PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. COULON

J. L. COULON

Structures vectorielles et affines floues. Convexité

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 2 , p. 71-113

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_2_71_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
LYON 1979 t. 16-2

STRUCTURES VECTORIELLES ET AFFINES FLOUES. CONVEXITE.

par J. COULON et J.L. COULON

1ère partie : STRUCTURES VECTORIELLES FLOUES.

On appelle *structure vectorielle floue* tout (E,J) où E est un espace vectoriel (sur un corps commutatif K) et J un treillis fermé.

§ 1. Notion de sous-espace vectoriel flou :

a) THEOREME. - *Soit* (E,J) *une structure vectorielle floue sur un corps commutatif* K, *et soit* $\tilde{A} \in \tilde{P}(E)$.

Il y a équivalence entre :

i) $- \tilde{A} \neq \emptyset$ et $\forall (a,\alpha) \in \tilde{A}$, $\forall (b,\beta) \in \tilde{A}$

$[\alpha \wedge \beta \neq 0 \Rightarrow \forall \lambda \in K , \forall \mu \in K , (\lambda a+\mu b, \alpha \wedge \beta) \in \tilde{A}]$

ii) $- \tilde{A} \neq \emptyset$ et $\forall a \in E$, $\forall b \in E$, $\forall \lambda \in K$, $\forall \mu \in K$:

$\tilde{A}(\lambda a+\mu b) \geqslant \tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b)$.

En effet :

Supposons i - $(a,\tilde{A}(a)) \in \tilde{A}$, et $(b,\tilde{A}(b)) \in \tilde{A}$ - ou bien $\tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b) = 0 \leqslant \tilde{A}(\lambda a+\mu b)$, ou bien $(\lambda a+\mu b, \tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b)) \in \tilde{A}$ et $\tilde{A}(\lambda a+\mu b) \geqslant \tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b)$.

Supposons au contraire ii - Si $(a,\alpha) \in \tilde{A}$, $(b,\beta) \in \tilde{A}$ avec $\alpha \wedge \beta \neq 0$, puisque $\tilde{A}(a) \geqslant \alpha$ et $\tilde{A}(b) \geqslant \beta$, $\tilde{A}(\lambda a+\mu b) \geqslant \tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b) \geqslant \alpha \wedge \beta$, et $(\lambda a+\mu b, \alpha \wedge \beta) \in \tilde{A}$.

b) DEFINITION. - *Lorsqu'on a i,ou ii, on dit que* $\tilde{A}$ *est un* sous-espace vectoriel flou de (E,J).

c) EXEMPLES. -

. Tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel flou de $(E,\{0,1\})$.

. Tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel flou de (E,J) (dit net).

. Tout $E_\alpha (x \mapsto \alpha)$ non vide est un sous-espace vectoriel flou de (E,J) (dit constant).

Plus généralement, tout $\alpha F (x \mapsto \alpha$ si $x \in F$, o sinon) (c'est-à-dire tout $F \cap E_\alpha$) est un sous-espace vectoriel flou de (E,J) (dit élémentaire).

d) PROPRIETES ELEMENTAIRES . -

. Stabilité par intersection, dans la mesure où cette intersection existe. (Lorsque J est complet, on peut donc parler de sous-espace vectoriel flou engendré par une partie floue, ou par une famille de points flous deux à deux fortement distincts).

. Si $(a,\alpha) \in \tilde{A}$, $(b,\beta) \in \tilde{A}$ avec $\alpha \wedge \beta \neq 0$, si $\lambda \in K$ et $\mu \in K$, si $\tilde{A}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J) : pour tout $\gamma \in J$ tel que $0 < \gamma \leqslant \alpha \wedge \beta$: $(\lambda a+\mu b, \gamma) \in \tilde{A}$.

. Si $\tilde{A}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J), et si $\lambda \in K^*$: $(a,\alpha) \in \tilde{A} \Leftrightarrow (\lambda a, \alpha) \in \tilde{A}$.

(car $\tilde{A}(a) \geq \alpha \Rightarrow \tilde{A}(\lambda a) = \tilde{A}(\lambda a + o a) \geq \tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(a) = \tilde{A}(a) \geq \alpha$. Alors d'ailleurs, $(0,\alpha) \in \tilde{A}$).

. Plus précisément tout sous-espace vectoriel flou de (E,J) est constant sur chaque droite vectorielle de E épointée ($\forall a \in E,\ \forall \lambda \in K^* : \tilde{A}(\lambda a) = \tilde{A}(a)$).

. Si $\tilde{A}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J) : $\tilde{A}(0) = \max \tilde{A}(E)$. (en effet, soit $a \in E$: $\tilde{A}(0) = \tilde{A}(oa+oa) \geq \tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(a) = \tilde{A}(a)$).

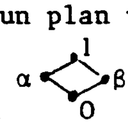
§ 2. Décomposition d'un sous-espace vectoriel flou :

1. Pour toute partie floue $\tilde{A}$: $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in J} \alpha\, N_\alpha(\tilde{A})$ (comme il est démontré dans [2]).

2. Pour toute partie floue $\tilde{A}$: $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in \tilde{A}(E)} \alpha\, N_\alpha(\tilde{A})$.
Soit en effet $a \in E$. Pour tout $\alpha \in \tilde{A}(E)$: $\alpha N_\alpha(\tilde{A})(a) \leq \tilde{A}(a)$ d'après [1].
Mais d'autre part $\tilde{A}(a) = \tilde{A}(a)\, N_{\tilde{A}(a)}(\tilde{A})(a)$.

3. Si $\tilde{A}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J) :
Pour tout $\alpha \in J$: $N_\alpha(A)$ est un sous-espace vectoriel de E, ou est vide. Si $\tilde{A}(E)$ est une chaîne, pour tout $\alpha \in J^*$: $N'_\alpha(\tilde{A})$ est un sous-espace vectoriel de E, ou est vide.

. En effet, si $\tilde{A}(a) \geq \alpha$ et $\tilde{A}(b) \geq \alpha$: $\tilde{A}(\lambda a + \mu b) \geq \tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b) \geq \alpha$.
. D'autre part, si $\tilde{A}(E)$ est une chaîne et si $\tilde{A}(a) > \alpha$ et $\tilde{A}(b) > \alpha$: $\tilde{A}(\lambda a + \mu b) \geq \tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b) = \min(\tilde{A}(a), \tilde{A}(b)) > \alpha$.

. Par contre, si E est un plan vectoriel sur K, dont $\{e_1, e_2\}$ est une base, et si J = 

, si $\tilde{A}$ est la partie floue définie par $\tilde{A}(0) = 1$, $\tilde{A}(\lambda e_1) = \alpha$ si $\lambda \in K^*$, $\tilde{A}(\lambda e_2) = \beta$ si

$\lambda \in K^*$, $\tilde{A}(a) = 0$ sinon, $\tilde{A}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J) alors que $N'_0(\tilde{A}) = Ke_1 \cup Ke_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

REMARQUE. - Si $\alpha \in \tilde{A}(E)$, $N_\alpha(\tilde{A})$ n'est jamais vide, et est donc un sous-espace vectoriel de E.

4. A toute partie floue $\tilde{A}$, on associe la partie $J(\tilde{A})$ de J -éventuellement vide - définie par :

- si $\tilde{A}(E)$ n'a pas de plus petit élément :
  $J(\tilde{A}) = \{$éléments minimaux de $A(E)\}$.
- si $\tilde{A}(E)$ a un plus petit élément :
  $J(\tilde{A}) = \{$éléments minimaux de $\tilde{A}(E) - \{\min \tilde{A}(E)\}\}$.

THEOREME. - *Soit* (E,J) *une structure vectorielle floue sur* K *où* E *est de dimension finie sur* K, *et soit* $\tilde{A}$ *un sous-espace vectoriel flou de* $(E\ J)$ *non constant. Alors* $J(\tilde{A}) \neq \emptyset$.

PREUVE DE CE THEOREME. -

LEMME. - *Si* $\dim_K E = n$, *si* $\tilde{A}$ *est un sous-espace vectoriel flou de* (E,J), *si* K *est une chaîne contenue dans* $\tilde{A}(E)$: $\bar{\bar{K}} < n+1$.

En effet, supposons qu'il existe $a_1,\ldots,a_{n+1} \in E - \{0\}$ tels que $\tilde{A}(a_1),\ldots,\tilde{A}(a_{n+1}) \in K$.

Par exemple, $\tilde{A}(a_1) < \ldots < \tilde{A}(a_{n+1})$.

Il est facile de voir que $a_1 \notin Ka_2+\ldots+Ka_{n+1}$, que de même $a_2 \notin Ka_3+\ldots+Ka_{n+1},\ldots,a_n \notin Ka_{n+1}$.

Mais alors $\dim_K(Ka_1+\ldots+Ka_{n+1}) = 1 + \dim_K(Ka_2+\ldots+Ka_{n+1}) = \ldots = n+\dim_K Ka_{n+1} = n+1$ ce qui est absurde.

Il s'ensuit que toute partie non vide de $\tilde{A}(E)$ possède au moins un élément minimal.

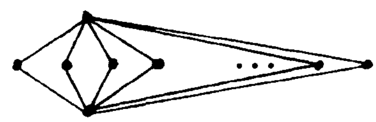
Par conséquent, ou bien $\widetilde{A}(E)$ a un plus petit élément et $\widetilde{A}(E) = \{\min \widetilde{A}(E)\}$ a au moins un élément minimal, ou bien $\widetilde{A}(E)$ n'a pas de plus petit élément mais possède au moins un élément minimal. Dans les deux cas, $J(\widetilde{A}) \neq \emptyset$.

ILLUSTRATION : $E = \mathbb{R}^2$.

α • $\widetilde{A}(E)$ peut être réduit à un élément : J quelconque, $\widetilde{A} = E_\alpha (\alpha \in J_*)$.

β • $\widetilde{A}(E)$ peut être une chaîne à deux éléments : $J = \{0,1\}$,
$\widetilde{A}$ = un sous-espace vectoriel de $E \subsetneq E$.

γ • $\widetilde{A}(E)$ peut être une chaîne à trois éléments : $J = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$,
$\widetilde{A}$ vaut 1 en 0, $\frac{1}{2}$ sur une droite épointée, 0 ailleurs.

δ • $\widetilde{A}(E)$ peut être de la forme 

$J = [0,1]^n$. On note $e_k = (\delta_{i,k})_i$.
Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ n droites vectorielles de E.
$\widetilde{A}(0) = 1$, $\widetilde{A}$ vaut e_k sur $\Delta_k - \{0\}$, $\widetilde{A}$ est nulle ailleurs.

ε • $\widetilde{A}(E)$ peut être de la forme 

Nous allons donner un exemple où $\overline{\overline{A(E)}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$, ce qui montre que : même di $\dim_K E$ est finie, $\widetilde{A}(E)$ peut être infini.
J est un anneau booléien à $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ atomes (par exemple $P(\mathbb{R})$).
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de ses atomes, et ϕ une bijection de $\mathcal{A}$ sur $[-1,1]$.
E = plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.
$\widetilde{A}$ définie par $\widetilde{A}(0) = 1$. Si $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$,

$$\widetilde{A}(\lambda\vec{i} + \mu\vec{j}) = \phi^{-1}\left(\frac{\lambda\varepsilon(\mu)}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\right) \text{ , où } \varepsilon(0) = 1 \text{ et si } \mu \neq 0 : \varepsilon(\mu) = \frac{\mu}{|\mu|}$$

(on remarque que si $\alpha \in J - \mathcal{A}$: $N_\alpha(A) = \{0\}$, et que si $\alpha \in \mathcal{A}$: $N_\alpha(A) = \mathbb{R}[\phi(\alpha)\vec{i} + \sqrt{1-\phi(\alpha)^2}\,\vec{j})$.

λ. $\tilde{A}(E)$ ne saurait être d'une autre forme.

En effet, $\tilde{A}(E)$ ne contient aucune 4-chaîne ; et s'il contient une 3-chaîne, le plus petit élément de cette chaîne est min $\tilde{A}(E)$, du fait que

$$\left.\begin{array}{l} \alpha,\beta,\lambda \in \tilde{A}(E) \\ \\ \alpha < \beta < \lambda \end{array}\right| \Rightarrow N_\alpha(\tilde{A}) = E \Rightarrow \alpha = \min \tilde{A}(E).$$

REMARQUE. - Si $\dim_K E$ infinie, même si le sous-espace vectoriel flou $\tilde{A}$ n'est pas constant, il se peut que $J(\tilde{A}) = \emptyset$.

Comme le prouve cet exemple :

$E = \mathbb{R}[X]$

$J = [0,1]$

si P est un polynôme non constant : $\tilde{A}(P) = \dfrac{1}{\text{degré } P}$; si $a \in \mathbb{R}$: $\tilde{A}(a) = 1$.

$\tilde{A}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J),

$\tilde{A}(E) = \{\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ est infini, et $N_{\frac{1}{n}}(\tilde{A}) = \{P \;/\; \text{degré } P \leqslant n\}$.

THEOREME. - *Soit* (E,J) *une structure vectorielle floue de* dimension **finie** *où* J *est une* chaîne, *et soit* $\tilde{A}$ *un sous-espace vectoriel flou de* (E,J). *Alors* $\tilde{A}(E)$ *est fini.*

C'est un corollaire immédiat du lemme évoqué au théorème précédent.
Si $\dim_K E = n$, $\overline{\overline{\tilde{A}(E)}} \leqslant n+1$).

