JEAN BRACONNIER

3 - Algèbres de Lie graduées

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 1C
« Eléments d'algèbre différentielle graduée », , p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___1C_A3_0>

3 - ALGEBRES DE LIE GRADUEES

Dans tout ce qui suit, on désigne par ε un facteur de commutation sur un groupe commutatif Δ.

(3.1) DEFINITIONS ET PROPRIETES GENERALES.

(3.1.1) Soit $\mathfrak{g}$ un K-module Δ-gradué, muni d'une application K-bilinéaire $(x,x') \mapsto [x,x']$ de degré 0. On dit que $\mathfrak{g}$ est une *algèbre de Lie graduée, relativement à* ε si

(i) $[x,x''] = -\varepsilon(|x|,|x'|)\,[x',x]$,

(ii) $$\varepsilon(|x|,|x''|)\,[x,[x',x'']] + \varepsilon(|x'|,|x|)[x',[x'',x]] + \varepsilon(|x''|,|x'|)[x'',[x,x']] = 0 ,$$

quels que soient $x,x',x'' \in \mathfrak{g}$ homogènes (identité de Jacobi).

La condition (i) signifie que $(x,x') \mapsto [x,x']$ est une application ε-alternée.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie Δ-graduée, relativement à ε . $\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre de Lie (au sens usuel) de $\mathfrak{g}$.

Si $x \in \mathfrak{g}$, on désigne par $ad(x)$ l'application K-linéaire $x \mapsto [x,x']$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$: elle est homogène et de degré $|x|$, si x l'est.

L'identité de Jacobi s'écrit encore (compte tenu de (i)) :

$$ad(x)([x',x'']) = [ad(x)(x'),x''] + \varepsilon(|x|,|x'|)\,[x',ad(x)x''] .$$

On dit que $\mathfrak{g}$ est *commutative* si $[x,x'] = o$ quels que soient $x.x' \in \mathfrak{g}$.

Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $Ker(ad(x))$ est une sous-algèbre graduée de $\mathfrak{g}$;

$\bigcap_{x\in\mathfrak{g}} Ker(ad(x)) = \{x' \in \mathfrak{g} \quad \forall x \in \mathfrak{g}, [x,x'] = 0\}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, appelé *centre de* $\mathfrak{g}$ et noté $Z(\mathfrak{g})$.

EXEMPLES. - 1) Soit A une K-algèbre Δ-graduée et associative. On définit Sur A un produit K-bilinéaire $(x,x') \mapsto [x,x']_\varepsilon$ en posant

$$[x,x']_\varepsilon = xx' - \varepsilon(|x|,|x'|)x'x.$$

lorsque x et x' sont homogènes. A, muni de ce produit est une *algèbre de Lie Δ-graduée, relativement à* ε, notée A_ε (on écrit $[\ ,]$ au lieu de $[\ ,]_\varepsilon$ quand aucune confusion n'en résulte).

On notera que, si A est unifère, on a $1 \in A_o$ et $ad(1) = 0$.
Pour que A soit ε-commutative il faut et il suffit que A_ε le soit.

2) En particulier, si E est un K-module Δ-gradué, $Endgr_K(E)_\varepsilon$ est une K-algèbre de Lie Δ-graduée, rel.à ε, notée encore $\mathfrak{gl}_\varepsilon(E)$ (cf.(1.3)).

3) Soit A une K-algèbre Δ-graduée et ε-commutative ; $Der_E(A)$ est une sous-algèbre de Lie graduée de $\mathfrak{gl}_\varepsilon(A)$; de même, $Dif_1(A)$ et $Dif(A)$.

4) Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ des K-algèbres de Lie, Δ-graduées (rel. à ε) On définit sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ une structure d'algèbre de Lie Δ-graduées en posant $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h})_i = \sum_{j+k=i} \mathfrak{g}_j \times \mathfrak{h}_k$ $(i \in \Delta)$ et

$$[(x,y'),(x',y')] = \varepsilon(|x'|,|y|)([x,x'],[y,y']).$$

si $x' \in \mathfrak{g}$ et $y \in \mathfrak{h}$ sont homogènes.

(3.1.2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie Δ-graduée, relativement à ε. On note $\mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre Δ-graduée de $\mathfrak{gl}_\varepsilon(\mathfrak{g})$. Et $x \mapsto ad(x)$ est un morphisme $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$, car l'identité de Jacobi s'écrit encore

$$ad([x,x']) = [ad(x),ad(x')]_\varepsilon .$$

Pour tout $c \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$ et tout $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$[c,ad(x)]_{\varepsilon} = ad(c(x)).$$

REMARQUE. - Soit A une K-algèbre Δ-graduée, associative et unifère ; on a $Der_{\varepsilon}(A) \subset \mathfrak{Der}(A_{\varepsilon})$ et $ad(x)_{\varepsilon} \in Der_{\varepsilon}(A)$ pour tout $x \in A$.

(3.1.3) Soit $\mathfrak{g}$ une K-algèbre de Lie Δ-graduée, rel. à ε. Soit E un K-module Δ-gradué ; on dit qu'un morphisme de K-algèbres de Lie Δ-graduées (rel. à ε) $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\varepsilon}(E)$ est une *représentation* de $\mathfrak{g}$ dans E ; et on dit encore que E, muni de l'application $(x,y) \mapsto \pi(x)y$ de $\mathfrak{g} \times E$ dans E, est un $\mathfrak{g}$-module ; pour qu'une application linéaire $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\varepsilon}(E)$ soit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans E, il faut et il suffit qu'elle soit de degré o et que, pour $x,x' \in \mathfrak{g}$ homogène, on ait

$$\pi([x,x']) = \pi(x)\pi(x') - \varepsilon(|x|,|x'|)\pi(x')\pi(x)$$

ou

$$\pi.ad(x) = ad(\pi(x)) \qquad (x \in \mathfrak{g}).$$

$Ker(\pi)$ est alors un idéal de $\mathfrak{g}$.

Si $y \in E$ est tel que $\pi(x)y = 0$ pour tout $x \in y$, on dit que y est *invariant par* π ; ces éléments forment un sous-module gradué $E^{\mathfrak{g}}$ de E.

Soit E un K-module, Δ-gradué trivialement ; $Endgr_K(E) = End_K(E)$ est aussi gradué trivialement ; si π est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans E, on a $\pi(\mathfrak{g}_i) = \{o\}$ pour tout $i \in \Delta - \{0\}$ et $\pi|\mathfrak{g}_o$ est une représentation (au sens usuel) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_o$ dans E.

Soit ρ (resp. σ) une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un K-module E (resp. F) et soit $u \in Homgr_K(E,F)$; on dit que u est un *morphisme* de ρ dans σ (ou que u entralace ρ et σ) si $u\rho(x) = \sigma(x)u$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Les morphismes de ρ dans σ forment un sous-module de $Homgr_K(E,F)$.

