PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

CLAUDE FRASNAY

Sur quelques classes universelles de relations m-aires

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 3-4
, p. 21-32
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_21_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979 t.16-3.4

SUR QUELQUES CLASSES UNIVERSELLES DE RELATIONS m-AIRES

par

Claude FRASNAY

UNIVERSITE PAUL SABATIER, TOULOUSE

1 - RELATION, EXPANSION PERMUTEE, RECOLLEMENT

1.1. Dans le cadre d'une "théorie des classes" comportant un univers V (classe de tous les ensembles), on adopte pour la classe ω des nombres naturels la conception "ordinale" selon laquelle : $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, etc... Pour tout naturel $m = \{0,1,2,\dots,m-1\}$ et toute classe X, X^m est la classe des applications $x : m \to X$ (ainsi $X^0 = 1$).

1.1.1. Désignons par R la classe des triplets (m,E,α) tels que $m \in \omega$ et $\alpha \subseteq E^m$. Alors R est une classe pure ($R \subseteq V$, $R \notin V$) dont chaque élément $r = (m, E, \alpha)$ est identifié avec la <u>relation</u> d'<u>arité</u> m, de <u>support</u> ensembliste E, de <u>cardinalité</u> $|r| = \text{card}(E)$, <u>satisfaite</u> par les multiplets $(x_0, x_1,\dots,x_{m-1}) \in \alpha$.

1.1.2. Etant donné $m \in \omega$, $n \in \omega$, $E \in V$, nous noterons R_m la classe des relations m-aires, $R_{m,n}$ la classe des relations m-aires de cardinalité $\leq n$, et $R_m(E)$ l'ensemble des relations m-aires de support E.

1.1.3. Lorsque deux relations $r = (m,E,\alpha)$ et $r' = (m,E,\alpha')$ (de même arité et de même support) vérifient $\alpha \subseteq \alpha'$, nous dirons que r est une <u>réduction</u> de r', et que r' est une <u>expansion</u> de r.

1.2. Un cas remarquable d'expansion est celui des <u>expansions **permutées**</u> qui fait intervenir, pour tout $m \in \omega$, le <u>groupe symétrique</u> S_m **(groupe des** permutations de $m = \{0,1,2,\ldots,m-1\}$ et l'ensemble Σ_m des sous-**groupes de** S_m.

1.2.1. Pour une relation $r = (m,E,\alpha)$ et un groupe $G \in \Sigma_m$, la <u>G-expansion</u> $r' = r\times G = (m,E,\alpha')$ est définie par :

$$\alpha' = \{x \circ \sigma : x \in \alpha \text{ et } \sigma \in G\}.$$

La classe R_m est ainsi munie d'une opération externe $(r,G) \to r\times G$ dont le domaine d'opérateurs (à droite) est Σ_m. (En ce qui concerne **le nombre** de ces opérateurs, par exemple pour les 5 premières valeurs de $m : 0 \leq m \leq 4$, les valeurs correspondantes de $\mathrm{card}\,(\Sigma_m)$ sont : 1, 1, 2, 6, 30). **En particulier,** si ϵ_m est l'élément neutre de S_m, alors le groupe $I_m = \{\epsilon_m\}$ est **opérateur** neutre : $r \times I_m = r$ pour tout $r \in R_m$.

1.2.2. Si $r\times G = r$, on dit que la relation r est <u>G-invariante</u>, ou que G est un <u>groupe d'invariance</u> de r. Toute relation $r = (m,E,\alpha)$ admet un <u>groupe maximum d'invariance</u>, à savoir :

$$\mathrm{Inv}(r) = \{\sigma \in S_m : (\forall x)\ (x \in \alpha \Rightarrow x \circ \sigma \in \alpha)\}.$$

Les groupes d'invariance de r sont tous les sous-groupes de $\mathrm{Inv}(r)$.
Les relations m-aires symétriques sont les relations r telles que :

$$\mathrm{Inv}(r) = S_m.$$

1.2.3. Etant donné $G \in \Sigma_m$, toute sous-classe A de R_m **admet** (mod. G) une <u>transformée</u> : $\hat{G}(A) = \{r\times G : r \in A\}$. En particulier, $\hat{G}(R_m)$ **est** la classe des relations m-aires G-invariantes.

