PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

K. I. APPEL

Un nouveau type de preuve mathématiques : II - Le théorème des quatre couleurs

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 3-4 , p. 81-88

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_81_0>

Publications du
département de
mathématiques
Lyon 1979 t. 16-3.4

UN NOUVEAU TYPE DE PREUVE MATHEMATIQUE :

II. LE THEOREME DES QUATRE COULEURS

K.I. APPEL
(Travaux en collaboration avec W. HAKEN)

University of URBANA, Illinois

Pour rendre plus compréhensibles les détails de la preuve, j'expliquerai les problèmes qu'il nous a paru nécessaire de surmonter quand nous avons commencé notre collaboration en 1972.

Ayant à démontrer le théorème en trouvant un ensemble inévitable de configurations réductibles, il semblait que le seul instrument qui pouvait être utilisé pour trouver un tel ensemble inévitable devait être un procédé de déchargement.

Les procédés de déchargement précédemment utilisés dans la démonstration de quelques théorèmes particuliers n'étaient certainement pas assez fins ; une grande quantité d'informations à propos des voisinages des sommets déchargés et récepteurs était nécessaire pour choisir la charge à transférer. En outre, nous ne savions pas si ce procédé exigeait une seule opération ou plusieurs opérations successives de déchargement.

Un second probème était la difficulté de trouver si une configuration est réductible ou non. Lorsque quelques spécialistes eurent fait de grands travaux en déterminant la réductibilité de configurations de taille jusqu'à neuf ou dix, il est apparu qu'un grand nombre de configurations de plus grande taille demandait l'emploi d'un ordinateur.

D'abord nous avons cru que des configurations de taille au moins dix huit pouvaient être nécessaires. Mais le temps de computation et l'emmagazinage de l'information sont multipliés par quatre à chaque augmentation de taille et nous avons estimé que quelques uns de ces calculs pouvaient être très difficiles. Par exemple un calcul utilisant un grand ordinateur rapide pour démontrer qu'une configuration particulière de taille quatorze n'était pas D-réductible, prenait vingt six heures en employant une grande partie de la mémoire centrale. La taille dix huit nous amènerait à multiplier ces nombres par deux cent cinquante six (par exemple) et les problèmes deviendraient alors trop difficiles.

Une méthode pour décider de la solubilité du problème était de chercher des ensembles inévitables de configurations sans obstacles à la réduction. Cette idée semblait raisonnable parce que chaque configuration réductible connue est sans obstacle et que les configurations sans obstacle, surtout celles dont la longueur n du circuit séparateur n'excède pas le nombre m de sommets qui en font partie de plus de quatre s'étaient révélées réductibles en général.

En outre, il est très facile de reconnaître si une configuration est sans obstacle. La méthode comportait un risque. On pouvait éventuellement obtenir des ensembles inévitables de configurations sans obstacles comportant des configurations irréductibles qu'on ne pouvait pas éliminer.

Nous avons choisi de chercher à déterminer un ensemble inévitable de configurations "géographiquement bonnes" (à savoir sans sommets à quatre branches ni sommets d'articulation à trois branches). Nous avons utilisé un programme d'ordinateur pour examiner une classe de procédés de déchargement afin de trouver quelles parties des procédés étaient les plus critiques et quelles valeurs de déchargements étaient les meilleures.

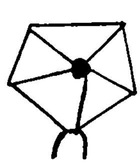
Après environ une année, ayant démontré l'existence d'un ensemble inévitable de configurations géographiquement bonnes, nous avons décidé qu'il était raisonnable de tenter quelque chose de plus difficile. Nous avons modifié le programme afin qu'il nous permette d'obtenir un ensemble inévitable de configurations apparemment réductibles (géographiquement bonnes, sans paires 5-5 suspendues et satisfaisant à $n-m \leq 4$. Vers la fin de 1974 il nous a paru qu'on pouvait construire un ensemble inévitable de configurations apparemment réductibles de moins de dix mille membres, et de taille maximale voisine de seize. En outre, une grande partie d'un tel ensemble doit avoir une taille inférieure à quinze. Ainsi, nous avons commencé l'attaque du grand problème.

Bien qu'il y eu des programmes d'ordinateur pour prouver la réductibilité des configurations, nous avons décidé d'en construire de nouveaux. Nous l'avons fait parce que nous avons voulu des programmes qui seraient très efficaces utilisant les ordinateurs de notre Université et parce que nous avons eu des idées pour de nouvelles méthodes de C-réduction par ordinateur en cas de besoin.