(3.1.4) Soit ρ (resp. σ) une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un K-module Δ-gradué E (resp. F). Pour $x \in \mathfrak{g}$ et $u \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$ homogènes on pose

$$\pi(x)u = \sigma(x).u - \varepsilon(|x|,|u|)u.\rho(x) ;$$

on définit ainsi, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, un endomorphisme gradué $\pi(x)$ de $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$,

PROPOSITION. - *π est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans* $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$.

En effet, si $x.x' \in \mathfrak{g}$ sont homogènes, on a

$$\pi(x)\pi(x')u = \sigma(x)\sigma(x')u - \varepsilon(|x'|,|u|)\sigma(x)u\rho(x') \\ - \varepsilon(|x|,|x'|)(\varepsilon(|x|,|u|)\sigma(x')u\rho(x) + \varepsilon(|x|+|x'|,|u|)\ u\rho(x)\rho(x')) ;$$

d'où le résultat .

Posons $\pi'(x) = \sim(\pi(x))$; si $x \in \mathfrak{g}$ et $y \in E$ sont homogènes, on a

$\pi'(u)\omega(y) = \varepsilon(|x|,|y|)(\sigma(x)(u(y))-u(\rho(x)y))$.

PROPOSITION. - *π' est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans* E.

En effet, pour $x,x' \in A$ et $y \in E$ homogènes, on a
$(\pi'([x,x'])u)(y) = \sim(\pi([x,x'])u)(y) = \varepsilon(|x|+|x'|,|y|)(\pi(x)\pi(x')u(y)$
$- \varepsilon(|x|,|x'|)\pi(x')\pi(x)u(y))$
et $\pi(\pi'(x)'\pi'(x')u')(y) = \sim(\pi(x)\pi(x')\tilde{u})(y)$
$= \varepsilon(|x|+|x'|,|y|)\pi(x)\pi(x')u(y)$.

En permutant x et x', on voit que

$$\pi'([x,x']) = [\pi'(x),\pi'(x')] .$$

Pour que u entrelace ρ et σ, il faut et il suffit que $\pi'(x)u = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

(3.2) L'ALGEBRE ENVELOPPANTE D'UNE ALGEBRE DE LIE GRADUEE.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, Δ-graduée (relativement à ε).

(3.2.1) Soit L l'idéal bilatère de $T_K(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $x \otimes x' - \varepsilon'(|x|,|x'|)x' \otimes x - [x,x']$ ($x,x' \in \mathfrak{g}$ homogènes).

On note $U(\mathfrak{g})$ la K-algèbre Δ-graduée $T_K(\mathfrak{g})/L$ qu'on appelle *algèbre enveloppante* de $\mathfrak{g}$.

Soit $T_K^+(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{p>o} T_K(\mathfrak{g})$; comme $T_K(\mathfrak{g}) = K\,1 \oplus T_K^+(\mathfrak{g})$ et $L \subset T_K^+(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{g}) = K\,1 \oplus U^+(\mathfrak{g})$, où $U^+(\mathfrak{g}) = T_K^+(\mathfrak{g})/L$ est un idéal bilatère Δ-gradué de $U(\mathfrak{g})$. Soit σ l'application canonique de $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})$; comme $\mathfrak{g} \cap L = \{o\}$ et $\mathfrak{g} \subset T_K^+(\mathfrak{g})$ σ est injective et $U^+(\mathfrak{g})$ est l'idéal engendré par $\sigma(\mathfrak{g})$. Enfin, on a $\sigma([x,x']) = \sigma(x)\sigma(x') - \varepsilon(|x|,|x'|)\sigma(x')\sigma(x)$ pour $x,x' \in \mathfrak{g}$ homogènes ; σ est un morphisme d'algèbre de Lie Δ-graduées de $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})_\varepsilon$.

Si $\mathfrak{g}$ est commutative, $U(\mathfrak{g})$ est une algèbre Δ-graduée, ε-*commutative*. En particulier, si E est un K-module Δ-gradué, considéré comme algèbre de Lie (rel. à ε) commutative, l'algèbre U(E) se note $S_K^\varepsilon(E)$ et est appelée *l'algèbre symétrique de* E (rel. à ε) ;

$$S_K^\varepsilon(E) = K\,1 \oplus E \oplus \bigoplus_{p\geq 2} \pi_K^p(E)/(J \cap T_K^p(E)) \text{ est } Z\times\Delta\text{-graduée.}$$

(3.2.2) PROPOSITION. - *Soit* A *une algèbre* Δ-*graduée, associative et unifère ; Pour tout morphisme d'algèbres de Lie* Δ-*graduées* $u : \mathfrak{g} \to A_\varepsilon$, *il existe un morphisme d'algèbres* Δ-*graduées unique* $u' : U(\mathfrak{g}) \to A$ *tel que* $u'.\sigma = u$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "K"'] & A_\varepsilon \arrow[d, equal] \\ U(\mathfrak{g}) \arrow[r, "u'"'] & A \end{tikzcd}$$

En effet, il existe un unique morphisme d'algèbres Δ)graduées $v : T_K(\mathfrak{g}) \to A$ qui prolonge l'application K-linéaire u ; si $x,x' \in \mathfrak{g}$ sont homogènes, on a $v(x \otimes x' - \varepsilon(|x|,|x'|)x' \otimes x = [x,x']) = u(x)u(x') - \varepsilon(|x|,|x'|)u(x')u(x) - u([x,x']) = o$; donc $L \subset \mathrm{Ker}(v)$ et v définit, par passage au quotient un morphisme d'algèbres graduées $u' : U(\mathfrak{g}) \to A$ tel que $u'.\sigma = u$. L'unicité de u' est évidente.

En particulier, si π est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un K-module Δ-gradué E, il existe un unique morphisme d'algèbres Δ-graduées $\pi' : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_K(E)$ tel que $\pi'.\sigma = \pi$. Autrement dit, E, muni de $z.y = \pi'(z).y (z \in U(\mathfrak{g}), y \in E)$, est un $U(\mathfrak{g})$ module Δ-gradué. Inversement, soit E un $U(\mathfrak{g})$-module Δ-gradué ;

en posant $\pi(x)(y) = \sigma(x)y$ $(x \in \mathfrak{g}, y \in E)$, on définit une représentation dans E.

Soient π(resp. π') une représentation de $\mathfrak{g}$ dans E (resp. E'). Si $u \in \mathrm{Homgr}_K(E,E')$ entrelace π et π', u est une application $U(\mathfrak{g})$-linéaire de E dans E'.

De même, si $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un morphisme d'algèbre de Lie Δ-graduées (rel. à ε), il existe un unique morphisme d'algèbres $U' : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}')$ tel que $\sigma'u = u'.\sigma$ (σ' étant l'application canonique de $\mathfrak{g}'$ dans $U(\mathfrak{g}')$).