Une classe $A \subseteq R_m$ est dite <u>inclusive</u> lorsque $\hat{G}(A) \subseteq A$ **pour tout** $G \in \Sigma_m$ (ce qui équivaut à dire que, pour tout $G \in \Sigma_m : \hat{G}(A) = A \cap \hat{G}(R_m)$). Par exemple, pour tout $n \in \omega$, la classe $R_{m,n}$ est inclusive.

1.3. A toute relation $r = (m,E,\alpha)$ et à tout ensemble $F \subseteq E$ correspond la relation $r|F = (m,F, \alpha \cap F^m)$: on dit que $r|F$ est une <u>restriction</u> de r, et que r est une <u>extension</u> de $r|F$. Pour tout $G \in \Sigma_m$, on vérifie aisément que : $(r \times G)|F = (r|F) \times G$.

1.3.1. Pour toute relation m-aire r et tout $n \in \omega$, nous noterons $\rho(r)$ l'ensemble des restrictions de r, et nous poserons : $\rho_n(r) = \rho(r) \cap R_{m,n}$ (ensemble des restrictions u de r ayant une cardinalité $|u| \leq n$).

1.3.2. Pour tout $n \in \omega$ et toute classe $A \subseteq R_m$, notons $\varphi_n(A)$ la classe des relations $u \in A$ qui admettent une extension $r \in A$ de cardinalité $|r| \geq n$. Pour le <u>sélecteur</u> φ_n, $A - \varphi_n(A)$ est la classe des relations $u \in A$ qui sont <u>parasites au niveau n</u>. En ce sens, nous dirons que A est <u>propre</u> si $\varphi_n(A) = A$ pour tout $n \in \omega$, et que A est <u>assez propre</u> lorsque les prélèvements (décroissants) $\varphi_n(A)$ stationnent à partir d'un certain rang.

1.3.3. Un sous-ensemble A de R_m est dit <u>cohérent</u> s'il existe une relation $r \in R_m$ telle que $A \subseteq \rho(r)$. Lorsque $A = \{u,v\}$, on exprime encore cette condition en disant que les deux relations m-aires u,v sont <u>compatibles</u>.

Plus précisément, introduisons l'ensemble $\mathfrak{F}$ des supports des relations $u \in A$ ($\mathfrak{F}$ est le <u>soutènement</u> de A), et posons : $E = \bigcup \mathfrak{F}$.
Si $A \neq \emptyset$ et s'il existe une et une seule relation $r \in R_m(E)$ telle que $A \subseteq \rho(r)$, nous dirons que A est <u>recollable</u> et nour noterons $r = \epsilon(A)$ ce <u>recollement</u> de A. Cette condition va mettre en jeu un cardinal $k(\mathfrak{F}) \leq \omega$ (<u>capacité de recouvrement</u> de $\mathfrak{F}$) défini comme borne supérieure de la classe des naturels n tels que :

$$\underset{X \subseteq E}{(\forall X)} \quad \underset{Y \in \mathfrak{F}}{(\exists Y)} \quad (\mathrm{card}(X) \leq n \Rightarrow X \subseteq Y).$$

On vérifie facilement les règles suivantes :

Proposition - Pour que deux relations m-aires u, v de supports **respectifs** X, Y soient compatibles, il faut et il suffit que : $u|X \cap Y = v|X \cap Y$.

Proposition - Pour tout sous-ensemble non vide A de R_m, de soutènement $\mathfrak{F}$:

a) A est cohérent $\Leftrightarrow$ les relations $u \in A$ sont deux à deux **compatibles.**

b) A est recollable $\Leftrightarrow$ A est cohérent et $k(\mathfrak{F}) \geq m$.

