PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ROLAND BERGER

# Géométrie algébrique de Poisson et déformations

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1979, tome 16, fascicule 2
, p. 1-69
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_2_1_0>

GEOMETRIE ALGEBRIQUE DE POISSON ET DEFORMATIONS

par Roland BERGER

1-ère partie - LE FORMALISME POISSONIEN.

§ 1. ALGEBRES DE POISSONS - EXEMPLES.

Dans ce paragraphe, K désigne un anneau commutatif.

Une K-algèbre de Poisson est un K-module A muni de deux structures d'algèbre: l'une associative commutative unifère et l'autre de Lie, telles que le crochet de Lie soit pour le produit associatif une dérivation en chaque variable. L'exemple classique dont est tiré la terminologie est celui de $A = C^{\infty}_{\mathbb{R}}(M)$, algèbre des fonctions $C^{\infty}$ sur une variété symplectique M munie du crochet de Poisson usuel. Mais nous verrons qu'il existe bien d'autres exemples de nature variée.

1.1 DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Soit A une K-algèbre associative, commutative, unifère. On note $\Omega(A)$ (resp. Der(A)) le A-module des K-différentielles (resp. des K-dérivations) de A et $d_A : A \longrightarrow \Omega(A)$ la K-dérivation canonique. On sait que les A-modules Der(A) et $\Omega(A)^* = \mathrm{Hom}_A(\Omega(A), A)$ sont canoniquement isomorphes ([4], § 10), ce qui permettra au besoin de les identifier.

On se donne une application K-linéaire $\partial_A : A \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ telle que $\partial_A(a)(a) = 0$ pour tout $a \in A$. On pose, pour tout a et a' dans A,

$$[a, a'] = \partial_A(a)(a').$$

Ce crochet est antisymétrique et $\partial_A$ est une K-dérivation de A dans le A-module Der(A). On dit que A muni de $\partial_A$ est une pré-K-algèbre de Poisson, et que [ , ] est son crochet de Poisson.

D'après la propriété universelle de $\Omega(A)$, il existe une application A-linéaire unique $h : \Omega(A) \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ telle que $h.d_A = \partial_A$. L'application $h: \Omega(A) \longrightarrow \Omega(A)^*$ détermine alors une forme A-bilinéaire alternée sur $\Omega(A)$ i.e. un élément F de $(\Lambda^2_A \Omega(A))^*$ défini par

$$\forall a \in A \quad , \quad \forall a' \in A \quad , \quad F(d_A a \wedge d_A a') = [a, a'] .$$

La donnée d'un élément F de $(\bigwedge_A^2 \Omega(A))^*$ équivaut à celle de la K-dérivation $\partial_A$ telle que $\partial_A(a)(a) = 0$ pour tout $a \in A$. On dit que F est la forme fondamentale de la pré-K-algèbre de Poisson A.

Si, en plus des hypothèses précédentes, le crochet $[\ ,\ ]$ vérifie l'identité de Jacobi, A est appelée une K-algèbre de Poisson; $\partial_A$ s'identifie alors à l'application adjointe de l'algèbre de Lie A. L'intérêt des algèbres de Poisson est que l'on peut définir pour elles une cohomologie, dite cohomologie de Poisson, qui est induite par la cohomologie de l'algèbre de Lie A [8]. Bien qu'aucune considération cohomologique n'intervienne explicitement dans ce travail, on se placera le plus souvent dans le cadre restreint des algèbres de Poisson pour deux raisons: d'une part par commodité de langage, d'autre part parce que tous les exemples naturels sont dans ce cadre-là.

## 1.2 ALGEBRES DE POISSON GRADUEES.

Soit A une K-algèbre de Poisson; on suppose que la K-algèbre associative A est graduée par une suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de sous-modules i.e. $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A^k$ et $A^k . A^{k'} \subset A^{k+k'}$ pour tout $(k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Etant donné un entier $d \geqslant 1$, on dit que A est une K-algèbre de Poisson graduée de degré d si, pour tout $a \in A^k$ et $a' \in A^{k'}$, $[a, a']$ appartient à $A^{k+k'-d}$ (on pose $A^k = 0$ pour tout $k < 0$).

On peut construire de telles algèbres à partir d'algèbres associatives non nécessairement commutatives; ceci sera intéressant dans l'étude des déformations. On part d'une K-algèbre associative unifère U filtrée par une suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de sous-modules (avec $1 \in U_o$). Soit $S = gr(U)$ l'algèbre graduée associée à U; on a $S = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} S^k$ où $S^k = U_k / U_{k-1}$ pour $k \geqslant 1$ et $S^o = U_o$. On note $gr_k : U_k \longrightarrow S^k$ l'application canonique. On dit que U est une K-algèbre hamiltonienne de degré d si, pour tout $u \in U_k$ et $u' \in U_{k'}$, $uu' - u'u$ appartient à $U_{k+k'-d}$ (on pose $U_k = 0$ si $k < 0$).

Cela implique que S est commutative et si on définit un crochet dans S par $[gr_k(u), gr_{k'}(u')] = gr_{k+k'-d}(uu' - u'u)$, il est clair que S est une K-algèbre de Poisson graduée de degré d. Pour que S soit de degré 1, il suffit que S soit commutative.

Voici deux exemples fondamentaux d'algèbres hamiltoniennes de degré 1 (cf. [ 8 ]).

Exemple 1: Soit A une K-algèbre associative, commutative, unifère. Sur $End_K(A)$, on a deux lois externes $(a, D) \longmapsto aD$ et $(a, D) \longmapsto a.D$ à opérateurs dans A, définies par:

$$(aD)(x) = D(ax) \quad \text{et} \quad (a.D)(x) = aD(x)$$

pour tout x dans A. Elles font de $End_K(A)$ un A-bimodule.

Pour tout $a \in A$ et $D \in End_K(A)$, on pose $\quad ad(a)D = aD - a.D$ .

$ad(a)$ est un endomorphisme du A-bimodule $End_K(A)$ et une dérivation de l'algèbre $End_K(A)$; deux endomorphismes quelconques $ad(a)$ et $ad(b)$ commutent toujours.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose
$$Dif_k(A) = \bigcap_{(a_i) \in A^{k+1}} Ker(ad(a_0) \dots ad(a_k)).$$

$Dif_k(A)$ est un sous-A-bimodule de $End_K(A)$, ainsi que la réunion $Dif(A)$ des $Dif_k(A)$, $k \in \mathbb{N}$. $Dif(A)$ est de plus une sous-algèbre de $End_K(A)$, filtrée par les $Dif_k(A)$. On a les identifications $Dif_o(A) = A$ et $Dif_1(A) = A \oplus Der(A)$. Pour tout $a \in A$, $ad(a)$ est encore un endomorphisme du A-bimodule $Dif(A)$ et une dérivation de l'algèbre $Dif(A)$.

Il est facile de voir que $Dif(A)$ est une K-algèbre hamiltonienne de degré 1; on l'appelle l'algèbre des opérateurs différentiels de A. La K-algèbre de Poisson graduée de degré 1 $gr(Dif(A))$ s'appelle l'algèbre des symboles de A et se note $Symb(A)$. Notons que $Symb^o(A) = A$ et $Symb^1(A) = Der(A)$.

Exemple 2: Soit $\mathfrak{g}$ une K-algèbre de Lie. Il est bien connu que l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ est une K-algèbre hamiltonienne de degré 1 (Cf. [5] ou [20]), d'où l'algèbre de Poisson graduée de degré 1 $gr(U\mathfrak{g})$.

Par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on sait que si $\mathfrak{g}$ est un K-module libre (Cf. [5] , §2) ou si K est une $\mathbb{Q}$-algèbre (Cf. [6] ch. 1, § 3, ex. 16), l'algèbre graduée $gr(U\mathfrak{g})$ s'identifie à l'algèbre symétrique $S\mathfrak{g}$ du K-module $\mathfrak{g}$. Dans ces cas, le crochet de Poisson de $S\mathfrak{g}$ étend alors le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ à $S\mathfrak{g}$ tout entier, de manière unique.

Ce dernier exemple nous amène à rechercher des crochets de Poisson sur des algèbres symétriques.

## 1.3 ALGEBRES DE POISSON SYMETRIQUES.

Soit V un K-module et soit S(V) l'algèbre symétrique munie de sa graduation usuelle; on veut faire de S(V) une algèbre de Poisson graduée de degré 1, ou de degré 2.

Dans le premier cas, il suffit de supposer que V est une K-algèbre de Lie. Le crochet de V se prolonge alors de façon unique en un crochet de Poisson de degré 1 sur S(V). On utilise pour cela le théorème d'existence et d'unicité du prolongement des dérivations (Cf. [4], §10, n°9). En effet, pour tout $v \in V$, l'endomorphisme ad(v) de V se prolonge de façon unique en une dérivation, notée encore ad(v), de S(V). L'application K-linéaire $v \longmapsto ad(v)$ de V dans le S(V)-module Der(S(V)) se prolonge de façon unique en une dérivation $\partial : S(V) \longrightarrow Der(S(V))$. Il est clair que $\partial(x)(x) = 0$ pour tout $x \in V$, puisqu'il suffit de considérer le cas où $x = v_1 \times \dots \times v_k$ avec $v_1, \dots, v_k$ dans V. Le crochet défini par $\partial$ vérifie l'identité de Jacobi sur les éléments de V; il est aisé de l'étendre à tous les éléments de S(V).

Dans le second cas, il suffit de se donner une forme K-bilinéaire alternée B sur V. L'application B se prolonge alors de façon unique en un crochet de Poisson de degré 2 sur S(V). En effet, pour tout $v \in V$, la forme K-linéaire $B(v, .) : V \longrightarrow K$ se prolonge en une dérivation

$\partial(v)$ de $S(V)$; on étend ensuite l'application K-linéaire $v \longmapsto \partial(v)$ en une dérivation $\partial$ de $S(V)$ dans $\mathrm{Der}(S(V))$. On vérifie comme ci-dessus que $\partial(x)(x) = 0$ pour tout $x \in S(V)$ et que le crochet défini par $\partial$ satisfait à l'identité de Jacobi.