(3.2.3) Soit p un entier $\geqslant 0$ et $U_p(\mathfrak{g})$ l'image de $\bigoplus_{q \leqslant p} T_K^q(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})$; $U_p(\mathfrak{g})$ est un sous-module Δ-gradué de $U(\mathfrak{g})$; on a $U_o(\mathfrak{g}) = K\,1$ et l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ est filtrée par $(U_p(\mathfrak{g}))_{p \geqslant o}$. Soit $gr(U(\mathfrak{g})) = K\,1 \oplus \bigoplus_{p>o} (U_p(\mathfrak{g})/U_{p-1}(\mathfrak{g}))$;

$gr(U(\mathfrak{g}))$ est canoniquement une K-algèbre (associative et unifère) $\mathbb{Z} \times \Delta$ - graduée.

Soit ϕ_p l'application composée $T_K^p(\mathfrak{g}) \to U_p(\mathfrak{g}) \to U_p(\mathfrak{g})/U_{p-1}(\mathfrak{g})$; ϕ_p est surjective et $\phi = \bigoplus_p \phi_p$ est un K-morphisme d'algèbres $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduées de $T_k(\mathfrak{g})$ dans $gr(U(\mathfrak{g}))$.

ϕ est nul dans l'idéal bilatère de $T_K(\mathfrak{g})$ engendré par les $x \otimes x' - \varepsilon(|x|,|x'|)x' \otimes x$ ($x,x' \in \mathfrak{g}$ homogènes).

En effet, on a $x \otimes x' - \varepsilon(|x|,|x'|))x' \otimes x \in T_K^2(\mathfrak{g})$ et l'image de cet élément dans $U_2(\mathfrak{g})$ est $[x,y] \in U_1(\mathfrak{g})$. Par suite, ϕ définit un morphisme de K-algèbres $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduées de $S_K(\mathfrak{g})$ dans $gr(U(\mathfrak{g}))$ qui est surjectif. D'où :

PROPOSITION. - $gr(U(\mathfrak{g}))$ *est une algèbre* $\mathbb{Z} \times \Delta$-*graduée*, ε-*commutative*.

(3.2.4) PROPOSITION. - *Soit* $c \in Der(\mathfrak{g})$; *il existe une unique* ε-*dérivation* c_ε *de* $U(\mathfrak{g})$ *telle que* $c_\varepsilon.\sigma = \sigma.c$.

LEMME. - *Soit* E *un* K-*module* Δ-*gradué. Pour tout* $u \in Endgr_K(E)$, *il existe une unique* ε-*dérivation* u' de $T_K(E)$ *prolongeant* u.

On peut supposer u homogène ;

$(x_1,\ldots,x_o) \mapsto \sum_i \varepsilon(|x|,|x_1|+\ldots+|x_{i-1}|)x_1 \otimes\ldots\otimes u(x_i)\otimes\ldots\otimes x_p$ définit une application K-multilinéaire de degré (u) de E^p dans $T_K^p(E)$, d'où un endomorphisme u^p de $T_K^p(E)$, de degré $|u|$ et un endomorphisme $u' = \bigoplus_p u^p$ de $T_K(E)$ prolongeant u et tel que

$u'(x_1\otimes\ldots\otimes x_p) = \sum_i \varepsilon(|u|,|x_1|+\ldots+|x_{i-1}|)x_1\otimes\ldots\otimes u(x_i)\otimes\ldots\otimes x_p$, si $x_1,\ldots,x_p \in E$ sont homogènes. Si $x_1,\ldots,x_p,x'_1,\ldots,x'_q \in E$ sont homogènes, on a

$$u'((x_1\otimes\ldots\otimes x_p)\otimes(x'_1\otimes\ldots\otimes x'_q)) =$$

$$\sum_{i=1}^{p} \varepsilon(|u|,|x_1|+\ldots+|x_{i-1}|)x_1\otimes\ldots\otimes u_1(x_1)\otimes\ldots\otimes x_p\otimes x'_1\otimes\ldots\otimes x'_q$$

$$+ \varepsilon(|u|,|x_1|+\ldots+|x_p|)\sum_{q=1}^{q} \varepsilon(|c|,|x'_1|+\ldots+|x'_{j-1}|)x_1\otimes\ldots\otimes x_p\otimes x'_1\otimes\ldots\otimes u(x'_j)\otimes\ldots\otimes x'_q .$$

Donc

$$u'(z \otimes z') = u'(z)\otimes z' + \varepsilon(|u|,|z|)z \otimes u'(z)), \text{ pour } z,z'\in T_K(E) \text{ homogènes.}$$

Soit alors $c \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ et c' la dérivation de $T(\mathfrak{g})$ définie au moyen du lemme. Si $x,x' \in \mathfrak{g}$ sont homogènes, on a

$$c'(x\otimes x' - \varepsilon(|x|,|x'|)x' \otimes x - [x,x']) =$$
$$c(x)\otimes x' + \varepsilon(|c|,|x|)x \otimes c(x') - \varepsilon(|x|,|x'|)c(x') \otimes x - \varepsilon(|c|+|x|,|x'|)x' \otimes c(x)$$
$$-[c(x),x'] - \varepsilon(|c|,|x|)[x,c(x')]$$
$$= c(x) \otimes x' - \varepsilon(|c|+|x|,|x'|)x' \otimes c(x) - [c(x),x'] - \varepsilon(|x|,|x'|)(c(x')\otimes x)$$
$$- \varepsilon(|c|+|x'|,|x|)x \otimes c(x') - [c(x'),x]) \in L.$$

Par passage au quotient, c définit une ε-dérivation c_ε de $U(\mathfrak{g})$ telle que $c_\varepsilon.\sigma = \sigma c$ et c_ε est évidemment unique.

De plus, si $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$\mathrm{ad}(x)_\varepsilon = \mathrm{ad}(\sigma(x))_\varepsilon .$$

En effet, on a pour $x',x' \in \mathfrak{g}$ homogènes,

$$\mathrm{ad}(\sigma(x))_\varepsilon(\sigma(x')) = \sigma(x)\sigma(x') - \varepsilon(|x|,|x'|)\sigma(x')\sigma(x)$$
$$= \sigma([x,x']) = \sigma(\mathrm{ad}(x).x')$$

(3.3) COHOMOLOGIE DES ALGEBRES DE LIE GRADUEES.

(3.3.1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie Δ-graduée, relativement à un facteur de commutation ε sur Δ . $\Lambda^{\varepsilon}_K(\mathfrak{g})$ (encore noté $\Lambda_K(\mathfrak{g})$ est une K-algèbre $\mathbb{Z}\times\Delta$ - graduée, $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-commutative

Soit E un K-module Δ-gradué (on considère E comme $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué, avec $E_i^{0} = E_i$ et $E_i^p = \{0\}$ si $p \neq o$ et $i \in \Delta$) ; On note $C(\mathfrak{g},E)$ le K-module $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(\mathfrak{g}),E) = \bigoplus_p C^p(\mathfrak{g},E)$, où $C^p(\mathfrak{g},E) = \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_k^p(\mathfrak{g}),E)$; on a $C^\circ(\mathfrak{g},E) = E$ et $C^1(\mathfrak{g},E) = \mathrm{Homgr}_K(\mathfrak{g},E)$.