Enfin, nous ferons ces remarques :

Soit $\tilde{A}$ une partie floue de (E,J). Notons $K = \tilde{A}(E)$, et pour tout $a \in K$: $A_a = N_a(\tilde{A})$.

Pour tout $(\alpha,\beta) \in K^2$: $\alpha < \beta \Leftrightarrow A_\alpha \underset{\neq}{\supset} A_\beta$

α incomparable à $\beta \Leftrightarrow (A_\alpha \not\subset A_\beta$ et $A_\beta \not\subset A_\alpha)$

$$A_\alpha \cap A_\beta = \bigcup_{\gamma \in K,\ \gamma \geqslant \alpha \vee \beta} A_\gamma$$

Pour tout $\alpha \in K$: $A_\alpha = E \Leftrightarrow \alpha = \min \tilde{A}(E)$

Si $\mathscr{F} = \{A_\alpha /\ \alpha \in K$ et $A_\alpha \neq E\}$, A_α maximal dans $\mathscr{F} \Leftrightarrow \alpha \in J(\tilde{A})$.

Si, pour tout $\alpha \in K$, $M_\alpha = A_\alpha - \left[\bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma > \alpha}} A_\gamma \cup \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \mapsto \alpha}} A_\alpha \right]$, $(M_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une partition de E. ($\gamma \mapsto \alpha$ signifie "γ et α sont incomparable").

En effet : si $\alpha \in K$, il existe $a \in E$ tel que $\tilde{A}(a) = \alpha$. Alors $a \in M_\alpha$

si $a \in E$, $a \in M_{\tilde{A}(a)}$

Si $\alpha < \beta$ ou si $\alpha \mapsto \beta$: $a \in M_\alpha \Rightarrow a \notin A_\beta \Rightarrow a \notin M_\beta$

THEOREME. - *Si* $\tilde{A}$ *est un sous-espace vectoriel flou de* (E,J) :

$\forall \alpha \in J[\alpha \leqslant \max \tilde{A}(E) \Rightarrow N_\alpha(\tilde{A})$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Si $\tilde{A}(E)$ *est une chaine* : $\forall \alpha \in J[\alpha < \max \tilde{A}(E) \Rightarrow N'_\alpha(\tilde{A})$ *est un sous-espace vectoriel de* E.]

En effet,

Si $\tilde{A}(a) \geqslant \alpha$ et $\tilde{A}(b) \geqslant \alpha$, $\tilde{A}(\lambda a+\mu b) \geqslant \tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b) \geqslant \alpha$

Si $\tilde{A}(E)$ est une chaîne, si $\tilde{A}(a)>\alpha$ et $\tilde{A}(b)>\alpha$, $\tilde{A}(\lambda a+\mu b) \geqslant \min(\tilde{A}(a),\tilde{A}(b))$.

Enfin $N_\alpha(\tilde{A}) \neq \emptyset$ pour $\alpha \leqslant \max \tilde{A}(E)$, et $N'_\alpha(\tilde{A}) \neq \emptyset$ pour $\alpha < \max \tilde{A}(E)$.

§ 3. Problème réciproque : construction d'un sous-espace vectoriel flou de (E,J).

Soit (E,J) une structure floue, K une partie non vide de J, $(A_\alpha)_{\alpha\in K}$ une famille de parties nettes de E.

Quand existe-t-il un sous-espace vectoriel flou de (E,J), $\tilde{A}$, tel que $\tilde{A}(E) = K$, $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha\in K} \alpha A_\alpha$, et pour tout $\alpha\in K$: $A_\alpha = N_\alpha(\tilde{A})$?

THEOREME 1. - *Si :*

i) $\forall \alpha,\beta\in K : \alpha < \beta \Rightarrow A_\alpha \supsetneqq A_\beta$

ii) Si, pour tout $\alpha\in K$; $M_\alpha = A_\alpha - [\bigcup_{\substack{\gamma\in K\\ \gamma>\alpha}} A_\gamma \cup \bigcup_{\substack{\gamma\in K\\ \gamma \leftrightarrow \alpha}} A_\gamma]$

$(M_\alpha)_{\alpha\in K}$ *est une partition de E, si pour tout*

$a\in E$: $\tilde{A}(a)$ = l'unique $\alpha\in K$ *tel que* $a\in M_\alpha$ *, alors :*

$$\tilde{A}(E) = K$$

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha\in K} \alpha A_\alpha$$

$$\forall \alpha\in K : N_\alpha(\tilde{A}) = A_\alpha$$

En effet il est évident que $\tilde{A}(E) = K$. Soit $a\in E$, et $\tilde{A}(a) = \alpha$.
Soit $\beta\in K$: si $\beta \leqslant \alpha$:$\beta A_\beta(a) \leqslant \beta \leqslant \alpha$, sinon, $a\in M_\alpha \Rightarrow a \notin A_\beta \Rightarrow \beta A_\beta(a) = 0 \leqslant \alpha$ et $aA_\alpha(a) = \alpha$. Donc $\tilde{A}(a) = \max_{\beta\in K} \beta A_\beta(a)$, et $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha\in K} \alpha A_\alpha$.
Pour tout $\alpha\in K$, $N_\alpha(\tilde{A}) = \bigcup_{\gamma\geqslant\alpha} M_\gamma$

$$a\in N_\alpha(A) \Rightarrow \tilde{A}(a) \geqslant \alpha \text{ et } a\in M_{\tilde{A}(a)}$$

$$a\in M_\gamma (\gamma\geqslant\alpha) \Rightarrow \tilde{A}(a) = \gamma \geqslant \alpha \Rightarrow a\in N_\alpha(\tilde{A}) .$$

Or $\bigcup_{\gamma\geqslant\alpha} M_\gamma = A_\alpha$, si $\gamma\geqslant\alpha$: $M_\gamma \subset A_\gamma \subset A_\alpha$. Donc $\bigcup_{\gamma\geqslant\alpha} M_\gamma \subset A_\alpha$
si $a\in A_\alpha$, si $\beta = \tilde{A}(a)$: $a\in M_\beta \cap A_\alpha \Rightarrow \alpha \nsucc \beta$ et $\alpha \not\leftrightarrow \beta \Rightarrow \alpha \leqslant \beta$
donc $a\in M_\beta$, avec $\beta\geqslant\alpha$.

REMARQUES. - 1) Les conditions i) et ii) impliquent donc qu'en fait

$$\forall \alpha,\beta \in K : \alpha < \beta \Leftrightarrow A_\alpha \supsetneq A_\beta$$

$$\forall \alpha,\beta \in K : A_\alpha \cap A_\beta = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geqslant \alpha \vee \beta}} A_\gamma$$

Pour tout $\alpha \in K$: $M_\alpha = A_\alpha - \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma > \alpha}} A_\gamma$ (ligne de flou de la partie floue $\tilde{A}$).

2) Il n'est pas possible de remplacer - dans le théorème 1- l'hypothèse ii) par : "si, pour tout $\alpha \in K$, $M_\alpha = A_\alpha - \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma > \alpha}} A_\gamma$, $(M_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une partition de E" , à moins d'ajouter l'hypothèse :

"pour tout $\alpha \in K$: $A_\alpha = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geqslant \alpha}} M_\gamma$ " (qui implique d'ailleurs 2)).

THEOREME 2. - *Soit* (E,J) *une structure vectorielle floue, et soit* $\tilde{A}$ *une partie floue non vide. Il y a équivalence entre :*

1) $\tilde{A}$ *est un sous-espace vectoriel flou de* (E,J).

2) $\forall \alpha \in J$: $N_\alpha(\tilde{A})$ *est un sous-espace vectoriel de* E *ou est vide.*

Et si $\tilde{A}(E)$ *est une chaîne entre 1) et 2) et :*

3) $\forall \alpha \in \tilde{A}(E)$: $N_\alpha(\tilde{A})$ *est un sous-espace vectoriel de* E .

4) $\forall \alpha \in \tilde{A}(E)$ $[\alpha \neq \max \tilde{A}(E) \Rightarrow N'_\alpha(\tilde{A})$ *est un sous-espace vectoriel de* E$]$.

En effet,

supposons 2) - $a \in N_{\tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b)}(\tilde{A}), b \in N_{\tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b)}(\tilde{A}) \Rightarrow \lambda a+\mu b \in N_{\tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b)}(\tilde{A})$.

supposons que $\tilde{A}(E)$ soit une chaîne, et supposons 3) : même preuve, car alors $\tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b) = \min(\tilde{A}(a),\tilde{A}(b)) \in \tilde{A}(E)$.

supposons que $\tilde{A}(E)$ soit une chaîne, et supposons 4) : si on avait pour des éléments $a,b \in E$, λ, $\mu \in K$ $\tilde{A}(\lambda a+\mu b) \ngeqslant \tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b)$, on aurait $\tilde{A}(\lambda a+\mu b) < \tilde{A}(a) \wedge \tilde{A}(b)$. Donc, a, $b \in N^{1}_{\tilde{A}(\lambda a+\mu b)}(\tilde{A})$, et

$\lambda a+\mu b \in N^{1}_{\tilde{A}(\lambda a+\mu b)}(\tilde{A})$. Résultat absurde.

THEOREME 3. - *A) Soit* (E,J) *une structure vectorielle floue,* K *une partie non vide de* J, $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ *une famille de parties nettes de* E *vérifiant les conditions (i) et ii) du théorème 1, telle qu'en outre :*

$$\forall \alpha \in J : \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geq \alpha}} A \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

Alors la partie floue définie au théorème 1 est un sous-espace vectoriel flou de (E,J), *et* $\forall \alpha \in J : N_\alpha(\tilde{A}) = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geq \alpha}} A_\gamma$

B) Soit (E,J) *une structure vectorielle floue,* K *une chaîne non vide de* J *(*J *n'est pas nécessairement une chaîne),* $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ *une famille de sous-espaces vectoriels de* E *telle que :*

$$\forall \alpha, \beta \in K : \alpha < \beta \Rightarrow A_\alpha \underset{\neq}{\supset} A_\beta$$

Si, pour tout $\alpha \in K$, $M_\alpha = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma > \alpha}} A_\gamma$,

$(M_\alpha)_{\alpha \in K}$ *est une partition de* E,

si pour tout $a \in E : \tilde{A}(a) =$ l'unique $\alpha \in K$ *tel que* $a \in M_\alpha$, alors

$\tilde{A}$ *est un sous-espace vectoriel flou de* (E,J)

$\tilde{A}(E) = K$

$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in K} \alpha \tilde{A}_\alpha$

pour tout $\alpha \in K : N_\alpha(\tilde{A}) = A_\alpha$.

En effet,

pour le A) : il est clair que si $\tilde{A}$ est la partie floue de (E,J) définie par $\tilde{A}(a) = \alpha \Leftrightarrow a \in M_\alpha$, $\forall \alpha \in J_\alpha : N_\alpha(\tilde{A}) = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geq \alpha}} A_\gamma$ - on conclut alors en appliquant le théorème 2.

Pour le B) : l'énoncé 3) $\Rightarrow$1) du théorème 2, lorsque A(E) est une chaîne permet de conclure.

THEOREME 4. - *Soit* (E,J) *une structure floue et* $K = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ *une chaîne finie de* J $(\alpha_1<\ldots<\alpha_n)$.

Soient $A_{\alpha_1},\ldots,A_{\alpha_n}$ *des parties nettes de* E *telles que*

$$E = A_{\alpha_1} \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} A_{\alpha_n} .$$

Posons alors $M_{\alpha_1} = A_{\alpha_1}$, *et pour* $2 \leqslant i \leqslant n$: $M_{\alpha_i} = A_{\alpha_i} - \bigcup_{j>i} A_{\alpha_j}$.

Dans ces conditions : $M_{\alpha_1},\ldots,M_{\alpha_n}$ *forment une partition de* E. *Si* $\tilde{A}(a)$ = l'unique α_i *tel que* $a \in M_{\alpha_i}$:

$$\tilde{A}(E) = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$$

$$\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i A_{\alpha_i} .$$

Pour tout $i \in \{1\ldots n\}$: $N_{\alpha_i}(\tilde{A}) = A_{\alpha_i}$.

Si en outre $A_{\alpha_2},\ldots, A_{\alpha_n}$ *sont des sous-espaces vectoriels de* E, $\tilde{A}$ *est un sous-espace vectoriel flou de* (E,J).

La preuve découle immédiatement de ce qui précède.

THEOREME 5. - *Soit* (E,J) *une structure floue où* J *est complet.* *Soit* K *une partie non vide de* J, *et* $(A_\alpha)_{\alpha\in K}$ *une famille de parties nettes de* E *telles que :*

(u) $\forall \alpha,\beta \in K : \alpha \neq \beta \Rightarrow A_\alpha \neq A_\beta$

(v) $\bigcup_{\alpha\in E} A_\alpha = E$

(w) Pour tout $\alpha \in K : A_\alpha \neq \bigcup_{\substack{\gamma\in K\\ \gamma>\alpha}} A_\gamma$

(x) Pour toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ *d'éléments de* K :

$$\bigcap_{i \in I} A_{\alpha_i} = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geqslant \bigvee_{i \in I} \alpha_i}} A_\gamma$$

Alors il existe une partie floue $\tilde{A}$ *de* (E,J) *telle que :*

$\tilde{A}(E) = K$

$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in K} \alpha A_\alpha$

pour tout $\alpha \in K$: $N_\alpha(\tilde{A}) = A_\alpha$

On a d'ailleurs : $\tilde{A}(a)$ = l'unique $\alpha \in K$ *tel que*

$$a \in A_\alpha - [\bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma > \alpha}} A_\gamma \cup \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \dashv\vdash \alpha}} A_\gamma]$$

$\tilde{A}(a) = \max\{\alpha \in J/$ il existe $\beta \in K$, tel que $\beta \geq \alpha$ et $a \in A_\beta\}$.

