PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. FRAISSE

Le forcing faible ; son utilisation pour caractériser les relations unaires générales pour la chaîne ou la consécutivité des entiers naturels (résultat de R. Solovay, 1976)

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 3-4 , p. 89-99

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_89_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979 t.16-3.4

LE FORCING FAIBLE; SON UTILISATION POUR CARACTERISER LES RELATIONS UNAIRES GENERALES POUR LA CHAINE OU LA CONSECUTIVITE DES ENTIERS NATURELS (RESULTAT DE R. SOLOVAY, 1976)

Communication de R. FRAISSE

On sait qu'une relation unaire, générale pour la chaîne, ou seulement pour la consécutivité des entiers naturels, est *variée,* en ce sens que, pour toute suite fini u de valeurs + et −, il existe un entier a à partir duquel la relation générale prend la suite u de valeurs (pour les entiers a, a+1,...,a+u−1). En 1976, R. Solovay a prouvé qu'inversement, toute relation unaire variée est générale (pour la chaîne, donc aussi pour la consécutivité, qui est interprétable en la chaîne par une formule logique). Nous présentons ici sa preuve, légèrement modifiée et allégée par des remarques de B. Poizat concernant le forcing faible.

0. - Rappelons rapidement comment on voit qu'une relation unaire générale pour la consécutivité, donc à plus forte raison une générale pour la chaîne, est variée. Soit u une suite finie de valeur + et − ; supposons que la relation unaire R n'abrite pas la suite u au moyen d'entiers consécutifs, et supposons néanmoins que R soit générale pour la consécutivité ; prenons la formule :

$$\underset{x_1 x_2 x_3}{\exists} \because\; x_2 = x_1 + 1 \wedge x_3 = x_2 + 1 \wedge \ldots \wedge \rho' x_1 \wedge \rho' x_2 \wedge \ldots$$

où $\rho' x_1$ signifie ρx_1 si la première valeur de u est + , et $\neg \rho x_1$ si la première valeur de u est - ; de même $\rho' x_2$ signifie ρx_2 ou sa contraire selon que la 2ème valeur de u est + ou -, etc... autrement dit, la partie libre de notre formule décrit la suite u. Par nos hypothèses, cette formule est fausse pour R (substituée au prédicat ρ), donc elle ne peut pas être forcée (+) par un système extrait de R, du fait que R est générale. Par ailleurs elle n'est pas non plus forcée (-) : en effet, pour qu'un système fini U extrait de R force(-) la formule, il faudrait que, pour tous entiers $a_1, a_2, \ldots$ correspondant aux termes de la suite u, et tout sursystème V de U, ce V ne force pas (+) la formule libre :

$$a_2 = a_1 + 1 \wedge a_3 = a_2 + 1 \wedge \ldots \wedge \rho' a_1 \wedge \rho' a_2 \wedge \ldots$$

Or cela est faux, puisqu'il suffit de prendre les entiers $a_1, a_2, \ldots$, consécutifs, en dehors du système U, et de donner à V, pour des entiers, les valeurs des termes de u.

1 - FORCING FAIBLE.

Disons qu'un système fini U *force faiblement* une formule P à la valeur (+), lorsqu'aucun sursystème de U ne force P à la valeur (-) ; et que U force faiblement P à (-), lorsqu'aucun sursystème ne force P à (+). Si U force (+) une formule, il la force faiblement (+) ; mais l'inverse est faux. Par exemple toute thèse est faiblement forcée (+) par tout système, alors que, si U est un système et P une formule qui n'est forcée par U ni à (+) ni à (-), alors la thèse $P \vee \neg P$ n'est elle-même forcée par U ni (+) ni à (-). Mêmes remarques avec la valeur (-) au lieu de (+).

1.1. - *Si un système* U *force faiblement* (+) *une formule, il en est de même de tout sursystème de* U *; même énoncé avec* (-).

1.2. - *Un système ne peut pas forcer faiblement une formule, à la fois à* (+) *et à* (-). Il suffit de rappeler qu'il existe toujours un sursystème qui force la formule, soit à (+) soit à (-).