On note simplement $C(\mathfrak{g})$ le module $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué $C(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$.

Soit p un entier $\geqslant o$. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ homogène, $(x_1,\dots,x_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \varepsilon(|x|,|x_1|+\dots+|x_{i-1}|)\, x_1\wedge\dots\wedge[x,x_i]\wedge\dots\wedge x_p$ définit une application K-multilinéaire et ε-arternée de $\mathfrak{g}^p$ dans $\Lambda^p(\mathfrak{g})$ qui s'identifie à un endomorphisme $\mathrm{ad}^p(x)$ de degré $|x|$ de $\Lambda_k^p(\mathfrak{g})$. D'où, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, un élément $\mathrm{ad}^p(x) \in \mathfrak{gl}_\varepsilon(\Lambda_k^p(\mathfrak{g}))$ et, comme on le voit facilement, ad^p est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\Lambda_k^p(\mathfrak{g})$; ceci définit une représentation encore notée ad, de $\mathfrak{g}$ dans $\Lambda_k(\mathfrak{g})$, qui prolonge la représentation ad de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$.

(3.3.2) Ceci étant, soit π une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un K-module Δ-gradué E ; si on pose, pour $x \in \mathfrak{g}$ et $c \in C^p(\mathfrak{g},E)$ homogènes,

$$\vartheta(x)c = \pi(x).c - \varepsilon(|x|,|c|)\, c.\mathrm{ad}^p(x),$$

on définit une *représentation* ϑ de $\mathfrak{g}$ *dans* $C^p(\mathfrak{g},E)$, donc dans $C(\mathfrak{g},E)$ (cf. (3.1.4)) ; on a donc, si $x \in \mathfrak{g}$, $c \in C^p(\mathfrak{g},E)$ et $x_1,\dots,x_p \in \mathfrak{g}$ sont homogènes, $(\vartheta(x)c)(x_1\wedge\dots\wedge x_p) = \pi(x)c(x_1\wedge\dots\wedge x_p)$
$- \varepsilon(|x|,|c|) \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \varepsilon(|x_i|,|x_1|+\dots+|x_{i-1}|)c([x,x_i]\wedge\dots\wedge\check{x}_i\wedge\dots\wedge x_p)$.

Et en posant $\theta(x) = \sim\vartheta(x)\sim$, on définit une seconde représentation de dans $C(\mathfrak{g},E)$; avec les notations précédentes, on a

$$(\theta(x)c)(x_1\wedge\dots\wedge x_p) = \varepsilon(|x|,|x_1|+\dots+|x_p|)\,(\pi(x)c(x_1)\dots x_p)$$
$$- \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \varepsilon(|x_i|,|x_1|+\dots+|x_{i-1}|)c([x,x_i]\wedge\dots\wedge\check{x}_i\wedge\dots\wedge x_p)).$$

En particulier si $\pi = \mathrm{ad}$, on définit ainsi des *représentations* ϑ et θ *de* $\mathfrak{g}$ *dans* $C(\mathfrak{g})$.

Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $j(x)$ et $i(x)$ sont des applications K-linéaires graduées de $C^p(\mathfrak{g},E)$ dans $C^{p-1}(\mathfrak{g},E)$, donc des endomorphismes gradués de $C(\mathfrak{g},E)$ homogènes et et de degré $(-1\ |x|)$ si x est homogène.

PROPOSITION. - *Pour* $x, x' \in \mathfrak{g}$, *on a dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{gl}^{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}(C(\mathfrak{g},E))$

$$[j(x),j(x')]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = 0 ,$$
$$[\vartheta(x),j(x')]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = j([x,x'])$$

(formules de E. Cartan).

Si x et x' sont homogènes, on a

$$[j(x),j(x')]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = j(x)j(x') + \varepsilon(|x|,|x'|)j(x)\ j(x),$$
$$[\vartheta(x),j(x')]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = \vartheta(x)j(x') - \varepsilon(|x|,|x'|)j(x')\vartheta(x).$$

Soit $c \in C^p(\mathfrak{g},E)$).

On a

$$j(x)j(x')c(z) = \varepsilon(|x|,|x'|)c(x \wedge x' \wedge z)$$

$(z \in C^{p-2}(\mathfrak{g},E))$; d'où la première formule.

D'autre part, on a $(\vartheta(x)j(x')c)(x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) = \varepsilon(|c|,|x'|)\pi(x)c(x' \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p)$
$- \varepsilon(|c|,|x| + |x'|) \sum_{i=2}^{p} \varepsilon(|x|,|x_2|+\ldots+|x_p|)c(x' \wedge \ldots \wedge [x,x_i] \wedge \ldots \wedge x_p)$

et

$(j(x')\vartheta(x)c)\ (x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) = \varepsilon(|x|+|c|,|x'|)(\pi(x)c(x' \wedge \ldots \wedge x_p)$
$- \ \varepsilon(|x|,|x'|)c([x,x'] \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p))$
$- \ \varepsilon(|c|+|x'|,|x|) \sum_{j=2}^{p} \varepsilon(|x|,|x_2|+\ldots+|x_p|)c(x' \wedge \ldots \wedge [x,x_i] \wedge \ldots \wedge x_p)$.

D'où le résultat.

(3.3.3) PROPOSITION. - *Il existe un unique endomorphisme* ∂ de $C(\mathfrak{g},E)$ *de degré* $(1,0)$ *et tel que :*

$$\vartheta(x) = [\ \partial,j(x)]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

Cette relation s'écrit, si $x \in \mathfrak{g}$ et $c \in C^p(\mathfrak{g}, E)$ sont homogènes

(1) $\partial c(x \wedge z) = \varepsilon(|c|,|x|)(v(x)c)(z) - (\partial j(x)c)(z))$ $(z \in \Lambda_K^{p-1}(\mathfrak{g}))$.

Posons alors, pour $y \in E = C^\circ(\mathfrak{g}, E)$,

(2) $\partial^\circ y(x) = \varepsilon(|x|,|y|)\, \pi(x) y$.

$x \in \mathfrak{g}$ homogène. Ceci définit un élément de $\mathrm{Homgr}_K(E, C^1(\mathfrak{g}, E))$. Et la formule (1) permet de définir, par récurrence sur p, un élément $\partial^p \in \mathrm{Homgr}_K(C^p(\mathfrak{g}, E), C^{p+1}(\mathfrak{g}, E))$; d'où ∂ vérifiant la proposition.