Compte tenu de cette dernière équivalence, lorsque A est un sous-ensemble cohérent non vide de R_m et que n est un naturel **tel que** $k(\mathfrak{F}) \geq n \geq m$, nous dirons (pour abréger) que A est <u>n-recollable</u>.

2 - <u>ENCHAINABILITE ET MONOMORPHIE</u>

2.1. Pour toute relation $r = (m,E,\alpha)$ et toute application $f : E \to E'$, <u>l'image</u> de r par f est la relation $\tilde{f}(r) = (m,F,\beta)$ **définie** par $F = \mathrm{Im}(f) = f\langle E\rangle$(image de E par f) et $\beta = \{f \circ x : x \in \alpha\}$.
Pour tout $G \in \Sigma_m$, on vérifie aisément : $\tilde{f}(r \times G) = \tilde{f}(r) \times G$.

2.1.1. Etant donné deux relations m-aires r, r', de **supports** respectifs E, E', on désigne par $\mathrm{Hom}(r,r')$ l'ensemble des **applications** $f : E \to E'$ pour lesquelles $\tilde{f}(r)$ est une réduction de $r'|\mathrm{Im}(f)$ (**les applications** $f \in \mathrm{Hom}(r,r')$ sont les <u>homomorphismes</u> de r dans r'). On **désigne** par $\mathrm{Iso}(r,r')$ l'ensemble des injections $f : E \to E'$ pour lesquelles $\tilde{f}(r) = r'|\mathrm{Im}(f)$ (les applications $f \in \mathrm{Iso}(r,r')$ sont les <u>isomorphismes</u> de r <u>dans</u> r'). Plus particulièrement, on appelle <u>isomorphisme</u> de r <u>sur</u> r' toute bijection $f : E \to E'$ telle que $\tilde{f}(r) = r'$.

S'il existe un tel isomorphisme de r sur r', on dit que r et r' sont <u>isomorphes</u>, et on le note : $r \sim r'$. On vérifie aisément que (pour tout $G \in \Sigma_m$) :

$$r \sim r' \Rightarrow r \times G \sim r' \times G \text{ et } \mathrm{Inv}(r) = \mathrm{Inv}(r').$$

2.1.2. Soit T la classe des <u>chaînes</u> (ou relations d'ordre total). Pour tout naturel $m = \{0,1,2,\dots,m-1\}$, notons $\vec{m}$ la chaîne usuelle de support m. Pour toute chaîne t de support E et tout $m \in \omega$, introduisons la relation m-aire $t_m = (m,E,\ \mathrm{Iso}(\vec{m},t))$. Alors $t_o = (0,E,1)$, $t_1 = (1,E,E^1)$ et, pour tout $m \geq 2$, les multiplets $x \in E^m$ satisfaisant t_m sont caractérisés par la condition :

$$x_o < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} \text{ (mod. } t)$$

Nous dirons que t_m est le <u>rangement m-aire</u> associé à la chaîne t et, pour tout groupe $G \in \Sigma_m$, nous envisagerons également la relation $t_m \times G$ (dite <u>G-rangement</u> associé à t). Nous poserons : $T_m = \{t_m : t \in T\}$ (cette classe des rangements m-aires est propre et non inclusive). Pour tout groupe $G \in \Sigma_m$, le G-rangement associé à la chaîne $\vec{m}$ est la relation (m,m,G). Par ailleurs, pour toute chaîne t de cardinalité $\geq m$: $\mathrm{Inv}\,(t_m \times G) = G$.

2.1.3. Etant donné une relation r de support E, on désigne par $\mathrm{Aut}(r)$ le sous-groupe de S_E constitué par les permutations f de E telles que $\tilde{f}(r) = r$ (les permutations $f \in \mathrm{Aut}(r)$ sont les <u>automorphismes de</u> r). Plus généralement, si $f \in \mathrm{Iso}(u,r)$ pour une restriction u de r, on dit que l'injection f est un <u>automorphisme local</u> de r. Nous noterons $\mathrm{Aut.\ loc}(r)$ l'ensemble des automorphismes locaux de la relation r.