DEMONSTRATION. - On utilise le théorème 1 en remarquant que :
Si $\alpha, \beta \in K$: $\alpha < \beta \Rightarrow A_\alpha \underset{\neq}{\supset} A_\beta$.

En effet, $A_\alpha \cap A_\beta = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma > \alpha \vee \beta}} A_\gamma = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geqslant \beta}} A_\gamma = A_\beta$.

d'après (x) , en prenant pour $(\alpha_i)_{i \in I}$ la famille réduite à β.
Et, par ailleurs : $A_\alpha \neq A_\beta$.
Posons, pour tout $\alpha \in K$: $M_\alpha = A_\alpha - [\bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma > \alpha}} A_\gamma \cup \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \dashv\vdash \alpha}} A_\gamma]$. $(M_\alpha)_{\alpha \in K}$
est une partition de E, car :

comme dans tous les cas, $\alpha \neq \beta \Rightarrow M_\alpha$ et M_β disjointes.

s'il existe $\alpha \in K$ tel que $M_\alpha = \emptyset$: $\emptyset \neq A_\alpha - \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma > \alpha}} A_\gamma \subset \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \dashv\vdash \alpha}} A_\gamma$.

Soit alors $a \in A_\alpha - \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma > \alpha}} A_\gamma$, $a \in \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \quad \alpha}} A_\gamma$, donc il existe

$\xi \in K$ tel que $\xi \vdash\!\dashv \alpha$ et $a \in A_\xi$.

Or $A_\alpha \cap A_\xi = \bigcup_{\substack{\delta \in K \\ \delta \geqslant \alpha \vee \xi}} A_\delta \Rightarrow$ il existe $\delta \in K$, tel que $\delta \geqslant \alpha \vee \xi > \alpha$

et $a \in A_\delta$; ce qui est contradictoire.

$\bigcup_{\alpha \in K} M_\alpha = E$. En effet, soit $a \in E$, et $K_a = \{\alpha \in K / a \in A_\alpha\}$

$\bigcup_{\alpha \in K} A_\alpha = E \Rightarrow K_a \neq \emptyset$. Soit $\alpha_0 = \vee K_a$.

D'après (x), $\bigcap_{\alpha \in K_a} A_\alpha = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geqslant \alpha_0}} A_\gamma$.

Or $a \in \bigcap_{\alpha \in K_a} A_\alpha$. Donc il existe $\gamma \in K$ tel que $\gamma \geqslant \alpha_0$ et

$a \in A_\gamma$. Mais comme $\gamma \in K_a$: $\gamma = \alpha_0$. Donc $\alpha_0 \in K_a$ (c'est d'ailleurs

max K_a). D'où il résulte que $a \in M_{\alpha_0}$.

AUTRE PREUVE. - Posons, pour tout $\alpha \in J$: $B_\alpha = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geqslant \alpha}} A_\gamma$

On voit comme plus haut que $\alpha, \beta \in K$ et $\alpha < \beta \Rightarrow A_\alpha \supsetneq A_\beta$

Si $\alpha \in K$: $B_\alpha = A_\alpha$, car $A_\alpha = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geqslant \alpha}} A_\gamma = B_\alpha$ (d'après (x),

avec pour $(\alpha_i)_{i \in I}$ la famille réduite à α).

$B_0 = \bigcup_{\alpha \in K} A_\alpha = E$.

Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de J. Alors $B_{\vee\alpha_i} = \cap B_{\alpha_i}$.

En effet, $B_{\vee\alpha_i} = \bigcup\limits_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geqslant \vee\alpha_i}} A_\gamma$, $\bigcap\limits_{i \in I} B_{\alpha_i} = \bigcap\limits_{i \in I} \left[\bigcup\limits_{\substack{\delta \in K \\ \delta \geqslant \alpha_i}} A_\delta \right]$. Or :

Si $\gamma \in K$, $\gamma \geqslant \vee\alpha_i$, on a pour tout $i \in I$: $A_\gamma \subset \bigcup\limits_{\substack{\delta \in K \\ \delta \geqslant \alpha_i}} A_\delta$

Si $a \in \bigcap\limits_{i \in I} \left| \bigcup\limits_{\substack{\delta \in K \\ \delta \geqslant \alpha_i}} A_\delta \right|$; pour tout $i \in I$, il existe $\delta_i \in K$, $\delta_i \geqslant \alpha_i$

et $a \in A_{\delta_i}$. Mais alors $a \in \bigcap\limits_{i \in I} A_{\delta_i} = \bigcup\limits_{\substack{r \in K \\ r \geqslant \vee\delta_i}} A_r$. Donc il existe $r \in K$,

$r \geqslant \vee\delta_i \geqslant \vee\alpha_i$, $a \in A_r$.

On démontre alors dans [3] ("théorème de représentation") que la partie floue $\tilde{A}$ de (E,J) définie par :
$\tilde{A}(a) = \max\{\alpha \in J / a \in B_\alpha\} = \max\{\alpha \in J /$ Il existe $\gamma \in K$ tel que $\gamma \geqslant \alpha$ et $a \in A_\gamma\}$ vérifie pour tout $\alpha \in J$: $N_\alpha(\tilde{A}) = B_\alpha$, donc notamment
$\forall \alpha \in K : N_\alpha(\tilde{A}) = A_\alpha$.

Or $\tilde{A}(E) = K$. En effet,

si $\alpha \in \tilde{A}(E)$, il existe $a \in E$ tel que $\tilde{A}(a) = \alpha$. Mais alors il existe $\gamma \in K$ tel que $\gamma \geqslant \alpha$ et $a \in A_\gamma = N_\gamma(\tilde{A})$.
Donc $\alpha = \tilde{A}(a) \geqslant \gamma \geqslant \alpha$, et $\alpha \in K$.

S'il existait $\alpha \in K - \tilde{A}(E)$, on aurait

$$A_\alpha = N_\alpha(\tilde{A}) = \bigcup_{\substack{\gamma \in \tilde{A}(E) \\ \gamma \geqslant \alpha}} N_\gamma(\tilde{A}) = \bigcup_{\substack{\gamma \in \tilde{A}(E) \\ \gamma > \alpha}} A_\gamma \subset \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma > \alpha}} A_\gamma$$

qui contredirait (w).

Donc $\tilde{A}(E) = K$

$$A = \bigcup_{\alpha \in K} \alpha\, N_\alpha(\tilde{A}) = \bigcup_{\alpha \in K} \alpha\, A_\alpha$$

$$\text{pour tout } \alpha \in J : N_\alpha(\tilde{A}) = \bigcup_{\substack{\gamma \in \tilde{A}(E) \\ \gamma \geqslant \alpha}} N_\gamma(\tilde{A}) = \bigcup_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma \geqslant \alpha}} A_\gamma$$

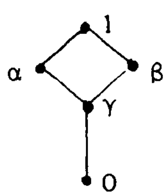
C'est bien la même partie floue $\tilde{A}$ que celle trouvée à la première démonstration, d'après le principe de détermination de Moisil, de sorte qu'on a indifféremment.

$\tilde{A}(a)$ = l'unique $\alpha \in K$ tel que $a \in M_\alpha$

$\tilde{A}(a) = \max\{\alpha \in K / a \in A_\alpha\}$, ce dernier résultat n'étant lui, pas généralisable au cas où J n'est pas complet.

ANNEXE. - Exemple où : ≪ les $(N_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in \tilde{A}(E)}$ sont des sous-espaces vectoriels de E sans que $\hat{A}$ ne soit sous-espace vectoriel flou de (E,J)≫ .

$E = \mathbb{R}e_1, \oplus \mathbb{R}e_2$

J = 

, $\tilde{A}$ vaut

$$\begin{cases} 1 \text{ en } 0 \\ \alpha \text{ sur } \mathbb{R}e_1 - (0) \\ \beta \text{ sur } \mathbb{R}e_2 - (0) \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

$N_0(\tilde{A}) = E$, $N_\alpha(\tilde{A}) = \mathbb{R}e_1$, $N_\beta(\tilde{A}) = \mathbb{R}e_2$, $N_1(\tilde{A}) = (0)$, mais $N_\gamma(\tilde{A}) = \mathbb{R}e_1 \cup \mathbb{R}e_2$.

§ 4 Hyperplans flous :

$\tilde{A}$: partie floue de $(E,J) \to J(\tilde{A})$.

$\tilde{A}$: sous-espace vectoriel flou de $(E,J) \to HJ(\tilde{A}) = \{\alpha \in \tilde{A}(E) / N_\alpha(A)$ est un hyperplan de $E\}$ $(\subset J(\tilde{A}))$.

1. DEFINITION. - *Soit* $\tilde{A}$ *un sous-espace vectoriel flou de* (E,J) *On dit que c'est un hyperplan flou de* (E,J) *ssi* $HJ(\tilde{A}) \neq \emptyset$.

EXEMPLE. - Si H est un hyperplan de E, si α et β sont des éléments de J tels que $\alpha < \beta$: $\alpha E \vee \beta H$ est un hyperplan flou de (E,J) : $HJ(\tilde{A}) = J(\tilde{A}) = \{\beta\}$.

EXEMPLE. - Si J est une chaîne, $J(\tilde{A})$ a au plus un élément. Donc si $\tilde{A}$ est un hyperplan flou de (E,J), $HJ(A) = J(\tilde{A})$ est un singleton.

PAR EXEMPLE. - Si $(\tilde{A}(E)$ est en outre finie, un hyperplan flou est de la forme $\alpha_1 E \cup \alpha_2 H \cup \alpha_3 A_{\alpha_3} \cup \ldots \cup \alpha_n A_{\alpha_n}$ où

$\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ sont les éléments de $A(E)$

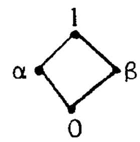
H est un hyperplan de E

$A_{\alpha_3}, \ldots, A_{\alpha_n}$ sont des sous-espaces de E tels que

$A_{\alpha_n} \subsetneqq A_{\alpha_{n-1}} \subsetneqq \cdots \subsetneqq A_{\alpha_3} \subsetneqq H$.

2. REMARQUES. - 1) Un hyperplan flou n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel flou différent de E maximal.

EXEMPLE : $E = Re_1 \oplus Re_2$

J = 

$\alpha \mathbb{R}e_1 \subsetneqq \alpha \mathbb{R}e_1 \vee \beta \mathbb{R}e_2$,

et $\alpha \mathbb{R}e_1$ et $\alpha \mathbb{R}e_1 \vee \beta \mathbb{R}e_2$ sont deux hyperplans flous de (E,J).

2) Un sous-espace vectoriel flou peut ne pas être un hyperplan flou et en contenir un.

Supposons en effet que $\tilde{A}(E)$ a un plus petit élément, qui ne soit pas 0. Il existe $a \in E$, tel que $\tilde{A}(a) = \min \tilde{A}(E)$. Soit H un hyperplan de E contenant a, et soit $\tilde{B} = \tilde{A}(a)H$. C'est un hyperplan flou (élémentaire), $\tilde{B}(a) = \tilde{A}(a)\ H(a) = \tilde{A}(a)$, et si $b \in E$: $\tilde{B}(b) = \tilde{A}(a)\ H(b) \leqslant \tilde{A}(a) \leqslant \tilde{A}(b)$.

3. THEOREME. - *Si* (E,J)*est une structure vectorielle floue,* $\tilde{A}$ *est un sous-espace vectoriel flou non constant tel que* $\tilde{A}(E)$ *soit une chaîne.*

1) il existe un hyperplan flou $\tilde{B}$ *de* (E,J) *tel que* $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ *et* $\tilde{B}(E) \subset \tilde{A}(E)$. (moyennant zorn).

2) $\tilde{A}$ *est l'intersection des hyperplans flous de* (E,J) *le contenant.*

DEMONSTRATION. - 1er cas. $\overline{\overline{\tilde{A}(E)}} = 2$

Soit $\tilde{A}(E) = \{\alpha,\beta\}$, où $\alpha < \beta$. De sorte que $\tilde{A} = \alpha E \vee \beta A_\beta$ (où $A_\beta = N_\beta(\tilde{A})$) . Soit H un hyperplan flou contenant A_β , et soit $\tilde{B} = \alpha E \vee \beta H$.

$\tilde{B}$ est un hyperplan flou contenant $\tilde{A}$.

Si $\mathcal{H}$ est la famille des hyperplans de E contenant A_β ,

$\tilde{A} = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} (\alpha E \vee \beta H)$. En effet, si $a \in E$: ou bien $\tilde{A}(a) = \alpha$; alors $a \notin A_\beta \neq E$. Il existe donc $H \in \mathcal{H}$ tel que $a \notin H$, et $(\alpha E \vee \beta H)(a) = \alpha = \tilde{A}(a)$ ou bien $\tilde{A}(a) = \beta$; alors $a \in A_\beta$, et pour tout $H \in \mathcal{H}$; $(\alpha E \vee \beta H)(a) = \beta = \tilde{A}(a)$.