Exemple: Examinons le dernier cas sous les hypothèses suivantes: K est un corps, V est de dimension finie et B est non dégénérée. La dimension de V est alors $n = 2m$, m entier $\geqslant 1$. Il existe une base symplectique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de V telle que la matrice de B dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$$

. On a donc pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$,

$[e_i, e_{i+m}] = -[e_{i+m}, e_i] = 1$, tous les autres crochets des éléments de base étant nuls.

Au moyen de la base choisie, on identifie les algèbres $S(V)$ et $K[X_1, \dots, X_n]$. Le crochet de deux polynomes P et Q s'écrit alors

$$(1.3.1) \qquad [P, Q] = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial P}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial Q}{\partial X_{i+m}} - \frac{\partial P}{\partial X_{i+m}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial X_i}\right)$$

On reconnait dans le second membre de (1.3.1) le crochet de Poisson classique; il suffit donc de vérifier l'égalité sur les éléments de V. Muni d'un tel crochet, $S(V)$ s'appelle une algèbre de Poisson classique.

Evidemment, la formule (1.3.1) définit un crochet de Poisson de degré 2 sur $K[X_1, \dots, X_n]$ pour tout anneau commutatif K. Notons que l'algèbre de Poisson classique obtenue est associée à une algèbre hamiltonienne. On prend pour U la K-algèbre définie par 2m générateurs $x_i, y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et les relations:

$$x_i y_i - y_i x_i = 1 \qquad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

$x_i y_j - y_j x_i = x_i x_j - x_j x_i = y_i y_j - y_j y_i = 0$ dès que $i \neq j$.
Il est immédiat que U est une K-algèbre hamiltonienne de degré 2 dont l'algèbre graduée associée s'identifie à l'algèbre de Poisson classique $K[X_1, \dots, X_n]$. (Cf. [14] p. 144). On dit que U est l'algèbre de Weyl à 2m générateurs.

Remarque: Revenons au premier cas traité au début de (1.3) ainsi qu'à l'exemple 2 de (1.2). A partir d'une K-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on peut donc construire deux K-algèbres de Poisson graduées: $S\mathfrak{g}$ et $gr(U\mathfrak{g})$, et l'application canonique $S\mathfrak{g} \longrightarrow gr(U\mathfrak{g})$ est un morphisme de Poisson surjectif. (Un morphisme de Poisson est un morphisme pour les deux structures d'algèbre). On a donné des conditions dans lesquelles c'est un isomorphisme.

De même, à partir d'une K-algèbre associative, commutative, unifère A, on construit deux K-algèbres de Poisson graduées: l'une $\Sigma_A\Omega(A)^{*\,gr}$ que l'on va expliciter et l'autre $gr(Dif(A)) = Symb(A)$ qui a déjà été définie. On a cette fois une application canonique: $Symb(A) \longrightarrow \Sigma_A\Omega(A)^{*\,gr}$ qui est un morphisme de Poisson injectif. Dans certains cas importants, c'est un isomorphisme.

## 1.4 UNE ALGEBRE DE POISSON GRADUEE LIEE A L'ALGEBRE DES SYMBOLES.

Soit A une K-algèbre associative, commutative, unifère. Tout application K-multilinéaire symétrique de $A\times\ldots\times A$ (k facteurs) dans A qui est en outre une multidérivation (i.e. une K-dérivation en chaque variable) s'identifie à une application A-multilinéaire symétrique de $\Omega(A)\times\ldots\times\Omega(A)$ (k facteurs) dans A; leur ensemble est donc $(\Sigma_A^k\Omega(A))^*$, dual du A-module $k^{\text{ième}}$ puissance symétrique du A-module $\Omega(A)$.

On pose $\Sigma_A\Omega(A)^{*\,gr} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} (\Sigma_A^k\Omega(A))^*$. $\Sigma_A\Omega(A)^{*\,gr}$ est canoniquement une K-algèbre de Poisson graduée de degré 1 (Cf. [9]). Donnons les expressions du produit et du crochet de cette algèbre. Soient $\alpha \in (\Sigma_A^k\Omega(A))^*$ et $\alpha' \in (\Sigma_A^{k'}\Omega(A))^*$. L'élément $\alpha\times\alpha'$ de $(\Sigma_A^{k+k'}\Omega(A))^*$ et l'élément $[\alpha, \alpha']$ de $(\Sigma_A^{k+k'-1}\Omega(A))^*$ sont les K-multidérivations symétriques définies par:

$$\langle \alpha \times \alpha', a_1 \times \dots \times a_{k+k'} \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k,k'}} \langle \alpha, a_{\sigma(1)} \times \dots \times a_{\sigma(k)} \rangle \langle \alpha', a_{\sigma(k+1)} \times \dots \times a_{\sigma(k+k')} \rangle$$

pour tout $a_1, \dots, a_{k+k'}$ dans A et où $\mathfrak{S}_{k,k'}$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, k+k'\}$ croissantes sur $\{1, \dots, k\}$ et $\{k+1, \dots, k+k'\}$,

$$\langle [\alpha, \alpha'], a_1 \times \dots \times a_{k+k'-1} \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k',k-1}} \alpha(\alpha'(a_{\sigma(1)} \times \dots \times a_{\sigma(k')}) \times a_{\sigma(k'+1)} \times \dots \times a_{\sigma(k+k'-1)}$$

$$- \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k,k'-1}} \alpha'(\alpha(a_{\sigma(1)} \times \dots \times a_{\sigma(k)}) \times a_{\sigma(k+1)} \times \dots \times a_{\sigma(k+k'-1)}).$$

Notons que si $k = k' = 1$, $[\alpha, \alpha']$ coïncide avec le crochet habituel des dérivations $\alpha$ et $\alpha'$.

Faisons le lien avec Symb(A). Soient $k \in \mathbb{N}$ et $D \in \mathrm{Dif}_k(A)$. On définit l'application $f_k(D)$ de $A \times \dots \times A$ ($k$ facteurs) dans A par $f_k(D)(a_1, \dots, a_k) = \mathrm{ad}(a_1) \dots \mathrm{ad}(a_k)(D)$ pour tout $a_1, \dots, a_k$ dans A. Il est clair que $f_k(D)$ est une application K-multilinéaire symétrique, et c'est une multidérivation. En effet, pour tout $d \in \mathrm{Dif}_1(A)$ et a, b dans A, $\mathrm{ad}(ab)d = a \times (\mathrm{ad}(b)d) + b \times (\mathrm{ad}(a)d)$; on en déduit que $f_k(D)$ est bien une dérivation en la première variable $a_1$ puisque $\mathrm{ad}(a_2) \dots \mathrm{ad}(a_k) D \in \mathrm{Dif}_1(A)$.

On a ainsi défini une application $f_k$ de $\mathrm{Dif}_k(A)$ dans $(\sum_A^k \Omega(A))^*$ qui est A-linéaire pour les deux lois externes de $\mathrm{Dif}_k(A)$ et dont le noyau est $\mathrm{Dif}_{k-1}(A)$. Par suite, $f_k$ induit une application A-linéaire injective $\tilde{f}_k$ de $\mathrm{Symb}^k(A)$ dans $(\sum_A^k \Omega(A))^*$. L'ensemble des $\tilde{f}_k$, $k \in \mathbb{N}$, donne donc une application A-linéaire canonique injective $\tilde{f}$ de Symb(A) dans $\sum_A \Omega(A)^{*gr}$. Vérifions que $\tilde{f}$ est un morphisme de Poisson.

Fixons $D \in \mathrm{Dif}_k(A)$ et $D' \in \mathrm{Dif}_{k'}(A)$. Quand on développe $\mathrm{ad}(a_1) \dots \mathrm{ad}(a_{k+k'})(D\, D')$, il reste uniquement les termes de la forme $\mathrm{ad}(a_{i_1}) \dots \mathrm{ad}(a_{i_k})(D) \times \mathrm{ad}(a_{j_1}) \dots \mathrm{ad}(a_{j_{k'}})(D')$ avec $i_1 < \dots < i_k$ et $j_1 < \dots < j_{k'}$, indices deux à deux distincts dans $\{1, \dots, k+k'\}$.

Autrement dit $f_{k+k'}(D\, D') = f_k(D) \times f_{k'}(D')$.

D'autre part,

$$f_{k+k'-1}([D, D'])(a_1,\dots,a_{k+k'-1}) = ad(a_1)\dots ad(a_{k+k'-1})(D\ D')$$
$$- ad(a_1)\dots ad(a_{k+k'-1})(D'\ D).$$

Quand on développe le premier terme de cette différence, il reste uniquement des termes dans lesquels D est affecté de k-1 ou k applications $ad(a_i)$, rangées dans l'ordre croissant des indices. On aura ainsi un terme du type

$$ad(a_{i_1}) \dots ad(a_{i_{k-1}})(D).\ (ad(a_{j_1}) \dots ad(a_{j_{k'}})(D'))$$

auquel on retranche le terme correspondant

$$ad(a_{j_1}) \dots ad(a_{j_{k'}})(D').\ (ad(a_{i_1}) \dots ad(a_{i_{k-1}})(D))$$

avec $i_1 < \dots < i_{k-1}$ et $j_1 < \dots < j_{k'}$, indices deux à deux distincts.
Mais la différence obtenue est un élément de A qui n'est autre que

$$ad(ad(a_{j_1}) \dots ad(a_{j_{k'}})D').\ ad(a_{i_1}) \dots ad(a_{i_{k-1}})(D).$$

(En effet, si d appartient à Dif(A) et $a \in A$, on a $d.a - a.d = ad(a)d$ ).

