Nancy-1)

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan. Pour $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$, on note T un système fondamental de racines de ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$). Pour toute partie $\Theta \subset \Gamma$, on peut construire un sous-groupe parabolique standard (cf. Warner) $B_\Theta = M_\Theta A_\Theta N_\Theta^+$. Le but de ce travail est de construire des séries complémentaires à l'aide des sous-groupes paraboliques B_Θ non maximaux. Nous avons utilisé trois méthodes :

a) La méthode semi-explicite découverte par Stein dans son célèbre papier sur $SL(2n,\mathbb{C})$. Nous l'avons testée avec succès sur $SU^*(4) \approx SL(2,\mathbb{H})$ et même sur $SU^*(4n)$ $n > 1$ (avec des calculs fastidieux).

Une variante s'adapte au cas de $SO(2n,\mathbb{C})$.

L'idée est de ramener l'analyse harmonique sur l'espace considéré $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ pour $SU^*(4n)$, et les matrices antisymétriques complexes $n \times n$ pour $SO(2n,\mathbb{C})$) à celle d'un groupe ($GL(n,\mathbb{H})$ pour $SU^*(4n)$ et $SO(n,\mathbb{C})$ pour $SO(2n,\mathbb{C})$) où l'on peut utiliser la mesure de Plancherel.

Cette méthode peut aussi être reliée à la technique préhomogène de Sato et Shintani, ce que Stein avait remarqué déjà auparavant.

b) La méthode de Gelfand, où on construit un produit scalaire en se servant de produits scalaires connus (notamment pour $SL(2,\mathbb{R})$ et $SL(E,\mathbb{C})$) pour les parties réductives des paraboliques B_Θ .

c) La méthode de Kunze et Stein, et Knapp et Stein, où on exhibe un opérateur d'entrelacement pour exprimer le produit scalaire à l'aide d'un noyau de convolution.

Les méthodes b) et c) nécessitent la connaissance explicite des parties réductives des B_Θ .

Après étude des sous-groupes B_Θ pour tous les groupes linéaires classiques, on peut conserver essentiellement trois situations :

(1) $M_\Theta = G(\Theta)$ semi-simple.

(2) $M_\Theta = Z(M_\Theta)G(\Theta)$ $Z(M_\Theta)$ étant le centre de M_Θ .

(3) $M_\Theta = Z_\Theta G(O)$ où Z_Θ est un groupe à deux éléments, le produit étant semi-direct ($G(\Theta)$ distingué).

Pour b), connaissant une série complémentaire classique de $G(\Theta)$, on en déduit une série complémentaire pour M_Θ (en utilisant éventuellement la technique de Clifford dans le cas (3)), on prend un caractère unitaire de A_Θ , on forme une représentation de B_Θ et on induit à G. Le résultat est une série complémentaire classique pour G, le produit scalaire s'exprimant en fonction de celui de $G(\Theta)$ par intégration. Lorsque G est de rang 2 on peut utiliser le critère de Bruhat pour les séries complémentaires, et lorsqu'en outre B_Θ est maximal, ce critère peut être un peu amélioré. Cela permet de construire des séries complémentaires irréductibles pour G lorsque G est de rang 2, et $G(\Theta)$ de rang 1.

La méthode c) sera utilisée pour construire des séries dégénérées complémentaires. Lorsque $G(\Theta)$ est simple non compact, on formera une représentation de B_Θ en prenant la représentation triviale de $G(\Theta)$, un caractère unitaire de Z_Θ dans le cas (3) (resp. le caractère trivial de $Z(M_\Theta)$ dans le cas (2)), un caractère non nécessairement unitaire τ de A_Θ) avec $\tau(a_\Theta) = a_\Theta^\lambda$ λ à valeurs complexes, et on induira à G. Lorsque le caractère τ est unitaire, on tombe sur les séries dégénérées unitaires, au sens de Bruhat, et le critère de Bruhat s'applique, admettant un raffinement lorsque B_Θ est maximal.

On peut construire, comme dans la méthode classique de Knapp et Stein, un opérateur entrelaçant les séries dégénérées correspondant à λ et $-\lambda$. La condition de convergence absolue de l'opérateur fait apparaître des intégrales souvent calculables par la méthode de Hua ; il y a convergence absolue pour $\mathrm{Re}\lambda$ assez grand. Cet opérateur peut être écrit explicitement dans les trois réalisations, induite, non compacte, compacte. Nous l'avons calculé pour certains B_Θ maximaux pour la plupart des groupes classiques.

Cette méthode est particulièrement bien adaptée pour les groupes du type $SU(n,n;\mathbb{F})$ où $\mathbb{F} = \mathbb{R},\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ ainsi définis :

$$\{g \in SL(2n;\mathbb{F}) \ ; \ f^*I_{n,n}g = I_{n,n}\} \quad \text{avec} \quad I_{n,n} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} .$$

La réalisation compacte donne lieu à un noyau de convolution central, défini sur $SO(n)$, $U(s)$, $Sp(n)$ suivant les cas, associé à l'opérateur d'entrelacement.

L'étude de cet opérateur se fera au moyen d'un développement suivant les caractères du groupe compact envisagé, les coefficients apparaissant dans ce développement permettant à la fois de définir un prolongement méromorphe de l'opérateur d'entrelacement, ainsi que, pour des valeurs convenables du paramètre λ du noyau, un opérateur borné. Le calcul des coefficients se fait sur le tore maximal du groupe considéré, à partir de la forme explicite du caractère comme quotient de déterminants. Les cas réels et quaternioniens donnent lieu à des représentations de classe 1, le cas complexe, suivant la parité de n, fait apparaître une série complémentaire qui est de classe 1 ou pas. Dans ce dernier cas, pour la valeur du paramètre $\lambda = 0$ correspondant à la série continue dégénérée, il arrive que cette dernière soit réductible. On peut généraliser aux groupes $SU(p,q;\mathbb{F})$ $(q>p)$ et donner une forme explicite de l'opérateur d'entrelacement, en particulier on retrouve les résultats pour $SO_o(1,n)$ (cf. Takahashi).

******