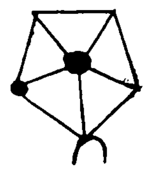
En collaboration avec le Dr. John Koch, qui était à cette époque mon étudiant à l'Université d'Illinois, nous avons écrit des programmes pour faire des épreuves de D-réductibilité sur des configurations de taille entre onze et quatorze. Les programmes, quand ils avaient trouvé qu'une configuration était D-irréductible, faisaient quelques essais pour prouver qu'elle était C-réductible. Avec notre ordinateur le plus rapide (I.B.M. 370-168) le programme pour la taille quatorze nécessitait 6 minutes pour les configurations les plus faciles à réduire et moins de quinze minutes pour un grand nombre des autres.

En même temps, nous avons progressé dans notre analyse des ensembles inévitables. Nous avons commencé nos travaux croyant que le procédé de déchargement devrait nécessairement être local (chaque sommet déchargé devant être relié par une arête à chacun de ses sommets récepteurs). De plus, nous avons établi qu'un sommet de degré 6 ne serait ni un sommet déchargé ni un sommet récepteur.

Nous avons découvert, en utilisant notre programme expérimental qu'il y avait des cas où il était impossible d'avoir un déchargement totalement local. En outre, nous avons eu des difficultés dans les cas de voisinages comme

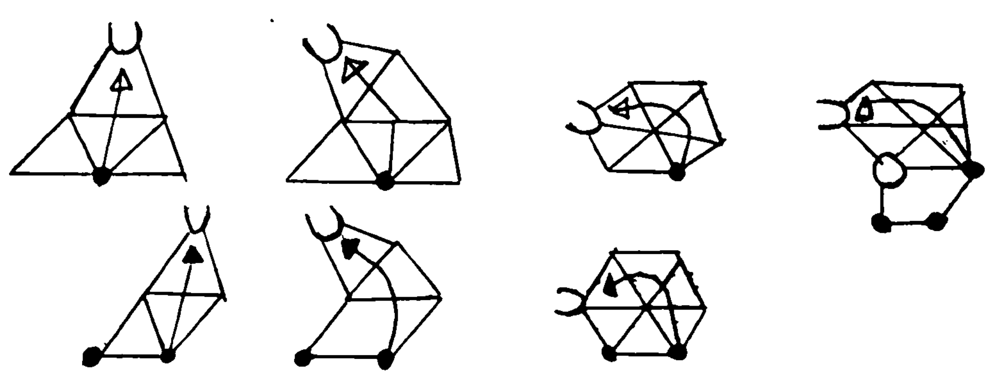


et



où selon nos règles le V_5 central devait transférer la charge 60 à son voisin majeur. En outre nous n'avions pas de méthode pour traiter des cas où le procédé ne nous donnerait aucune configuration apparemment réductible, ou seulement de telles configurations dont la réduction par ordinateur échouerait.

Le procédé que nous avons finalement choisi a triomphé des deux difficultés. Premièrement, nous avons défini une classe de déchargements transversaux (déchargements T) comme suit :



Ici nous employons une autre partie du code de Hersch = au moins 6,

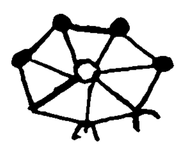
 = au moins 7, et nous voulons dire par

la flèche  que le V5 donne 10 au sommet majeur

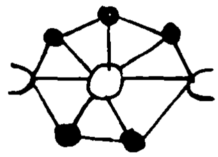
" "  " " " " 20 " " "

Les déchargements T nous permettaient de transférer des charges à travers des arêtes $V_6 - V_6$ (des arêtes joignant des sommets de degré six) d'un V_5 à un sommet majeur à la distance deux. Ce déchargement permettait un meilleur emploi d'une classe de configurations réductibles non encore utilisées et en général mettait à notre disposition des configurations de moindre taille. Deuxièmement, le procédé de déchargement a été défini au cours de la construction de l'ensemble inévitable. Cette méthode nous a permis d'examiner la réductibilité de chaque configuration candidate à l'ensemble inévitable avant de permettre son utilisation dans le procédé.

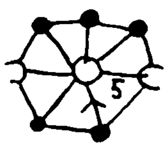
Nous avons commencé par définir les déchargements T et par décider que chaque V_5 donnerait la charge 30 à chacun de ses voisins majeurs (Déchargements R). Les définitions du procédé de déchargement et de l'ensemble inévitable ont été faites pas à pas comme suit.