De même, un terme de la forme

$$ad(a_{i_1}) \dots ad(a_{i_k})(D).\ (ad(a_{j_1}) \dots ad(a_{j_{k'-1}})(D'))$$

auquel on retranche le terme correspondant

$$ad(a_{j_1}) \dots ad(a_{j_{k'-1}})(D').\ (ad(a_{i_1}) \dots ad(a_{i_k})(D))$$

donne l'élément de A suivant:

$$- ad(ad(a_{i_1}) \dots ad(a_{i_k})D).\ ad(a_{j_1}) \dots ad(a_{j_{k'-1}})(D').$$

Finalement $f_{k+k'-1}([D, D'])(a_1,\dots, a_{k+k'-1})$ est égal à la somme

$$\sum_{\substack{j_1<\dots<j_{k'} \\ i_1<\dots<i_{k-1}}} ad(ad(a_{j_1})\dots ad(a_{j_{k'}})(D')).\ ad(a_{i_1})\dots ad(a_{i_{k-1}})(D)$$

à laquelle on retranche la somme

$$\sum_{\substack{i_1<\dots<i_k \\ j_1<\dots<j_{k'-1}}} ad(ad(a_{i_1})\dots ad(a_{i_k})(D)).\, ad(a_{j_1})\dots ad(a_{j_{k'-1}})(D') \,,$$

les indices étant toujours deux à deux distincts dans $\{1,\dots,\ k+k'-1\}$ .

On a donc bien $\quad f_{k+k'-1}(\ [D,\ D']\ ) = [f_k(D),\ f_{k'}(D')]$ .

<u>THEOREME</u>. – <u>L'application canonique</u> $\tilde{f} : \mathrm{Symb}(A) \longrightarrow \sum_A \Omega(A)^{*gr}$ <u>est un morphisme injectif d'algèbres de Poisson graduées.</u>

Notons que $\tilde{f}_0 = id_A$ et $\tilde{f}_1 = id_{Der(A)}$ . En particulier, <u>si</u> $\sum_A \Omega(A)^{*gr}$ <u>est engendré (en tant qu'algèbre associative) par Der(A),</u> <u>$\tilde{f}$ est un isomorphisme.</u>

## § 2. ALGEBRE COMMUTATIVE POISSONIENNE.

K désigne toujours un anneau commutatif.

### 2.1 MORPHISMES DE POISSON - IDEAUX DE POISSON.

Soient $(A, \partial_A)$ et $(B, \partial_B)$ deux pré-K-algèbres de Poisson de formes fondamentales respectives F et G. Une application $f: A \longrightarrow B$ s'appelle un morphisme de $(A, \partial_A)$ dans $(B, \partial_B)$ si c'est un morphisme pour les deux structures d'algèbres de A et B. Cela signifie que c'est un morphisme de K-algèbres associatives unifères tel que pour tout $a \in A$, $\partial_B(f(a)) \cdot f = f \cdot \partial_A(a)$. Cette dernière égalité est équivalente à

$$\forall \omega \in \Omega(A),\ \forall \omega' \in \Omega(A), \quad \langle G, \Omega(f)\omega \wedge \Omega(f')\omega' \rangle = f(\langle F, \omega \wedge \omega' \rangle)$$

où $\Omega(f) \cdot \Omega(A) \longrightarrow \Omega(B)$ est l'application canonique telle que

$$d_B \cdot f = \Omega(f) \cdot d_A \ .$$

Si A et B sont des algèbres de Poisson, f est alors un morphisme de Lie; on dit que c'est un morphisme de Poisson.

Soit A une K-algèbre de Poisson. Une sous-algèbre (resp. un idéal) de la K-algèbre associative A qui est en plus une sous-algèbre de Lie (resp. un idéal) de l'algèbre de Lie A, s'appelle une sous-algèbre de Poisson de A (resp. un idéal de Poisson de A).

Soit I un idéal de Poisson de A et soit $p : A \longrightarrow A/I$ l'application canonique. Il existe alors un unique crochet de Poisson sur A/I tel que p soit un morphisme de Poisson. On dit que A/I est l'algèbre de Poisson quotient de A par l'idéal de Poisson I.

Toute intersection et toute somme d'idéaux de Poisson est un idéal de Poisson, ainsi que le produit de deux idéaux de Poisson. Tout idéal de Poisson distinct de A est contenu dans un idéal de Poisson maximal. Pour tout idéal I de l'algèbre associative A, il existe un plus petit (resp. un plus grand) idéal de Poisson contenant I (resp. contenu dans I); on note $\pi(I)$ le plus grand idéal de Poisson contenu dans I.

Dans [16], il est donné une preuve (incomplète) du fait que si I est un idéal premier de A, $\pi(I)$ est encore premier. Nous allons montrer ce résultat dans le cas où K est une $\mathbb{Q}$-algèbre.

## 2.2 IDEAUX DE POISSON PREMIERS.

Soit A une K-algèbre de Poisson. Pour tout idéal I de A et pour tout $a \in A$, on pose

$$\sigma_a(I) = \left\{ s \in A \;\; ; \;\; \exists\, m \in \mathbb{N} \;\; , \;\; a^m s \in I \right\}.$$

$\sigma_a(I)$ est un idéal de A contenant I. Si, en outre, I est un idéal de Poisson, $\sigma_a(I)$ est un idéal de Poisson. Soient en effet $s \in \sigma_a(I)$ et $t \in A$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $a^m s \in I$. Alors:

$$[t, a^{2m} s] = a^{2m} [t, s] + 2a^m s [t, a^m]$$

ce qui prouve que $a^{2m} [t, s] \in I$ i.e. $[t, s] \in \sigma_a(I)$.

D'autre part, $\sigma_a(I) = A$ si et seulement si a appartient à la racine $\sqrt{I}$ de l'idéal I .

LEMME. - Soit P un idéal premier de A. Pour tout $a \in A$ n'appartenant pas à la racine de $\pi(P)$, on a $\sigma_a(\pi(P)) = \pi(P)$.

Remarquons d'abord que si $a \notin P$, $\sigma_a(\pi(P))$ est contenu dans P (car P est premier); la définition de $\pi(P)$ entraine que $\sigma_a(\pi(P)) = \pi(P)$.

Passons au cas général où $a \notin \sqrt{\pi(P)}$ et montrons que $\sigma_a(\pi(P)) \subset P$ (ce qui donne le résultat comme précédemment). Sinon, il existe

$s \in \sigma_a(\pi(P))$ tel que $s \notin P$. Mais alors $\sigma_s(\pi(P)) = \pi(P)$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $a^m s \in \pi(P)$. En particulier, $a^m \in \sigma_s(\pi(P))$ d'où $a^m \in \pi(P)$ ce qui est absurde.

THÉORÈME. - Pour tout idéal premier $P$ de $A$, $\pi(P)$ est un idéal primaire de $A$. En particulier, la racine de $\pi(P)$ est un idéal premier de $A$.

Soient $a$ et $a'$ dans $A$ tels que $aa' \in \pi(P)$ et $a \notin \pi(P)$. On doit montrer que $a' \in \sqrt{\pi(P)}$. Sinon, d'après le lemme, $\sigma_{a'}(\pi(P)) = \pi(P)$. Or $aa' \in \pi(P)$ implique que $a \in \sigma_{a'}(\pi(P))$ ce qui est absurde.

COROLLAIRE 1. - Supposons que $K$ soit une $\mathbb{Q}$-algèbre. Pour tout idéal premier $P$ de $A$, $\pi(P)$ est un idéal premier de $A$.

D'après le théorème, cela revient à prouver que $\pi(P) = \sqrt{\pi(P)}$. Pour cela, il suffit de montrer que $\sqrt{\pi(P)}$ est un idéal de Poisson de $A$ (car $\pi(P) \subset \sqrt{\pi(P)} \subset P$ ).

Soient $s \in \sqrt{\pi(P)}$ et $a \in A$. Pour voir que $[a, s]$ est encore dans $\sqrt{\pi(P)}$, on peut supposer que $s \notin \pi(P)$. Soit $n$ le plus petit entier $> 1$ vérifiant $s^n \in \pi(P)$; ainsi $[a, s^n] \in \pi(P)$. Or

$$[a, s^n] = n\, s^{n-1} [a, s]$$

et comme $n$ est inversible dans $K$, $s^{n-1} [a, s]$ appartient encore à $\pi(P)$. Mais $s^{n-1} \notin \pi(P)$ et l'idéal $\pi(P)$ est primaire; on en conclut que $[a, s] \in \sqrt{\pi(P)}$ cqfd.

COROLLAIRE 2. - On suppose que $K$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre; on a les propriétés suivantes:

(i) Tout idéal premier minimal de $A$ est un idéal de Poisson.

(ii) Tout idéal premier, minimal parmi ceux contenant un idéal de Poisson $J$, est un idéal de Poisson.

(iii) Tout idéal de Poisson maximal de $A$ est premier.

(iv) Pour tout idéal de Poisson J de A, $\sqrt{J}$ est l'intersection des idéaux de Poisson premiers contenant J; en particulier c'est un idéal de Poisson.

(v) Pour tout idéal radiciel I de A, $\pi(I)$ est encore radiciel.

Preuve. – (i) résulte immédiatement du corollaire 1.
Pour prouver (ii), on applique (i) à l'algèbre de Poisson A/J.
(iii) Soit J un idéal de Poisson maximal de A. Il existe un idéal premier P contenant J. J est contenu dans $\pi(P)$ donc $J = \pi(P)$ et le résultat vient du corollaire 1.
L'assertion de (iv) résulte de ce que $\sqrt{J}$ est l'intersection des idéaux premiers minimaux contenant J, qui sont de Poisson d'après (ii).
Enfin, soit I un idéal radiciel de A, i.e. $\sqrt{I} = I$. On a
$\pi(I) \subset \sqrt{\pi(I)} \subset I$ , d'où la conclusion à l'aide de (iv).

