PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN BRACONNIER

1 - Algèbres graduées

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 1C
« Eléments d'algèbre différentielle graduée », , p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___1C_A1_0>

1 - ALGEBRES GRADUEES

(1.1) DEFINITIONS ET PROPRIETES GENERALES.

Dans ce qui suit, on désigne par K un anneau commutatif dans lequel l'application $t \mapsto 2t$ est injective (par exemple, un corps de caractéristique $\neq 2$).

(1.1.1) Soit Δ un groupe abélien, noté additivement. Un *facteur de commutation* sur Δ est une application $\varepsilon : \Delta \times \Delta \to \{\pm 1\}$ $\mathbb{Z}$-bilinéaire et symétrique, c'est-à-dire telle que

$$\begin{cases} \varepsilon(i+i',j) = \varepsilon(i,j)\ \varepsilon(i',j), \\ \varepsilon(i,j) = \varepsilon(j,i) \quad (i,i',j \in \Delta). \end{cases}$$

EXEMPLES. -

a) $\varepsilon = 1$ est un facteur de commutation, dit *trivial*.

b) Soit $\Delta = \mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Si ε est un facteur de commutation, on a $\varepsilon(i,j) = \varepsilon(1,1)^{ij}$. Si $\varepsilon(1,1) = 1$, ε est trivial ; sinon ε, défini par $\varepsilon(i,j) = (-1)^{ij}$, est un facteur de commutation.

c) Soient Δ et Δ' des groupes abéliens et ε et ε' des facteurs de commutation sur Δ et Δ' respectivement ; $((i,i'),(j,j')) \mapsto \varepsilon(i,j)\ \varepsilon'(i',j')$ est un facteur de commutation sur $\Delta \times \Delta'$. En particulier, $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$, défini par $\varepsilon_{\mathbb{Z}}((p,i),(q,j)) = (-1)^{pq}\varepsilon(i,j)$, est un facteur de commutation sur $\mathbb{Z} \times \Delta$ (ou $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \Delta$).

Si ε est un facteur de commutation sur Δ, si $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ et si $i_1,\ldots,i_p \in \Delta$, on pose

$$\varepsilon_\sigma(i_1,\ldots,i_p) = \prod_{\substack{j<k \\ \sigma(k)<\sigma(j)}} \varepsilon(i_{\sigma(j)}, i_{\sigma(k)}).$$

On a $$\operatorname{sgn}(\sigma)\varepsilon_\sigma(i_1,\dots,i_p) = \prod_{\substack{j<k\\ \sigma(k)<\sigma(j)}} (-\varepsilon(i_{\sigma(j)},i_{\sigma(k)})) .$$

(1.1.2) Soit Δ un groupe abélien. Si $E = \bigoplus_{i\in\Delta} E_i$ est un K-module Δ-gradué (où les E_i sont des sous-K-modules de E) et si $y \in E_i - \{o\}$, on dit que y est homogène de degré $|y| = i$; et, si $E = \bigoplus_{(p,i)\in\mathbb{Z}\times\Delta} E_i^p$ est $\mathbb{Z}\times\Delta$ gradué, on note $(\deg(y),|y|) \in \mathbb{Z}\times\Delta$ le degré d'un élément homogène $y\in E$.

Soit $A = \bigoplus_{i\in\Delta} A_i$ une K-algèbre Δ-graduée (où les A_i sont des sous-K-modules tels que $A_i\, A_{i'} \subset A_{i+i'}$ $(i,i'\in\Delta)$).

Soit ε un facteur de commutation sur Δ. On dit que A est ε-*commutative* si :

(i) A est associative et unifère ;

(ii) $x'\,x = \varepsilon(|x|,|x'|)x\,x'$ si $x,x'\in A$ sont homogènes.

Si ε est trivial, une algèbre ε-comutative est simplement *une algèbre commutative*. Si A est une K-algèbre commutative, Δ-graduée trivialement ($A_o = A$, $A_i = \{0\}$ et $i\in\Delta-\{o\}$), A est ε-comutative pour tout facteur de commutation ε; ainsi K est une K-algèbre ε-commutative.

Soit A une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée (ou $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-graduée) ε-commutative $\varepsilon \neq 1$, on dit que A est une *algèbre alternée* (ou anticommutative).