1.3. - *Soit* R, S *deux relations de base commune* E*; notons* P(R,σ) *toute formule à deux prédicats dont un substitué par* R, *l'autre* σ, *étant substituable par* S, *et les individus libres substitués par des éléments de* **R**. *Si, pour toute formule* P(R,σ) *il existe un système extrait de* S *et qui force faiblement* P(R,σ) *à la valeur de vérité* P(R,S), *alors* S *est générale pour* R. *(B. Poizat, 1976).*

. Preuve par induction sur la constitution de la formule P, conduisant à associer à chaque P un système extrait de S et qui la force à la valeur P(R,S). Seule la clause en $\exists$ mérite considération.

Si le système U extrait de S, force faiblement (-) la formule $\exists_x Q(x)$, alors U force (-) cette formule : sinon il existerait un su système V de U et un élément a de la base, avec V forçant (+) la formule Q(a), donc V forçant $\exists_x Q(x)$ à la valeur (+), contre notre hypothèse.

Si U extrait de S, force faiblement (+) la formule $\exists_x Q(x)$, alors cette formule prend la valeur + pour S. Sinon, par hypothèse il existerait un système U' extrait de S et forçant faiblement (-) la formule ; la réunion de U et U' forçant faiblement à la fois (+) et (-), contre l'énoncé 1.2. Il existe donc un élément a de la base tel que Q(a) prenne la valeur + pour S. Par hypothèse de récurrence, il existe un système V extrait de S, et qui force (+) la formule Q(a) ; donc V force (+) la formule donnée $\exists_x Q(x)$. .

1.4. - Prenons la relation R réduite à une base E, et soit S la relation unaire toujours - sur E, donc non générale pour E.

Pour toute formule P(E,σ) *où* σ *est substituable par* S, *il existe un système extrait de* S *et qui force faiblement* P *à* (+) *ou à* (-) (B. Poizat , 1976, dans le cas plus général où R est une relation ω-catégorique). En raison de l'énoncé 1.3 ci-dessus, le forcing faible ne se fera pas toujours à la valeur de vérité P(E,S) : par exemple, la formule $\exists_x \sigma x$ prend pour S la valeur de vérité (-) mais est faiblement forcée (+) par le système vide.

Prouvons, plus fortement, que *chaque formule* P(E,σ) *est faiblement forcée à* (+) *ou à* (-) *par le système toujours* (-) *(puisqu'extrait de* S*) défini sur les éléments de* E *qui figurent dans* P*:* éléments substitués aux individus libres de P.

. Preuve par induction sur la constitution de la formule P. Pour les formules atomiques , l'énoncé est évident. De même, le passage d'une formule à sa négation est évident.

Considérons le passage d'une formule P à la disjonction $P \vee Q$ où Q est une formule arbitraire. Si U force faiblement P à (+), alors quel que soit le sursystème V de U, il existe un sursystème W de V qui force P à (+) ; donc W force (+) la disjonction $P \vee Q$; donc V ne force pas (-) cette disjonction; donc U la force faiblement (+), et et il en est de même du sursystème de U qui comprend tous les éléments figurant dans P et dans Q. D'autre part si le système U force faiblement P à (-) et force faiblement Q à (-), alors aucun sursystème de U ne force P à (+) ni Q à (+), ni par conséquent $P \vee Q$ à (+) ; donc U force faiblement (-) la disjonction $P \vee Q$.

Considérons maintenant le passage d'une formule Q à $P = \exists_x Q(x)$.

Soit U le système toujours (-) sur les éléments de la base qui figurent dans P. Ou bien, pour chaque élément a de la base, U force faiblement Q(a) à la valeur (-) ; alors aucun sursystème de U ne force Q(a) à (+), donc U force (-) la formule P.

Plaçons-nous dans le cas contraire, où il existe un élément a tel que U ne force pas faiblement Q(a) à (-). Supposons d'abord que a figure dans le système U. Alors U comprend tous les éléments qui figurent dans Q(a) : par hypothèse de récurrence, U force faiblement Q(a), nécessairement à la valeur (+). Donc pour tout sursystème V de U, il existe un sursystème de V qui force Q(a) à (+), donc qui force P à (+) ; donc V ne force pas P à (-) ; donc U force faiblement P à (-).