On notera comme d'habitude Spec(A) (resp. Spm(A)) l'ensemble des idéaux premiers (resp. maximaux) de A, muni de la topologie de Zariski. L'ensemble SPEC(A) (resp. SPM (A)) des idéaux de Poisson premiers (resp. maximaux) de A est donc une partie de Spec(A), et on a
SPM(A) $\subset$ SPEC(A).

Dans le § 3, on appliquera ces résultats quand K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et A est une K-algèbre de type fini. Dans ce cas, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est l'intersection des idéaux maximaux contenant $\mathfrak{a}$; de plus, Spm(A) est dense dans Spec(A). Ces propriétés s'étendent au cas Poisson de la façon suivante:

PROPOSITION. – Soit A une K-algèbre de Poisson de type fini sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Si A vérifie la propriété suivante:

(M) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $\pi(\mathfrak{m})$ est un idéal de Poisson maximal, on a alors:

a) Pour tout idéal de Poisson $\mathfrak{a}$ de A, $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est l'intersection des idéaux de Poisson maximaux contenant $\mathfrak{a}$.

b) SPM(A) est dense dans SPEC(A).

Preuve. - a) $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est l'intersection des idéaux maximaux $\mathfrak{M}$ contenant $\mathfrak{a}$ ; c'est donc aussi l'intersection des $\pi(\mathfrak{M})$ qui sont par hypothèse des idéaux de Poisson maximaux. Mais tout idéal de Poisson maximal I est de la forme $\pi(\mathfrak{M})$ en prenant pour $\mathfrak{M}$ un idéal maximal contenant I, cqfd.

b) Soit U un ouvert non vide de SPEC(A); il existe donc un idéal $\mathfrak{a}$ de A tel que U soit l'ensemble des idéaux de Poisson premiers de A ne contenant pas $\mathfrak{a}$. Soit P dans U. P est l'intersection des idéaux de Poisson maximaux le contenant. Il existe nécessairement un tel idéal de Poisson maximal $\mathfrak{M}$ ne contenant pas $\mathfrak{a}$, donc, $\mathfrak{M} \in U \cap SPM(A)$ cqfd.

## 2.3 LOCALISATION.

Soit A une K-algèbre de Poisson (K anneau commutatif) et soit S une partie multiplicative de A (Cf. [1-f] p.66). Notons $S^{-1}A$ la K-algèbre des fractions de A à dénominateurs dans S et $\varphi_S : A \longrightarrow S^{-1}A$ le morphisme d'algèbres canonique. Il existe alors une unique structure d'algèbre de Poisson sur $S^{-1}A$ telle que $\varphi_S$ soit un morphisme de Poisson.

En effet, le crochet de $S^{-1}A$ est nécessairement défini par:

$$\left[\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'}\right] = \frac{ss'[a,a'] - sa'[a,s'] - as'[s,a'] + aa'[s,s']}{s^2 s'^2}$$

pour tout a, a' dans A et s, s' dans S.

Ce crochet est bien antisymétrique et on vérifie qu'il satisfait à l'identité de Jacobi.

L'expression du crochet de $S^{-1}A$ montre que, pour tout idéal de Poisson $\mathfrak{a}$ de A, $S^{-1}\mathfrak{a}$ est un idéal de Poisson de $S^{-1}A$.

Il est immédiat que pour deux parties multiplicatives $S$, $T$ avec $S \subset T$, l'application canonique $S^{-1}A \longrightarrow T^{-1}A$ est un <u>morphisme de Poisson.</u>

Soient $s$ et $t$ deux éléments de $A$ et soient les parties multiplicatives $S = \{s^n ;\ n \in \mathbb{N}\}$ et $T = \{t^n ;\ n \in \mathbb{N}\}$. Supposons que dans l'anneau $A$, $s$ divise $t$. L'application $\rho_{s,t} : S^{-1}A \longrightarrow T^{-1}A$ définie par $\rho_{s,t}\left(\frac{a}{s^n}\right) = \frac{a\,u^n}{t^n}$ si $t = su$, ne dépend pas du choix de $u$. Il est clair que $\rho_{s,t}$ est un <u>morphisme de Poisson.</u>

## 2.4 UN EXEMPLE D'IDEAUX DE POISSON.

Soit $\mathfrak{g}$ une <u>K-algèbre de Lie</u> (K anneau commutatif) et soit $S\mathfrak{g}$ l'algèbre de Poisson graduée de degré 1 qui s'en déduit. La représentation adjointe ad de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ définit une représentation, notée encore ad, de $\mathfrak{g}$ dans $S\mathfrak{g}$ (cf. (1.3)). <u>Pour qu'un idéal $I$ de $S\mathfrak{g}$ soit un idéal de Poisson de $S\mathfrak{g}$, il faut et il suffit que $I$ soit stable pour cette représentation.</u>

Prenons par exemple pour $\mathfrak{g}$ <u>une K-algèbre de Heisenberg</u> de dimension $n = 2m + 1$ $(m \geqslant 1)$. C'est une algèbre de Lie définie par une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et les relations

$$[e_i , e_{i+m}] = - [e_{i+m} , e_i] = e_{2m+1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant m),$$

les autres crochets des éléments de base étant nuls.

Quand on identifie $S\mathfrak{g}$ à $K[X_1 ,\dots, X_n]$ au moyen de la base $(e_i)$, le crochet de Poisson de $S\mathfrak{g}$ est défini sur les polynomes par:

$$(2.4.1) \qquad [P, Q] = \left( \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial Q}{\partial X_{i+m}} - \frac{\partial P}{\partial X_{i+m}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial X_i} \right) X_{2m+1} \ .$$

La proposition suivante exprime le passage entre Mécanique Quantique et Mécanique Classique.

PROPOSITION . - Pour tout $\lambda \in K$, l'idéal $I_\lambda = (X_n - \lambda)$ engendré par $X_n - \lambda$ est un idéal de Poisson de $S\mathfrak{g}$. L'algèbre de Poisson quotient $S\mathfrak{g}/I_\lambda$ s'identifie à l'algèbre $K[X_1, \dots, X_{2m}]$ muni du crochet $\lambda\{\ ,\ \}$ où $\{\ ,\ \}$ est le crochet de Poisson classique.

La première assertion est immédiate puisque $[S\mathfrak{g}, X_n - \lambda] = 0$. L'application $K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_{2m}]$ qui à tout polynome $P(X_1, \dots, X_n)$ associe le polynome $P(X_1, \dots, X_{2m}, \lambda)$ a pour noyau $I_\lambda$ et définit donc un isomorphisme d'algèbres associatives de $K[X_1, \dots, X_n]/I_\lambda$ dans $K[X_1, \dots, X_{2m}]$. En comparant (1.3.1) et (2.4.1), il est clair que c'est un isomorphisme de Poisson quand on munit $K[X_1, \dots, X_{2m}]$ du crochet $\lambda\{\ ,\ \}$.

## § 3. ALGEBRES DE POISSON ET GEOMETRIE ALGEBRIQUE.

Nous utiliserons la présentation de la Géométrie Algébrique donnée dans [12]. Dans tout ce paragraphe, K désigne un corps algébriquement clos.

### 3.1 VARIETES ALGEBRIQUES DE POISSON.

Soit X une variété algébrique de faisceau structural $\mathcal{O}_X$ . On dit que X est une variété algébrique de Poisson si $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'algèbres de Poisson.

Une variété algébrique de Poisson est dite triviale si toutes les algèbres de Poisson composant son faisceau structural sont triviales, i.e. de crochet nul.

Soient X et Y deux variétés algébriques de Poisson et soit u un morphisme de variétés de X dans Y; u s'appelle un morphisme de variétés algébriques de Poisson (ou, plus simplement, un morphisme de Poisson) si, pour tout ouvert V de Y, le comorphisme $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(u^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$ est un morphisme d'algèbres de Poisson.

Soient X et Y deux variétés algébriques de Poisson telles que X soit une sous-variété de Y. X s'appelle une sous-variété algébrique de Poisson de Y si l'application canonique $X \longrightarrow Y$ est un morphisme de Poisson. Les ouverts de Y sont de telles sous-variétés.

Notons que l'on a défini la catégorie des variétés algébriques de Poisson. La catégorie des variétés algébriques (triviales) est une sous-catégorie pleine de celle-ci.

## 3.2 VARIETES ALGEBRIQUES DE POISSON AFFINES.

Soit $X = \mathrm{Spm}(A)$ une variété algébrique affine, où A est une K-algèbre réduite de type fini. Si X est une variété algébrique de Poisson, alors $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une algèbre de Poisson. Réciproquement, supposons que A est une K-algèbre de Poisson et montrons que X est canoniquement une variété algébrique de Poisson i.e. pour tout ouvert U de X, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est une algèbre de Poisson et chaque morphisme de restriction est un morphisme de Poisson.

Pour cela, il suffit de se limiter aux ouverts principaux. Soit D(s) un ouvert principal de X, i.e. l'ensemble des $x \in X$ tels que $s(x) \neq 0$ (s étant un élément de A). On sait que $\Gamma(D(s), \mathcal{O}_X)$ est l'algèbre des fractions $S^{-1}A$ où $S = \{s^n;\ n \in \mathbb{N}\}$. On munit alors $\Gamma(D(s), \mathcal{O}_X)$ de la structure d'algèbre de Poisson définie en (2.3). Si D(t) est un ouvert principal contenu dans D(s), alors s divise $t^m$ ($m \geq 1$) dans A et on a vu que le morphisme de restriction $\rho_{s,t^m}$ de $\Gamma(D(s), \mathcal{O}_X)$ dans $\Gamma(D(t), \mathcal{O}_X)$ est un morphisme de Poisson.