Si deux relations r, r' de même support (mais pas nécessairement de même arité) vérifient : $\mathrm{Aut.\ loc}(r) \subseteq \mathrm{Aut.\ loc}(r')$, on dit que r' est <u>libre-interprétable</u> par r. En particulier, pour tout $r \in R_m$ et tout $G \in \Sigma_m$, $r \times G$ est libre-interprétable par r.

Lorsqu'une relation r est libre-interprétable par une chaîne, on dit que r est <u>enchaînable</u>. Nous noterons C_m la classe des relations m-aires enchaînables. En particulier, pour toute chaîne t, le rangement m-aire associé t_m et (plus généralement) tous les G-rangements $t_m \times G$ sont libre-interprétables par t : il en résulte que la classe T_m et toutes ses transformées $\hat{G}(T_m)$ sont des sous-classes de C_m.

Par ailleurs, on vérifierait aisément que C_m est propre et inclusive.

2.1.4. Pour toute relation m-aire r, soit $\tau(r)$ l'ensemble des relations m-aires r' de support $|r|$ telles que $r \sim r'$: on dit que $\tau(r)$ est le <u>type d'isomorphie</u> de r. L'intérêt de la fonction τ vient de ce que, pour tout couple (r,r') de relations : $r \sim r' \Leftrightarrow \tau(r) = \tau(r')$.

Le <u>profil</u> d'une relation r est l'application $\bar{r} : \omega \to \omega$ définie (pour $n \in \omega$) par : $\bar{r}(n) = \text{card}\ (\{\tau(u) : u \in \rho(r) \text{ et } |u| = n\})$.
Lorsque $\bar{r}(n) \leq 1$, on dit que r est <u>n-monomorphe</u>. Si r est n-monomorphe pour tout naturel n, on dit simplement que r est <u>monomorphe</u>.
Pour $p \in \omega$, si r est n-monomorphe pour tout $n \leq p$, on dit que r est <u>p-monotype</u>.
Pour $m \in \omega$, $n \in \omega$, nous noterons : M_m la classe des relations m-aires monomorphes, $M_{m,n}$ la classe des relations m-aires n-monomorphes et M_m^n la classe des relations m-aires n-monotypes. Puisque $T \subseteq M_2$, il est clair que $C_m \subseteq M_m$. La plus simple des relations binaires monomorphes non enchaînables est la relation $(2,3,\alpha)$ de graphe $\alpha = \{(0,1),\ (1,2),\ (2,0)\}$.

3 - CLASSE UNIVERSELLE DE RELATIONS m-AIRES

3.1. Lorsque deux relations m-aires r, r' vérifient : $\mathrm{Iso}(r,r') \neq \emptyset$, on dit que r s'abrite dans r', et on le note : $r \leq r'$. La classe R_m est ainsi munie d'un préordre : le préordre d'abritement.

Une sous-classe A de R_m est dite close par abritement si, pour tout couple (r,r') de relations m-aires : $r \leq r'$ et $r' \in A \Rightarrow r \in A$.
(il revient au même de dire que, pour tout $u \in A$: toute restriction de u et toute isomorphe de u appartiennent à A). Si A est close par abritement, alors il en est de même pour toutes ses transformées $\hat{G}(A)$.

3.2. La notion de "classe universelle" de relations m-aires a été introduite en 1953, de deux manières équivalentes, par A. TARSKI[8] et R.L. VAUGHT[9]. Retenons la définition de VAUGHT :

Une sous-classe A de R_m est dite universelle lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

(1) A est close par abritement.

(2) Il existe un naturel n tel que, pour toute relation $r \in R_m$:

$$\rho_n(r) \subseteq A \Rightarrow r \in A$$

Pour une classe universelle A, la condition (2) fait intervenir des naturels n qui constituent une section finissante $[d(A), \rightarrow[$ de ω : on dit que $d(A)$ est le degré de A.