2ème cas. $\overline{\overline{\tilde{A}}}(E) > 2$

PREUVE DE 1 : Il existe alors dans $\tilde{A}(E)$ deux éléments α et β tels que $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \alpha \text{ n'est pas plus petit élément de } \tilde{A}(E). \end{cases}$

Soit H un hyperplan de E contenant $A_\alpha (\neq E)$, on définit la famille $(B_\gamma)_{\gamma \in K}$ par : $\begin{cases} K = \{\alpha,\beta\} \cup [\tilde{A}(E) \cap]\beta, 1]] \\ B_\alpha = E \\ B_\beta = H \\ \text{pour tout } \gamma \in K - \{\alpha,\beta\} : B_\gamma = A_\gamma . \end{cases}$

Invoquons le théorème (§3, théorème 3, (B)) :

$\gamma < \delta$, et $\gamma,\delta \in K \Rightarrow B_\gamma \supsetneqq B_\delta$: car si $\gamma,\delta \in K - \{\alpha,\beta\}$: $B_\gamma = A_\gamma \supsetneqq A_\delta = B_\delta$

si $\delta \in K - \{\alpha,\beta\}$: $B_\beta = H \supset A_\alpha \supsetneqq A_\delta = B_\delta$

si $\delta \in K - \{\alpha,\beta\}$: $B_\alpha = E \supsetneqq A_\delta = B_\delta$

enfin $B_\alpha = E \supsetneqq H = B_\beta$.

Pour tout $\gamma \in \tilde{A}(E)$, notons $M_\gamma = A_\gamma - \bigcup\limits_{\substack{\delta \in \tilde{A}(E) \\ \delta > \gamma}} A_\delta$, $(N_\gamma)_{\gamma \in \tilde{A}(E)}$ est une partition de E.

Pour tout $\gamma \in K$, notons $N_\gamma = B_\gamma - \bigcup\limits_{\substack{\delta \in K \\ \delta > \gamma}} B_\delta$. Alors $(N_\gamma)_{\gamma \in K}$ *est une partition de* E.

En effet, par définition même de $(N_\gamma)_{\gamma \in K}$: $\gamma,\delta \in K$ et $\gamma \neq \delta \rightarrow N_\gamma \cap N_\delta = \emptyset$.

Si $\gamma \in K - \{\alpha,\beta\}$: $N_\gamma = M_\gamma \neq \emptyset$,

$N_\alpha = E - H \neq \emptyset$

$N_\beta = H - \bigcup\limits_{\substack{\gamma \in K \\ \gamma > \beta}} B_\gamma = H - \bigcup\limits_{\substack{\gamma \in \tilde{A}(E) \\ \gamma > \beta}} A_\gamma \supset A_\beta - \bigcup\limits_{\substack{\gamma \in \tilde{A}(E) \\ \gamma > \beta}} A_\gamma = M_\beta \neq \emptyset$.

Montrons que $\bigcup\limits_{\gamma \in K} N_\gamma = E$.

Soit $a \in E$. Il existe $\gamma \in \tilde{A}(E)$, $a \in M_\gamma$. Alors ou bien $\gamma > \beta$, et $a \in N_\gamma$; ou bien $a \in M_\beta$, et $a \in A_\beta \subset H$, alors si $\gamma \in \tilde{A}(E)$, $\gamma > \beta$: $a \notin A_\gamma$, donc $a \in N_\beta$;

ou bien $a \in M_\gamma (\gamma \in \tilde{A}(E),\ \gamma < \beta)$, et si $a \notin H$: $a \in N_\alpha$, si

$a \in H$, $\underset{\delta > \beta}{\delta \in \tilde{A}(E)} \not\Rightarrow \underset{\delta > \gamma}{\delta \in \tilde{A}(E)} \Rightarrow a \notin A_\delta$, et $a \in N_\beta$.

Pour tout $\gamma \in K$, B_γ *est un sous-espace vectoriel de* E.

$\Rightarrow$ La partie floue $\tilde{B}$ définie par $\tilde{B}(a)$ = l'unique $\gamma \in K$ tel que $a \in N_\gamma$ est telle que :

$$\left|\begin{array}{l} \tilde{B}(E) = K \subset \tilde{A}(E) \\ \tilde{B} \text{ est un hyperplan flou} \\ \tilde{B} = \bigcup\limits_{\gamma \in K} \gamma\ B_\gamma \\ \text{Pour tout } \gamma \in K : N_\gamma(\tilde{B}) = B_\gamma \ . \end{array}\right.$$

Enfin , $\tilde{A} \subset \tilde{B}$. En effet,

$$\boxed{\text{principe de Moisil généralisé : } \tilde{P} \subset \tilde{Q} \Leftrightarrow \forall \alpha \in \tilde{P}(E) : N_\alpha(\tilde{P}) \subset N_\alpha(\tilde{Q})}$$

et si $\gamma \in \tilde{A}(E)$: $\gamma \leqslant \alpha \Rightarrow A_\gamma \subset B_\gamma = E$; $\alpha < \gamma \leqslant \beta \Rightarrow A_\gamma \subset A_\alpha \subset H = B_\gamma$;

$\gamma > \beta \Rightarrow A_\gamma = B_\gamma$.

Notation : l'hyperplan flou $\tilde{B}$ ainsi construit est noté (α,β,H).
Remarque : la démonstration du seul ⟨1⟩ peut être simplifiée en prenant $\beta = \max \tilde{A}(E)$.

PREUVE DE ⟨2⟩ : Soit $a \in E$.

(A) $\tilde{A}(a)$ n'est pas minimum de $\tilde{A}(E)$, ni atome de $\tilde{A}(E)$:

Il existe alors $\alpha \in \tilde{A}(E)$, tel que $\alpha < \tilde{A}(a)$, et α non plus petit élément de $\tilde{A}(E)$ et H hyperplan $\supset A_\alpha$.

Soit $\tilde{B} = (\alpha, \tilde{A}(a), H)$: d'après $\langle 1 \rangle$, c'est un hyperplan flou qui contient $\tilde{A}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{or } a \in A_{A(a)} \subset A_\alpha \subset H \Rightarrow a \in H \\ \text{pour tout } \beta \in \tilde{A}(E), \\ \text{tel que } \beta > \tilde{A}(a) : a \in A_\beta \end{array}\right\} \quad a \in N_{\tilde{A}(a)} \Rightarrow (\alpha, \tilde{A}(a), H)(a) = \tilde{A}(a).$$

(B) $\tilde{A}(a)$ est un atome de $\tilde{A}(E)$.

Comme $\overline{\overline{\tilde{A}(E)}} > 2$, $\tilde{A}(a) \neq \max \tilde{A}(E)$.

Soit $A'_{\tilde{A}(a)} = N'_{\tilde{A}(a)}(\tilde{A})$, et soit H un hyperplan de E tel que $\left| \begin{array}{l} H \supset A'_{\tilde{A}(a)} \\ a \notin H \end{array}\right.$

Posons $\tilde{B} = \tilde{A}(a) E \vee \max \tilde{A}(E) H$.

$\tilde{B}$ est un hyperplan flou.

$\tilde{B} \supset \tilde{A}$, car si $b \in E$: $\left| \begin{array}{l} \text{ou bien } b \in H, \text{ et } \tilde{B}(b) = \max \tilde{A}(E) \geqslant A(b) \\ \text{ou bien } b \notin H,\ b \notin A'_{\tilde{A}(a)} \Rightarrow \tilde{A}(b) \not> \tilde{A}(a) \Rightarrow \tilde{A}(b) \leqslant \tilde{A}(a). \\ \text{Alors } \tilde{B}(b) = \tilde{A}(a) \geqslant \tilde{A}(b). \end{array}\right.$

Enfin $\tilde{B}(a) = \tilde{A}(a)$, car $a \notin H$.

(C) $\tilde{A}(a) = \min \tilde{A}(E)$ et $\tilde{A}(E)$ a un atome :

Notons α = l'atome de $\tilde{A}(E)$, $\beta = \max \tilde{A}(E)$.

Soit H un hyperplan de E tel que $H \supset A_\alpha$ (il en existe car $A_\alpha \neq E$ et $a \notin A_\alpha$)
$a \notin H$.
Soit $\tilde{B} = \tilde{A}(a)\ E \vee \beta\ H$.

$\tilde{B}$ est un hyperplan flou.
$\tilde{B}(a) = \tilde{A}(a) \vee \beta\ H(a) = \tilde{A}(a)$.

Si $b \in E$: ou bien $\tilde{A}(b) = \tilde{A}(a)$. Alors $\tilde{A}(b) = \tilde{A}(a) \leq \tilde{A}(a) \vee \beta\ H(b) = \tilde{B}(b)$.

ou bien $\tilde{A}(b) \neq \tilde{A}(a)$.

Alors $\tilde{A}(b) \geq \alpha \Rightarrow b \in A_\alpha \Rightarrow b \in H \Rightarrow \tilde{B}(b) = \beta \geq \tilde{A}(b)$.

D $\tilde{A}(a) = \min \tilde{A}(E)$, et $\tilde{A}(E)$ n'a pas d'atome :

A chaque couple (α,β) d'éléments de $\tilde{A}(E) - \{\tilde{A}(a)\}$, on associe un hyperplan H de E contenant A_α , tel que $a \notin A_\alpha$, et l'hyperplan flou (α,β,H) contenant $\tilde{A}$ (comme au 1).

$\tilde{A}(a)$ minore donc $((\alpha,\beta,H)(a))_{(\alpha,\beta,H)}$.

Soit $\gamma \in J$, $\gamma > \tilde{A}(a)$. Il existe un couple (α,β) d'éléments de $\tilde{A}(E)-\{\tilde{A}(a)\}$ tel que $\alpha < \beta < \gamma$. Si H est l'hyperplan associé à (α,β) :
$(\alpha,\beta,H)(a) \leq \beta < \gamma$, et γ ne minore donc pas $((\alpha,\beta,H)(a))_{(\alpha,\beta,H)}$.

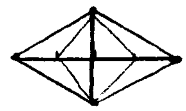
C'est-à-dire que $\tilde{A}(a) = \bigwedge_{(\alpha,\beta)} (\alpha,\beta,H)(a)$ ce qui achève la preuve du théorème.

<u>Si $\tilde{A}(E)$ n'est pas une chaîne</u> ...

1) Même si $\tilde{A}(E)$ n'est pas une chaîne, si $\max \tilde{A}(E) \neq 1$, il existe un hyperplan flou contenant $\tilde{A}$.
En effet, si H est un hyperplan de E, $\max \tilde{A}(E)\ E \vee H$ est un hyperplan flou de (E,J) qui contient $\tilde{A}$.

2) Si J n'est pas une chaîne, un sous-espace vectoriel flou de (E,J) peut éventuellement n'être contenu dans aucun hyperplan flou de (E,J).

EXEMPLE . - $E = \mathbb{R}^3$.

$J =$  $\mathfrak{A}$, antichaîne en bijection avec $\mathbb{R}$.

Soit $(D_\xi)_{\xi \in \mathfrak{A}}$ une indexation des droites vectorielles de E telle que $\xi \neq \eta \Rightarrow D_\xi \neq D_\eta$.

$\tilde{A}$ est la partie floue de (E,J) définie par :

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{A}(0) = 1 \\ \text{Si } a \neq 0, \\ \tilde{A}(a) = \xi \Leftrightarrow \mathbb{R}a = D_\xi \end{array} \right. .$$

$\tilde{A}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J). Il n'est contenu dans aucun hyperplan flou de (E,J). En effet, supposons qu'il existe un hyperplan flou de (E,J). En effet, supposons qu'il existe un hyperplan flou $\tilde{H}$ contenant $\tilde{A}$.

$J(\tilde{H}) \subset J(\tilde{A}) = \mathfrak{A}$.

En effet, $0 \notin J(\tilde{H})$

$1 \notin J(\tilde{H})$, car sinon

ou bien $\tilde{H}(E) = \{0,1\}$, mais alors $\tilde{H}$ est un plan de E contenant $\tilde{A}$, et alors pour tout $\xi \in \mathfrak{A}$: $N_\xi(\tilde{H}) = \tilde{H} \supset N_\xi(\tilde{A}) = D_\xi$, ce qui est impossible.
Ou bien $\tilde{H}(E) = \{\xi,1\}$, mais alors $\tilde{H} = \xi E \vee H$, où H est un plan de E contenant chaque $D_\eta (\eta \neq \xi)$ puisque $N_\eta(\tilde{H}) = N_1(\tilde{H}) = H \supset N_\eta(\tilde{A}) = D_\eta$.

$J(\tilde{H})$ n'est pas réduit à un élément :

En effet, si $J(\tilde{H}) = \{\xi\}$

ou bien $\tilde{H}(E) = \{0,\xi\}$, et $\tilde{H} = \xi H$. Alors pour tout $\eta \in \mathfrak{A} - \{\xi\}$
$N_\eta(\tilde{H}) = \emptyset \supset N_\eta(\tilde{A}) = D_\eta$ (impossible).
Ou bien $\tilde{H}(E) = \{0,\xi,1\}$, et $\tilde{H} = \xi H \vee D$ (D étant une droite ou $\{0\}$).