Soient maintenant deux variétés algébriques de Poisson affines $X = \mathrm{Spm}(A)$ et $Y = \mathrm{Spm}(B)$. Tout morphisme de variétés algébriques de Poisson u de X dans Y définit un comorphisme de Poisson $\Gamma(u)$ de B dans A. Réciproquement, soit $f : B \longrightarrow A$ un morphisme de Poisson et soit $u = \mathrm{Spm}(f) : X \longrightarrow Y$ l'application qui s'en déduit. Montrons que u est un morphisme de Poisson.

En effet, si $D'(t)$ est un ouvert principal de Y, alors $u^{-1}(D'(t)) = D(f(t))$ est un ouvert principal de X. Posons $T = \{t^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ et $S = \{(f(t))^n = f(t^n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Le comorphisme de $\Gamma(D'(t), \mathcal{O}_Y)$ dans $\Gamma(D(f(t)), \mathcal{O}_X)$ est donc l'application de $T^{-1}B$ dans $S^{-1}A$ qui à $\frac{b}{t^n}$

associe $\dfrac{f(b)}{f(t^n)}$ , pour tout $b \in B$ et $n \in \mathbb{N}$; un calcul immédiat montre que c'est bien un morphisme de Poisson.

En résumé, on a prouvé que la catégorie des variétés algébriques de Poisson affines est équivalente à la catégorie duale de la catégorie des algèbres de Poisson réduites de type fini.

### 3.3 FERMES DE POISSON.

Fixons $X = \mathrm{Spm}(A)$ une variété algébrique de Poisson affine. Les fermés de X sont notés comme d'habitude $V(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A; ce sont les sous-variétés algébriques fermées de X. On a $V(\mathfrak{a}) = \mathrm{Spm}(A/\mathfrak{a})$ et l'injection canonique $i: V(\mathfrak{a}) \longrightarrow X$ donne le comorphisme canonique $\Gamma(i): A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ . Il est donc clair que:

$V(\mathfrak{a})$ est une sous-variété algébrique de Poisson de X si et seulement si $\mathfrak{a}$ est un idéal de Poisson de A.

Les sous-variétés algébriques de Poisson fermées de X sont appelées plus simplement fermés de Poisson de X. Voici la traduction de quelques résultats du § 2, dont certains supposent K de caractéristique nulle.

D'abord, toute intersection (resp. toute réunion finie) de fermés de Poisson est un fermé de Poisson. Les fermés de Poisson de X définissent donc une topologie sur X, dite topologie de Poisson de X, moins fine que la topologie de Zariski.

Pour tout fermé $V(\mathfrak{a})$ de X, il existe un plus petit (resp. un plus grand) fermé de Poisson contenant $V(\mathfrak{a})$ (resp. contenu dans $V(\mathfrak{a})$). D'après le corollaire 1 de (2.2), le plus petit fermé de Poisson contenant un fermé irréductible de X est irréductible.

D'autre part, toute composante irréductible d'un fermé de Poisson est un fermé de Poisson (corollaire 2 de (2.2)).

Enfin, l'ensemble des fermés de Poisson irréductibles (resp. minimaux non vides) est en bijection avec SPEC(A) ( resp. SPM(A)). En particulier, tout fermé de Poisson minimal est irréductible.

Regardons plus spécialement les fermés de Poisson minimaux (non vides) de X. Deux tels fermés $V(\mathfrak{a})$ et $V(\mathfrak{b})$ sont disjoints dès qu'ils sont distincts. En effet, supposons $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) \neq \emptyset$; alors $V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \neq \emptyset$ donc $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est un idéal de Poisson distinct de A contenant $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, ce qui implique $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$, d'où $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b})$. Le résultat suivant utilise la propriété (M) énoncée dans la proposition de (2.2).

PROPOSITION. - Les fermés de Poisson minimaux de X forment une partition de X si et seulement si la K-algèbre de Poisson A possède la propriété (M).

Preuve. - Supposons que les fermés de Poisson minimaux de X forment une partition de X. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A correspondant à l'élément x de X. Il existe donc $\mathfrak{a} \in \mathrm{SPM}(A)$ tel que $x \in V(\mathfrak{a})$, i.e. $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$. Mais alors $\pi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$, cqfd.

Réciproquement, supposons (M) vérifiée. Soit $x \in X$ définissant l'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Alors $x \in V(\pi(\mathfrak{m}))$ et $\pi(\mathfrak{m})$ est un idéal de Poisson maximal, cqfd. Notons que, dans ce cas, tout fermé de Poisson de X est réunion de fermés de Poisson minimaux.

## 3.4 ANNEAUX LOCAUX DES VARIETES ALGEBRIQUES DE POISSON.

Soit X une variété algébrique de Poisson et soit $x \in X$. On note $\mathcal{O}_x$ l'anneau local en x; $\mathcal{O}_x$ est la limite inductive des algèbres $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ quand U parcourt les voisinages ouverts de x dans X. Pour un tel ouvert U et pour deux fonctions régulières f, g de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, l'élément $[f, g]$ détermine un germe en x qui ne dépend que des germes $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ définis par f et g en x; ce germe sera noté $[\tilde{f}, \tilde{g}]$ et il est immédiat que l'on définit ainsi <u>une structure de K-algèbre de Poisson sur $\mathcal{O}_x$</u>.

Supposons en particulier X irréductible et soit R(X) le corps des fonctions rationnelles sur X; on sait que R(X) est le corps des fractions de tout anneau local $\mathcal{O}_x$, $x \in X$. D'après (2.3), <u>R(X) est donc canoniquement une K-algèbre de Poisson</u> telle que les injections $\mathcal{O}_x \longrightarrow R(X)$ soient des morphismes de Poisson. Pour voir que tous les $\mathcal{O}_x$ donnent la même algèbre de Poisson sur R(X), il suffit de remarquer que R(X) est aussi le corps des fractions de tout anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ où U est un ouvert affine. (Cf. [12] p.86 et p. 127)

Revenons au cas général et à l'étude de l'algèbre de Poisson locale $\mathcal{O}_x$ en un point x de X. Notons $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$. Rappelons que $\mathcal{O}_x = K.1 \oplus \mathfrak{m}_x$ et que l'espace tangent $T_x(X)$ de X en x est par définition le dual du K-espace vectoriel $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$. Notons $d_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow T_x(X)^*$ l'application canonique $\mathcal{O}_x \longrightarrow \mathfrak{m}_x \longrightarrow \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$.

L'application $(\tilde{f}, \tilde{g}) \longmapsto [\tilde{f}, \tilde{g}](x)$ détermine une forme K-bilinéaire alternée sur $\mathcal{O}_x$, qui est évidemment nulle si $\tilde{f} \in K.1$ ou $\tilde{g} \in K.1$. Soit $B_x$ la restriction de cette forme au sous-espace $\mathfrak{m}_x$. Comme on a

$$B_x(\tilde{f}, \tilde{g}_1 . \tilde{g}_2) = \tilde{g}_1(x)\, B_x(\tilde{f}, \tilde{g}_2) + \tilde{g}_2(x)\, B_x(\tilde{f}, \tilde{g}_1) ,$$

le sous-espace $\mathfrak{m}_x^2$ est contenu dans le noyau de $B_x$. Par suite, $B_x$ induit une forme K-bilinéaire alternée sur $T_x(X)^*$, que nous noterons $\tilde{B}_x$. Le rang de $\tilde{B}_x$, qui est un entier pair, s'appelle <u>le rang en x de la variété algébrique de Poisson X</u> et se note $rg_x(X)$.

La forme $\tilde{B}_x$ définit une application K-linéaire $\tau_x : T_x(X)^* \longrightarrow T_x(X)$.

On pose $\partial_x = \tau_x \cdot d_x$. Pour tout ouvert U de X et pour tout $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ on peut donc définir le "champ de vecteurs tangents" $\partial f$ au-dessus de U par l'application $x \longrightarrow \partial_x(\tilde{f}_x)$, où $\tilde{f}_x$ désigne le germe en x déterminé par f.

Dans l'espace vectoriel $T_x(X)^*$ muni de la forme alternée $\tilde{B}_x$, il existe une base $(d_x f_i)_{1 \leq i \leq n}$ où $f_1, \ldots, f_n$ sont des éléments de $\mathfrak{m}_x$, telle que la matrice de $\tilde{B}_x$ dans cette base soit du type

$$\begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \\ -I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Le rang de X en x est alors 2p.

Sachant que $(d_x f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ et que l'anneau local $\mathcal{O}_x$ est noethérien, on peut affirmer que $f_1, \ldots, f_n$ engendrent l'idéal $\mathfrak{m}_x$ (Cf. [3] p.10). Si, en outre, X est irréductible et si x est un point simple (i.e. n = dim(X)), alors $f_1, \ldots, f_n$ sont algébriquement indépendants et forment une base de transcendance de R(X) sur K. (Cf. [12] p.149).

## 3.5 VARIETES ALGEBRIQUES SYMPLECTIQUES.

Soit X une variété algébrique de Poisson irréductible. En analogie avec le cas différentiable (Cf. § 5), nous allons montrer que l'application rang de X dans $\mathbb{N}$ est semi-continue inférieurement, mais sous une hypothèse supplémentaire.

On sait que pour tout ouvert affine U de X, $A_U = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est une K-algèbre de Poisson (réduite) de type fini et on a l'identification $U = \mathrm{Spm}(A_U)$. Or une K-algèbre de Poisson de type fini A s'écrit $K[T_1, \ldots, T_N] / \mathfrak{a}$ en tant qu'algèbre associative ($\mathfrak{a}$ idéal de $K[T_1, \ldots, T_N]$); mais il n'est pas certain que l'on puisse trouver un crochet de Poisson sur $K[T_1, \dots, T_N]$ de telle sorte que $\mathfrak{a}$ soit un idéal de Poisson et que les algèbres de Poisson A et $K[T_1, \dots, T_N]/\mathfrak{a}$ soient identiques. Si c'est le cas, on dit que la K-algèbre de Poisson de type fini A est <u>relevable</u>.