3.2.1. Si A et B sont deux sous-classes universelles de R_m, alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont universelles. Signalons également une proposition (R. FRAÏSSÉ[1]) où interviennent les sélecteurs φ_n :
≪ Si la classe A est universelle, alors toutes les classes $\varphi_n(A)$ sont universelles ≫.

3.2.2. Enumérons quelques exemples relativement triviaux :

a) La classe $\emptyset$ et la classe R_m sont universelles de degré 0.

Pour tout $n \in \omega$, la classe $R_{m,n}$ est universelle de degré $n+1$.

b) Pour tout $G \in \Sigma_m$, la classe $\hat{G}(R_m)$ est universelle : de degré 0 si $G = I_m$, de degré m si $G \neq I_m$. Il en résulte :

≪ Si $A \subseteq R_m$ est inclusive et universelle, toutes ses transformées $\hat{G}(A)$ sont universelles.≫

c) Pour $m = 2$, la classe T des chaînes est universelle de degré 3.

Pour tout $m \geq 2$, la classe T_m des rangements m-aires est universelle de degré $m+1$ (T_0 est universelle de degré 0, T_1 est universelle de degré 1).

d) Pour tout $n \in \omega$, les classes $M_{m,n}$ et M_m^n sont universelles de degré $n+1$.

3.3. Nothe technique de G-recollement des ordres totaux (notes[2][3] de 1963-64, et thèse[4] de 1965) a permis à M. JEAN[6] d'élucider le cas beaucoup plus difficile des classes M_m et C_m. En fait, nous allons montrer que cette technique de G-recollement revient à s'intéresser à la classe $\hat{G}(T_m)$ des G-rangements. Auparavant, énonçons une variante (liée au recollement) du critère de VAUGHT :

Proposition - Pour qu'une sous-classe A de R_m soit universelle, il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

(1) A est close par abritement

(2') Il existe un naturel $n \geq m$ tel que, pour tout sous-ensemble B de A : B est n-recollable $\Rightarrow$ $e(B) \in A$.

Pour une classe universelle A, la condition (2') fait intervenir des naturels n qui constituent une section finissante $[s(A), \rightarrow[$ de ω :

on peut dire que $s(A)$ est le seuil de recollement de A. On vérifierait aisément que : $s(A) = \mathrm{Max}(m, d(A))$.

4 - CARACTERE UNIVERSEL DES CLASSES $\hat{G}(T_m)$, M_m et C_m

4.1. Voici le nouvel aspect de notre théorème de G-recollement des ordres totaux[4] :

Théorème - Pour tout groupe $G \in \Sigma_m$, la classe $\hat{G}(T_m)$ des G-rangements est universelle.

4.1.1. Etant donné deux chaînes t, t' de supports respectifs X et X', rappelons que t, t' sont G-compatibles [4] dès qu'à tout $x \in (X \cap X')^m$ correspond une permutation $\sigma \in G$ telle que :

$$x_o < x_1 < \ldots < x_{m-1} (\text{mod. } t) \Rightarrow x_{\sigma(o)} < x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(m-1)} (\text{mod. } t').$$

Dès lors, on vérifie aisément qu'il y a équivalence entre la G-compatibilité de deux chaînes t, t' et la compatibilité des G-rangements associés $t_m \times G$, $t'_m \times G$.

4.1.2. Utilisons notre variante du critère de VAUGHT. D'après le théorème de G-recollement, il existe un naturel $n \geq m$ vérifiant la condition suivante : si B est un sous-ensemble cohérent non vide de G-rangements, à soutènement $\mathfrak{F}$ tel que $k(\mathfrak{F}) \geq n$ (autrement dit : si B est un sous-ensemble n-recollable de $\hat{G}(T_m)$), alors il existe un G-rangement r de support $E = \bigcup \mathfrak{F}$ tel que $B \cup \{r\}$ soit cohérent, ce qui implique $r = \epsilon(B)$, donc $\epsilon(B) \in \hat{G}(T_m)$. C'est justement ce qu'exige la variante du critère de VAUGHT pour assurer que $\hat{G}(T_m)$ est une classe universelle. Par ailleurs, le seuil de recollement de la classe $G(T_m)$ n'est autre que la valence du groupe G (valeur minimum de n dans le théorème de G-recollement) : cette valence peut faire l'objet d'une autre interprétation relationniste[5], en accord avec des travaux de M. POUZET[7].