Soit alors η_1 et η_2 deux éléments distincts de $\mathcal{Q} - \{\xi\}$.

$N_{\eta_1}(H) = D \supset D_{\eta_1}$ (impossible).

$N_{\eta_2}(H) = D \supset D_{\eta_2}$.

Soient donc ξ et η deux éléments distincts de $J(\tilde{H})$.

$$\left| \begin{array}{l} N_\xi(\tilde{H}) \text{ est un plan, } P_\xi \\ \\ N_\eta(H) \text{ est un plan, } P_\eta \end{array} \right. \quad . \text{ Soit } D_\xi = P_\xi \cap P_\eta$$

$1 \in \tilde{H}(E)$ (qui a un plus grand élément), et $N_1(\tilde{H}) = D_\xi$ (car si $a \in D_\xi - \{0\}$ $\tilde{H}(a) \geq \begin{matrix}\xi \\ \eta\end{matrix} \Rightarrow \tilde{H}(a) = 1$).

Soient ρ et λ deux éléments distincts de $\mathcal{Q}-\{\xi\}$, tels que D_ξ , D_ρ et D_λ soient trois droites, coplanaires.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour tout } a \in D_\rho \ : \ \tilde{H}(a) \geq \tilde{A}(a) = \rho \\ \\ \text{Pour tout } a \in D_\xi \ : \ \tilde{H}(a) = 1 \geq \rho \end{array} \right] \Rightarrow \text{pour tout } a \in D_\rho + D_\xi \ : \ \tilde{H}(a) \geq \rho$$

(puisque $N_\rho(\tilde{H})$ est un sous-espace vectoriel de E).

Donc pour tout $a \in D_\lambda$: $\tilde{H}(a) \geq \rho$. Mais $\tilde{H}(a) \geq \tilde{A}(a) = \lambda$. Donc pour tout $a \in D_\lambda$: $\tilde{H}(a) = 1$, ce qui contredit $N_1(\tilde{H}) = D_\xi$.

ANNEXE : Une démonstration plus simple du théorème 3 du § 4. -

Soit $\tilde{A}$ un sous-espace vectoriel flou tel que $\tilde{A}(E)$ soit une chaîne ayant au moins 3 points (2° cas).

Comme il a été remarqué plus haut, la preuve de ⟨1⟩ peut être simplifiée en prenant $\beta = \max \tilde{A}(E)$.
En ce qui concerne la preuve de ⟨2⟩, il est plus simple de dire : si $a \in E$,.

CAS I : $\tilde{A}(a) = \max \tilde{A}(E)$.

Il existe $\alpha \in \tilde{A}(E)$, un élément qui n'est ni le maximum ni minimum de $\tilde{A}(E)$; il existe un hyperplan H contenant A_α.
Soit $\tilde{B} = (\alpha, \tilde{A}(a), H)$: d'après $\langle 1 \rangle$, c'est un hyperplan flou contenant $\tilde{A}$. Or $a \in A_{\tilde{A}(a)} \subset A_\alpha \subset H \Rightarrow a \in H$. Or $H = N_{\tilde{A}(a)}$, puisque $\tilde{A}(a) = \max \tilde{A}(E)$.
Donc $(\alpha, \tilde{A}(a), H)(a) = \tilde{A}(a)$.

CAS II : $\tilde{A}(a) \neq \max \tilde{A}(E)$.

Notons $A'_{\tilde{A}(a)} = N^{\perp}_{\tilde{A}(a)}(\tilde{A})$. Il existe un hyperplan H de E tel que $\left| \begin{array}{l} H \supset A^{\perp}_{\tilde{A}(a)} \\ a \notin H \end{array} \right.$

(puisque $A^{\perp}_{\tilde{A}(a)}$ est un sous-espace vectoriel de E - $\tilde{A}(E)$ étant une chaîne - ne contenant pas a).

Posons $\tilde{B} = \tilde{A}(a)\ E \vee \max \tilde{A}(E)\ H$. $\tilde{B}$ est un hyperplan flou.
$\tilde{B} \supset \tilde{A}$, car si $b \in E$: ou bien $b \in H$, et $\tilde{B}(b) = \max \tilde{A}(E) \geq \tilde{A}(b)$; ou bien $b \notin H$, et $\tilde{B}(b) = \tilde{A}(a)$. Mais alors $b \notin A'_{\tilde{A}(a)}$, $\tilde{A}(b) \not> \tilde{A}(a)$. et puisque $\tilde{A}(E)$ est une chaîne, $\tilde{A}(b) \leq \tilde{A}(a)$. Donc $\tilde{B}(b) \geq \tilde{A}(b)$.
Enfin, puisque $a \notin H$: $\tilde{B}(a) = \tilde{A}(a)$.

2ème partie : STRUCTURES AFFINES FLOUES.

On appelle *structure affine floue* tout $(\mathcal{E}, J)$; où $\mathcal{E}$ est un espace affine (de direction E).

§ 1. Notion de variété affine floue :

DEFINITION. - *Soit* $f \in J^{\mathcal{E}}$.

(f *est une variété affine floue*)$\Leftrightarrow$($\exists M \in \mathcal{E}$, $\exists \tilde{A}$ *sous-espace vectoriel flou de* (E;J), *tels que* $\forall P \in \mathcal{E}$: $f(p) = \tilde{A}(\overrightarrow{MP})$).

REMARQUE. - $f(M) = \tilde{A}(\vec{O})$.

Pour tout $P \in \mathcal{E}$: $f(P) = \tilde{A}(\overrightarrow{MP}) \leq \max \tilde{A}(E) = \tilde{A}(\vec{O}) = f(M)$. Donc $f(M) = \max f(\mathcal{E})$.

NOTATION. - Dans les conditions de la définition précédente, f est notée $(M,\tilde{A})$.

THEOREME. - *Si* f *est la variété affine floue* $(M,\tilde{A})$ *, si* $f(N) = \max f(\mathcal{E})$ *alors :* $(M,\tilde{A}) = (N,\tilde{A})$ *en effet, pour tout* $P \in \mathcal{E}$:
$(N,\tilde{A})(P) = \tilde{A}(\overrightarrow{NP}) = \tilde{A}(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MP}) \geq \tilde{A}(\overrightarrow{NM}) \wedge \tilde{A}(\overrightarrow{MP}) = f(N) \wedge f(P) = f(P) =$
$=(M,\tilde{A})(P)$.

REMARQUE. - Si $f = (M,\tilde{A})$, on a nécessairement $\tilde{A}(\vec{u}) = f(P)$ où $\overrightarrow{MP} = \vec{u}$. $\tilde{A}$ est donc déterminé par f, on dit que c'est la *direction* de f.

THEOREME. - *si caractéristique* (K) $\neq 2$.
Soit $f \in J^{\mathcal{E}}$. *Il y a équivalence entre :*
(i) f *est une variété affine floue*
(ii) $f(\mathcal{E})$ *a un maximum non nul, et* $\forall P, Q \in \mathcal{E}$,
$\forall \lambda, \mu \in K(\lambda+\mu = 1 \Rightarrow f(\lambda P+\mu Q) \geq f(P) \wedge f(Q))$.

En effet,
si $f = (M,\tilde{A})$: $f(\lambda P+\mu Q) = \tilde{A}(\lambda\overrightarrow{MP}+\mu\overrightarrow{MQ}) \geq \tilde{A}(\overrightarrow{MP}) \wedge \tilde{A}(\overrightarrow{MQ}) = f(P) \wedge f(Q)$
par ailleurs, $f(M) = \max f(\mathcal{E})$. De plus, $f(M) = \tilde{A}(\vec{O}) \neq 0$

Supposons (ii). Soit M tel que $f(M) = \max f(\mathcal{E}) \neq 0$. Définissons $\tilde{A}$ par $A(\vec{u}) = f(M+\vec{u})$. Alors
$$\tilde{A}(a\vec{u}+b\vec{v}) = f(M+a\vec{u}+b\vec{v}) = f[a(M+\vec{u})+b(M+\vec{v})+(1-a-b)M] \underset{\downarrow}{\geq} f(M+\vec{u}) \wedge f(M+\vec{v}) \wedge f(M) =$$
$$= \tilde{A}(\vec{u}) \wedge \tilde{A}(\vec{v}).$$
(résultat de (ii)).

NIVEAUX DE FLOU D'UNE VARIETE AFFINE FLOUE .

PROPOSITION. - *Soit* $f \in J^{\mathcal{E}}$.

1 *Il y a équivalence entre :* *i)* f *est une variété flou de* $(\mathcal{E}, J)$

ii) $f(\mathcal{E})$ *a un maximum non nul, et* $\forall \alpha \in J$: $N_\alpha(f)$ *est vide ou une variété affine de* $\mathcal{E}$.

2 *Si* $f(\mathcal{E})$ *est une chaîne, ces conditions sont encore équivalentes à (iii)* $f(\mathcal{E})$ *a un maximum non nul, et* $\forall \alpha \in f(\mathcal{E})$: $N_\alpha(f)$ *est une variété affine de* $\mathcal{E}$.

En effet, Si f est une variété affine floue de $(\mathcal{E}, J)$, et si $f(M) = \max f(\mathcal{E}) \neq 0$, pour tout $\alpha \in J$: $N_\alpha(f) = M + N_\alpha(\tilde{A})$. (Si $M + \emptyset = \emptyset$).

Supposons (ii). Soit $M \in \mathcal{E}$ tel que $f(M) = \max f(\mathcal{E}) \neq 0$.

$\forall \alpha \in J[N_\alpha(f) \neq \emptyset \Rightarrow M \in N_\alpha(f)]$. Donc si $N_\alpha(f) \neq \emptyset$, il existe un sous-espace vectoriel F_α de E tel que $N_\alpha(f) = M + F_\alpha$.

Posons alors $\tilde{A}(\vec{u}) = f(M+\vec{u})$, pour tout $\vec{u} \in E$.

$$N_\alpha(\tilde{A}) = \left| \begin{array}{l} F_\alpha \text{ si } N_\alpha(f) \neq \emptyset. \\ \emptyset \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

En effet, $\vec{u} \in N_\alpha(A) \Leftrightarrow f(M+\vec{u}) \geqslant \alpha \Leftrightarrow M+\vec{u} \in N_\alpha(f)$; et si $N_\alpha(f) \neq \emptyset$;

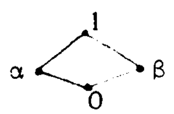
$\vec{u} \in N_\alpha(\tilde{A}) \Leftrightarrow M+\vec{u} \in M+F_\alpha \Leftrightarrow \vec{u} \in F_\alpha$.

Donc $\tilde{A}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J) et $f = (M,\tilde{A})$, car $(M,\tilde{A})(P) = A(\vec{MP}) = f(M+\vec{MP}) = f(P)$.

Supposons que $f(\mathcal{E})$ soit une chaîne et qu'on ait (iii). Si M est un point de $\mathcal{E}$ tel que $f(M) = \max f(\mathcal{E}) \neq 0$, si $\tilde{A}$ est défini par $\tilde{A}(\vec{u}) = f(M+\vec{u})$, $\forall \alpha \in \tilde{A}(E) = f(\mathcal{E})$: $N_\alpha(\tilde{A})$ est la direction de $N_\alpha(f)$. Donc $\tilde{A}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J), et $f = (M,\tilde{A})$.

REMARQUES . -

1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension trois, D et Δ deux droites affines non coplanaires de $\mathcal{E}$, J l'anneau booléien



, et $f : \mathcal{E} \to J$ valant α sur D, β sur Δ et 0 ailleurs.

$f(\mathcal{E}) = \{0,\alpha,\beta\}$. $N_0(f) = \mathcal{E}$, $N_\alpha(f) = D$, $N_\beta(f) = \Delta$

$N_1(f) = \emptyset$.

mais f n'est pas une variété affine floue, car $f(\mathcal{E})$ n'a pas de maximum.

2. Mais si $\mathcal{E}$ est de dimension finie et si $f(\mathcal{E})$ est une chaîne : il y a équivalence entre :

(i) f est une variété affine floue de $(\mathcal{E},J)$

(iv) $\forall \alpha \in f(\mathcal{E})$: $N_\alpha(f)$ est une variété affine de $\mathcal{E}$; et $f \neq 0$.

En effet, si $f(\mathcal{E})$ n'avait pas de maximum, il existerait une suite $(M_n)_{n \geq 1}$ de point de $\mathcal{E}$ telle que la suite $(f(M_n))_{n \geq 1}$ soit strictement croissante. Mais alors la suite $(N_{f(M_n)}(f))_{n \geq 1}$ serait une suite strictement décroissante, ce qui est impossible.

§ 2. Parties floues convexes : Désormais le corps de base est $\mathbb{R}$.

a.

DEFINITION. - *Soit* $(\mathcal{E},J)$ *une structure affine floue. Une partie floue* f *de* $(\mathcal{E},J)$ *est dite convexe si :*

$$\forall P,Q \in \mathcal{E},\ \forall \lambda \in [0,1] \ :\ f[\lambda P+(1-\lambda)Q] \geqslant f(P) \wedge f(Q).$$

ce qui revient à dire que si $(P,\alpha) \in f$, si $(Q,\beta) \in f$ et si $\alpha \wedge \beta \neq 0$, $(\lambda P+(1-\lambda)Q, \alpha \wedge \beta) \in f$.