<u>THEOREME</u>. - <u>Soit X une variété algébrique de Poisson irréductible. On suppose que pour tout ouvert affine U de X, l'algèbre de Poisson $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est relevable. Alors l'application $x \longmapsto rg_x(X)$ de X dans $\mathbb{N}$ est semi-continue inférieurement.</u>

<u>Preuve</u>. - On peut évidemment se borner au cas où $X = Spm(A)$ est une variété affine irréductible. Par hypothèse, A est l'algèbre de Poisson quotient d'une algèbre de Poisson $K[T_1, \dots, T_N]$ par un idéal de Poisson $\mathfrak{a}$. X s'identifie à l'ensemble algébrique $V(\mathfrak{a})$ de $K^N$.

Fixons x dans X. L'injection canonique $X \longrightarrow K^N$ permet de considérer $T_x(X)$ comme un sous-espace vectoriel de $T_x(K^N) = K^N$. En considérant $(T_1, \dots, T_N)$ comme la base de $(K^N)^*$ duale de la base canonique de $K^N$, il est clair que les restrictions $T_i^x$, $1 \leqslant i \leqslant N$, des $T_i$ à $T_x(X)$ engendrent l'espace $T_x(X)^*$. Par suite, le rang de la forme $\tilde{B}_x$ est égal au rang de la matrice $(\tilde{B}_x(T_i^x, T_j^x))_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$.

Puisque X est irréductible, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ de X en x contient A. Pour $1 \leqslant i \leqslant N$, la fonction régulière $T_i|_X$ sur X est donc un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$ dont on peut calculer la différentielle en x.

<u>LEMME</u>. - $d_x(T_i|_X) = T_i^x$.

En effet, l'injection canonique $X \longrightarrow K^N$ définit le comorphisme de restriction $\rho : \mathcal{O}_{K^N,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. L'application qui s'en déduit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_K^x(\mathcal{O}_{X,x},K) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_K^x(\mathcal{O}_{K^N,x},K) \\ D & \longmapsto & D.\rho \end{array}$$ n'est rien d'autre que l'injection canonique $j: T_x(X) \longrightarrow T_x(K^N) = K^N$. Si l'élément t de $T_x(X)$ s'i- s'identifie à $D \in \mathrm{Der}_K^x(\mathcal{O}_{X,x},K)$, on a

$$< t, d_x(T_i|_X)> = D(T_i|_X) = D.\rho(T_i) = <j(t), d_xT_i> = {}^tj(d_xT_i)$$

où ${}^tj$ est la transposée de j. Or il est clair que la différentielle $d_xT_i$ de la fonction régulière linéaire $T_i$ sur $K^N$ est l'élément $T_i$ de $(K^N)^*$. Mais alors ${}^tj(T_i) = T_i^x$.

Le lemme étant prouvé, on peut alors conclure. En effet,

$$\widetilde{B}_x(T_i^x, T_j^x) = \widetilde{B}_x(d_x(T_i|_X), d_x(T_j|_X)) = [T_i|_X, T_j|_X](x) = [T_i, T_j](x).$$

Ainsi, $rg_x(X)$ est le rang de la matrice $([T_i, T_j](x))_{1\leqslant i,j\leqslant N}$.

Soit un entier $k\in\{0,\dots, N\}$. L'ensemble des $x\in X$ tels que le rang en x soit $\leqslant k$ est donc l'ensemble des x de X tels que tous les mineurs d'ordre $>k$ de $([T_i, T_j](x))_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ sont nuls; c'est donc bien un fermé de Zariski de X.

COROLLAIRE. - Sous les hypothèses du théorème, l'ensemble $U_0$ des points de X de rang maximum est un ouvert partout dense de X.

Les points de $U_0$ sont dits réguliers. Si le rang maximum de X est égal à sa dimension, on dira que la variété algébrique de Poisson X ( que l'on suppose en outre non singulière ) est quasi-symplectique, la variété algébrique de Poisson $U_0$ étant dite symplectique.

Supposons X quasi-symplectique. Pour tout $x\in U_0$, $\tau_x$ est alors un isomorphisme de $T_x(X)^*$ sur $T_x(X)$, si bien que l'on peut transporter la forme K-bilinéaire alternée non dégénérée $\widetilde{B}_x$ sur $T_x(X)^*$ en une forme K-bilinéaire alternée non dégénérée $\omega_x$ sur $T_x(X)$. On a donc

$$<\omega_x, \partial_x(\breve{f}) \wedge \partial_x(\breve{g})> = <\widetilde{B}_x, d_x(\breve{f})\wedge d_x(\breve{g})>$$

pour tout $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ dans $\mathcal{O}_x$.

Notons $\tilde{B}$ (resp. $\omega$) l'application définie sur $U_0$ par $x \longmapsto \tilde{B}_x \in \Lambda^2 T_x(X)$ (resp. $x \longmapsto \omega_x \in \Lambda^2 T_x(X)$ ). Pour tout f dans $\Gamma(U_0, \mathcal{O}_X)$, soit df (resp. $\partial f$) la "forme différentielle" $x \longmapsto d_x(\tilde{f}_x)$ (resp. le "champ de vecteurs tangents" $x \longmapsto \partial_x(\tilde{f}_x)$). L'égalité ci-dessus s'écrit:

$$\langle \omega , \partial f \wedge \partial g \rangle = \langle \tilde{B}, df \wedge dg \rangle = [f, g]$$

pour tout f et g dans $\Gamma(U_0, \mathcal{O}_X)$.

Exemple 1. - Tout espace vectoriel symplectique V de dimension finie n est une variété algébrique symplectique. On munit en effet S(V) de la structure d'algèbre de Poisson classique induite par la forme symplectique de V (Cf. (1.3)). En choisissant une base symplectique, on identifie S(V) à $K[T_1, \ldots, T_n] = A$. On a bien sûr V = Spm(A) et il est clair que la matrice $([T_i, T_j](x))_{i,j}$ est de rang n en tout point x de V.

Exemple 2. - Soit $\mathfrak{g}$ une K-algèbre de Lie de dimension finie n. On munit $S\mathfrak{g}$ de la structure d'algèbre de Poisson induite par le crochet de $\mathfrak{g}$ (Cf. (1.3)). Les éléments de $S\mathfrak{g}$ sont naturellement les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$ si bien que c'est $\mathfrak{g}^*$ qui sera considéré comme variété algébrique de Poisson telle que $\mathfrak{g}^* = \mathrm{Spm}(S\mathfrak{g})$.

Le rang en $x \in \mathfrak{g}^*$ est donc le rang de la forme bilinéaire alternée $(a, b) \longmapsto \langle x, [a, b] \rangle$ définie sur $\mathfrak{g}$. La définition des éléments réguliers coïncide bien avec celle donnée dans [14], p.50. Notons que si n est impair, la variété algébrique de Poisson $\mathfrak{g}^*$(qui est affine) n'est jamais quasi-symplectique.

## § 4. APPLICATION A LA THEORIE DES ORBITES.

Pour la théorie (algébrique) des orbites, on utilise [14]. Les références sur les groupes algébriques sont [3] et [11].

Dans tout ce paragraphe, K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ est une K-algèbre de Lie de dimension finie. On utilisera le formalisme de l'exemple 2 terminant le § 3.

### 4.1 IDEAUX INVARIANTS ET IDEAUX DE POISSON.

$ad(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Lie de $End(\mathfrak{g})$. Soit $\mathfrak{a}$ la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $End(\mathfrak{g})$ contenant $ad(\mathfrak{g})$. (Cf. [11] p. 173). Notons $\mathcal{A}$ le sous-groupe algébrique fermé irréductible de $GL(\mathfrak{g})$ dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{a}$. $\mathcal{A}$ s'appelle le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$.

L'action de $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{g}$ se prolonge de façon unique en une action de $\mathcal{A}$ dans $S\mathfrak{g}$ par automorphismes d'algèbres associatives. La différentielle en l'élément neutre de l'application $\mathcal{A} \longrightarrow GL(S\mathfrak{g})$ est l'application $\mathfrak{a} \longrightarrow End(S\mathfrak{g})$ qui est le prolongement par dérivations de l'action de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. (Cf. [3] p. 137)

PROPOSITION. - Soit E un sous-espace vectoriel de $S\mathfrak{g}$.

(i) Si E est $\mathcal{A}$-invariant, E est invariant par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $S\mathfrak{g}$.

(ii) La réciproque de (i) est vraie dans le cas où $ad(\mathfrak{g})$ est algébrique.

Preuve. - Pour tout entier $r \geqslant 0$, notons $\pi_r : \mathcal{A} \longrightarrow GL(S_r\mathfrak{g})$ la représentation de $\mathcal{A}$ dans $S_r\mathfrak{g} = \bigoplus_{k=0}^{r} S^k\mathfrak{g}$ déduite de $\mathcal{A} \longrightarrow GL(S\mathfrak{g})$. Chaque $\pi_r$ est une représentation rationnelle de $\mathcal{A}$ (Cf. [3] p.94). On pose $E_r = E \cap S_r\mathfrak{g}$ et $H_r = \left\{ a \in \mathcal{A} ;\ \pi_r(a)(E_r) = E_r \right\}$.

C'est un sous-groupe algébrique de $\mathcal{A}$ dont l'algèbre de Lie est

$$L(H_r) = \left\{ X \in \mathfrak{a} \; ; \; X(E_r) \subset E_r \right\} .$$

(Cf. [3] p. 189-190)

(i) Si E est $\mathcal{A}$-invariant, chaque $E_r$ est $\mathcal{A}$-invariant donc $H_r = \mathcal{A}$ d'où $L(H_r) = \mathfrak{a}$. En particulier, chaque $E_r$ est stable par la représentation adjointe, donc aussi E.