Supposons enfin que a ne soit pas dans U. Puisque U ne force pas faiblement Q(a) à (-) , il existe un sursystème W de U qui force Q(a) à (+) . Soit V un sursystème quelconque de U. Par isomorphie, changeons a en a' et W en W' de façon que les éléments communs à V et W' soient dans U. Alors la réunion $V \cup W'$ force Q(a') à (+), donc force P à (+). Donc V force pas P à (-) ; faisant alors varier V, nous voyons que U force faiblement P à la valeur (+).

2. - BIRELATION A_p ASSOCIEE A CHAQUE ENTIER NATUREL p ; RAPPELS SUR LE (k,p)-IDOMORPHISME ET LA (k,p)-EQUIVALENCE ENTRE CHAINES.

2.1. - Rappelons d'abord que, pour chaque couple d'entiers k,p, et pour chaque arité de relations .ou de multirelations, les classes de (k,p)-équivalence sont en nombre fini. Nous nous intéressons ici aux birelations (I,R) formées chacune d'une chaîne ou ordre total I et d'une relations unaire R de même base. A l'entier 0, associons la birelation A_0 de base vide. Supposons déjà définie la birelation A_p associée à l'entier naturel p, et formée d'une chaîne et d'une relation unaire, de base commune finie. Prenons une représentante, de base finie, de chaque classe de $(p+1,p+1)$-équivalence parmi les birelations (chaîne et unaire) de bases finies. Notant $U_1,\dots,U_h$ ces représentantes, qui sont en nombre fini, posons $A_{p+1} = A_p U_1 A_p U_2 A_p \dots A_p U_h A_p$; la concaténation ainsi décrite signifiant que les chaînes sont supposées de bases disjointes et ajoutées les unes aux autres dans l'ordre indiqué. Les relations unaires donnant sur la réunion des bases, une extension commune qui est encore une relation unaire.

Avant d'utiliser les birelations, que nous appellerons encore intervalles A_p, étendons comme suit, au cas des birelations (chaîne et unaire), deux lemmes connus pour les chaînes.

2.2. - Etant donné deux chaînes I et I', une unaire R de base $|I|$ une unaire R' de base $|I'|$, et un isomorphisme local f de domaine fini, de (I,R) vers (I',R'), appelons f-*intervalle* de I l'ensemble des éléments de $|I|$ situés avant le premier élément (modulo I) du domaine de f, ou entre deux éléments consécutifs (modulo I) de ce domaine, ou après le dernier élément du domaine. Définition analogue du f-intervalle de I', en remplaçant le domaine de f par son codomaine. Un f-intervalle de I et un de I' sont dits *correspondants* lorsque, le premier étant d'extrémités a et b (éléments du domaine de f), le deuxième est d'extrémités f(a) et f(b) ; ou, le premier étant un intervalle initial d'extrémité a, le deuxième est initial d'extrémité f(a) ; ou même condition entre intervalles finaux.

Etant donné deux birelations (chaîne et unaire) et un isomorphisme local f *de domaine fini, de la première vers la deuxième* f *est un* (k,p)-*isomorphisme si et seulement si les intervalles correspondants, considérés comme des birelations (chaîne et unaire), sont deux à deux* (k,p)-*équivalents.*

même preuve, par induction sur k, qu'au tome 2, 1.2.7.

2.3. - *Soit* I *une chaîne, somme des chaînes* $I_1, I_2, \ldots, I_h$, *et* I' *somme des* $I'_1, \ldots, I'_h$. *Supposons qu'à chaque* $i = 1, \ldots, h$, *soit associée une relation unaire* R_i *de base* $|I_i|$, *une* R'_i *de base* I'_i , *et un (k,p)-isomorphisme* f_i *de* (I_i, R_i) *vers* (I'_i, R'_i), *pouvant être vide, donc pouvant se réduire à la (k,p)-équivalence entre ces deux birelations. Alors la réunion des* $f_i (i=1,\ldots,h)$ *est un (k,p)-isomorphisme de* (I,R) *vers* (I',R') , *où* R *est la relation unaire extension commune des* R_i, *et* R' *l'extension commune des* R'_i. Preuve par induction ; voir tome 2, chap. 1, exercice 2.

2.4. - *Pour chaque entier naturel,p , la birelation* A_p *est (p,p)-équivalente à toute birelation (chaîne et unaire), qui admet un intervalle initial et un intervalle final tous deux isomorphes à* A_p (Solovay, amélioré par Poizat).