THEOREME. - *Soit* $f \in J^{\mathcal{E}}$. *(f est convexe)* $\Leftrightarrow [\forall \alpha \in J : N_\alpha(f)$ *est convexe*$]$. *Et si* $f(\mathcal{E})$ *est une chaine :*
(f est convexe) $\Leftrightarrow [\forall \alpha \in f(\mathcal{E}), N_\alpha(f)$ *est convexe*$]$.

La preuve est immédiate.

REMARQUE. - Toute intersection de parties floues convexes est convexe (sous réserve que cette intersection existe).

b.

ENVELOPPE CONVEXE D'UNE PARTIE FLOUE :

Il résulte de la remarque précédente que, si J est complet, pour toute $f \in J^{\mathcal{E}}$, il existe une plus petite partie floue convexe contenant f, à savoir l'intersection des parties floues convexes contenant f, notée $\hat{f}$.

EXEMPLE. - Si J est complet et quasi totalement distributif cad"$\alpha \wedge (\bigvee_I \alpha_i) = \bigvee_I (\alpha \wedge \alpha_i)$" (par exemple si J est une chaîne complète) :

si pour tout $p \in N$ et pour tout $M \in \mathcal{E}$, $C(M,p)$ désigne l'ensemble des parties finies $\{M_1,\dots,M_p\}$ de points de $\mathcal{E}$ telles que M soit dans l'enveloppe convexe de $\{M_1,\dots,M_p\}$; on a :

$$\hat{f}(M) = \bigvee_{p \in \mathbb{N}} \bigvee_{F \in C(M,p)} \left(\bigwedge_{Q \in F} f(Q) \right) \quad (\text{cf}[1])$$

en effet, il résulte de $\{M\} \in C(M,1)$ que $f(M) \leqslant g(M) = \bigvee_{p \in \mathbb{N}} \bigvee_{F \in C(M,p)} \left(\bigwedge_{Q \in F} f(Q) \right)$

d'autre part il est évident que tout convexe contenant f contient g, et enfin g est convexe du fait que $F \in C(M,p)$, $G \in C(N,q)$, $\lambda \in [0,1] \Rightarrow F \cup G \in C(\lambda M + (1-\lambda)N,\ h)(h \leqslant p+q)$, et du fait que J est quasi totalement distributif.

PROPRIETE. - Si f est nette, $\hat{f}$ est nette et donc l'enveloppe convexe usuelle de f. Soit en effet $\tilde{f}$ le plus petit convexe net contenant f.

$$f \leqslant \hat{f} \leqslant \tilde{f} \Rightarrow \forall \alpha \in J : N_\alpha(f) = f \subset N_\alpha(\hat{f}) \subset N_\alpha(\tilde{f}) = \tilde{f}$$

mais comme $N_\alpha(\hat{f})$ est un convexe net contenant f : $N_\alpha(\hat{f}) \supset \tilde{f} \Rightarrow N_\alpha(\hat{f}) = \tilde{f}$ ce pour tout $\alpha \in J$. C'est-à-dire que $\hat{f} = \tilde{f}$.

PROPRIETE.:- Pour toute $f \in J^{\mathcal{E}}$, pour tout $\alpha \in J$: $\widehat{N_\alpha(f)} \subset N_\alpha(\hat{f})$

$N_\alpha(\hat{f})$ est en effet un convexe qui contient $N_\alpha(f)$.

(Z) EXEMPLE OU $\widehat{N_\alpha(f)} \subsetneq N_\alpha(\hat{f})$.

$\mathcal{E}$ désigne une droite affine réelle, munid du repère $(O,\vec{u})$

$J = [0,1]$

f est définie par : $f(O+\lambda\vec{u}) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda > 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda < -2 \\ 0 \text{ sinon.} & \end{cases}$

Soit g une partie floue convexe contenant f, et soit $P \in \mathcal{E}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $n > 2$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

P est dans le segment $[O - n\vec{u}\ ,\ O + n\vec{u}]$

de sorte que $g(P) \geqslant g(O - n\vec{u}) \wedge g(O + n\vec{u}) \geqslant f(O - n\vec{u}) \wedge f(O + n\vec{u}) =$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon$. C'est-à-dire que $\forall \underline{P} \in \mathcal{E} : g(P) \geqslant \frac{1}{2}$.

Or $E_{\frac{1}{2}}$ $(M \mapsto \frac{1}{2})$ est visiblement un convexe qui contient f. D'où $\hat{f} = E_{\frac{1}{2}}$.

Mais $\begin{cases} \widehat{N_{\frac{1}{2}}(f)} = \hat{\emptyset} = \emptyset \\ N_{\frac{1}{2}}(\hat{f}) = \mathcal{E}. \end{cases}$

§ 3. Cônes flous.

a. CÔNES VECTORIELS FLOUS.

Soit (E,J) une structure vectorielle floue, et soit $\tilde{A} \in J^E$.

On dit que $\tilde{A}$ est un cône vectoriel flou de (E,J) ssi : $\forall a \in E$, $\forall \lambda > 0 : \tilde{A}(\lambda a) \geqslant \tilde{A}(a)$.

REMARQUE. - Alors, $\forall a \in E,\ \forall \lambda > 0 : \tilde{A}(\lambda a) = \tilde{A}(a)$.

b CÔNES FLOUS.

Soit $(\mathcal{E},J)$ une structure affine floue, de direction E, et soit $f \in J^{\mathcal{E}}$.

On dit que f est un cône flou ssi : $\exists M \in \mathcal{E}, \forall P \in \mathcal{E} - \{M\}$, $\forall \lambda > 0 : f(M + \lambda \overrightarrow{MP}) \geqslant f(P)$. (On dit que M est un sommet du cône).

REMARQUES. -

Alors, f est constante sur chaque demi-droite épointée d'origine M. Si $\tilde{A} \in J^E$ est définie par $\tilde{A}(\vec{u}) = f(M + \vec{u})$, $\tilde{A}$ est un cône vectoriel de (E,J).

En effet, $\tilde{A}(\lambda\vec{u}) = f(M + \lambda\vec{u}) \geqslant f(M + \vec{u}) = \tilde{A}(\vec{u})$. On note $f = [M,A]$.

Si $f = [M,\tilde{A}] = [N,\tilde{B}] \Rightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$, de sorte qu'on peut appeler $\tilde{A}$ *le cône vectoriel flou directeur de* f.

En effet, soit $\vec{u} \in E$:

ou bien $\vec{u}$ n'est pas colinéaire à $\vec{MN}$, et si I désigne le centre du parallélogramme $M, M + \vec{u}, N + \vec{u}, N$;

$\tilde{A}(\vec{u}) = f(M+\vec{u}) = f(N+\overrightarrow{N(M+u)}) = f(N+\frac{1}{2}\overrightarrow{N(M+u)}) = f(I) = f(M+\frac{1}{2}\overrightarrow{M(N+u)}) =$

$= f(M+\overrightarrow{M(N+u)}) = f(N+\vec{u}) = \tilde{B}(\vec{u})$;

ou bien $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{MN}$, et $\exists P \in \{M,N\}, \exists \lambda > 0$,

$\overrightarrow{P(N+u)} = \lambda\, \overrightarrow{P(M+u)}$.

$\vec{u} \neq \vec{0}$.

Alors $\tilde{A}(\vec{u}) = f(M+\vec{u}) = f(N+\vec{u}) = \tilde{B}(\vec{u})$.

Enfin $\tilde{A}(\vec{0}) = f(M) = f(I) = f(N) = \tilde{B}(\vec{0})$.

THEOREME.- *Si* $f \in J^{\mathcal{E}}$*, il y a équivalence entre :*

(1) f *est un cône flou de* $(\mathcal{E},J)$

(2) $\forall \alpha \in J$: $N_\alpha(f)$ *est un cône de* $\mathcal{E}$ *ou est vide et, si* $f(\mathcal{E})$ *est une chaîne : (1), (2) équivalent à (3).*

$\forall \alpha \in f(\mathcal{E})$, $N_\alpha(f)$ *est un cône de* $\mathcal{E}$.

c Toute intersection de cônes vectoriels flous est un cône vectoriel flou. Toute intersection de M-cônes flous (cad de cônes flous de sommet M) est un M-cône flou.

De sorte que, si J est *complet,* on peut parler du cône vectoriel flou engendré par une partie flou de (E,J), du M-cône flou engendré par une partie floue de $(\mathcal{E},J)$, du M-cône convexe flou engendré par une partie floue de $(\mathcal{E},J)$.

3ème partie : QUELQUES PROBLEMES D'ENGENDREMENT, LORSQUE J EST COMPLET NOTAMMENT.

(lorsqu'il est question de convexes, de cônes, de cônes convexes, le corps de base est $\mathbb{R}$).

§ 1 . Soit (E,J) une structure vectorielle floue de *dimension finie* où J est une *chaîne complète*.

Soit $\tilde{A} \in J^E$.

PROBLEME . - Construire le sous-espace vectoriel flou de (E,J) engendré par $\tilde{A}$.

Posons, pour tout $\alpha \in J$,

$\langle N_\alpha(\tilde{A}) \rangle$ = sous-espace vectoriel de E engendré par $N_\alpha(\tilde{A})$.

$\langle\alpha\rangle = \{\beta \in J / \langle N_\beta(\tilde{A}) \rangle = \langle N_\alpha(\tilde{A}) \rangle\}$

$\alpha' = \bigvee \langle\alpha\rangle$

on peut faire les remarques suivantes :

1) Pour tout $\alpha \in J$, $\langle\alpha\rangle$ est un intervalle de J d'extrémité α'.

En effet, si $\beta < \gamma < \delta$, et si β $\langle\alpha\rangle$ et δ $\langle\alpha\rangle$.

$\langle N_\alpha(\tilde{A}) \rangle = \langle N_\beta(\tilde{A}) \rangle \supset \langle N_\gamma(\tilde{A}) \rangle \supset \langle N_\delta(\tilde{A}) \rangle = \langle N_\alpha(\tilde{A}) \rangle$, de sorte que $\gamma \in \langle\alpha\rangle$: $\langle\alpha\rangle$ est donc un intervalle de la chaîne complète J non vide ($\alpha \in \langle\alpha\rangle$), d'extrémité $\bigvee\langle\alpha\rangle = \alpha'$.

2) Pour tout $(\alpha,\beta) \in J^2$, $\alpha' = \beta' \Rightarrow$

ou bien $\langle\alpha\rangle = \langle\beta\rangle$

ou bien $\langle\alpha\rangle$ est un intervalle se terminant en α', ne contenant pas α', alors que $\langle\beta\rangle = \{\alpha'\}$.

Ceci résulte trivialement de 1) et de ce que les intervalles $(<\alpha>)_{\alpha \in J}$ sont deux à deux disjoints.

3) Les intervalles $(<\alpha>)_{\alpha \in J}$ sont en nombre fini.

En effet, si n est la dimension de E, il y a au plus (n+1) intervalles de ce type.

. Soit K la partie de J ainsi définie :

ou bien $N_1(\tilde{A}) \neq \emptyset$: alors $K = \{\alpha'/\alpha \in J\}$ (remarquons que 1 est le maximum de K).

ou bien $N_1(\tilde{A}) = \emptyset$, $\forall \alpha \in J^*$: $N_\alpha(\tilde{A}) \neq \emptyset$, 1 n'a pas de prédécesseur dans J : alors $K = \{\alpha'/\alpha \in J\}$ (1=maxK).

ou bien $N_1(\tilde{A}) = \emptyset$, $\forall \alpha \in J^*$: $N_\alpha(\tilde{A}) \neq \emptyset$, 1 a un prédécesseur, 1^-, dans J : alors $K = \{\alpha' \neq 1 /\alpha \in J\} \cup \{1^-\}$.

(remarquons que si $\forall \alpha \in J^*$: $N_\alpha(\tilde{A}) \supsetneqq \{o\}$, $1^- \in \{\alpha'/\alpha \in J\}$) - ($1^-$=max k).

ou bien $N_1(\tilde{A}) = \emptyset$, $\exists\, \alpha_1 < 1$ tel que $N_{\alpha_1}(\tilde{A}) = \emptyset$, $\forall \alpha \in J$ $(N_\alpha(\tilde{A}) \neq \emptyset \Rightarrow N_\alpha(\tilde{A}) \supsetneqq \{0\})$: alors $K = \{\alpha' \neq 1 /\alpha \in J\}$.

ou bien $N_1(\tilde{A}) = \emptyset$, $\exists\, \alpha_1 < 1$ tel que $N_{\alpha_1}(\tilde{A}) = \emptyset$, $\exists\, \alpha_2 \in J$ tel que $N_{\alpha_2}(A) = \{0\}$:

soit $\alpha_o = \{\alpha \;\; J/N_\alpha(A) = \{\{o\}\}$: alors $K = \;\alpha' \neq 1/\alpha \;\; J\} \;\; \{\alpha_o\}$

(α_o=max K).