(ii) Si ad($\mathfrak{g}$) est algébrique et si chaque $E_r$ est invariant par la représentation adjointe, alors $L(H_r) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}$ donc $H_r = \mathcal{A}$ et chaque $E_r$ est $\mathcal{A}$-invariant.

COROLLAIRE. - (i) Tout idéal de $S\mathfrak{g}$ qui est $\mathcal{A}$-invariant est un idéal de Poisson de $S\mathfrak{g}$.

(ii) La réciproque de (i) est vraie si ad($\mathfrak{g}$) est algébrique.

Il suffit d'utiliser la condition donnée en (2.4) pour qu'un idéal soit de Poisson.

## 4.2 ORBITES.

$\mathcal{A}$ agit naturellement sur $\mathfrak{g}^*$ par bijections linéaires; cela définit une action (au moyen de morphismes de variétés) du groupe algébrique $\mathcal{A}$ sur la variété algébrique $\mathfrak{g}^*$. On sait alors que chaque orbite dans $\mathfrak{g}^*$ pour cette action est localement fermée, irréductible, et non singulière. (Cf. [3] p. 98).

Soit $O(x)$ l'orbite en $x \in \mathfrak{g}^*$ et soit $\overline{O(x)}$ son adhérence. $\overline{O(x)}$ est un ensemble algébrique défini par l'idéal $J(x)$ de $S\mathfrak{g}$ formé des polynomes s'annulant sur $O(x)$ (ou $\overline{O(x)}$). Il est clair que $J(x)$ est $\mathcal{A}$-invariant puisque, pour tout $f \in J(x)$ et $a \in \mathcal{A}$, $a.f(x) = f(a^{-1}.x) = 0$

Donc $J(x)$ est un idéal de Poisson de $S\mathfrak{g}$ et $\overline{O(x)}$ est un fermé de Poisson de $\mathfrak{g}^*$. $O(x)$ étant ouvert dans $\overline{O(x)}$, on a donc:

PROPOSITION. - Chaque orbite dans $\mathfrak{g}^*$ pour l'action de $\mathcal{A}$ est une sous-variété algébrique de Poisson de $\mathfrak{g}^*$.

Notons que l'application $J : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathrm{SPEC}(S\mathfrak{g})$ qui à $x$ de $\mathfrak{g}^*$ associe l'idéal $J(x)$ se factorise en une application $\overline{J} : \mathfrak{g}^*/\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{SPEC}(S\mathfrak{g})$.

Supposons maintenant $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ algébrique. Le corollaire de (4.1) montre que tout fermé de Poisson de $\mathfrak{g}^*$ est réunion d'orbites; en outre, les orbites ont la structure suivante:

THEOREME. - On suppose $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ algébrique. Chaque orbite dans $\mathfrak{g}^*$ est une variété algébrique symplectique.

Preuve. - L'algèbre de Lie du stabilisateur $\mathcal{A}_x = \{a \in \mathcal{A} \,;\, a.x = x\}$ d'un élément $x$ de $\mathfrak{g}^*$ est $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}^x)$ où

$$\mathfrak{g}^x = \{ u \in \mathfrak{g} \,;\, \forall v \in \mathfrak{g} \,, < x, [u, v] > = 0 \}$$

(Cf. [3] p. 189-190). On sait que la dimension de l'orbite $O(x)$ est $\dim \mathcal{A} - \dim \mathcal{A}_x$ (idem p.39) i.e. $\dim \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) - \dim \mathrm{ad}(\mathfrak{g}^x)$. Or

$\dim \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ centre de $\mathfrak{g}$) et

$\dim \mathrm{ad}(\mathfrak{g}^x) = \dim \mathfrak{g}^x - \dim \mathfrak{c}$ (car $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}^x$)

donc $\dim O(x) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^x$.

D'autre part, le rang en $x$ de $O(x)$ est égal au rang de la forme bilinéaire $(u, v) \longmapsto < x, [u, v] >$ définie sur $\mathfrak{g}$ (Cf. preuve du théorème de (3.5)); or ce dernier est aussi $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^x$ cqfd.

## 4.3 ORBITES FERMEES ET FERMES DE POISSON MINIMAUX.

THEOREME. - On suppose $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ algébrique. Les orbites fermées dans $\mathfrak{g}^*$ sont exactement les fermés de Poisson minimaux de $\mathfrak{g}^*$.

Preuve. - Soit $O(x)$ une orbite fermée définie par l'idéal de Poisson $J(x)$, et soit $I$ un idéal de Poisson maximal contenant $J(x)$. Ainsi $V(I) \subset O(x)$. Comme $I$ est $\mathcal{A}$-invariant (corollaire de (4.1)), $V(I)$ est $\mathcal{A}$-invariant et, puisque $V(I)$ contient au moins un point de $O(x)$, $V(I)$ contient $O(x)$.

Réciproquement, soit $V(I)$ un fermé de Poisson minimal de $\mathfrak{g}^*$, et soit $x$ dans $V(I)$. Comme $V(I)$ est $\mathcal{A}$-invariant et fermé, $\overline{O(x)} \subset V(I)$, donc $J(x) \supset I$ et on conclut que $J(x) = I$ et $\overline{O(x)} = V(I)$. Il reste à montrer que $O(x) = \overline{O(x)}$.

Sinon, on sait que $\overline{O(x)} \setminus O(x)$ est la réunion d'orbites de dimension $<\dim O(x)$. (Cf. [3] p. 98). Soit $O(x')$ une de ces orbites choisie de dimension minimum; il est clair que $O(x')$ est fermée. Donc $O(x')$ est un fermé de Poisson minimal, strictement contenu dans $V(I)$, ce qui est absurde.

La proposition de (3.3) jointe au théorème précédent donne immédiatement le résultat suivant:

COROLLAIRE. - On suppose $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ algébrique. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $S\mathfrak{g}$ possède la propriété (M).

(ii) Les fermés de Poisson minimaux de $\mathfrak{g}^*$ forment une partition de $\mathfrak{g}^*$.

(iii) Toutes les orbites dans $\mathfrak{g}^*$ sont fermées.

On verra que ces assertions sont satisfaites quand $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

## 4.4 QUESTIONS DE CONTINUITE.

On suppose dans ce qui suit $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ algébrique.

L'application $\mathcal{A} \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ est continue quand on munit $\mathfrak{g}^*$

$$(a, x) \longmapsto a.x$$

de la topologie de Poisson. En effet, l'image réciproque d'un fermé de Poisson $V(\mathfrak{a})$ est $\mathcal{A} \times V(\mathfrak{a})$, puisque $V(\mathfrak{a})$ est $\mathcal{A}$-invariant. On peut donc considérer l'espace d'orbites $\mathfrak{g}^*/\mathcal{A}$ muni de la topologie de Poisson.

PROPOSITION. - L'application $\overline{J}$: $\mathfrak{g}^*/\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{SPEC}(S\mathfrak{g})$ est continue pour les topologies de Poisson.

Preuve. - Soit $V'(\mathfrak{a}) = \{ P \in \mathrm{SPEC}(S\mathfrak{g}) ;\ P \supset \mathfrak{a} \}$ un fermé de Poisson dans $\mathrm{SPEC}(S\mathfrak{g})$; $\mathfrak{a}$ est donc un idéal de Poisson. Il est immédiat que $J^{-1}(V'(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a})$ qui est bien un fermé de Poisson de $\mathfrak{g}^*$.

THEOREME. - On suppose que l'une des assertions équivalentes du corollaire de (4.3) est satisfaite. L'application $\overline{J}: \mathfrak{g}^*/\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{SPM}(S\mathfrak{g})$ est un homéomorphisme pour les topologies de Poisson.

Preuve. - Le corollaire de (4.3) montre que $\overline{J}: \mathfrak{g}^*/\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{SPM}(S\mathfrak{g})$ est une bijection. Soit F un fermé de $\mathfrak{g}^*/\mathcal{A}$, image du fermé de Poisson $V(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{g}^*$ par l'application canonique $\mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*/\mathcal{A}$. On voit que

$$\overline{J}(F) = J(V(\mathfrak{a})) = \{ P \in \mathrm{SPM}(S\mathfrak{g}) ;\ P \supset \mathfrak{a} \}, \qquad \text{cqfd.}$$

## 4.5 LE CAS NILPOTENT.

On suppose l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente. Dans ce cas, d'après un théorème de Chevalley, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ est algébrique (Cf. par exemple [3] p. 193). En outre, les orbites sont fermées (Cf. [14] p. 330). Le théorème précédent s'applique donc. De plus, on a:

THEOREME. - Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, chaque orbite dans $\mathfrak{g}^*$ est isomorphe (en tant que variété algébrique de Poisson) à un espace vectoriel symplectique.

Preuve. - Fixons x dans $\mathfrak{g}^*$. On sait (Cf. [14] p. 194) que l'algèbre $S\mathfrak{g}/J(x)$ est isomorphe à une algèbre de polynomes $K[T_1, \dots, T_r]$, où r est le rang en x de $O(x)$. Cet isomorphisme fait de $K[T_1, \dots, T_r]$ une algèbre de Poisson et de $K^r$ une variété algébrique de Poisson isomorphe à $O(x)$. Le fait que $K^r$ est une variété algébrique symplectique entraine que, pour tout x dans $K^r$, la matrice $([T_i, T_j](x))_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$ est inversible. Pour voir que $K[T_1, \dots, T_r]$ est une algèbre de Poisson classique, il suffit de montrer que tous les polynomes $[T_i, T_j]$ sont constants. Le théorème est donc la conséquence du lemme suivant:

LEMME. - Soient $K$ un corps algébriquement clos et $r$, $n$ deux entiers $\geqslant 1$. Si $A$ est une matrice $n\times n$ à coefficients dans $K[T_1, \dots, T_r]$ telle que, pour tout $x$ dans $K^r$, la matrice $A(x)$ est inversible dans l'algèbre $M_n(K)$ des matrices $n\times n$ à coefficients dans $K$, alors $A$ a tous ses coefficients constants.