L'énoncé étant évident pour p= 0, supposons le vrai pour p ; posons $A = A_{p+1}$ et soit B une birelation (chaîne et unaire) admettant un intervalle initial et un final tous deux isomorphes à A_{p+1}. Soit x un élément de la base $|A|$; supposons d'abord x situé dans l'intervalle médian A^* de A, strictement compris entre l'intervalle initial de A qui est isomorphe à A_p , et l'intervalle final de A qui est aussi isomorphe à A_p. Cet intervalle médian A^* admet un (p+1,p+1)-équivalent parmi les intervalles U de A situés entre deux A_p (voir en 2.1 la construction de A_{p+1}) ; donc un (p+1,p+1)-équivalent B^* parmi les intervalles de B situés entre deux A_p. Prenons un un élément y dans ce B^* , tel que la transformation de x en y soit un (p,p)-isomorphisme de A^* vers B^*. Alors d'après le 2.2 ci-dessus, A^* et B^* sont partagés chacun en trois intervalles : avant x, singleton de x, après x pour A^* , avant y, singleton de y, après y pour B^*, et les intervalles correspondants sont deux à deux (p,p)-équivalents (les deux singletons donnent deux intervalles isomorphes, avec une même valeur pour les relations unaires). Ainsi A et B sont partagés chacun en cinq intervalles, et les intervalles correspondants sont deux à deux (p,p)-équivalents, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, d'après laquelle deux birelations (chaîne et unaire) sont (p,p)-équivalentes si elles admettent chacune un intervalle initial et un final isomorphes à A_p. Utilisant 2.3 pour la somme des deux premiers intervalles et pour la somme des deux derniers, puis réutilisant 2.2, nous voyons que la transformation de x en y est un (p,p)-isomorphisme de A vers B. Même preuve en échangeant A et B, mais en appelant B^+ l'intervalle médian de B, strictement compris entre l'intervalle initial de B et l'intervalle final de B qui sont isomorphes à A_p, et appelant A^+ un U de A situé entre deux A_p.

Supposons maintenant que l'élément donné x de la base $|A|$, appartienne à l'intervalle initial A_p de A. Associons-lui alors l'élément y de la base $|B|$, situé comme x dans l'intervalle initial A_p de B. Notons U le premier intervalle, nommé U_1 en 2.1, et notons que la transformation de x en y est une restriction de l'isomorphisme de l'intervalle initial A_p+U de A sur l'intervalle initial de même nom dans B. Partageons A en quatre intervalles, avant x, singleton de x, après x dans A_p+U , et intervalle final strictement après U ; partage analogue pour B : il suffit de noter que les isomorphismes sont des (p,p)-équivalences, et que, pour les quatrièmes intervalles, l'hypothèse de récurrence donne la (p,p)-équivalence, en raison d'intervalles initiaux et finaux isomorphes à A_p. Même preuve lorsque x appartient à l'intervalle final A_p de A ; et mêmes preuves en échangeant A et B.

Pour achever de prouver la (p+1,p+1)-équivalence entre A et B, prenons une suite de q termes $x_1,\dots,x_q (q \leq p)$ dans la base $|A|$:

par ce qui précède, il existe un y_1 dans $|B|$, tel que la transformation de x_1 en y_1 soit un (p,q)-isomorphisme ; donc il existe $y_2,\ldots,y_q$ tels que la transformation de chaque x en y de même rang soit un (p-1,p+1-q)-isomorphisme, donc un (i,p+1-q)-isomorphisme quel que soit k, puisque $q \geq 2$ donc $p+1 \leq p-1$. et inversement en échangeant A et B.

2.5. - Prenons maintenant deux chaînes isomorphes à celle des entiers naturels, donc deux birelations A et B obtenues en prenant deux relations unaires sur les naturels. Les notions d'intervalles s'étendent aux intervalles finaux infinis de birelations.