4.2. Le théorème précédent (caractère universel de la classe des G-rangements, pour tout $G \in \Sigma_m$) admet, on le sait (4), une conséquence spectaculaire :

Proposition - Pour tout naturel m, il existe deux naturels n, p vérifiant $m \leq n \leq p$ et tels que : "Toute relation m-aire n-monomorphe de cardinalité $\geq p$ est enchaînable".

Il en résulte deux corollaires :

Corollaire 1. - Pour tout naturel m, il existe un naturel p tel que : "Toute relation m-aire p-monotype est monomorphe". Autrement dit : $M_m = M_m^p$.

Corollaire 2. - Pour tout naturel m, il existe un naturel p tel que : "Toute relation m-aire monomorphe de cardinalité $\geq p$ est enchaînable".

En tenant compte du caractère propre de C_m, il en résulte : $C_m = \varphi_p(M_m)$ (Au passage, on constate que la classe M_m est assez propre).

4.3. Les deux formules $M_m = M_m^p$ et $C_m = \varphi_p(M_m)$ fournissent immédiatement le théorème de M. JEAN (6) :

Théorème - Pour tout naturel m, les deux classes M_m et C_m sont universelles.

4.4. Disons, pour abréger, qu'une classe $A \subseteq R_m$ est totalement universelle lorsque : $(\forall G)$ $(G \in \Sigma_m \Rightarrow \hat{G}(A)$ est universelle). Toute classe universelle inclusive est totalement universelle : c'est le cas trivial. Parmi les classes universelles non inclusives, on vient de voir que la classe T_m des rangements m-aires est totalement universelle (et ce fait est à la source du caractère universel des classes M_m et C_m). On pourrait examiner au même titre la classe : $T'_m = \{t'_m : t \in T\}$ des semi-rangements m-aires obtenus en associant à tout $m \in \omega$ et à toute chaîne t de support E la relation m-aire $t'_m = (m, E, \mathrm{Hom}(\vec{m}, t))$ (pour tout $m \geq 2$, les multiplets $x \in E^m$ satisfaisant t'_m sont caractérisés par la condition : $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{m-1}$ (mod. t)). La classe T'_m est-elle totalement universelle ?

Par ailleurs, on pourrait se proposer de trouver une classe universelle qui ne soit pas totalement universelle. Nous soumettons cette question à la sagacité du lecteur !

REFERENCES

(1) R. FRAÏSSE, Cours de Logique mathématique, tome 1, rééd., Paris, 1971.

(2) C. FRASNAY, Groupes de permutations finies et familles d'ordres totaux : application à la théorie des relations, C.R.A.S. Paris, 257 (1963), 2944-2947.

(3) C. FRASNAY, Groupes de compatibilité de deux ordres totaux ; application aux n-morphismes d'une relation m-aire, C.R.A.S. Paris, 259(1964), 3910-3913.

(4) C. FRASNAY, Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes, Ann. Ins. Fourier, Grenoble, 15(1965), 415-524.

(5) C. FRASNAY, Interprétation relationniste du seuil de recollement d'un groupe naturel, C.R.A.S. Paris, 277 (1973), 865-868.

(6) M. JEAN, Sur deux classes universelles de relations, C.R.A.S. Paris, 264(1967), 591-593.

(7) M. POUZET, Un bel ordre d'abritement et ses rapports avec les bornes d'une multirelation, C.R.A.S. Paris, 274(1972), 1677-1680.

(8) A. TARSKI, Universal arithmetical classes of mathematical systems, Bull. Am. Math. Soc., 59(1953), 390-391.

(9) R.L. VAUGHT, Remarks on universal arithmetical classes, Bull. Am. Math. Soc. 59(1953), 391.