EXEMPLES. -

1) Soit A une algèbre Δ-graduée, on note $\tilde{A}$ l'algèbre opposée de A (dont le produit est $x.x' = x'\,x$) ; si A est ε-commutative, $\tilde{A}$ l'est aussi.

2) Soit E un K-module ; l'*algèbre extérieure* $\Lambda_K(E) = \bigoplus_p \Lambda_K^p(E)$ (où $\Lambda_K^p(E)$ est la puissance extérieure p-ième de E) est $\mathbb{Z}$-graduée et alternée.

3) Soit, de plus, C une K-algèbre commutative. L'injection $C\otimes_K E \to C\otimes_K \Lambda_K(E)$ se prolonge en une application C-linéaire de $\Lambda_C(C\otimes_K E)$

dans $C \otimes_K (\Lambda_K(E)$ qui est un isomorphisme de C-algèbres Z-graduées (sa réciproque est l'application C-linéaire ϕ définie par
$\phi(f \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_p) = f\,(1 \otimes y_1) \wedge \ldots \wedge (1 \otimes y_p)$ $(y_i \in E))$.

$C \otimes_K \Lambda_K(E)$ est ainsi une C-algèbre alternée.

4) Soient A et A' des algèbres Δ-graduées, ε-commutatives. $A \otimes_K A'$, gradué par $(A \otimes_K A')_i = \bigoplus_{j+k=i} (A_j \otimes A'_k)$ et muni de produit K-bilinéaire défini par $(x \otimes x')(y \otimes y') = \varepsilon(|x'|,|y|)\,x\,y \otimes x'\,y'$ $(x,y \in A$ $x',y' \in A'$ homogènes), est une algèbre ε-commutative, notée $A \overset{\varepsilon}{\underset{K}{\otimes}} A'$

(1.1.3) Soient A une algèbre Δ-graduée, ε-commutative et E un A-module (à gauche) Δ-gradué. On définit une structure de A-module (à droite) sur E en posant

$$yx = \varepsilon(|x|,|y|)\ x\ y \quad (x \in A,\ y \in E \text{ homogènes})$$

et on note $\tilde{E}$ ce A-module à droite. E est un A-bimodule pour ces deux structures.

Soient E et F des K-modules Δ-gradués. Soit $i \in \Delta$ et
$D_i = \{u \in \mathrm{Hom}_K(E,F) \mid \forall j \in \Delta\ ,\ u(E_j) \subset F_{i+j}\}$;
$\mathrm{Homgr}_K(E,F) = \bigoplus_i D_i$ ($\subset \mathrm{Hom}_K(E,F)$) est un K-module gradué.

REMARQUE. - Lorsque E est un K-module $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué et F un K-module Δ-gradué, on munit F de la $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduation définie par $F_i^o = F_i$ et $F_i^p = o$ pour tout $p \neq o$ et pour tout $i \in \Delta$. On gradue $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$ par les H_i^{-p}, $(p,i) \in \mathbb{Z} \times \Delta$; H_i^{-p} est le sous-module des $u \in \mathrm{Hom}_K(E,F)$ tels que $u(E_j^p) \subset F_{i+j}$ et $u(E_j^q) = 0$ pour tout $q \neq p$ et tout $j \in \Delta$.

(Supposons $E_i^p = 0$ pour tout $p < o$ et tout $i \in \Delta$; on a $H_i^{-p} = 0$ pour tout $p > o$ et $i \in \Delta$ et, si $p < o$, H_i^{-p} s'identifie au sous-module des $u \in \mathrm{Homgr}(E_p, F)$ de degré i).

(1.1.4) Si $u \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$ est homogène, on définit $\tilde{u} \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$ en posant

$$\tilde{u}(y) = \varepsilon(|u|,|y|)\, u(y) \quad (y \in E \text{ homogène}).$$

On définit ainsi un K-isomorphisme involutif $u \mapsto \tilde{u}$ de K-modules gradués de $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$ sur lui-même.

(1.1.5) Supposons que F soit un A-module Δ-gradué. En posant

$$(1) \quad \begin{cases} (u\, x)(y) = u(y)x\,, \\ (x\, u)(y) = \varepsilon(|x|,|y|)\, x\, u(y) \quad (x \in A,\ y \in E \text{ homogènes}), \end{cases}$$

on définit sur $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$ une structure de A-module Δ-gradué ou de A-bi-module, les deux lois définies par (1) étant liées comme il est dit au début de (1.1.3).

Et il en est de même lorsqu'on munit $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$ des lois définies par

$$(2) \quad \begin{cases} (x.u)(y) = x\, u(y)\,, \\ (u.x)(y) = \varepsilon(|x|,|y|)\, u(y)x \quad (x \in A,\ y \in E \text{ homogènes}). \end{cases}$$

PROPOSITION . - $u \mapsto \tilde{u}$ *est un* K-*isomorphisme de* Δ-*modules* Δ-*gradués de* $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$, *muni des lois définies par (1), sur* $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$, *muni des lois définies par (2).*

La démonstration est immédiate.

Soient E et F des A-modules. $\mathrm{Homgr}_A(E,F)$ (resp. $\mathrm{Homgr}_A(\tilde{E},\tilde{F})$) est un sous-A-module de $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$ muni des lois (1) (resp. (2)).

COROLLAIRE. - $u \mapsto \tilde{u}$ *est un isomorphisme de* A-*modules* Δ-*gradués de* $\mathrm{Homgr}_A(E,F)$ *sur* $\mathrm{Homgr}_A(\tilde{E},\tilde{F})$ *(munis respectivement des lois (1) et (2)).*

(1.1.6) Soit A une K-algèbre Δ-graduée, ε-commutative. Soient E_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ et F des A-modules Δ-gradués et p un entier $\geqslant 0$. On dit qu'une application homogène $v : \prod_i E_i \to F$ est ε-*multilinéaire* si v est K-multilinéaire et si

$$v(y_1,\ldots,xy_i,\ldots,y_p) = \varepsilon(|x|, \sum_{j=1}^{i-1} |y_j|)\; x\; v(y_1,\ldots,y_p)$$

pour $1 \leqslant i \leqslant p$, $x \in A$ et $y_j \in E_j$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ homogènes.

Soient E et F des A-modules Δ-gradués. $\tilde{E} \otimes_A F$ est un K-module Δ-gradué (par les $\bigoplus_{j+k=i} (\tilde{E}_j \otimes_A F_k)$) ; on a $(yx) \otimes z = y \otimes (xz)$ si $x \in A$, $y \in E$ et $z \in F$; on le note simplement $E \otimes_A F$.

Soit $\theta : E\times F \to E \otimes_A F$ l'application ε-bilinéaire $(y,z) \mapsto y \otimes z$. Pour tout A-module Δ-gradué G, $u \mapsto u \circ \theta$ est un K-isomorphisme de $\mathrm{Homgr}_K(E \otimes_A F, G)$ sur le K-module des applications bilinéaires ε-graduées de ExF dans G.

Ceci permet de définir une loi de A-bimodule sur $E \otimes_A F$ en posant $x(y \otimes z) = (xy) \otimes z$ et $(y \otimes z)x = y \otimes (zx)$ $(x \in A,\ y \in E,\ z \in G)$ et on a $x\,t = \varepsilon(|x|,|t|)\; tx$, pour $x \in A$ et $t \in E \otimes_A F$ homogènes.

De même :

PROPOSITION. - *Soient* E*,* F *et* G *des* A*-modules* Δ*-gradués.*

a) Il existe un unique A*-isomorphisme* $\phi : A \otimes_A E \to E$ *tel que* $\phi(x \otimes y) = xy$ $(x \in A,\ y \in E)$, *ce qui permet d'identifier ces* A*-modules.*

b) Il existe un unique A*-isomorphisme* $\alpha : E \otimes_A (F \otimes_A G) \to (E \otimes_A F) \otimes_A G$ *tel que* $\alpha(y \otimes (z \otimes u)) = (y \otimes z) \otimes u$ $(y \in E,\ z \in F,\ u \in G)$, *ce qui permet d'identifier ces* A*-modules.*

c) Il existe un unique A*-isomorphisme* $\psi : E \otimes_A F \to F \otimes_A E$ *tel que* $\psi(y \otimes z) = \varepsilon(|y|,|z|) z \otimes y$ $(y \in E,\ z \in F$ homogènes).

(1.1.7) Soit E un A-module Δ-gradué; on définit, par récurrence sur $p \geqslant 0$, le A-module Δ-gradué $T_A^p(E)$ en posant $T_A^p(E) = A$ et $T_A^{p+1}(E) = T_A^p(E) \otimes_A E$, et on désigne par $T_A(E)$ le module $\mathbb{Z} \times \Delta$-gradué $\bigoplus_p T_A^p(A)$.

Pour $p \geqslant 0$, si t_p est l'application $(y_1,\ldots,y_p) \mapsto y_1 \otimes \ldots \otimes y_p$ de E^p dans $T_A^p(E)$, $u \mapsto u.t_p$ est un K-isomorphisme de $\mathrm{Homgr}_A(T_A^p(E),F)$ sur le K-module des applications ε-multilinéaires de E^p dans F, pour tout A-module Δ-gradué F.

On a une application ε-bilinéaire $T_A^p(E) \times T_A^q(E) \to T_A^{p+q}(E)$ qui, à $((y_1 \otimes \ldots \otimes y_p),(y_{p+1} \otimes \ldots \otimes y_{p+q}))$ fait correspondre $y_1 \otimes \ldots \otimes y_{p+q}$; d'où une *multiplication notée* $\otimes$*, dans* $T_A(E)$, *qui est* ε*-bilinéaire* et fait de $T_A(E)$ *une* K*-algèbre* $\mathbb{Z} \times \Delta$*-graduée.*

Si K est Δ-gradué trivialement, $T_K(E)$ est l'algèbre tensorielle usuelle de E considéré comme K-module et on a un K-morphisme naturel $T_K(E) \to T_A(E)$ qui est surjectif.

(1.1.8). Par abus de langage, on appelle A-*algèbre* un A-module Δ-gradué B, qui est une K-algèbre (associative et unifère) telle que la multiplication

$$(y,z) \mapsto yz \quad \text{de } B$$

soit ε-bilinéaire. Si B ou B' sont des A-algèbres, un morphisme $u : B \to B'$ est une application A-linéaire, de degré o, qui est un morphisme de K-algèbres. Soit E un A-module Δ-gradué ; $T_A(E)$ est ainsi une A-algèbre.

PROPOSITION. - *Soit* B *une* A-*algèbre et* $u : E \to B$ *une application* A-*linéaire de degré* 0. *Il existe un unique morphisme de* A-*algèbres* $u' : T_A(E) \to B$ *prolongeant* u.

En effet, $(y_1,\dots,y_p) \mapsto u(y_1)\dots u(y_p)$ est ε-multilinéaire. Il existe donc $u'_p : T^p_A(E) \to B$ A-linéaire de degré 0 et telle que $u'_p(y_1 \otimes \dots \otimes y_p) = u(y_1)\dots u(y_p)$. D'où u'.

(1.1.9). Soit E un A-module Δ-gradué. Soit J l'idéal bilatère gradué de $T_A(E)$ engendré par les éléments $y \otimes y' + \varepsilon(|y|,|y'|)y \otimes y'$, où $y,y' \in E$ sont homogènes et soit ${}^{\varepsilon}\Lambda_A(E)$ (ou $\Lambda_A(E)$) la K-algèbre quotient $T_A(E)/J$, dont on note $\wedge$ le produit. En identifiant le module Δ-gradué $T^p_A(E)/(J \cap T^p_A(E))$ à un sous-K-module ${}^{\varepsilon}\Lambda^p_A(E)$ (ou $\Lambda^p_A(E)$) de $\Lambda_A(E)$, on a $\Lambda_A(E) = \bigoplus_p \Lambda^p_A(E) =$ $= A \oplus E \oplus \Lambda^2_A(E) \oplus \dots$; ainsi $\Lambda_A(E)$ est une A-algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduée.

PROPOSITION. - $\Lambda_A(E)$ *est* $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-*commutative*.

En effet, comme $y \wedge y' = -\varepsilon(|y|,|y'|)y' \wedge y$ si $y,y' \in E$ sont homogènes, on a $y_1 \wedge \dots \wedge y_{p+q} = (-1)^{pq}\,\varepsilon(\sum_{j=1}^{p} |y_j|, \sum_{j=p+1}^{q} |y_j|)\, y_{p+1} \wedge \dots \wedge y_{p+q} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_p$, pour des éléments homogènes $y_j \in E (1 \leqslant j \leqslant p+q)$.

Soit F une A-module Δ-gradué. On dit qu'une application ε-*multilinéaire* $v : E^p \to F$ est ε-*alternée* si l'on a

$$v(y_1,\dots,y_{i+1},y_i,\dots,y_p) = -\varepsilon(|y_i|,|y_{i+1}|)\, v(y_1,\dots,y_p) \quad (1 \leqslant i < p)$$

pour des éléments $y_j \in E$ homogènes. Ces applications forment un A-sous-module de $\mathrm{Homgr}_A(T^p_A(E),F)$; si $a : E^p \to \Lambda^p_A(E)$ est l'application $(y_1,\dots,y_p) \mapsto y_1 \wedge \dots \wedge y_p$, a est ε-alternée et $u \mapsto u.a$ est un isomorphisme de A-modules de $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda^p_A(E),F)$ sur le module des applications ε-multilinéaires et ε-alternées de E^p dans F. On identifie ces deux modules.

PROPOSITION. - *Soient* E *un* A-*module* Δ-*gradué,* B *une* A-*algèbre et* $u : E \to B$ *une application* A-*linéaire de degré* o, *telle que*

$$u(y)u(y') + \varepsilon(|y'|,|y'|)u(y')u(y) = 0$$

$(y,y' \in E$ *homogènes*$)$.

Il existe un morphisme de A-*algèbres unique* $u' : \Lambda_A(E) \to B$ *prolongeant* u.

C'est clair.

Soit E un K-module Δ-gradué ; en munissant K de la Δ-graduation triviale, on définit l'algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduée, $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-commutative $\Lambda_K(E) = {}^{\varepsilon}\Lambda_K(E)$ comme ci-dessus. Et, pour tout A-module Δ-gradué E, on a un morphisme naturel de ${}^{\varepsilon}\Lambda_K(E)$ sur ${}^{\varepsilon}\Lambda_A(E)$, qui est surjectif.

(1.2) PRODUITS EXTERNES.

On désigne par ε un facteur de commutation sur Δ.

(1.2.1) Soient E et F des K-modules Δ-gradués $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),F)$ est un K-module $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué (u est homogène de degré (p,i) si $u(y_1\wedge\ldots\wedge y_p)\subset F_{i+\sum_j|y_j|}$ ($y_j\in E$ homogènes) et $u(\Lambda_K^q(E)) = 0$ et $q\neq p$).

Soient $I=\{1,\ldots,n\}$ et $y_1,\ldots,y_n\in E$ homogènes ; pour $H\subset I$, on pose $y_H = y_{i_1}\wedge\ldots\wedge y_{i_p}$ si $H=\{i_1,\ldots,i_p\}$ et $i_1<\ldots<i_p$, $|y_H| = |y_{i_1}|+\ldots+|y_{i_p}|$, $H' = I-H$, $\rho(H,H') = (-1)^\nu$ où $\nu = \mathrm{Card}(\{(i,i')\in H\times H' \mid i'<i\})$ et

$$\eta(y_H,y'_{H'}) = \prod_{\substack{(i,i')\in H\times H'\\ i'<i}} \varepsilon(|y_i|,|y_{i'}|).$$

Soient E,F,F' et G des K-modules Δ-gradués et $\phi : F\times F'\to G$ une application K-bilinéaire de degré 0.

Soient $c\in\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K^p(E),F)$ et $c'\in\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K^{n-p}(E),F')$;
posons $v(y_1,\ldots,y_n) =$

$$\sum_{\mathrm{card}(H)=p} \rho(H,H')\eta(y_H,y_{H'})\varepsilon(|c|,|y_{H'}|)\phi(c(y_H),c'(y_{H'})).$$

On définit ainsi une application K-multilinéaire et ε-alternée v de E^n dans G, donc un élément $\phi'(c,c')\in\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K^n(E),G)$.

D'où une application K-bilinéaire graduée, de degré (o,o),

$$\phi' : \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),F)\times\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),F')$$
$$\to \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),G) .$$

EXEMPLES. - Pour p = o, on identifie $\mathrm{Homgr}_K(K,F)$ à F et on a

$$\phi'(z,c)(t) = \phi(z,c(t)) \quad \text{si } t\in\Lambda_K(E) \text{ et } z\in F.$$

Pour p = q = 1, on a

$$\phi'(c,c')(y_1\wedge y_2) = \varepsilon(|c|,|y_2|)\,\phi(c(y_1),c'(y_2)) - \varepsilon(|y_1|,|y_2|)\varepsilon(|c|,|y_1|)\phi(c(y_2),c'(y_1)).$$

On désigne par ϕ'' l'application K-multilinéaire ε-alternée définie par

$$\phi''(c,c') = \phi'(\tilde{c}',\tilde{c})^{\sim} .$$

EXEMPLES. - Pour p = o. On a

$$\phi''(z,c)\ (t) = \varepsilon(|z|,|t|)\ \phi(z,c(t))$$

pour $z \in F$ et $t \in \Lambda_K(E)$ homogènes.

Pour p = q = 1, on a

$$\phi''(c,c')(y_1 \wedge y_2) = \varepsilon(|c'|,|y_1|)\phi(c(y_1)\ ,\ c'(y_2)) - \varepsilon(|c'|+|y_1|,|y_2|)\phi(c(y_2),c'(y_1)).$$

Pour $z \in F$, $z' \in F'$, on a donc

$$\phi'(z,z') = \phi'(z,z') = \phi''(z,z').$$

(1.2.2). Soit A une algèbre Δ-graduée. En faisant F = F' = G = A dans (1.2.1) et en prenant pour ϕ la multiplication de A, ϕ' (resp. ϕ'') , on définit sur $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),A)$ une structure de K-algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduée dont $A(=\mathrm{Homgr}_K(K,A))$ est une sous-algèbre.

PROPOSITION. - *Si* A *est une* K-*algèbre graduée,* ε-*commutative,* $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),A)$ *est une* K-*algèbre* $\mathbb{Z} \times \Delta$-*graduée,* $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-*commutative (pour chacun des deux produits ci-dessus, notés* $\wedge$ *et* $\curlywedge$ *et dits* externes*).*

La vérification est affaire de routine. (cf. N. Bourbaki, Algèbre, ch. III, § 11).

(1.2.3). Soit A une algèbre Δ-graduée ε-commutative et E et F des A-modules Δ-gradués.

En remplaçant F par A et F' et G par F dans (1.2.1), et en prenant pour ϕ l'application $(x,z) \mapsto xz$ de $A \times F$ dans F, ϕ' (resp. ϕ''), on définit sur $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),F)$ une structure de $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),A)$-module $\mathbb{Z} \times \Delta$-gradué dont on note $\wedge$ (resp. $\curlywedge$) le produit.

$\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(E),A)$ (resp. $\mathrm{Homgr}_A(\widetilde{\Lambda_A(E)},\tilde{A})$) s'identifie à une sous-algèbre de $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_A(E),A)$ munie de $\wedge$ (resp. $\curlywedge$). $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(E),F)$ (resp. $\mathrm{Homgr}_A(\widetilde{\Lambda_A(E)},\tilde{F})$) s'identifie a un sous-$\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(E),A)$-module de $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),F)$, pour $\wedge$ (resp. $\curlywedge$) .

(1.3) <u>PRODUITS INTERIEURS.</u>

Soit ε une facteur de commutation sur Δ.

(1.3.1). Soient E et F des K-modules Δ-gradués. Pour $z \in \Lambda_K^p(E)$ homogène et $c \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda^{p+q}(E),F)$, on pose

$$(i(z)c)(z') = \varepsilon(|z|,|z'|)c(z \wedge z')$$

pour $z' \in \Lambda_K^q(E)$ homogène.

On définit ainsi un élément $i(z)c \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E)^q,F)$. D'où, pour tout $z \in \Lambda_K(E)$, un K-endomorphisme gradué $i(z)$ de $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),F)$ (de degré $(\deg(z),|z|)$ si z est homogène).

On pose $j(z)c = i(z)(\tilde{c})^{\sim}$ c'est-à-dire $j(z) = \sim i(z) \sim$, pour $z \in \Lambda_K(E)$.
On a ainsi $\qquad (j(z)c)(z') = \varepsilon(|c|,|z|)\, c(z \wedge z')$
si z et c sont homogènes.

(1.3.2). Soit A une K-algèbre Δ-graduée et ε-commutative et soient E et F des A-modules.

PROPOSITION. - *Pour* $y \in E$, $c \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),A)$ *et* $c' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(E),F)$ *homogènes, on a*

$$i(y)(c \wedge c') = (i(y)c) \wedge c' + (-1)^{\deg(c)} \varepsilon(|y|,|c|)\, c \wedge (i(y)c'),$$

$$j(y)(c \curlywedge c') = (j(y)c) \curlywedge c' + (-1)^{\deg(c)} \varepsilon(|y|,|c|)\, c \curlywedge (j(y)c').$$

Il suffit de démontrer la première formule, ce qui est un exercice facile.

De plus, on voit que, pour tout $z \in \Lambda_K(E)$, $i(z)$ (resp. $j(z)$) *est un* A-*endomorphisme de* $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(E),F)$ (resp. $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(E)^{\sim}, \tilde{F})$.

(1.4) <u>COMMUTATION.</u>

(1.4.1). Soit A une K-algèbre Δ-graduée, associative et unifère. Et soit E et F des A-modules Δ-gradués . Pour $x \in A$ et $u \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$, homogènes, on pose

$$(\mathrm{ad}(x)_{\varepsilon}\, u)(y) = xu(y) - \varepsilon(|u|,|x|)u(xy) \quad (y \in F).$$

On définit ainsi $\mathrm{ad}(x)_{\varepsilon}\, u \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$. D'où un endomorphisme $\mathrm{ad}(x)_{\varepsilon}$ (ou $\mathrm{ad}(x)$) , de degré $|x|$ de $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$ et, pour tout $x \in A$, un endomorphisme gradué $\mathrm{ad}(x)$ de $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$. On pose, pour $x \in A$ et $u \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$

$$\mathrm{ad}(x)u = [x,u]$$

et

$$[u,x] = -\varepsilon(|x|,|u|)\,[x,u],$$

si $x \in A$ et u sont homogènes, ce qui définit $[u,x]$ dans tous les cas.

Soit G un A-module Δ-gradué ; pour $u \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$, $v \in \mathrm{Homgr}_K(F,G)$ et $x \in A$ homogènes, on a

$$\mathrm{ad}(x)(v.u) = (\mathrm{ad}(x)v)\,u + \varepsilon(|x|,|v|)\, v(\mathrm{ad}(x)u).$$

Soit $h : A \to B$ un K-morphisme d'algèbres Δ-graduées.

Soit E' un B-module Δ-gradué ; par h, E' est un A-module Δ-gradué ; si $x \in A$ et $u \in \mathrm{Homgr}_K(E,E')$, on a

$$ad(x)(u)(y) = h(x)u(y) - \varepsilon(|u|,|x|)\, u(xy) \qquad (y \in E).$$

(1.4.2). Supposons A-alternée ; si $u \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$, et $x \in A$, $y \in E$ sont homogènes, on a

$$(ad(x)\tilde{u})^{\sim}(y) = \varepsilon(|x|,|y|)\ (x\ u(y) - u(xy)).$$

Pour que $u \in \mathrm{Homgr}_A(E,F)$ (resp. $\mathrm{Homgr}_A(\tilde{E},\tilde{F})$), il faut et il suffit que $ad(x)\tilde{u} = o$ (resp. $ad(x)u = o$) pour tout $x \in A$.

(1.4.3). On identifie $x \in A$ à $x\,id_A \in \mathrm{Endgr}_K(A)$. On a alors, pour $x,x' \in A$ homogènes,

$$[x,x'] = xx' - \varepsilon(|x|,|x'|)\ x'x;$$

d'où

$$[x',x] = -\varepsilon(|x|,|x'|)\ [x,x'] .$$

(Ceci s'applique, en particulier, lorsque $A = \mathrm{Endgr}_K(E)$, où E est un K-module Δ-gradué).

PROPOSITION. - *Soit* E, F *des* K-*modules* Δ-*gradués ; pour* $x,x' \in A$ *homogènes*

et $u \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$, *on a*

$$[x,[x',u]] = [[x,x'],u] + \varepsilon(|x|,|x'|)\ [x,[x',u]]$$

(identité de Jacobi).

Autrement dit, on a, pour $x, x' \in A$,

$$[ad(x),ad(x')] = ad([x,x'])$$

dans $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$.

Si A est ε-commutative , on a $[x,x'] = o$ si $x,x' \in A$, donc $[ad(x),ad(x')] = o$, c'est-à-dire

$$ad(x).ad(x') = \varepsilon(|x|,|x'|).\,ad(x')ad(x)$$

si $x, x' \in A$ sont homogènes.