Etant donné un entier naturel p : *si* A *et* B *sont deux birelations variées, et admettant chacune un intervalle initial isomorphe à* A_p *, alors* A *et* B *sont* (p,p)-*équivalentes.*

. L'énoncé étant évident pour p = 0, supposons-le vrai pour p, et supposons A et B variées et commençant par un intervalle initial A_{p+1}. Soit x un élément de la base $|A|$; supposons d'abord x situé dans l'intervalle initial A_p de A. Associons-lui alors l'élément y de la base $|B|$, situé comme x dans l'intervalle initial A_p de B. Notons U le premier intervalle, nommé U_1 en 2.1, et que nous retrouvons par isomorphie dans B. Ainsi A et B sont partagés chacun en quatre intervalles : avant x, singleton de x, après x dans l'intervalle initial A_p+U , enfin un intervalle final qui est une birelation variée commençant par un intervalle initial A_p ; et de même pour B avec uy. Par hypothèse de récurrence, les intervalles finaux sont (p,p)-équivalents, puisque ce sont deux birelations régulières admettant chacune l'intervalle initial A_p. Ainsi d'après 2.2 et 2.3, la transformation de x en y est un (p,p)-isomorphisme de A vers B.

Supposons maintenant que l'élément donné x n'appartienne pas à l'intervalle initial A_p de A, mais lui soit strictement postérieur. Puisque A est variée, il existe au moins un intervalle de A, isomorphe à A_p et strictement postérieur à x. Ecrivons A sous forme de la somme de A_p suivi d'un intervalle fini U, lui-même suivi d'une birelation variée commençant par un intervalle initial A_p. Dans B, nous avons un intervalle initial A_{p+1} , qui comprend donc un intervalle médian (p+1,p+1)-équivalent à U, soit V. Avant V, nous avons un intervalle d'extrémités isomorphes à A_p, donc (p,p)-équivalent à $'_p$. Après V, nous avons une birelation variée commençant par un intervalle initial A_p, donc par hypothèse (p,p)-équivalente au troisième intervalle de A. Il nous reste, utilisant la (p+1,p+1)-équivalence de U et V, à prendre dans V un élément y tel que la transformation de x en y soit un (p,p)-isomorphisme de U vers V. Utilisant alors les énoncés 2.2 et 2.3, nous voyons que la transformation de x en y est un (p,p)-isomorphisme de A vers B. Même preuve en échangeant A et B ; enfin la (p+1,p+1)-équivalence entre A et B s'obtient comme au dernier alinéa de la preuve 2.4.

3. - *Toute relation unaire variée sur la base des entiers naturels est générale pour la chaîne de ces entiers ; et par conséquent pour la consécutivité.*

Notons I la chaîne des entiers naturels, R une relation unaire variée. Partons d'une formule logique P, dont la caractéristique est posée inférieure ou égale à (p,p) (rappelons que cela sifn signifie, si P est prénexe, qu'elle comprend $\leq$ p quanteurs ; le premier terme de la caractéristique étant le nombre d'alternances entre quanteurs universels et existentiels). Puisque R est variée, prenons un intervalle de (I,R) qui soit isomorphe à A_p , et appelons U l'intervalle initial engendré par cet intervalle A_p (ensemble des éléments antérieurs ou appartenant à A).

Montrons que U *force faiblement* P *à la valeur de vérité* P(I,R). Supposons le contraire : il existe un sursystème V de U, qui force P à la valeur contraire $\neg$ P(I,R). Prenons une relation unaire S, extension du système V, et générale pour la chaîne I. Alors V force P à la valeur de vérité P(I,S), donc P(I,R) $\neq$ P(I,S). D'autre part, les birelations I R et I S sont (p,p)-équivalentes, puisque chacune est la somme d'un même intervalle initial antérieur à A_p, et d'une birelation variée commençant par l'intervalle A_p (utiliser 2.3 et 2.5). Elles donnent donc la même valeur à la formule P, de caractéristique $\leq$ (p,p) : contradiction prouvant le forcing faible annoncé.

Ainsi, pour chaque formule P, il existe un intervalle initial U de R qui force faiblement P à la valeur P(I,R) : d'après 1.3, la relation R est générale pour I. Elle l'est aussi pour la consécutivité C telle que C(x,y) = + lorsque y = x+1 : en effet la consécutivité est interprétable en la chaîne I, par la formule exprimant que x $\leq$ y (modulo I) et x $\neq$ y et que tout z est $\leq$ x ou $\geq$ y (modulo I).