REMARQUE. - Soit α J. Y-a-t-il un plus petit élément de K, noté α, supérieur à α?

si α K : $\alpha = \alpha$

si α K et si $\alpha' \neq 1$: $\alpha = \alpha'$.

si $\alpha \notin K$ et si $\alpha' = 1$:

si $N_1(\tilde{A}) \neq \emptyset$: $\hat{\alpha} = 1$

si : $N_1(\hat{A}) = \emptyset$, $\forall \beta \in J^*$: $N_\beta(\hat{A}) \neq \emptyset$, 1 n'a pas de prédécesseur dans J : $\hat{\alpha} = 1$

si : $N_1(\tilde{A}) = \emptyset$, $\forall \beta \in J^*$: $N_\beta(\tilde{A}) \neq \emptyset$, 1 a un prédesseur dans J : $\hat{\alpha} = 1^-$,

si : $N_1(\hat{A}) = \emptyset$, $\exists \alpha_1 < 1$ tel que $N_{\alpha_1}(\tilde{A}) = \emptyset$, $\forall \alpha \in J [N_\alpha(\tilde{A}) \neq \emptyset \Rightarrow N_\alpha(\hat{A}) \supsetneqq \{o\}]$

aucun élément de K ne majore α.

si : $N_1(\tilde{A}) = \emptyset$, $\exists \alpha_1 < 1$ tel que $N_{\alpha_1}(\tilde{A}) = \emptyset$, $\exists \alpha_2 \in J$ tel que $N_{\alpha_2}(\tilde{A}) = \{0\}\}$ ·

ou bien $\alpha < \alpha_o$ et $\hat{\alpha} = \alpha_o$

ou bien α n'est majoré par aucun élément de K.

DEFINISSONS UNE FAMILLE $(B_\gamma)_{\gamma \in K}$ DE PARTIES NETTES :

Soit $\gamma \in K$

* si $\gamma \neq \max K$: il existe alors $\alpha \in J$ tel que $\gamma = \alpha'$

ou bien il existe $\beta \in J$ tel que $\left| \begin{array}{l} \beta < \gamma \\ \gamma \text{ est extrémité de } <\beta> \\ \gamma \notin <\beta> \end{array} \right|$: on pose alors $B_\gamma = < N_\beta(A)>$

sinon, $B_\gamma = <N_\gamma(\tilde{A})>$.

* si $\gamma = \max K$:

ou bien il existe $\alpha \in J$ tel que $\gamma = \alpha'$: même définition que précédemment

ou bien $\gamma = 1^-$, et $N_{1^-}(\hat{A}) = \{o\}$. Alors,

. ou $\bar{1}$ est extrémité d'un intervalle $<\beta>$ où $N_\beta(\tilde{A}) \supsetneqq \{o\}$ et $B_1 = < N_\beta(\tilde{A}) >$;

. ou sinon, $B_1 = \{0\}$

ou bien $\gamma = \alpha_o$. Alors,

ou bien α_o est extrémité d'un intervalle $<\beta>$ où n'est pas α_o, et $B_{\alpha_o} = <N_\beta(\tilde{A})>$

ou, sinon, $B_{\alpha_o} = \{o\}$.

ON DEFINIT AINSI UNE PARTIE FLOUE D'IMAGE K :

Il suffit de remarquer que $B_{\min K} = E$

$\gamma_1, \gamma_2 \in K$ et $\gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow B_{\gamma_1} \supsetneq B_{\gamma_2}$.

* Or min K = o' : en effet,

si $\min K \in \{\alpha' / \alpha \in J\}$, il est évident que $\min K = o'$

si $\min K = \alpha_o$ ou 1^- et $\min K \notin \{\alpha' / \alpha \in K\}$, $<N_{\min K}(\tilde{A}) = \{o\}$,

donc $\min K \notin <o>$ et $\min K > o'$, contradictoire.

Donc $B_{\min K} = B_{o'} = <N_o(\hat{A})> = E$.

Supposons maintenant que $\gamma_1, \gamma_2 \in K$ et $\gamma_1 < \gamma_2$:

remarquons tout d'abord que $B_{\gamma_1} \supset <N_{\gamma_1}(\tilde{A})>$.

1) Si $B_{\gamma_2} = <N_{\gamma_2}(\tilde{A})>$: $B_{\gamma_1} \supset <N_{\gamma_1}(\tilde{A})> \quad <N_{\gamma_2}(\hat{A})> = B_{\gamma_2}$,

et si $B_{\gamma_1} = <N_{\gamma_1}(\tilde{A})>$: γ_1 est extrémité de $<\gamma_1>$, et

$\gamma_2 \notin <\gamma_1>$, de sorte que $<N_{\gamma_1}(\tilde{A})> \supsetneq <N_{\gamma_2}(\tilde{A})>$.

2) Si $B_{\gamma_2} \supsetneq <N_{\gamma_2}(\tilde{A})>$: alors γ_2 est extrémité d'un $<\beta>$ et

$\gamma_2 \notin <\beta>$. Alors $<\gamma_1>$ précède $<\beta>$.

Donc $<N_{\gamma_1}(\tilde{A})> \supset <N_\beta(\tilde{A})> = B_{\gamma_2}$.

ou bien $<N_{\gamma_1}(\tilde{A})> \supsetneq <N_\beta(\tilde{A})>$, ou bien $<N_{\gamma_1}(\tilde{A})> = <N_\beta(\tilde{A})>$. Mais alors,

γ_1 est origine de $<\beta>$, et il existe donc $\alpha < \gamma_1$ tel que $\gamma_1 \notin <\alpha>$

γ_1 extrémité de $<\alpha>$

d'où $B_{\gamma_1} = <N_\alpha(\tilde{A})> \supsetneq <N_{\gamma_1}(\tilde{A})>$.

Dans les deux cas, $B_{\gamma_1} \supsetneqq B_{\gamma_2}$.

. Notons $\tilde{B}$ l'unique partie floue telle que : $\tilde{B}(E) = K$ et pour tout $\gamma \in K$: $N_\gamma(B) = B_\gamma$.

$\star$ $\tilde{B}$ EST UN SOUS ESPACE VECTORIEL FLOU DE (E,J) : chaque niveau $N_\gamma(\tilde{B})$, pour $\gamma \in \tilde{B}(E)$, étant un sous espace vectoriel de E.

$\star$ $\underline{\tilde{B} \supset \tilde{A}}$:

Soit $\alpha \in J$.

ou bien α n'est majoré par aucun élément de K, et $N_\alpha(\tilde{B}) = \emptyset$.

<u>1er cas</u> : $\alpha \in K$, $\alpha' = 1$, $N_1(\tilde{A}) = \emptyset$, il existe $\alpha_1 < 1$ tel que $N_{\alpha_1}(\tilde{A}) = \emptyset$, $\forall\ \beta \in J[N_\beta(\tilde{A}) \neq \emptyset \Rightarrow N_\beta(\tilde{A}) \supsetneqq \{o\}]$

Alors $N_\alpha(\tilde{A}) = \emptyset$. Sinon, $< N_\alpha(\tilde{A})> \supsetneqq \{o\}$, donc $\alpha \notin <1> = <\alpha'> = <o_1>$ et on aurait $\alpha' \leq \alpha_1 < \alpha'$, ce qui est impossible.

<u>2e cas</u> : $\alpha \notin K$, $N_1(\tilde{A}) = \emptyset$, $\exists \alpha_1 < 1$ tel que $N_{\alpha_1}(\tilde{A}) = \emptyset$, $\exists \alpha_2 \in J$ tel que $N_{\alpha_2}(\tilde{A}) = \{o\}$.

Alors $\alpha > \alpha_o$, et $N_\alpha(\tilde{A}) = \emptyset$.

ou bien, si $\hat{\alpha}$ est le plus petit élément de K majorant α : $N_\alpha(\tilde{B}) = N_{\hat{\alpha}}(\tilde{B})$

si $\alpha \in K$: $N_\alpha(\tilde{B}) = N_{\hat{\alpha}}(\tilde{B}) = B_\alpha \supset <N_\alpha(\tilde{A})> \supset N_\alpha(\tilde{A})$

si $\left|\begin{array}{l}\alpha \in K \\ \alpha \neq 1\end{array}\right.$: $N_\alpha(\tilde{B}) = N_{\hat{\alpha}}(\tilde{B}) = N_{\alpha'}(\tilde{B}) = B_{\alpha'} \supset <N_\alpha(\tilde{A})> \supset <N_{\alpha'}(\tilde{A})> \supset N_\alpha(\tilde{A})$

si $\left|\begin{array}{l}\alpha \notin K \\ \alpha' = 1\end{array}\right.$: ou bien $N_1(\tilde{A}) \neq \emptyset$: $N_\alpha(\tilde{B}) = N_{\hat{\alpha}}(\tilde{B}) = N_1(\tilde{B}) = B_1 \supset < N_\alpha(\tilde{A})> \supset N_\alpha(\tilde{A})$

ou bien $N_1(\tilde{A}) = \emptyset$, $\forall \beta \in J^\star$: $N_\beta(\tilde{A}) \neq \emptyset$, 1 n'a pas de prédécesseur dans J :

$$N_\alpha(\tilde{B}) = N_{\hat{\alpha}}(\tilde{B}) = N_1(\tilde{B}) = B_1 \supset <N_\alpha(\tilde{A})> \supset N_\alpha(\tilde{A}).$$

ou bien $N_1(\tilde{A}) = \emptyset$, $\forall\beta \in J^* : N_\beta(\tilde{A}) \neq \emptyset$, 1 a un prédécesseur, $\bar{1}$,
dans J : $N_\alpha(\tilde{B}) = N_{\hat{\alpha}}(\tilde{B}) = N_{\bar{1}}(\tilde{B}) = B_{\bar{1}} \supset \{o\} = N_\alpha(\tilde{A})$
ou bien $N_1(\tilde{A}) = \emptyset$, $\exists \alpha_1 < 1$ tel que $N_{\alpha_1}(\tilde{A}) = \emptyset$, $\exists\ \alpha_2 \in J$ tel que
$N_{\alpha_2}(\tilde{A}) = \{0\}$ et $\alpha < \alpha_o$: $N_\alpha(\tilde{B}) = N_{\hat{\alpha}}(\tilde{B}) = N_{\alpha_o}(\tilde{B}) = B_{\alpha_o} = \{o\} = N_\alpha(\tilde{A})$.
En définitive, pour tout $\alpha \in J$: $N_\alpha(\tilde{B}) \supset N_\alpha(A)$. Donc $\tilde{B} \supset \tilde{A}$.

$\bar{B}$ EST LE PLUS PETIT SOUS ESPACE VECTORIEL FLOU DE (E,J) A CONTENIR $\tilde{A}$:

Soit $\tilde{D}$ un sous espace vectoriel flou contenanc $\tilde{A}$.
LEMME. - $N_\alpha(\tilde{D}) = \emptyset \Rightarrow \max K < \alpha$ (et par conséquent $N_\alpha(\tilde{D}) = \emptyset \Rightarrow N_\alpha(\tilde{B}) = \emptyset$).
En effet, soit $\alpha \in J$ tel que $N_\alpha(\tilde{D}) = \emptyset$. Alors $N_\alpha(\tilde{A}) = \emptyset$. La définition de K montre que $\max K \leqslant \alpha$ (ou bien $\alpha = 1$ et c'est trivial, ou bien $N_1(\check{A}) = \emptyset, \exists\alpha < 1$ tel que $N_\alpha(\tilde{A}) = \emptyset$ et dans chacun des 2 cas possibles alors il est évident que $\max K \leqslant \alpha$) .

Si $\alpha = \max K$, il existe un intervalle X de J d'extrémité α tel que $\forall \xi \in X : N_\xi(\tilde{A}) \supset \{o\}$ mais on aurait $N_\alpha(\tilde{D}) = N_{\vee X}(\tilde{D}) = \bigcap_{\xi\in X} N_\xi(\hat{D}) \supset N_\xi(\tilde{A}) \supset \{o\}$

Soit alors $\alpha \in K$ tel que $N_\alpha(\tilde{D}) = \emptyset$.

$N_\alpha(\hat{D}) \supset N_\alpha(\tilde{A})$, et donc $N_\alpha(\tilde{D}) \supset \langle N_\alpha(\tilde{A})$.

Alors ou bien $N_\alpha(\tilde{B}) = \langle N_\alpha(\tilde{A}) \rangle$, ou bien il existe un intervalle X d'extrémité α tel que $\forall \beta \in X : N_\alpha(\hat{B}) = \langle N_\beta(\hat{A}) \rangle$; mais alors
$N_\alpha(\tilde{D}) = N_{\vee X}(\tilde{D}) = \bigcap_{\beta\in X} N_\beta(\tilde{D}) \supset \bigcap_{\beta \in X} \langle N_\beta(\tilde{A}) \rangle = N_\alpha(\tilde{B})$.

§ 2. Soit (E,J) une structure vectorielle flou de dimension $\aleph_0$ où J est une chaîne complète.
Soit $\hat{A} \in J^E$.

PROBLEME. - Construire le sous-espace vectoriel flou de (E,J) engendré par $\tilde{A}$.

NOTATIONS. - Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une base de E (si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E, on suppose avoir pu construire un bon ordre sur I).

Pour tout $n \in N^*$: $\tilde{A}_n = \tilde{A} \mid E_n$

$\tilde{B}_n$ = sous-espace vectoriel flou de (E_n, J) engendré par $\tilde{A}_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour toute $\tilde{M} \in J^{E_n}$, M désigne le prolongement par 0 à E_{n+1} de $\tilde{M}$.

Pour tout $n \in N^*$, et pour toute $\tilde{M} \in J^{E_n}$, $\tilde{M}^*$ désigne le prolongement par 0 à E de $\tilde{M}$.