Nous avons considéré dans l'ordre lexicographique tous les voisinages des sommets majeurs qui étaient surchargés par les déchargements T et R. Lorsque nous trouvions une configuration sans obstacle à la réduction dans le voisinage (par exemple, dans le voisinage  qui donnait au V_7 central la charge + 1 nous avons trouvé la configuration  si elle était réductible nous l'ajoutions à l'ensemble inévitable. Lorsque il n'y avait pas de configuration sans obstacle dans le voisinage ou que nos programmes ne pouvaient pas prouver assez rapidement qu'une telle configuration était réductible, nous disions que le voisinage était critique.

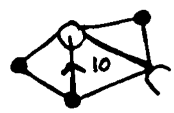
Par exemple le voisinage suivant était critique :



Dans de tels cas nous ramenions quelques déchargements R de 30 à des valeurs plus petites [pour notre exemple nous avons créé les déchargements suivants :

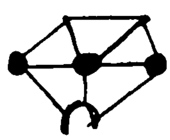


et

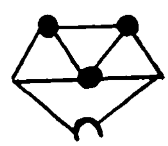


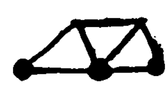
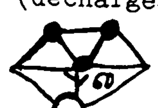
C'est-à-dire quand nous trouvions un voisinage qui contenait ce diagramme le V_5 au pied de la flèche donnait la charge indiquée au sommet majeure central]. Ces déchargements, qui sont définis par un voisinage des sommets déchargeant et récepteur sont appelés déchargements S (<u>small dischargings</u>).

Après avoir examiné de cette manière tous les voisinages des sommets majeurs, nous avons considéré des voisinages des V_5 qui ne pouvaient donner leur charge entière à leurs voisins majeurs par les déchargements T, S, et R. [Par exemple les V_5 centraux des voisinages



et



A nouveau, si nous trouvions une configuration réductible dans le voisinage (par exemple, dans le voisinage à gauche nous trouvions  nous l'ajoutions à l'ensemble inévitable, autrement nous l'appelions un cas critique. Ici nous avions remplacé quelques déchargements R par des déchargements plus grands (déchargements L (<u>large dischargings</u>)) [à droite nous avons créé ] pour permettre à toutes les charges des V_5 de passer sur les sommets majeurs.

Naturellement, les nouveaux déchargements-L surchargeaient quelques nouveaux sommets majeurs et il fallait faire une nouvelle analyse des voisinages des sommets majeurs, donnant de nouvelles configurations par l'ensemble inévitable et de nouveaux déchargements S. Cette définition itérative se termina après quatre cycles de déchargements S et L quand tous les voisinages surchargés continrent des configurations réductibles.

Il est important de noter que le procédé est défini à chaque pas après avoir examiné si nous pouvions réduire la configuration ou non. Ainsi nous pouvons établir des critères pour décider quelles configurations accepter. Par exemple, ayant découvert que les configurations de taille quinze ou plus ne semblaient pas nécessaires, nous les avons rejetées. De plus, si le programme de réduction n'avait pas décidé la réductibilité d'une configuration de taille quatorze dans un délai de trente minutes sur l'ordinateur I.B.M. 310-168, nous la considérons comme irréductible. Ainsi il y a plusieurs configurations théoriquement réductibles que nos méthodes ont rejetées. Le fait que le procédé a réussi indique que d'autres méthodes semblables (par exemple avec des déchargements T, S, L différents) réussiraient aussi. Nous croyons qu'il est possible de produire par ces méthodes un ensemble inévitable d'environ mille configurations.

Mais nous sommes convaincus par des analyses probabilistiques qu'un ensemble inévitable beaucoup plus petit au contenant des configurations de beaucoup plus petite taille n'existe pas. Nous avons employé mille heures de temps d'ordinateur à prouver la réductibilité des 1880 configurations de notre ensemble. Nous croyons qu'il est possible de produire un ensemble qui exige seulement deux cents heures pour la vérification. Mais nous sommes sûrs qu'il est impossible de produire une telle preuve vérifiable à la main.

Jean Mayer, un des très grands experts du monde en matière de réductibilité, ne croit pas que la tâche de vérifier un tel ensemble à la main soit praticable. Ainsi, si personne ne trouve une preuve plus simple, il faudra admettre que le théorème des quatre couleurs exige une preuve que personne ne peut vérifier sans ordinateur même en y passant toute sa vie.