Si $d = \sim\partial\sim$, d *est l'unique endomorphisme de degré* (1,0) de $C(\mathfrak{g}, E)$ *tel que* $\theta(x) = [d, i(x)]_\varepsilon$ *pour tout* $x \in \mathfrak{g}$

On a, si $c \in C^p(\mathfrak{g}, E)$ et si $x_1, \ldots, x_{p+1} \in \mathfrak{g}$ sont homogènes,

$$(\partial c)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+1}) = \sum_i (-1)^{i-1} \varepsilon(|x_i|, |c| + |x_1| + \ldots + |x_{i-1}|)$$

$$\pi(x_i) c(x_1 \wedge \ldots \wedge \check{x}_i \wedge \ldots \wedge x_{p+1}) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \varepsilon(|x_i|,|x_j|)\varepsilon(|x_i|, |x_1| + \ldots + |x_{i-1}|)$$

$$\varepsilon(|x_j|, |x_1| + \ldots + |x_{j-1}|)\ c([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge \check{x}_i \wedge \ldots \wedge \check{x}_j \wedge \ldots \wedge x_{p+1})$$

et

$$(dc)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+1}) = \sum_i (-1)^{i-1} \varepsilon(|x_i|, |x_1| + \ldots + |x_{i-1}|)\pi(x_i) c(x_1 \wedge \ldots \wedge \check{x}_i \wedge \ldots \wedge x_p)$$
$$+ c'(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+1}),$$

c' étant le second terme du second membre de la formule précédente.

En particulier, si $y \in E$ et $x \in \mathfrak{g}$,

$$\partial y(x) = \varepsilon(|x|,|y|)\, \pi(x) y = \widetilde{\pi(x)} y,$$
$$dy(x) = \Pi(x) y ;$$

et, si $\pi = \mathrm{ad}$,

$$\partial x = -\mathrm{ad}(x),$$
$$dx = -\widetilde{\mathrm{ad}}(x).$$

(3.3.4) PROPOSITION. - *On a, si* $x \in A$, $[\vartheta(x), \partial]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = 0$ *et* $\partial^2 = 0$.

L'identité de Jacobi dans $\mathfrak{gl}^{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}(C(\mathfrak{g},E))$ et les formules de Cartan montrent que, si $x,x' \in A$ sont homogènes, on a

$$[j(x'),[\vartheta(x),\partial]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = \varepsilon(|x|,|x'|)[\vartheta(x),[\partial,j(x')]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} + [\partial,[j(x'),\vartheta(x)]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}$$

$$= -\varepsilon(|x|,|x'|)\,[\partial,j[x,x']]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = 0.$$

Donc $\qquad j(x')\,[\vartheta(x),\partial]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = -\,\varepsilon(|x|,|x'|)\,[\vartheta(x),\partial]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}\,j(x').$

Comme, pour $y \in E$, on a $\vartheta(x)\,(\partial y) = \partial(\vartheta(x)y)$, on en déduit par récurrence, que $[\partial(x),\partial]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

Par suite, on a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

$$\partial^2 j(x) = \partial\, v(x) - \partial\, j(x)\partial = j(x)\partial^2 .$$

Comme pour $y \in E$, on a $\partial^2 y = 0$, on en déduit que $\partial^2 = 0$.

COROLLAIRE. - *On a , si* $x \in \mathfrak{g}$,

$$[\theta(x),d]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = 0$$

et $\qquad d^2 = 0.$

(3.3.5) Ainsi $(C(\mathfrak{g},E),\partial)$ est un complexe de K-modules Δ-gradués : on note $\mathfrak{h}(\mathfrak{g},E)$ (ou $\mathfrak{h}(\pi)$) le K-module $Z \times \Delta$-gradué de cohomologie qu'il définit, qu'on appelle la *cohomologie de la représentation* π. De même $(C(\mathfrak{g},E),d)$ est un complexe de K-modules gradués et $\sim$ est un isomorphisme involutif de $(C(\mathfrak{g},E),\partial)$ sur $(C(\mathfrak{g},E),d)$, qui induit un isomorphisme involutif de $\mathfrak{h}(\mathfrak{g},E)$ sur le module de cohomologie de $(C(\mathfrak{g},E),\partial)$. On note $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ la cohomologie de la représentation ad de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, dite *cohomologie de* $\mathfrak{g}$.

On a $\mathfrak{h}^{\circ}(\mathfrak{g},E) = E^{\mathfrak{g}}$; en particulier $\mathfrak{h}^{\circ}(\mathfrak{g})$ est le centre $Z(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$.

On a $\mathrm{Ker}(\partial) \cap C^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$ et $\mathrm{Im}(\mathfrak{g}) \cap C^1(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$; donc $\mathfrak{h}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})/\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.

(3.3.6) Soit toujours π une représentation de $\mathfrak{g}$ dans E. En appliquant ce qui est dit dans (1.2.1) à $(x,x') \mapsto [x,x']$, on obtient une application K-bilinéaire de degré 0 de $C(\mathfrak{g}) \times C(\mathfrak{g})$ dans $C(\mathfrak{g})$, notée encore [,] et définie par

$$[c,c'](x_I) = \sum_{\substack{H\subset I\\ \mathrm{Card}(H)=p}} \rho(H;H')\varepsilon(|x_H|,|x_{H'}|)\varepsilon(|c'|,|x_H|)\,[c(x_H),c'(x_{H'})]$$

$(I = \{1,p+q\}, c \in C^p(\mathfrak{g}), c' \in C^q(\mathfrak{g}), x_1,\dots,x_{p+q} \in \mathfrak{g}$ homogènes).

Pour $x \in \mathfrak{g}$, $c \in C^p(\mathfrak{g})$ et $z \in \Lambda^p_K(\mathfrak{g})$, on a

$$[x,c](z) = [x,c(z)] \ .$$

PROPOSITION. - $C(\mathfrak{g})$ *, muni de* $[\ ,\ ]$ *est une* K*-algèbre de Lie* $\mathbb{Z} \times \Delta$ *graduée, relativement à* $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ *, dont* $\mathfrak{g}$ *est une sous-algèbre, Et* $\vartheta(x)$, $j(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ *et* ∂ *sont des dérivations de* $C(\mathfrak{g})$.

La vérification est de pure routine.

Ker(∂) est donc une sous-algèbre de Lie graduée de $C(\mathfrak{g})$ et Im(∂) un idéal gradué de cette sous-algèbre. Par suite, $[\ ,\ ]$ induit une application K-bilinéaire graduée sur $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$, encore notée $[\ ,\ ]$, et $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$, muni de cette opération, est une K-algèbre de Lie Z $\times$ Δ-graduée (rel. à $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$).

Plus généralement, soit π une représentation de $\mathfrak{g}$ dans E. En procédant comme ci-dessus pour $(x,y) \mapsto \pi(x)y$, on définit une application bilinéaire $(c,c') \mapsto \pi(c)c'$ de $C(\mathfrak{g}) \times C(\mathfrak{g},E)$ dans $C(\mathfrak{g},E)$ telle que π soit une *représentation de* $C(\mathfrak{g})$ *dans le module* $\mathbb{Z} \times \Delta$*-gradué* $C(\mathfrak{g},E)$.

Et on a

$$\partial(\pi(c)c') = \pi(\partial c)c' + (-1)^{\deg(c)}\,\pi(c)\,\partial c' \ .$$

La représentation π induit donc une représentation, notée encore $\mathfrak{h}(\pi)$, de $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ dans le K-module $\mathbb{Z} \times \Delta$-gradué $\mathfrak{h}(\mathfrak{g},E)$.

(3.3.7) Soient A une K-algèbre Δ-graduée, associative et unifère et E un A-module Δ-gradué. Soit γ la représentation de l'algèbre de Lie A_ε dans E définie par définie par $\gamma(x)y = xy$ $(x \in A, y \in E)$.

Si $x \in A_\varepsilon$ et $c \in C(A_\varepsilon,E)$, on a

$$j(1)c(z) = c(1 \wedge z) \qquad (z \in \Lambda_K(A)) \ ,$$

$$\vartheta(1) = 1_{C(A_\varepsilon,E)} \ ;$$

donc $[\partial,j(1)]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = 1_{C(A_\varepsilon,E)}$. Ainsi $i(1_E)$ est une homotopie reliant $1_{C(A_\varepsilon,E)}$ à 0.

D'où:

PROPOSITION. - $\mathfrak{h}(A_\varepsilon,E) = 0$.

En particulier, soit E un K-module Δ-gradué. E est un $\mathrm{End}_K(E)$-module, γ est le morphisme $1_{\mathfrak{gl}_\varepsilon(E)}$ et $h(\mathfrak{gl}_\varepsilon(E),E) = 0$.

(3.3.8) Soit A une K-algèbre Δ-graduée, ε-commutative. Der(A) est une K-algèbre de Lie, Δ-graduée, relativement à ε.

On note $\Phi(A)$ le A-module $\mathbb{Z} \times \Delta$-gradué $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(\mathrm{Der}(A)),A)$. Le A-module (à droite) $\Phi(A)$ est le dual gradué du A-module (à gauche) $\mathbb{Z}$-gradué $\Lambda_A(\mathrm{Der}(A))$. On dit que les éléments de $\Phi(A)$ sont les *formes différentielles* (extérieures) sur A ; si $\alpha \in \Phi(A)$ et $Z \in \Lambda_A(\mathrm{Der}(A))$, on note $\langle Z,\alpha\rangle$ la valeur $\alpha(Z) \in A$.

Le morphisme canonique $\Lambda_K(\mathrm{Der}(A)) \to \Lambda_A(\mathrm{Der}(A))$ étant surjectif, l'application canonique $\Phi(A) \to C(\mathrm{Der}(A),A)$ est injective, ce qui permet d'identifier $\Phi(A)$ à un sous K-module $\mathbb{Z} \times \Delta$-gradué de $C(\mathrm{Der}(A),A)$.

On considère la représentation de Der(A) dans A définie par l'inclusion $\mathrm{Der}(A) \subset \mathfrak{gl}_\varepsilon(A)$.

LEMME. - *Soit* $X \in \mathrm{Der}(A)$. *Pour tout* $\alpha \in \Phi(A)$, $i(X)\alpha$ *et* $\theta(X)\alpha$ *sont des éléments de* $\Phi(A)$.

Il faut montrer que $i(X)\alpha$ et $\theta(X)\alpha$ sont ε-multilinéaires ; et il suffit pour cela, de voir que, si $\alpha \in \Phi(A)^p$ et si $X_2,\dots,X_p \in \mathrm{Der}(A)$, $X_1 \mapsto (i(X)\alpha)(X_1\wedge\dots\wedge X_{p-1})$ et $X_1 \mapsto (\theta(x)\alpha)(X_1\wedge\dots\wedge X_p)$ sont A-linéaires. Or on a

$$i(X)\alpha(X_1\wedge\dots\wedge X_{p-1}) = \varepsilon(|X|,|X_1|+\dots+|X_{p-1}|)\alpha(X\wedge X_1\wedge\dots\wedge X_{p-1}) \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} i(X)\alpha(xX_1\wedge\dots\wedge X_{p-1}) &= \varepsilon(|X|,|x|+|X_1|+\dots+|X_{p-1}|)\,\alpha(X\wedge xX_1\wedge\dots\wedge X_{p-1}) \\ &= x\ i(X)\alpha(X_1\wedge\dots\wedge X_{p-1}). \end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned} \theta(X)\alpha(X_1\wedge\dots\wedge X_p) = {} & \varepsilon(|X|,\sum_i|X_i|)(X.\alpha(X_1\wedge\dots\wedge X_p)-\alpha([X,X_1]\wedge X_2\wedge\dots\wedge X_p)) \\ & + \beta(X,X_1,\dots,X_p) \end{aligned}$$

où $X_1 \mapsto \beta(X,X_1,\dots,X_p)$ est A-linéaire.

Or on a

$$X.d(xX_1\wedge\ldots\wedge X_p) - \alpha([X,xX_1]\wedge\ldots\wedge X_p) =$$
$$\varepsilon(|X|,|x|)x(X.\alpha(X_1\wedge\ldots\wedge X_p) - \alpha([X,X_1]\wedge\ldots\wedge X_p)) ;$$

d'où le résultat.

Comme $\theta(X) = [d,i(X)]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}$ pour tout $X \in \mathrm{Der}(A)$, on voit, par récurrence sur $\deg(\alpha)$, le résultat suivant.

PROPOSITION. - *Si* $\alpha \in \Phi(A)$, *on a* $d\alpha \in \Phi(A)$.

On a ainsi, pour $\alpha \in \Phi(A)^p$ homogène, et pour $X,X_1,\ldots,X_{p+1} \in \mathrm{Der}(A)$ homogèhes,

$$\langle X_1 \ldots X_{p-1}, i(X)\alpha\rangle = \varepsilon(|X|,|X_1|+\ldots+|X_{p-1}|)\ \langle X\wedge X_1\wedge\ldots\wedge X_{p-1},\alpha\rangle ,$$

$$\langle X_1\wedge\ldots\wedge X_p,\theta(X)\alpha\rangle = \varepsilon(|X|,|X_1|+\ldots+|X_p|)(X\langle X_1\wedge\ldots\wedge X_p,\alpha\rangle$$
$$- \sum_i (-1)^{i-1}\varepsilon(|X_i|,|X_1|+\ldots+|X_{i-1}|)\ \langle [X,X_i]\wedge X_1\wedge\ldots\wedge\check{X}_i\wedge\ldots\wedge X_p,\alpha\rangle),$$

et $\langle X_1\wedge\ldots\wedge X_{p+1},d\alpha\rangle = \sum_i(-1)^{i-1}\varepsilon(|X_i|,|X_1|+\ldots+|X_{i-1}|)\langle X\wedge\ldots\wedge\check{X}_i\wedge\ldots\wedge X_p,\alpha\rangle$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\varepsilon(|X_i|,|X_1|+\ldots+|X_{i-1}|)\varepsilon(|X_j|,|X_1|+\ldots+|X_{j-1}|)\varepsilon(|X_i|,|X_j|)$$
$$\langle [X_i,X_j]\wedge X_1\wedge\ldots\wedge\check{X}_i\wedge\ldots\wedge\check{X}_j\wedge\ldots\wedge X_p,\alpha\rangle .$$

Ainsi $(\Phi(A),d)$ est un complexe de K-modules Δ-gradués, dit encore, par abus de langage, complexe de de Rham de A (cf. (2.1.6)). On note $H(\phi(A)) = \mathrm{Ker}(d)/\mathrm{Im}(d)$ le K-module $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué de cohomologie de ce complexe.