Alors : le sous-espace vectoriel flou de (E,J) engendré par $\tilde{A}$ est $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \tilde{B}^*_n$.

En effet,

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{B}'_n$ est le sous-espace vectoriel flou de (E_{n+1}, J) engendré par $\tilde{A}'_n$: car $\tilde{B}'_n$ est un sous-espace vectoriel flou de (E_{n+1}, J) contenant $\tilde{A}'_n$; et si D est un sous-espace vectoriel flou de (E_{n+1}, J) contenant $\tilde{A}'_n$,

$$\tilde{D} \mid E_n \supset \tilde{A}_n \Rightarrow \tilde{D} \mid E_n \supset \tilde{B}_n \Rightarrow \tilde{D} \supset (\tilde{D} \mid E_n)' \supset \tilde{B}'_n .$$

2) Donc, puisque, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\tilde{A}'_n \subset \tilde{A}_{n+1}$: $\tilde{B}'_n \subset \tilde{B}_{n+1}$, et $\tilde{B}^*_n \subset \tilde{B}^*_{n+1}$.

3) La partie floue de (E,J) : $\tilde{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \tilde{B}^*_n$ est donc un sous-espace vectoriel flou. $\tilde{B} \supset \tilde{A}$, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\tilde{B} \mid E_n \supset \tilde{B}^* \mid E_n = \tilde{B}_n \supset \tilde{A}_n = \tilde{A} \mid E_n$.

Si $\tilde{D}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J) contenant $\tilde{A}$,

$\tilde{D} \mid E_n \supset \tilde{A}_n$, donc $\tilde{D} \mid E_n \supset \tilde{B}_n$ et $\tilde{D} \supset (\tilde{D} \mid E_n)^* \supset \tilde{B}^*_n$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

De sorte que $\tilde{D} \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \tilde{B}^*_n = \tilde{B}$.

§ 3. Soit (E,J) une structure vectorielle floue quelconque.
Soit $\tilde{A} \in J^E$ une partie floue telle que $\tilde{A}(E)$ *soit une chaîne finie.*

PROBLEME. - Construire le sous-espace vectoriel flou de (E,J) engendré par $\tilde{A}$.

Soit $\tilde{A}(E) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, où $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$
Soient $A_1, \dots, A_\ell$ les valeurs successives de la suite $< N_{\alpha_1}(\tilde{A})>, \dots <N_{\alpha_n}(\tilde{A})>$ (où $< N_{\alpha_i}(\tilde{A})>$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par $N_{\alpha_i}(\tilde{A})$).

Soit $\beta_1, \dots \beta_\ell$ la suite extraite de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ telle que

$$\beta_1 = \max \{\alpha \in \tilde{A}(E) \ / < N_\alpha(\tilde{A})> = A_1\}$$

$$\beta_\ell = \max \{\alpha \in \tilde{A}(E) \ / < N_\alpha(\tilde{A})> = A_\ell\} = \alpha_n .$$

Soit $\tilde{B} = \beta_1 A_1 \cup \dots \cup \beta_\ell A_\ell$.

B est un sous-espace vectoriel flou de (E,J).
$\tilde{A} \subset \tilde{B}$: il suffit de vérifier que $\forall \alpha \in \tilde{A}(E)$: $N_\alpha(\tilde{A}) \subset N_\alpha(\tilde{B})$
or pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $j \in \{1, \dots \ell\}$ tel que
$N_{\alpha_i}(\tilde{A}) \subset < N_{\alpha_i}(\tilde{A}) > = N_{\beta_j}(\tilde{B}) = N_{\alpha_i}(\tilde{B})$.

$\tilde{B}$ est le plus petit sous-espace vectoriel flou de (E,J) contenant $\tilde{A}$: car si $\tilde{D}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J) contenant $\tilde{A}$, on a $\forall \alpha \in \tilde{A}(E)$: $N_\alpha(\tilde{A}) \subset N_\alpha(\tilde{D})$, donc $<N_\alpha(\tilde{A})> \subset N_\alpha(\tilde{D})$. Or pour tout $\alpha \in \tilde{A}(E)$, $N_\alpha(\tilde{B}) = <N_\alpha(\tilde{A})>$. Donc $\forall \alpha \in \tilde{B}(E) \subset \tilde{A}(E)$: $N_\alpha(\tilde{B}) \subset N_\alpha(\tilde{D})$, ce qui montre que $\tilde{B} \subset \tilde{D}$.

REMARQUE. - Pour tout $\alpha \in J$ tel que $\alpha \leq \alpha_n = \beta_\ell$: $N_\alpha(\tilde{B}) = <N_\alpha(\tilde{A})>$.
sinon, $N_\alpha(\hat{B}) = \emptyset$.

En effet, pour tout $\alpha \in J$ tel que $\alpha \leq \alpha_n = \beta_\ell$.

$$N_\alpha(\tilde B) = \bigcup_{\substack{\beta\in\tilde B(E)\\ \beta\geq\alpha}} N_\beta(\tilde B) = \bigcup_{\substack{\beta\in\tilde B(E)\\ \beta\geq\alpha}} \langle N_\beta(\tilde A)\rangle = \bigcup_{\substack{\beta\in\tilde A(E)\\ \beta\geq\alpha}} \langle N_\beta(\tilde A)\rangle = \langle N_{\beta_\alpha}(\tilde A)\rangle = \langle N_\alpha(\tilde A)\rangle$$

où $\beta_\alpha = \min\{\beta\in\tilde A(E) / \beta\geq\alpha\}$

car $\tilde B(E)\subset\tilde A(E)$, et par ailleurs pour tout $\beta\in\tilde A(E)$, il existe $\gamma\in\tilde B(E)$ tel que $\langle N_\beta(\tilde A)\rangle = \langle N_\gamma(\tilde A)\rangle$

§ 4. Soit $(\mathcal{E},J)$ une structure affine floue de direction E, quelconque. Soit $f\in J^{\mathcal{E}}$ une partie floue telle que $f(\mathcal{E})$ est une chaîne finie.

PROBLEME. - Construire l'enveloppe convexe de f.

1) Il suffit de parodier la construction du § 3 , en remplaçant $\langle N_{\alpha_i}(\tilde A)\rangle$, sous-espace de E engendré par $N_{\alpha_i}(\tilde A)$, par $\widehat{N_{\alpha_i}(f)}$ = enveloppe convexe dans $\mathcal{E}$ de $N_{\alpha_i}(f)$.

2) On a encore la remarque : $\forall\alpha \in J : N_\alpha(\hat f) = \widehat{N_\alpha(f)}$.

REMARQUE. - Il n'est pas possible d'obtenir un résultat analogue à celui du § 1, car l'hypothèse de dimension finie ne rend pas nécessairement $g(\mathcal{E})$ finie lorsque g est une partie floue convexe.

§ 5. Soit (E,J) une structure vectorielle floue, où J est *complet*. Soit $\tilde A\in J^E$.
Le cône vectoriel flou engendré par $\tilde A$ est défini par

$$\tilde C(0) = \tilde A(0)$$

$$\text{si } a\neq 0 : \tilde C(a) = \bigvee_{\lambda>0} \tilde A(\lambda a) \qquad (1)$$

On définit, puisque J est complet, une partie floue $\tilde C$ de (E,J) par (1).
$\tilde C\supset\tilde A$.
$\tilde C$ est un cône vectoriel flou, car si $\mu>0$:

$$\tilde C(\mu a) = \bigvee_{\lambda>0}\tilde A(\lambda\mu a) = \bigvee_{t>0}\tilde A(ta) = \tilde C(a).$$

Si $\tilde{D}$ est un cône vectoriel flou qui contient $\tilde{A}$:

pour tout $a \in E$, pour tout $\lambda > 0$: $\tilde{D}(a) = \tilde{D}(\lambda a) \geq \tilde{A}(\lambda a)$

donc pour tout $a \in E$: $\tilde{D}(a) \geq \bigvee_{\lambda > 0} \tilde{A}(\lambda a) = \tilde{C}(a)$.

Version affine :

Soit $(\mathcal{E}, J)$ une structure affine floue, où J est *complet*.
Soit $f \in J^{\mathcal{E}}$, et soit $M \in \mathcal{E}$.

Le M.cône flou engendré par f est défini par : $g(N) = \bigvee_{\lambda > 0} f(M + \lambda \vec{MN})$.

C'est le cône flou de sommet M et de cône vectoriel directeur le cône vectoriel flou engendré par $\vec{u} \to f(M + \vec{u})$.

§ 6 LORSQUE J EST UN TREILLIS COMPLET ET QUASI TOTALEMENT DISTRIBUTIF.

1. Soit E un espace vectoriel.
A $(\vec{u}, p) \in E \times \mathbb{N}^*$, on associe $V(\vec{u}, p) = \{\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\} / \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in K^p$,

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \ldots + \lambda_p \vec{u}_p\} .$$

Si $\tilde{A}$ est une partie floue de (E,J), où J est complet et quasi totalement distributif, le sous-espace vectoriel flou de (E,J) engendré par $\tilde{A}$ est $\vec{u} \to \bigvee_{p \in \mathbb{N}^*} \bigvee_{F \in V(\vec{u}, p)} (\bigwedge_{\vec{v} \in F} \tilde{A}(\vec{v}))$ (*).

Soit en effet $\tilde{B}$ la partie floue de (E,J) définie par (*).

Puisque $\{\vec{u}\} \in V(\vec{u}, 1)$ pour tout $\vec{u} \in E$: $\tilde{B} \supset \tilde{A}$.

Si $\tilde{D}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J) contenant $\tilde{A}$, et si $\vec{u} \in E$: pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour toute $F \in V(\vec{u}, p)$, $\tilde{D}(\vec{u}) \geq \wedge \tilde{D}(f)$
$\tilde{D}(\vec{u}) \geq \tilde{B}(\vec{u})$.

$\tilde{B}$ est un sous-espace vectoriel flou de (E,J), car si $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda, \mu \in K$: $F \in V(\vec{u}, p)$ et $G \in V(\vec{v}, q) \Rightarrow F \cup G \in V(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, h)$ où $h \leq p+q$,

de sorte que

$$\tilde{B}(u)\wedge\tilde{B}(v) = \Big[\bigvee_{p\in\mathbb{N}^*}\ \bigvee_{F\in V(\vec{u},p)} (\wedge\tilde{A}(F))\Big]\wedge\Big[\bigvee_{q\in\mathbb{N}^*}\ \bigvee_{G\in V(\vec{v},q)} (\wedge\tilde{A}(G))\Big]$$

$$= \bigvee_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \\ F\in V(\vec{u},p) \\ G\in V(\vec{v},q)}} [\wedge\tilde{A}(F\cup G) \quad \text{(quasi distributivité totale)}$$

$$\leq \bigvee_{r\in\mathbb{N}^*}\ \bigvee_{H\in V(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},r)} (\wedge\tilde{A}(H)) = \tilde{B}(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})$$

2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine

A $(M,p)\in\mathcal{E}\times\mathbb{N}^*$, on associe $C(M,p) = \{\{M_1,\dots,M_p\}/M$ est dans l'enveloppe convexe de $\{M_1,\dots,M_p\}\}$ on a vu que, si $f\in J^{\mathcal{E}}$, $\hat{f}(M) = \bigvee_{p\in\mathbb{N}^*}\ \bigvee_{F\in C(M,p)} (\wedge f(F))$

3. Soit $(\mathcal{E},J)$ une structure affine floue, où J est complet et quasi totalement distributif.

Soit $M\in\mathcal{E}$, et soit $f\in J^{\mathcal{E}}$.

Le M-cône convexe engendré par f est l'enveloppe convexe du M-cône engendré par f.

LEMME. - *Si* $g\in J^{\mathcal{E}}$ *est un M-cône,* $\hat{g}$ *est aussi un M-cône.*

En effet, soient $\vec{u}\in E$ et $\lambda>0$:

$$\hat{g}(M+\lambda\vec{u}) = \bigvee_{p\in\mathbb{N}^*}\ \bigvee_{m\in C(M+\lambda\vec{u},p)} [\wedge g(m) = \bigvee_{p\in\mathbb{N}^*}\ \bigvee_{n\in C(M+\vec{u},p)} [\wedge g(\lambda n)]$$

car $m\in c(M+\lambda\vec{u},p)\Leftrightarrow \mathcal{H}(M,\frac{1}{\lambda})(m)\in C(M+\vec{u},p)$ donc $\hat{g}(M+\lambda\vec{u}) = \bigvee_{p\in\mathbb{N}^*}\ \bigvee_{\eta\in C(M+\vec{u},p)} [\wedge(\eta)]$

(car g est un M-cône), d'où $\hat{g}(M+\lambda\vec{u}) = \hat{g}(M+\vec{u})$.

CONSEQUENCE. - L'enveloppe convexe du M-cône engendré par f est un M-cône (d'après le lemme) convexe contenant f. Il est clair que c'est le plus petit M-cône convexe contenant f.

BIBLIOGRAPHIE. -

1 R. LOWEN, *Convex fuzzy sets* , Vrije Universiteit Brussel, 1978.

2 S. RIBEYRE , *Niveaux de flou et représentations monotones d'une partie floue* , séminaire : "mathématique floue", 1977-1978.

3 O. BOTTA, *Théorème de représentation des parties floues,* séminaire : "mathématique floue", 1978-1979.

J. COULON et J.L. COULON
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX