PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

WALTER FELSCHER

Eine weit reichende Wohlordnung der naturlichen zahlen

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 3-4
, p. 47-61
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_47_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979 t.16-3.4

EINE WEIT REICHENDE WOHLORDNUNG DER NATURLICHEN ZAHLEN

par

Walter FELSCHER

Université de TUBINGEN

In diesem Paragraphen soll als Beispiel die Menge ω mit einer Wohlordnung versehen werden, deren Ordinalzahl schon ziemlich weit in der zweiten Zahlklasse liegt.

Die hier zu Grune liegende Idee geht sehr anschaulich von dem Versuch aus, die Menge ω entlang der Ordinalzahlreihe auf möglichst ökonomische Art durchzuzählen. Man beginnt nämlich mit

$$0,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 2^2\ ,\ 2^{2^2} = 2^{(2^2)},\ 2^{2^{2^2}} = 2^{(2^{(2^2)})}\ ,\ \ldots$$

und erhält damit eine Abbildung ϕ, welche die Ordinalzahl ω auf diese sehr reinen Zweierpotenzen abbildet. Um die Abbildung ϕ jenseits von ω fortzusetzen, bietet sich für Nachfolgerzahlen $x + 1$ sogleich die rekursive Definition $\phi(x + 1) = 2^{\phi(x)}$ an ; es bleibt daher übrig, die Funktion ϕ noch für möglichst viele Limeszahlen zu erklären. Für die erste Limeszahl, ω selbst, ist es notwendig, einen Wert vorzuschreiben, der nicht von der Art jener reinen Zweierpotenzen ist ; man setzt daher $\phi(\omega) = 3$, also auch $\phi(\omega^2) = 2.3$ und allgemein $\phi(\omega(1 + x)) = 2^{\phi(x)}.3$, sodass man etwa $\phi(\omega^2) = 2^{\phi(\omega)}.3 = 2^3.3$ erhält. Diese Zählung der Limeszahlen ist solange möglich, wie die Ungleichung $x < \omega(1 + x)$ gilt und damit eine rekursive Definition ermöglicht ; erreicht man die erste Ordinalzahl x mit $x = \omega(1 + x)$, nämlich ω^ω , so wird es wiederum nötig, einen neuartigen Wert vorzuschreiben. Man setzt deshalb $\phi(\omega^\omega) = 3^2$ und kann damit für die nächstfolgenden Limeszahlen, welche jener Ungleichung genügen, gemäss dem zuvor angegebenen Verfahren weiterzählen, bis man zur nächsten Lösung der Gleichung $x = \omega(1+x)$ gelangt. Da das angegebene Verfahren ganz allgemein für Zahlen x mit $x < \omega(1+x)$ in Kraft bleibt, bleibt nur übrig , die Funktion ϕ für die Lösungen der Gleichung $x = \omega(1+x)$ zu definieren ; das aber sind genau die Ordinalzahlen der Gestalt $\omega^{\omega}(1+y)$. Um ihnen Werte zuzuordnen, bedenkt man, dass das vorhandene Verfahren den Nichtlösungen nur solche natürlichen Zahlen zuordnet, welche 3 mit dem Exponenten 1 enthalten ; im Einklang mit $\phi(\omega^{\omega}) = 3^2$ definiert man deshalb $\phi(\omega^{\omega}(1+x)) = 2^{\phi(x)}.3^2$. Dies ist solange eine rekursive Definition, wie $x < \omega^{\omega}(1+x)$ gilt, sodass nur übrig bleibt, die Funktion ϕ für die Lösungen der Gleichung $x = \omega^{\omega}(1+x)$ zu definieren ; das aber sind genau die Ordinalzahlen der Gestalt $\omega^{\omega^2}(1+y)$. Für diese ist der Faktor 3^{2^2} verfügbar, sodass man definiert $\phi(\omega^{\omega^2}(1+x)) = 2^{\phi(x)}.3^{2^2}$, solange nicht die Gleichung $x = \omega^{\omega^2}(1+x)$ gilt. Nun sind aber ganz allgemein, für jede Ordinalzahl v, die Lösungen der Gleichung $x = \omega^{\omega^v}(1+x)$ genau die Ordinalzahlen der Gestalt $\omega^{\omega^{v+1}}(1+y)$; dies legt zunächst für natürliche Zahlen v die Definition $\phi(\omega^{\omega^v}(1+x)) = 2^{\phi(x)}.\ 3^{\phi(1+v)}$ nahe, wobei $x < \omega^{\omega^v}(1+x)$ gelten muss. Jedoch ist klar, dass dabei die Beschränkung auf natürliche Zahlen v gar nicht nötig ist ; man kann diese Definition daher auch für beliebige Ordinalzahlen v treffen, sofern dabei nur $1 + v < \omega^{\omega^v}(1+x)$ gilt, was mit $v < \omega^{\omega^v}(1+x)$ gleichbedeutend ist. Wegen dieser Bedingung an v ist also die Funktion ϕ für alle Zahlen v mit $v = \omega^{\omega^v}$, also auch $1 + v = \omega^{\omega^v}$, nicht so zu definieren ; dies sind aber die einzigen Ausnahmestellen, denn aus $v < \omega^{\omega^v}$, folgt erst recht $v < \omega^{\omega^v}(1+x)$. Wegen $v \leq \omega^v \leq \omega^{\omega^v}$ ist aber $v = \omega^{\omega^v}$ gleichbedeutend mit $v = \omega^v$; von dieser Gleichung wurde aber in 5. bemerkt, dass sie die ϵ-Zahlen v kennzeichnet.

Damit ist gesichert, dass die Funktion ϕ für alle Ordinalzahlen z, welche nicht ϵ-Zahlen sind, rekursiv definiert werden kann, sofern sie schon für alle ϵ-Zahlen unterhalb von z bekannt ist. Zur Berechnung von $\phi(z)$

bedenkt man, dass es Zahlen w mit $z < \omega^{\omega^w}(1 + z)$ gibt, denn ist etwa r eine ϵ-Zahl oberhzlb von z, so gilt $z < r < r + 1 < \omega^{\omega^{r+1}}(1 + z)$; wählt man w in dieser Ungleichung minimal, so kann w keine Limeszahl sein, da sonst ω^{ω^w} das Supremum aller $\omega^{\omega^{w'}}$ mit $w' < w$ wäre und daher auch $z < \omega^{\omega^{w'}}$ für gewisse solcher w' gelten müsste. Mithin gilt $w = 0$ oder $w = v + 1$, sodass im zweiten Falle z der Gleichung $z = \omega^{\omega^v}(1 + z)$ genügt. In jedem Falle kann man daher z in der Gestalt $\omega^{\omega^v}(1 + y)$ darstellen, und das ergibt $\phi(z) = 2^{\phi(y)}.3^{\phi(w)}$. Im Besonderen ist die Funktion ϕ daher für alle Zahlen z unterhalb von ϵ_0 definiert. Für ϵ_0 jedoch muss man, ähnlich wie es zuvor für ω der Fall war, einen neuen Wert vorschreiben, der nicht mehr rekursiv aus den bisherigen gewonnen wird ; es bietet sich die Definition $\phi(\epsilon_0) = 5$ an. Die Wertzuteilung für die weiteren ϵ-Zahlen geschieht nun im Prinzip nach derselben Methode, die bisher angewandt wurde, allerdings fehlen bisher die geeigneten Begriffe um zu sagen, welche ϵ-Zahl dann etwa den Wert 7 erhalten wird. Weiter ist es zwar plausibel, dass man nach hinreichend langer Zählarbeit durch diese Verahren tatsächlich alle natürlichen Zahlen erschöpft, doch fehlen bisher noch die feineren Werkzeuge zu einer Uberlegung darüber, dass tatsächlich keine Lücken bleiben und alle möglichen Exponentenfolgen auch vorkommen. Um diese Fragen systematischer zu behandeln, ist es angebracht, einige Hilfsmittel bereit zu stellen.

Bereits in 4. wurde erklärt, dass man unter einer <u>Normalfunktion</u> N eine auf ganz ORD definierte Funktion verstehe, für die aus $x < y$ folgt $N(x) < N(y)$, und die für Limeszahlen x <u>stetig</u> ist : $N(x) = \sup(\mathrm{im}(N \mid x))$. Es folgt aus dem Zermelo'schen Lemma in 2., dass dann $x \leq N(x)$ für alle x gilt ; der Wertebereich einer Normalfunktion ist daher eine unbeschränkte Teilklasse von ORD. Aus der Stetigkeit von N folgt weiter, dass für jede monotone Folge α mit $\mathrm{im}(\alpha) \subseteq \mathrm{im}(N)$ auch $\lim \alpha$ ein Element von $\mathrm{im}(N)$ ist. <u>Umgekehrt ist eine unbeschränkte Teilklasse</u> A <u>von</u> ORD, <u>welche diese</u>

Abgeschlossenheitseigenschaft hat, auch Wertebereich einer eindeutid bestimmten Normalfunktion : da A unbeschränkt ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Ordnungsisomorphismus N von ORD auf A ; N ist stetig, denn ist x Limeszahl, so ist $< N(z) \mid z \in x >$ eine monotone Folge in A, deren Limes s wieder zu A gehört, sodass s das kleinste Element von A oberhalb aller $N(z)$, $z \in x$, ist und daher unter N als Bild von x auftreten muss.

Sei nun x eine Limeszahl und sei $< H_z \mid z \in x >$ eine Folge von Normalfunktionen so, dass aus $z \in y \in x$ folgt $\mathrm{im}(H_y) \subseteq \mathrm{im}(H_z)$; dann ist die Klasse $A = \cap < \mathrm{im}(H_z) \mid z \in x >$ Wertebreich einer Normalfunktion. Ist zunächst α eine monotone Folge in A, so auch in jeder der Mengen $\mathrm{im}(H_z)$, $z \in x$; wegen der Stetigkeit von H_z folgt daraus $\lim \alpha \in \mathrm{im}(H_z)$, also auch $\lim \alpha \in A$. Um eine gegebene Ordinalzahl b durch eine Zahl aus A zu majorisieren, definiere man rekursiv eine Folge α mit $\mathrm{def}(\alpha) = x$, $\alpha(z) \in \mathrm{im}(H_z)$, $b < \alpha(0)$, indem man, für $0 \in y \in x$, die Zahl $\alpha(y)$ in $\mathrm{im}(H_y)$ minimal dafür wählt, dass $\alpha(z) < \alpha(y)$ für alle $z \in y$ gilt. Induktion lehrt sogleich, dass α monoton ist ; aus $z \in y \in x$ folgt aber auch $\alpha(y) \in \mathrm{im}(H_y) \subseteq \mathrm{im}(H_z)$, sodass die Folge α von der Stelle z an in $\mathrm{im}(H_z)$ liegt. Wegen der Stetigkeit von H_z folgt daraus $\lim \alpha \in \mathrm{im}(H_z)$, und da das für alle $z \in x$ gilt, erhält man $\lim \alpha \in A$; wegen $b < \alpha(0) < \lim \alpha$ ist also $\lim \alpha$ die gesuchte Majorante.