(3.3.9) Soit A comme ci-dessus. $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(\mathrm{Der}(A)),A) = C(\mathrm{Der}(A),A)$ est une K-algèbre $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduée, $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-commutative. Il est clair que $\Phi(A)$ est une *sous-algèbre* $\mathbb{Z}\times\Delta$*-graduée* de celle-ci.

PROPOSITION. - $i(X),\theta(X)$ $(X \in \mathrm{Der}(A))$ *et* d *sont des dérivations de* $\Phi(A)$, *homogènes de degrés respectifs* $(-1,|X|)$, $(0,|X|)$ *(si* X *est homogène) et* $(1,0)$.

Pour i(X), c'est conséquence de (1.3.2). Pour montrer que, si X est homogène et si $\alpha,\alpha' \in D(A)$ sont homogènes, on a

$\theta(X)(\alpha\wedge\alpha') = (\theta(X)\alpha)\wedge\alpha' + \varepsilon(|X|,|\alpha|)\alpha\wedge(\theta(X)\alpha')$, il suffit de faire un calcul de routine. Enfin, à l'aide de $[d,i(X)]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = \theta(X)$, on montre que, par récurrence sur deg(c), l'on a $d(\alpha\wedge\alpha') = d\alpha\wedge\alpha' + (-1)^{\deg(\alpha)}\alpha\wedge(d\alpha')$.

On dit que $\theta(X)$ est la *dérivation de Lie associée à* $X \in \mathrm{Der}(A)$.

Par suite Ker(d) est une sous-algèbre graduée de $\Phi(A)$ et Im(d) un idéal gradué de cette sous-algèbre. Pour le produit induit par $\wedge$, $H(\Phi(A))$ est une K-algèbre $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduée, $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-commutative.

(2.3.10). Soit E un A-module $\mathbb{Z}\times\Delta$ -gradué ; notons E^{*gr} (resp. $E^{\sim *gr}$) le A-module à droite (resp. à gauche) $(\mathrm{Homgr}_A(E,A)$ (resp. $\mathrm{Homgr}_A(\tilde{E},\tilde{A}))$; $\sim$ est un isomorphisme de A-module de E^{*gr} sur $E^{\sim *gr}$; on note $\langle y,y^*\rangle$ (resp. $\langle y^*,y\rangle$) la valeur en $y \in E$ de $y^* \in E^{*gr}$ (resp. $E^{\sim *gr}$).

(3.3.10) Soit ϕ l'application A-linéaire canonique de $\Omega(A)$ dans $\Omega(A)^{\sim *gr\ *gr} = \mathrm{Der}(A)^{*gr}$, définie par $\langle X,\phi(\alpha)\rangle = \langle X,\alpha\rangle$ ($\alpha \in \Omega(A), X \in \mathrm{Der}(A)$) (i.e. $\langle X,\phi(x)\rangle = X(x)$ $(x \in A)$). Comme $\Phi(A) = A \oplus \mathrm{Der}(A)^{*gr} \oplus \ldots$ est une A-algèbre , $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduée, $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-commutative (pour $\wedge$), il existe un unique morphisme de A-algèbres de $\Lambda_A(\Omega(A))$ dans $\Phi(A)$ prolongeant ϕ (cf. (1.1.9)) ; on le note encore ϕ. On vérifie alors que ϕ est un morphisme du complexe de de Rham $(\Lambda_A(\Omega(A)),d)$ dans le complexe $(\Phi(A),d)$; d'où un morphisme $H(\phi)$ d'algèbres $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduées de $H_{dR}(A)$ dans $H(\Phi(A))$.

REMARQUE. - L'application identique de $\mathrm{Der}(A) = \Omega(A)^{\sim *gr}$ dans $(\Lambda_A(\Omega(A)))^{\sim *gr}$ se prolonge (cf. (1.1.9)) en un morphisme ψ de A-algèbres de $\Lambda_A(\mathrm{Der}(A))$ dans $(\Lambda_A(\Omega(A))^{\sim *gr}$ (muni du produit $\lrcorner$) ; on a alors $\langle\psi(Z),\alpha\rangle = \langle Z,\phi(\alpha)\rangle$ si $Z \in \Lambda_A(\mathrm{Der}(A))$ et $\alpha \in \Lambda_A(\Omega(A))$.

(3.3.11) Soit E un A-module Δ-gradué. On pose $\Phi(A,E) = \mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(\mathrm{Der}(A),E)$; on dit que un élément du A-module $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué $\Phi(A,E)$ est une *forme différentielle* sur A *à valeurs dans* E. En appliquant ce qui est dit en (1.2.3), on définit sur $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda(\mathrm{Der}(A)),E)$ une structure de $\Phi(A)$ - module gradué, pour le produit $\wedge$.

Soit $\nabla^\circ : E \to \mathrm{Homgr}_A(\mathrm{Der}(A),E)$ $(= \phi(A,E)^1)$ une application K-linéaire, de degré o et telle que

(1) $$\nabla^\circ(xy)X = X(x)y + \varepsilon(|X|,|x|)x\nabla^\circ(y)(X)$$

pour $x \in A$, $X \in \mathrm{Der}(A)$ homogènes et $y \in E$; il revient au même de se donner une application $X \mapsto \nabla_X$ de $\mathrm{Der}(A)$ dans $\mathrm{Endgr}_K(E)$, A-linéaire, de degré o et telle que

$$\nabla_X(xy) = X(x)y + \varepsilon(|X|,|x|)x\nabla_X(y).$$

pour $x \in A$, $y \in E$ et $X \in \mathrm{Der}(A)$ comme ci-dessus ; on dit que ∇° est une <u>connexion</u> sur E (cette définition est distincte de celle donnée en (2.1.7)).

Soit ∇° une connexion sur E. Pour $X \in \mathrm{Der}(A)$ et pour $\omega \in \phi(A,E)^p$, on désigne pour $\theta(X)\omega$ l'élément de $\Phi(A,E)^p$ défini par

(2) $$(\theta(X)\omega)(W_1\wedge\ldots\wedge X_p) = \varepsilon(|X|,|X_1|+\ldots+|X_p|)\,(\nabla_X(\omega(X_1\wedge\ldots\wedge X_p))$$
$$- \sum_i (-1)^{i-1}\,\varepsilon(|X|,|X_1|+\ldots+|X_{i-1}|))\,\omega\,([X,X_i]\wedge X_1\wedge\ldots\wedge\check{X}_i\wedge\ldots\wedge X_p))$$

($X_i \in \mathrm{Der}(A)$ homogènes).

En particulier, pour $p = 1$ et $\omega \in \mathrm{Homgr}_A(\mathrm{Der}(A,E))$, on a $(\theta(X)\omega)(Y) = \varepsilon(|X|,|Y|)\,(\nabla_X(\omega(Y)) - \omega([X,Y])$. Pour $X \in \mathrm{Der}(A)$, on définit ainsi un endomorphisme du K-module $\mathbb{Z} \times \Delta$-gradué $\phi(A,E)$, de degré $(0,|X|)$ si X est homogène, et on vérifie, comme en (3.3.2), que

(3) $$[\theta(X),i(X')]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = i([X,X'])$$

si $X,X' \in \mathrm{Der}(A)$.

PROPOSITION. - *Il existe un unique endomorphisme* ∇ *de degré* $(1,0)$ *de* $\phi(A,E)$ *tel que*

(4) $$\theta(X) = [\nabla,i(X)]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}.$$

pour $X \in \mathrm{Der}(A)$.

La démonstration est analogue à celle de (3.3.3).

∇ <u>prolonge</u> ∇° et, plus généralement, on a, pour $\omega \in \phi(A,E)^p$ et $X_1,\ldots,X_{p+1} \in \mathrm{Der}(A)$ homogènes,

(5) $(\nabla\omega)(X_1\wedge\ldots\wedge X_{p+1}) = \sum_i (-1)^{i-1}\varepsilon(|X_i|,|X_1|+\ldots+|X_{i-1}|)\ \nabla_{X_i}\ \omega(X_1\wedge\ldots\wedge\check{X}_i\wedge\ldots\wedge X_p)$

$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\varepsilon(|X_1|,|X_1|+\ldots+|X_{i-1}|)\varepsilon(|X_j|,|X_1|+\ldots+|X_{j-1}|)\ \varepsilon(|X_i|,|X_j|)$

$$\omega([X_i,X_j]\wedge X_1\wedge\ldots\wedge\check{X}_i\wedge\ldots\wedge\check{X}_j\wedge\ldots\wedge X_{p+1}).$$

En particulier, on a, si $\omega \in \mathrm{Homgr}_A(\mathrm{Der}(A),E)$.

$$(\nabla\omega)(X_1\ X_2) = \nabla_{X_1}(\omega(X_2))-\varepsilon(|X_1|,|X_2|)\ \nabla_{X_2}(\omega(X_1)) - \omega([X_1,X_2])\ ;$$

d'où, pour $y \in E$, $\nabla\nabla^\circ(y)(X_1\ X_2) = \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}(y)-\varepsilon(|X_1|,|X_2|)\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}(y) - \nabla_{[X_1,X_2]}(y)$

$= ([\nabla_{X_1},\nabla_{X_2}]_\varepsilon - \nabla_{[X_1,X_2]_\varepsilon})(y).$

Il en résulte aisément que l'application $R = \nabla\nabla^\circ :\ E \to \phi(A,E)^2$ est A-linéaire. On dit que R est la <u>courbure</u> de la connexion ∇°.

(3.3.12) On utilise les notations précédentes. Soient ∇°une connexion sur E et Θ et ∇ définis comme en (3.3.11).

PROPOSITION. - *On a (avec les notations de (3.3.8)),*

$$\Theta(X)\ (\alpha\wedge\omega) = (\Theta(X\ \alpha)\ \ \omega + \varepsilon(|X|,|\alpha|)\ \alpha\wedge(\Theta(x)\omega)$$

et $\nabla(\alpha\wedge\omega)(Z) = (d\alpha\ \omega)(Z) + (-1)^{\deg(\alpha)}\ \varepsilon(|\alpha|,|Z|)(\alpha\wedge(\nabla\omega))(Z)$ *pour* $X \in \mathrm{Der}(A)$, $Z \in \Lambda_A(\mathrm{Der}(A))$, $\alpha \in \Phi(A)$ *homogènes et* $\omega \in \Phi(A,E)$.

La première formule est conséquence d'un calcul de routine . La seconde se prouve alors comme en (3.3.9).

En appliquant deuw fois cette dernière formule, on obtient :

<u>COROLLAIRE</u>. - ∇^2 *est une application* $\Phi(A)$*-linéaire de* $\Phi(A,E)$ *dans lui-même.*

En particulier, on a

$$\nabla^2(\alpha y) = \alpha\wedge R(y)$$

pour $\alpha \in \Phi(A)$ et $y \in E$.

D'autre part, on démontre, comme en (3.3.4), que

$$[\Theta\ (X),\nabla]_{\varepsilon_{\mathbf{Z}}} = 0 \qquad (X \in \mathrm{Der}(A)).$$

Il en résulte, d'après la formule (4) de (3.3.11), que

$$\nabla^2 i(X) = \nabla\Theta(X)-\nabla i(X)\nabla = i(X)\nabla^2 .$$

Par récurrence, ceci montre que si $R = 0$, c'est-à-dire si $X \mapsto \nabla_X$ est un morphisme d'algèbres de Lie Δ-graduées (relativement à ε), de Der(E) dans $\mathfrak{gl}^{\varepsilon}(E)$ on a $\nabla^2 = 0$; autrement dit, $(\Phi(A,E),\nabla)$ est alors un complexe de K-modules $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradués, d'où le K-module de cohomologie $H(\Phi(A,E))$; la proposition précédente montre que le produit $\wedge$ induit une application $H(\Phi(A)) \times H(\Phi(A,E)) \to H(\Phi(A,E))$ qui définit sur $H(\Phi(A,E))$ une structure de $H(\Phi(A))$-module $Z\times\Delta$-gradué.

(3.3.13). Soit E un A-module Δ-gradué $\mathrm{Homgr}_A(\mathrm{Der}(A),E)$ est un A-module à gauche pour la loi définie par $(x.\omega)(X) = \varepsilon(|x|,|x|)x\omega(x)$; soit ϕ_E l'application A-linéaire de $\Omega(A) \underset{A}{\otimes} E$ dans $\mathrm{Homgr}_A(\mathrm{Der}(A),E)$ définie par

$\phi_E(\alpha \otimes y)(x) = \langle\alpha ,x\rangle y$ $(\alpha \in \Omega(A),\ x \in \mathrm{Der}(A), y \in E)$.

Soit $\nabla°$ une connexion sur E, au sens de (2.1.7) ; en posant $\nabla'° = \phi.\nabla°$, on vérifie immédiatement que $\nabla'°$ est une connexion sur E au sens de (3.3.11). On prolonge ϕ_E en une application A-linéaire $\phi_E : \Lambda_A(\Omega(A)) \underset{A}{\otimes} E$ dans $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(\mathrm{Der}(A)),E)$ en posant $\phi_E(\alpha \otimes y)(z) = \phi_A(\alpha)(z)(y)$. On a alors $\nabla'\phi_E = \phi_E\nabla$, où ∇ et ∇' sont, respectivement, les prolongements de $\nabla°$ et $\nabla'°$ définis en (2.1.7) et (3.3.11). Etc.