PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

DAVID MAKINSON

Qu'est-ce la complétude structurale ?

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 3-4
, p. 65-66
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_65_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979 t. 16-3.4

QU'EST-CE LA COMPLETUDE STRUCTURALE ?

par

David MAKINSON

Université de Beyrouth

Sommaire.

Le concept de la complétude structurale est dû à W. Pogorzelski [1], et à été étudié et appliqué par Pogorzelski et ses collaborateurs dans toute une série de publications, par exemple [2]. Si Cn est une opération de conséquence pour un langage propositionel, on dit que Cn est structuralement complète ssi toute règle structurale qui est admissible dans Cn est dérivable dans Cn.

Ici, une règle est sous-ensemble $r \subseteq 2^S \times S$, où S est l'ensemble de formules ; on dit que r est structurale ssi chaque fois que $\langle X,\alpha\rangle \in r$ on a $\langle\sigma(X), \sigma(\alpha)\rangle \in r$ pour tout homomorphisme $\sigma : S \to S$; similairement, une opération de conséquence Cn se dit structurale ssi $\alpha \in Cn(X)$ implique $\sigma(\alpha) \in Cn(\sigma(X))$ pour tout homomorphisme $\sigma : S \to S$; une règle r se dit dérivable dans Cn ssi chaque fois que $\langle X,\alpha\rangle \in r$ on a $\alpha \in Cn(X)$; r se dit admissible dans Cn ssi chaque fois que $X \subseteq Cn(\emptyset)$ et $\langle X,\alpha\rangle \in r$ on a $\alpha \in Cn(\emptyset)$.

On peut se demander si le concept de la complétude structurale peut se caractériser d'une façon plus directe ; en particulier, si on peut le caractériser sans les concepts ni de dérivabilité d'une règle, ni d'admissibilité,

ni même de règle. Nous constatons ici que, pour les opérations de conséquence structurales, c'est bien ainsi : si Cn est une opération de conséquence structurale, alors Cn est structuralement complète ssi $Cn' \leq Cn$ pour toute opération de conséquence structurale Cn' (pour le même langage propositionnel) tel que $Cn'(\emptyset) = Cn(\emptyset)$.

Une vérification de ce résultat — ainsi qu'un résultat parallèle qui caractérise la complétude structurale dans le cas où, dans la définition de complétude structurale, le concept de règle est entendu d'une manière finitaire et donc plus restreinte ($r \subseteq S^n \times S$ pour quelque nombre naturel $n \geq 0$) — apparaîtra dans "A characterization of structural completeness of a structural consequence operation", dans Reports on Mathematical Logic.

REFERENCES

[1] Pogorzelski, W.A., Structural completeness of the propositional calculus, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Math. Astron. Phys. 19 (1971) 349-351.

[2] Tokarz, M., Connections between some notions of completeness of structural propositional calculi, Studia Logica 32 (1973) 77-89.