Unter einem Fixpunkt einer Normalfunktion N versteht man eine Ordinalzahl x mit $x = N(x)$. Zur Konstruktion von Fixpunkten setzt man $N^1 = N$ und definiert, für $0 \in n \in \omega$, die Iterierten N^n von N durch $N^{n+1}(x) = N(N^n(x))$ für jedes x ; weiter sei noch N^ω durch $N^\omega(x) = \sup < N^n(x) \mid 0 \in n \in \omega >$ erklärt. Ist x nicht schon selbst ein Fixpunkt, so folgt aus $x < N(x)$ und der Monotonie von N, dass $< N^n(x) \mid 0 \in n \in \omega >$ eine monotone Folge α ist, und aus der Stetigkeit von N folgt, dass $N(\mathrm{Lim}\ \alpha) = \lim < N(N^n(x)) \mid 0 \epsilon n \epsilon \omega > = \lim < N^{n+1} \mid 0 \epsilon n \epsilon \omega > = \lim \alpha$ gilt. Daher ist dann $\lim \alpha$ ein Fixpunkt oberhalb von x, und zwar sogar <u>der kleinste</u> Fixpunkt y mit $x < y$, denn aus $N(x) < N(y) = y$ folgt auch $N^n(x) < y$ für alle n mit $0 \epsilon n \epsilon \omega$, also $\lim \alpha \leq y$. Diese Konstruktion lehrt, dass die Fixpunkte von N eine unbeschränkte Teilklasse von ORD bilden ; weiter enthält diese Klasse zu jeder monotonen Folge ihrer Elemente auch deren Limes, denn wegen der Stetigkeit von N ist das Supremum einer Menge von Fixpunkten wieder ein solcher. Mithin bilden die Fixpunkte von N den Wertebereich einer Normalfunktion, die man als die (erste) <u>Ableitung</u> N_1 von N bezeichnet. Damit wird es möglich, zu jeder Ordinalzahl x die x-te Ableitung N_x von N zu erklären, idem man $N_0 = N$ setzt, N_{x+1} als die Ableitung von N_x definiert, und für Limeszahlen x die Funktion N_x als die Normalfunktion mit dem Wertebreich $\cap < \mathrm{im}(N_z) \mid z \epsilon x >$ erklärt.

Eine Normalfunktion N heisst <u>nicht trivial</u>, wenn $0 < N(0)$ gilt. Der erste Fixpunkt $N_1(0)$ von N ist dann von 0 verschieden, sodass $0 < N_1(0)$ gilt. Daher gilt für jedes x auch $0 < N_x(0)$, woraus $N_x(0) < N_x(N_x(0))$ folgt. Daher ist $N_x(0)$ kein Fixpunkt von N_x, sodass $N_x(0) < N_{x+1}(0)$ gilt. Ist x eine Limeszahl, so ist, für jedes $z \epsilon x$, die Zahl $N_z(0)$ das kleinste Element von $\mathrm{im}(N_z)$ und die Folge $\alpha = < N_z(0) \mid z \epsilon x >$ liegt von der Stelle z an in $\mathrm{im}(H_z)$. Daher liegt $\lim \alpha$ in jeder der Mengen $\mathrm{im}(N_z)$, also auch im Wertebereich der Normalfunktion N_x. Andererseits folgt aus $v < \lim \alpha$ auch $v < N_z(0)$ für ein $z \epsilon x$, sodass v nicht in $\mathrm{im}(N_z)$ und daher auch nicht im Wertebereich von N_x liegt. Daher ist $\lim \alpha$ das kleinste Element von $\mathrm{im}(N_x)$, also $N_x(0)$. <u>Die Funktion</u> L <u>mit</u> $L(x) = N_x(0)$ <u>ist daher stetig</u>, für nicht triviales N <u>also wieder eine Normalfunktion</u>. Ist N nicht trivial, so existiert daher auch die Ableitung D von L ; sie heisst die (erste) <u>Diagonalfunktion</u> von N, und das Verfahren, welches von N zu D führt, heisst auch die <u>erste Diagonalkonstruktion</u>.

Man vergrössere die Klasse ORD zu einer Klasse $ORD^{\S}$, indem man ein weiteres Element -1 zu ORD hinzufügt ; man setze fest $-1 < x$ für alle $x \in ORD$, $-1 + x = x - 1$ für $0 \in x \in \omega$, $-1 + x = x$ für $\omega \leq x$. Damit formuliert man den <u>ersten Auflösungssatz</u> : Sei N eine Normalfunktion so, dass $im(N_1)$ nur aus Limeszahlen besteht (sodass N gewiss nicht trivial ist), und sei D die Diagonalfunktion von N, als Ableitung von L wie oben definiert. <u>Dann gibt es eine Bijektion</u> f <u>von</u> $im(N)$ <u>auf</u> $ORD \times ORD^{\S}$ <u>derart, dass mit</u> $f(x) = [b_x, a_x]$ <u>gilt</u>

(i) wenn $x \in im(N) - im(D)$, so $b_x < x$, $a_x < x$,

(ii) $a_x = -1$ genau dann, wenn $x \in im(L)$,

(iii) $b_x = x$ genau dann, wenn $x \in im(D)$.

Zum Beweis definiert man zunächst f auf $im(L)$ durch $f(N_z(0)) = [z, -1]$, sodass in (ii), (iii) die ersten Bedingungen jedenfalls aus den zweiten folgen. Sei nun x aus $im(N)$ aber nicht aus $im(L)$. Da x dann auch nicht im $im(D)$ liegt, folgt aus $x < N_x(0)$, dass es ein kleinstes y mit nicht $x \in im(N_y)$ gibt, wobei noch $y \leq x$ gilt. Dieses y kann nach Definition von $im(N_y)$ keine Limeszahl sein, es ist aber auch positiv, da y im Bild von N, also von N_0 liegt. Folglich gilt $y = v + 1$; definiert man $b_x = v$, so folgt $b_x < x$. Es gibt nun eine Darstellung $x = N_v(w_x)$ mit eindeutigem w_x ; wegen nicht $x \in im(L)$ gilt $0 < w_x$. Weiter liegt w_x nicht in $im(N_{v+1})$, denn sonst folgte aus $w_x = N_{v+1}(u)$ auch $x = N_v(N_{v+1}(u)) = N_{v+1}(u)$. Mithin gibt es ein kleinstes u so, dass $w_x < N_{v+1}(u)$ gilt, und wegen der Stetigkeit von N_{v+1} kann u keine Limeszahl sein, sodass $u = 0$ oder $u = z + 1$ gilt. Man setze

$$c_x = 0 \text{ im ersten, } \quad c_x = N_{v+1}(z) \text{ im zweiten Falle}$$

und definiers d_x durch $w_x = c_x + d_x$; wegen $c_x < w_x$ gilt $0 < d_x$; man definiere

$$a_x = c_x + (-1 + d_x).$$

Da x nicht in $\mathrm{im}(N_{v+1})$ liegt, gilt schliesslich $a_x \leq w_x < N_v(w_x) = x$. Damit ist f definiert, und (i), (ii), (iii) gelten. Zum Nachweis, dass f die gewünschte Bijektion ist, genügt es nun, dass f die Menge $\mathrm{im}(N) - \mathrm{im}(L)$ bijektiv auf $\mathrm{ORD} \times \mathrm{ORD}$ abbildet. Dazu definiers man eine Abbildung g von $\mathrm{ORD} \times \mathrm{ORD}$ in $\mathrm{im}(N) - \mathrm{im}(L)$ wie folgt. Zu Ordinalzahlen b und a gibt es ein kleinstes k mit $a < N_{b+1}(k)$; wieder ist k keine Limeszahl, sodass $k = 0$ oder $k = m + 1$ gilt ; man setze

$$c_a = 0 \text{ im ersten, } \quad c_a = N_{b+1}(m) \quad \text{im zweiten Falle}$$

und definiere d_a durch $a = c_a + d_a$; damit setze man $w_a = c_a + (1 + d_a)$ und

$$g(b, a) = N_b(w_a).$$

Da stets $0 < w_a$ gilt, liegt $g(b, a)$ nicht in $\mathrm{im}(L)$. Weiter wird beim Beweis die folgende Beobachtung nützlich sein. Sei B eine Menge von Ordinalzahlen, sei p eine Ordinalzahl nicht in B und sei q eine Ordinalzahl, von der man nur weiss, dass sie p oder der unmittelbare Vorgänger von p (sofern es einen solchen überhaupt gibt) ist. Dann gilt : eine Ordinalzahl r ist genau dann maximal in B für die Eigenschaft $r < p$, wenn sie in B maximal für die Eigenschaft $r \leq q$ ist.

Damit sieht man, dass aus $x \in \mathrm{im}(N) - \mathrm{im}(L)$ folgt $g(f(x)) = g(b_x, a_x) = x$. Aus der Definition von a_x folgt nämlich, dass a_x gleich w_x oder unmittelbarer Vorgänger von w_x ist. Setzt man $a = a_x$, $b = b_x$, so ist daher ein r in $\mathrm{im}(N_{b+1})$ genau dann maximal für $r < w_x$, wenn es maximal für $r \leq a$ ist. Folglich gilt $c_x = N_{b+1}(v)$ genau dann, wenn $c_a = N_{b+1}(m)$ gilt, und beide Elemente sind dann dieselben. Gibt es aber solche r in $\mathrm{im}(N_{b+1})$ nicht, so gilt ohnehin $c_x = c_a = 0$. Daher gilt $c_x = c_a$ in jedem Falle ; wegen $a = c_a + d_a = c_x + (-1 + d_x)$ folgt daraus $d_a = -1 + d_x$

und damit $g(b, a) = N_b(c_x + (1 + (-1 + d_x))) = N_b(c_x + d_x) = N_b(w_x) = x$.
Umgekehrt gilt für Ordinalzahlen b und a auch $a = a_{g(b,\ a)}$ und $b = b_{b(b,\ a)}$.
Man setze nämlich $x = g(b, a) = N_b(w_a)$ und zeige zunächst, dass nicht $x \in im(N_{b+1})$ gilt. Sonst nämlich wäre x Fixpunkt von N_b ; wegen $x = N_b(w_a) = N_b(x)$ folgte daraus $N_b(w_a) = x = w_a$, sodass auch w_a Fixpunkt von N_b wäre. Aus $w_a \in im(N_1)$ folgte nun, dass w_a Limeszahl wäre, und das ergäbe $w_a = c_a + (1 + d_a) = c_a + d_a = a$. Als Fixpunkt von N_b läge w_a in $im(N_{b+1})$, und wegen $a = w_a$ folgte nach Definition von c_a daraus $c_a = a$. Daraus aber folgte $d_a = 0$ und damit der Widerspruch $c_a + 1 = c_a + (1 + d_a) = c_a + d_a = c_a$. Somit gilt $x \in im(N_b) - im(N_{b+1})$, und das ergibt $b_x = b$. Aus der Definition von w_a folgt, dass a gleich w_a oder unmittelbarer Vorgänger von w_a ist. Wie zuvor folgt daraus $c_x = c_a$, also auch $d_x = 1 + d_a$, und damit $a_x = c_x + (-1 + d_x) = (c_x + (-1 + (1 + d_a)) = c_a + d_a = a$.

Sei nun N wieder eine nicht triviale Normalfunktion ; in systematischer Schreibweise bezeichne man ihre Diagonalfunktion auch als $N^{<1>}$. Nunmehr definiert man rekursiv für jede positive Ordinalzahl x die Normalfunktion $N^{<x>}$, indem man $N^{<x+1>}$ als die erste Diagonalfunktion von $N^{<x>}$ erklärt und, für eine Limeszahl x, noch $N^{<x>}$ über den Durchschnitt der $im(N^{<z>})$, $z \in x$, definiert. Sei nun L^1 die Funktion mit $L^1(x) = N^{<x>}(0)$. Da $N^{<x+1>}(0)$ der erste Fixpunkt a der Funktion H mit $H(y) = N_y^{<x>}(0)$ ist, folgt aus $0 < a$ auch $N^{<x>}(0) = N_0^{<x>}(0) < N_a^{<x>}(0) = a = N^{<x+1>}(0)$, also $L^1(x) < L^1(x + 1)$; dass L^1 stetig ist, sieht man mit derselben Überlegung, welche die Stetigkeit der Funktion L ergab. Daher ist L^1 eine nicht triviale Normalfunktion. Zur Vereinfachung der Schreibweise werde nun festgesetzt : ist n eine natürliche Zahl, $0 < k < n$, und sin $x_n, \ldots, x_k$ Ordinalzahlen, so bezeichne $\langle x_n, \ldots, x_k ; 0_{k-1}\rangle$ diejenige n-gliedrige Folge, in der auf $x_n, \ldots, x_k$ noch $k - 1$ Nullen folgen.

Sei nun n eine natürliche Zahl, $1 < n$. Für jede nicht triviale Normalfunktion N sei bereits folgendes geleistet :

(i) für alle positiven m, $m < n$, und für alle m-gliedrigen Folgen $\langle x_m, \dots, x_1 \rangle$ sind die nicht trivialen Normalfunktionen $N^{\langle x_m, \dots, x_1 \rangle}$ definiert ;

(ii) für alle positiven k, $k < n$, ist die k-te Diagonalkonstruktion definiert ;

(iii) die Funktion L^{n-1} mit $L^{n-1}(x) = N^{\langle x; 0_{n-2} \rangle}(0)$ ist eine nicht triviale Normalfunktion.

Dann definiert man $N^{\langle 1; 0_{n-1} \rangle}$ als die Ableitung von L^{n-1} ; die Bildung von $N^{\langle 1; 0_{n-1} \rangle}$ aus N heisst die n-te Diagonalkonstruktion. Damit erklärt man für alle n-gliedrigen Folgen $x_n, \dots, x_1$ von Ordinalzahlen die nicht trivialen Normalfunktionen $N^{\langle x_n, \dots, x_1 \rangle}$: aus $N^{\langle x_n, \dots, x_{k+1}, x_k; 0_{k-1} \rangle}$ erhält man $N^{\langle x_n, \dots, x_{k+1}, x_k + 1; 0_{k-1} \rangle}$ durch die k-te Diagonalkonstruktion, $k \leq n$, und für eine Limeszahl x definiert man $N^{\langle x_n, \dots, x_{k+1}, x; 0_{k-1} \rangle}$ über den Durchschnitt der Klassen $\mathrm{im}(N^{\langle x_n, \dots, x_{k+1}, z; 0_{k-1} \rangle})$ für $z \in x$. Im Besonderen entsteht also aus $M = N^{\langle x; 0_{n-1} \rangle}$ durch Anwendung der n-ten Diagonalkonstruktion die Funktion $M^{\langle 1; 0_{n-1} \rangle} = N^{\langle x+1; 0_{n-1} \rangle}$, wobei an Stelle von L^{n-1} die entsprechende Normalfunktion H^{n-1} mit $H^{n-1}(y) = M^{\langle y; 0_{n-2} \rangle}(0) = N^{\langle x, y; 0_{n-2} \rangle}(0)$ tritt. Definiert man L^n durch $L^n(x) = N^{\langle x; 0_{n-1} \rangle}(0)$, so ist $L^n(x+1)$, nämlich $N^{\langle x+1; 0_{n-1} \rangle}(0)$, der erste Fixpunkt a von H^{n-1} ; daraus folgt $L^n(x) = N^{\langle x; 0_{n-1} \rangle}(0) = H^{n-1}(0) < H^{n-1}(a) = a = L^n(x+1)$. Daher ist die Funktion L^n strikt monoton ; dass sie auch stetig ist, sieht man mit derselben Überlegung, welche die Stetigkeit der Funktion L ergab. Mithin ist auch L^n normal, und die Behauptungen (i), (ii), (iii) sind auch im Falle $n + 1$ nachgewiesen.

Für jede positive natürliche Zahl n definiert die nicht triviale Normalfunktion N daher Ordinalzahlen $t_n = N^{<1;0_{n-1}>}(0)$, die eine monotone Folge bilden ; mit θ_N bezeichne man den Limes der t_n. Weiter bezeichne W_N die Menge aller endlichen, wenigstens zweigliedrigen Folgen der Gestalt $<r, s>$ oder $< x_n, \ldots, x_1, r, s >$ mit $x_n, \ldots, x_1, r$ aus θ_N, $0 < x_n$, s aus θ_N oder $s = -1$. Dann besagt der zweite Auflösungssatz : Ist N eine Normalfunktion derart, dass $\mathrm{im}(N_1)$ nur aus Limeszahlen besteht, so gibt es eine Bijektion h von $\mathrm{im}(N) \cap \theta_N$ auf W_N so, dass aus $h(x) = < x_n, \ldots, x_1, r, s >$ folgt $x_i < x$ für $0 < i \leq n$, $r < x$, $s < x$.

Zum Beweis definiert man h zunächst auf $\mathrm{im}(N) - \mathrm{im}(N^{<1>}) \cap \theta_N$ als $h(x) = < b_x, a_x >$ mit $f(x) = [b_x, a_x]$ aus dem ersten Auflösungssatz ; es ist klar dass dabei zweigliedrige Folgen aus W_N entstehen. Um einzusehen, dass sämtliche zweigliedrigen Folgen aus W_n so auftreten, genügt es zu zeigen, dass die Umkehrabbildung g von f die Paare $[b, a]$ aus $\theta_N \times \theta_N$ auf Werte $N_b(w_a)$ aus θ_N sendet. Dazu bedenkt man, dass aus $z < y$ auch $N_z(w) \leq N_y(w)$ für alle Argumente w folgt ; weiter folgt aus $y \in \mathrm{im}(N^{<1>})$ stets $y = N_y(w)$, sodass y Fixpunkt aller N_z mit $z < y$ ist ; wegen $\mathrm{im}(N^{<x_n, \ldots, x_1>}) \subseteq \mathrm{im}(N^{<1>})$ folgt also aus $n < m$, $t_n < t_m$ auch $N_{t_n}(t_m) = t_m$. Zu $[b, a]$ aus $\theta_N \times \theta_N$ findet man aber t_n und t_m mit $b < t_n$, $a < t_m$, und dabei kann man noch mit $n < m$ wählen ; wegen $w_a \leq a + 1$ gilt dann auch $w_a < t_m$, und das ergibt $N_n(w_a) \leq N_{t_n}(t_m) = t_m < \theta_N$. Es bleibt also h auf $\mathrm{im}(N^{<1>}) \cap \theta_N$ zu definieren.

Eine Zahl x aus $\mathrm{im}(N^{<1>})$ ist damit Wert wenigstens einer Funktion $N^{<x_n, \ldots, x_1>}$. Aus $x < \theta_N$ folgt $x < t_i$ für ein passendes i, und wegen $t_i = N^{<1;0_{i-1}>}(0)$ ist x dann nicht mehr Wert der Funktionen $N^{<x_m, \ldots, x_1>}$ mit $m \geq i$. Somit kann man n maximal dafür wählen, dass

x Wert einer Funktion $N^{<x_n,\dots,x_1>}$ ist. Sei $k \le n$ und seien $x_n,\dots,x_{k+1}$ so bestimmt, dass für alle k' mit $k < k'$ gilt : $x_{k'}$ ist maximal dafür, dass x in $\mathrm{im}(N^{<x_n,\dots,x_{k'},y_{k'-1},\dots,y_1>})$ mit irgend welchen $y_{k'-1},\dots,y_1$ gilt ; dabei ist im trivialen Fall $k = n$ diese Aussage leer. Die Funktion H mit $H(z) = N^{<x_n,\dots,x_{k+1},z;0_{k-1}>}(0)$ ist eine Normalfunktion ; aus $x < x+1 \le H(x+1) = N^{<x_n,\dots,x_{k+1},x+1;0_{k-1}>}(0)$ folgt daher, dass x nicht Bild unter der Funktionen $N^{<x_n,\dots,x_{k+1},y_k,\dots,y_1>}$ mit $x < y_k$ sein kann ; man wähle y_k minimal für diese Eigenschaft. Aus $\mathrm{im}(N^{<x_n,\dots,x_{k+1},y_k,\dots,y_1>}) \subseteq \mathrm{im}(N^{<x_n,\dots,x_{k+1},y_k;0_{k-1}>})$ und der Definition der zweiten dieser Klassen folgt aber, dass y_k dann keine Limeszahl sein kann ; man definiere x_k durch $y_k = x_k + 1$, sodass $x = N^{<x_n,\dots,x_k,y_{k-1},\dots,y_1>}(w)$ mit passenden $y_{k-1},\dots,y_1, w$ gilt. Induktion lehrt daher, dass x eindeutig eine Folge $x_n,\dots,x_1$ mit diesen Bedingungen bestimmt. Dabei gilt noch $x_k < x$ für jedes x_k, denn sonst folgte

$$x \le H(x) \le H(x_k) = N^{<x_n,\dots,x_{k+1},x_k;0_{k-1}>}(0) \le N^{<x_n,\dots,x_k,y_{k-1},\dots,y_1>}(w) = x,$$

also $x = H(x)$, sodass $x \in \mathrm{im}(N^{<x_n,\dots,x_{k+1};0_k>})$ im Widerspruch zur Maximalität von x_{k+1} wäre.

Mit den so gewonnenen $x_n,\dots,x_1$ setze man $M = N^{<x_n,\dots,x_1>}$. Mit f bezeichne man die zu der Normalfunktion M nach dem ersten Auflösungssatz bestimmte Bijektion ; mit $f(x) = [b_x, a_x]$ folgt wegen der Maximalität von x_1 nun, dass $b_x < x$, $a_x < x$ gilt. Man definiert nun $h(x) = < x_n,\dots,x_1, r, s >$ mit $r = b_x$; tritt einer der Fälle

(A_1) $\quad r = M_r(0)$,

(A_2) $\quad r = 0,\ x_1 = M(0)$,

...

(A_{n+1}) $\quad r = 0,\ x_1 = \dots = x_{n-1} = 0,\ x_n = M(0)$

ein, so setzt man $s = -1 + a_x$; tritt keiner dieser Fälle ein, so setzt man $s = a_x$ als Fall (B). Damit ist h definiert und liefert Werte der gewünschten Art in W_N. Es bleibt zu zeigen, dass h eine Bijektion ist. Dazu definiers man eine Abbildung j der wenigstens dreigliedrigen Folgen aus W_N in $\mathrm{im}(N^{<1>}) \cap \theta_N$ wie folgt. Zu $< x_n, \ldots, x_1, r, s >$ aus W_n sei M die Normalfunktion $N^{<x_n, \ldots, x_1>}$ und sei f die Bijektion von $\mathrm{im}(M)$ auf $\mathrm{ORD} \times \mathrm{ORD}^{\S}$ aus dem ersten Auflösungssatz. Dann sei $j(x_n, \ldots, x_1, r, s) = M_r(w)$ mit $M_r(w) = f^{-1}(r, 1+s)$ in den Fällen $(A_1), \ldots, (A_{n+1})$, $M_r(w) = f^{-1}(r, s)$ im Falle (B).

Aus diesen Definitionen folgt sogleich, dass $x = j(h(x))$ für x aus $\mathrm{im}(N^{<1>}) \cap \theta_N$ gilt. Umgekehrt sei ζ eine folge aus W_N, $\zeta = < x_n, \ldots, x_1, r, s >$; zum Nach weis von $h(j(\zeta)) = \zeta$ ist dann zu zeigen, dass die Ordinalzahl $j(\zeta)$ unter dem Algorithmus zur Gewinnung einer maximalen Darstellung von $j(\zeta) = x$ wieder die $x_n, \ldots, x_1$ bestimmt. Dazu ist es angebracht, die folgenden Eigenschaften der Funktion f^{-1} aus dem ersten Auflösungssatz zu bemerken. Gilt $0 \le a$, so $f^{-1}(b, a) = g(b, a) = M_b(w_a) = x$ mit $0 < w_a < x$, da x kein Fixpunkt von M_b ist. Hingegen gilt $f^{-1}(b, -1) = M_b(0) = x$ mit $0 < x$, da $0 < M(0) \le M_b(0)$.

Man zeigt nun zunächst, dass bei gegebenem $\zeta = < x_n, \ldots, x_1, r, s, >$ und $x = j(\zeta)$ die Zahl x_1 das maximale y mit $x \in \mathrm{im}(N^{<x_n, \ldots, x_2, y>})$ ist. Denn aus $x_1 < y$ folgte auch $x \in \mathrm{im}(N^{<x_n, \ldots, x_2, x_1+1>})$, mit $M = N^{<x_n, \ldots, x_1>}$ also $x \in \mathrm{im}(M^{<1>})$, $x = M_x(0)$. Andererseits gilt $x = M_r(w)$ nach Definition von j mit $r \le x$. Im Falle $r = x$ folgte $w = 0$, also $r = M_r(0)$, sodass der Fall (A_1) vorläge und $x = M_r(w) = f^{-1}(r, 1+s)$ gälte ; wegen $0 \le 1 + s$ ergäbe das den Widerspruch $0 < w$. Im Falle $r < x$ wären Werte unter M_x Fixpunkte unter

M_r, sodass aus $x = M_x(0) = M_r(w)$ der Widerspruch $x = w$ folgte. Sei nun k mit $1 < k \le n$ gegeben und sei schon für alle k' mit $0 < k' < k$ gezeigt, dass $x_{k'}$ das maximale y ist, für das $x \in \mathrm{im}(N^{\langle x_n,\dots,x_{k'+1},y,y_{k'-1},\dots,y_1\rangle})$ mit passenden $y_{k'-1},\dots,y_1$ gilt ; wie folgt sieht man, dass auch x_k die entsprechende Maximaleigenschaft hat. Gäbe es nämlich ein y mit $x_k < y$, $x \in \mathrm{im}(N^{\langle x_n,\dots,x_{k+1},y,y_{k-1},\dots,y_1\rangle}) \subseteq \mathrm{im}(N^{\langle x_n,\dots,x_{k+1},y;0_{k-1}\rangle}) \subseteq \mathrm{im}(N^{\langle x_n,\dots,x_{k+1},x_k+1;0_{k-1}\rangle})$, so folgte mit $H = N^{\langle x_n,\dots,x_k;0_{k-1}\rangle}$, $N^{\langle x_n,\dots,x_{k+1},x_k+1;0_{k-1}\rangle} = H^{\langle 1;0_{k-1}\rangle}$ nun $x = H^{\langle x;0_{k-2}\rangle}(0)$; andererseits gilt wegen $M = H^{\langle x_{k-1},\dots,x_1\rangle}$ auch $x = H_r^{\langle x_{k-1},\dots,x_1\rangle}(w)$. Im Falle $x_{k-1} \ge x$ folgte daraus $x_{k-1} = x$, $x_{k-2} = \dots = x_1 = 0$, $r = 0$, $w = 0$, sodass der Fall (A_k) vorläge ; wegen $x = f^{-1}(r, 1+s)$ ergäbe das den Widerspruch $0 < w$. Im Falle $x_{k-1} < x$ folgte $x_{k-1} + 1 < x$, sodass wegen $x \in \mathrm{im}(H^{\langle x;0_{k-2}\rangle}) \subseteq \mathrm{im}(H^{\langle x_{k-1}+1;0_{k-2}\rangle})$ ein Widerspruch zur Maximalität von x_{k-1} vorläge. – Endlich findet man, dass sich x auch nicht als Wert unter einer Funktion $N^{\langle y_m,\dots,y_1\rangle}$ mit $n < m$ schreiben lässt, denn sonst läge x auch in $\mathrm{im}(N^{\langle 1;0_n\rangle})$, und dieselbe Überlegung wie soeben ergibt dann unter Ausnutzung des Falles (A_{n+1}) einen Widerspruch zur Maximalität von x_n.

Damit ist gezeigt, dass $x = j(\zeta)$ zunächst die natürliche Zahl n als maximal bestimmt, damit dann x_n und der Reihe nach $x_{n-1},\dots,x_1$ als maximal. Der Algorithmus der Maximalen Darstellung liefert zu $j(\zeta)$ also wieder die Normalfunktion M, die aus ζ zur Definition von $j(\zeta)$ gebildet wurde ; damit ist aber klar, dass x über M und die zugehörige Bijektion f wieder die Zahlen r und s liefert, die schon in ζ aufraten. Dies lehrt $h(j(\zeta)) = \zeta$ und beendet den Beweis des zweiten Auslösungssatzes.

Nunmehr stehen alle Werkzeuge bereit, um die gesuchte **Wohlordnung** der natürlichen Zahlen auf bequeme Art zu konstruieren. Dazu gehe man aus von der Normalfunktion F mit $F(x) = \omega(1 + x)$, deren Bilder sämtliche Limeszahlen sind ; die Ordinalzahl θ_F bezeichne man auch als θ_0. Die Ableitungen F_y berechnen sich gemäss $F_y(x) = \omega^{\omega^y}(1 + x)$, sodass $F^{<1>}$ gleich der Funktion D ist, deren Bilder sämtliche ϵ-Zahlen sind. Ist $p_1, p_2, \dots$ die Folge der mit $p_1 = 5$ beginnenden Primzahlen, so definiert man eine Abbildung ϕ von θ_0 in ω durch

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(x + 1) = 2^{\phi(x)} \quad \text{für Nachfolgerzahlen} \quad x + 1,$$

$$\phi(x) = 2^{\phi(1 + s)} . 3^{\phi(1 + r)} \quad \text{für} \quad x \in im(F) - im(D), \quad h(x) = <r, s>,$$

$$\phi(x) = 2^{\phi(1 + s)} . 3^{\phi(r)} . 5^{\phi(x_1)} \dots p_n^{\phi(x_n)} \quad \text{für} \quad x \in im(D), \; h(x) = <x_n, \dots, x_1, r, s>$$

mit h als der Bijektion aus dem zweiten Auflösunssatz. Dies ist eine rekursive Definition, denn aus $h(x) = < x_n, \dots, x_1, r, s >$ folgt $x_i < x$ für $0 < i \leq n$, $r < x$, $s < x$. Weiter ist ϕ injektiv, denn h ist injektiv und die Darstellung natürlicher Zahlen als Prinzahlpotenzen ist eindeutig. Dass ϕ surjektiv ist, zeigt man durch Induktion in ω, wobei man sowohl Induktion über die Grösserbeziehung oder Induktion über den Aufbau der natürlichen Zahlen aus den Exponenten ihrer Primfaktoren verwenden kann. In der Tat ist 0 Bilde unter ϕ, und gilt in 2^a, dass $a = \phi(x)$ ist, so folgt $2^a = \phi(x + 1)$. Gilt in $2^a 3^b$ mit $0 < b$, dass $a = \phi(y)$, $b = \phi(z)$ ist, so folgt $0 < z$, und man erhält $\phi(x) = 2^a 3^b$ mit $x = h^{-1}(- 1 + z, - 1 + y)$. Entsprechend behandelt mant den Fall natürlicher Zahlen mit einem Primfaktor p_n, $1 \leq n$, ebenfalls mit der Surjektivität von h.

Die Funktionen $F^{<x_n, \dots, x_1>}$ wurden (in anderer Schreibweise) bereits von Veblen 08 zur Aufstellung eines Bezeichnungssystems für die

Ordinalzahlen unterhalb von θ_0 eingeführt ; bei Veblen finden sich auch zum ersten Male die grundlegenden Tatsachen über Normalfunktionen und ihre Ableitungen. Die Normalfunktion, die durch die Fixpunkte aller $F^{\langle x_n,\ldots,x_1\rangle}$ (oder, einfacher, aller Funktionen $F^{\langle 1;0_{n-1}\rangle}$) bestimmt wird, wird von Veblen als E notiert, und θ_0 ist die <u>erste Veblen'sche</u> E-<u>Zahl</u>. Schütte hat in 54 ein erheblich weiter reichendes Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen angegeben und es auf eine Konstruktive Art beschrieben ; Schütte hat dabei bemerkt, dass durch dieses konstruktive Bezeichnungssystem die Ordinalzahlen unterhalb von θ_0 (bei Schütte η_0 genannt) bijektiv auf die natürlichen Zahlen abgebildet werden ; eine Variante dieser Konstruktion findet sich auch in Schütte 60, § 11 ff. Die dadurch gewonnene Wohlordnung der natürlichen Zahlen ist dieselbe welche hier betrachtet wurde ; die im Vorangehenden gegebene Darstellung ist jedoch, ähnlich derjenigen Veblen's, mengentheoretisch und nicht konstruktiv, und sie geht auch nicht von der Konstruktion eines Bezeichnungssystems sondern von der anschaulichen Suche nach einer ökonomischen Wohlordnung der natürlichen Zahlen aus. Das Studium von Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen ist eine wichtiges Werkzeug der Beweistheorie.