Remarquons d'abord que, pour tout $x\in K^r$, $(\det A)(x) = \det(A(x))$. L'hypothèse sur $A$ entraine que, pour tout $x \in K^r$, $(\det A)(x) \neq 0$; par suite, le polynome $\det(A)$ est une constante non nulle, i.e. la matrice $A$ est inversible dans $M_n(K[T_1, \dots, T_r])$.

Raisonnons maintenant par récurrence sur $r$. Si $r = 1$, on peut décomposer $A$ et $A^{-1}$ de façon unique en:

$$A = \sum_{i=0}^{d} A_i T_1^i \quad \text{et} \quad A^{-1} = \sum_{j=0}^{d'} A'_j T_1^j \quad \text{avec } A_i \text{ et } A'_j \text{ dans } M_n(K).$$

Or $A.A^{-1} = \sum_{i,j} A_i A'_j T_1^{i+j} = I_n$, ce qui implique en particulier:

$A_0 A'_j = 0$ pour tout $j \geqslant 1$, et $A_0 A'_0 = I_n$. Donc $A_0 A^{-1} = A_0 A'_0 = I_n$ et $A = A_0$.

Supposons ensuite la propriété vraie pour $r$ et soit $A$ dans $M_n(K[T_1, \dots, T_{r+1}])$ telle que $A(x)$ est toujours inversible dans $M_n(K)$. On fait alors le raisonnement précédent en développant $A$ et $A^{-1}$ suivant l'indéterminée $T_{r+1}$ et on applique l'hypothèse de récurrence.

## 4.6 LIEN AVEC L'ALGEBRE ENVELOPPANTE.

Nous traduisons ici sans démonstration quelques résultats sur les algèbres enveloppantes; toutes les références concernent le livre de Dixmier [14]. Pour simplifier, on suppose $\mathfrak{g}$ nilpotente.

On note $\mathrm{Spec}(U\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Spm}(U\mathfrak{g})$) l'ensemble des idéaux bilatères premiers (resp. maximaux) de l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$. Dans le cas nilpotent, $\mathrm{Spm}(U\mathfrak{g})$ coïncide avec l'ensemble $\mathrm{Prim}(U\mathfrak{g})$ des idéaux primitifs de $U\mathfrak{g}$ (p. 148). Signalons aussi que, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathrm{Spm}(U\mathfrak{g})$, $U\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est une algèbre de Weyl (p. 152 et 142).

En premier lieu, on définit une application canonique $I : \mathfrak{g}^* \longrightarrow Spm(U\mathfrak{g})$ (p. 188), qui se factorise en une bijection $\overline{I} : \mathfrak{g}^*/\mathfrak{A} \longrightarrow Spm(U\mathfrak{g})$ (p. 192). A l'aide de la bijection $\overline{J}$ (Cf.(4.4)), on obtient donc une bijection canonique $\psi_0 : SPM(S\mathfrak{g}) \longrightarrow Spm(U\mathfrak{g})$. Enfin, $\psi_0$ se prolonge en une bijection canonique

$$\psi : SPEC(S\mathfrak{g}) \longrightarrow Spec(U\mathfrak{g})$$

définie par: $\psi(\mathfrak{a}) = \bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} I(x)$ pour tout idéal de Poisson premier $\mathfrak{a}$ de $S\mathfrak{g}$. (p. 195 et 218).

Ainsi, la bijection $\psi$ constitue un "pont" entre l'algèbre de Poisson $S\mathfrak{g}$ et sa "déformée" $U\mathfrak{g}$ (Cf. la deuxième partie).

## 4.7 UN EXEMPLE.

Soit $\mathfrak{g}$ une K-algèbre de Heisenberg comme en (2.4) dont on utilise les notations; on identifie les algèbres de Poisson $S\mathfrak{g}$ et $K[X_1, \ldots, X_n]$ ainsi que les variétés algébriques de Poisson $\mathfrak{g}^*$ et $K^n$.

PROPOSITION. - Tout idéal de Poisson maximal $\mathfrak{a}$ de $K[X_1, \ldots, X_n]$ est soit de la forme $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{2m}(X_i - a_i) + (X_n)$ où $(a_1, \ldots, a_{2m}) \in K^{2m}$, soit de la forme $\mathfrak{a} = (X_n - a_n)$, où $a_n \in K$, $a_n \neq 0$.

Preuve. - Puisque $[S\mathfrak{g}, S\mathfrak{g}] \subset (X_n)$, il est clair que l'idéal maximal $\sum_{i=1}^{2m}(X_i - a_i) + (X_n)$ est un idéal de Poisson maximal. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de Poisson maximal; il est contenu dans un idéal maximal de $K[X_1, \ldots, X_n]$ qui est du type $\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_i)$. Le cas $a_n = 0$ vient d'être traité. Supposons donc $a_n \neq 0$.

Sachant que $\pi(\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_i)) = \mathfrak{a}$ et que $(X_n - a_n)$ est un idéal de Poisson (Cf. (2.4)), on a $(X_n - a_n) \subset \mathfrak{a}$.

Tout polynome P de $\mathfrak{a}$ peut s'écrire $P = \sum p_k(X_n - a_n)^k$, où $p_k \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Pour voir que $\mathfrak{a} = (X_n - a_n)$, il suffit de montrer que $p_0 = 0$ , ce qui équivaut à $\mathfrak{a} \cap K[X_1, \dots, X_{n-1}] = 0$ . On raisonnant par l'absurde, soit $Q$ un polynome non nul de degré total minimum appartenant à $\mathfrak{a} \cap K[X_1, \dots, X_{n-1}]$ . On peut supposer que dans $Q$ figure l'indéterminée $X_i$ , avec $1 \leqslant i \leqslant m$ (on fait un raisonnement analogue si $m \leqslant i \leqslant 2m$). On écrit $Q = \sum_{k=0}^{r} q_k X_i^k$ avec $q_k$ dans $K[X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{n-1}]$ et $q_r \neq 0$ . Alors:

$[Q, X_{i+m}] = \sum_{k=0}^{r} k\, q_k X_i^{k-1} X_n$ appartient à $\mathfrak{a}$ et par suite $\sum_{k=0}^{r} k\, q_k a_n X_i^{k-1}$ est un polynome non nul de $\mathfrak{a} \cap K[X_1, \dots, X_{n-1}]$ de degré total $< \deg(Q)$, ce qui est absurde.

<u>COROLLAIRE 1.</u> - <u>Les fermés de Poisson minimaux (ou les orbites) de $\mathfrak{g}^*$ sont les points de l'hyperplan $X_n = 0$ , et les hyperplans affines</u> $X_n = a_n$ $(a_n \neq 0)$.

Pour tout idéal de Poisson maximal $\mathfrak{a}$ de $K[X_1, \dots, X_n]$ , l'algèbre de Poisson $K[X_1, \dots, X_n] / \mathfrak{a}$ n'a pas d'idéaux de Poisson propres; une telle algèbre de Poisson est dite <u>simple</u>.

La proposition de (2.4) montre donc que:

<u>COROLLAIRE 2.</u> - <u>Si K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, l'algèbre de Poisson classique $K[X_1, \dots, X_{2m}]$ est simple.</u>

## § 5. ALGEBRES DE POISSON ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE.

Comme contrepoint aux développements algébriques précédents, nous présentons maintenant les exemples classiques d'algèbres de Poisson tirés de la Géométrie Différentielle. Nous commencerons par quelques généralités.

### 5.1 MORPHISMES LIES AUX PRE-ALGEBRES DE POISSON.

Soient K un anneau commutatif et A une pré-K-algèbre de Poisson définie par $\partial_A : A \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$. Soit $h : \Omega(A) \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ l'application A-linéaire telle que $h.d_A = \partial_A$. On notera $j : \Omega(A) \longrightarrow \Omega(A)^{**}$ l'application A-linéaire canonique de $\Omega(A)$ dans son bidual; il est immédiat que ${}^t h.j = -h$.

A partir de h, on définit canoniquement (cf. [4] p. 150) les morphismes de A-algèbres graduées suivants :

$$\psi : \otimes_A \mathrm{Der}(A)^{*\,gr} \longrightarrow \otimes_A \Omega(A)^{*\,gr}$$

$$\sigma : \Sigma_A \mathrm{Der}(A)^{*\,gr} \longrightarrow \Sigma_A \Omega(A)^{*\,gr}$$

$$\eta : \Lambda_A \mathrm{Der}(A)^{*gr} \longrightarrow \Lambda_A \Omega(A)^{*gr}$$

où, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\psi^p = {}^t(\otimes_A^p h)$, $\sigma^p = {}^t(\Sigma_A^p h)$ et $\eta^p = {}^t(\Lambda_A^p h)$.
Notons que $\psi^0 = \sigma^0 = \eta^0 = id_A$ et $\psi^1 = \sigma^1 = \eta^1 = {}^t h$.

On a vu (cf. (1.4)) que, muni du crochet $[\ ,\ ]$, $\Sigma_A \Omega(A)^{*gr}$ est une K-algèbre de Poisson graduée de degré 1. On peut munir de même $\Lambda_A \Omega(A)^{*gr}$ d'un produit $\{\ ,\ \}$ qui fait de $\Lambda_A \Omega(A)^{*gr}$ une K-algèbre de Lie dégressive, avec certaine relation entre les produits $\wedge$ et $\{\ ,\ \}$ (cf. [9]). Notons que, si 2 est inversible dans K, A est une algèbre de Poisson si et seulement si $\{F, F\} = 0$, où F est la forme fondamentale de A.

## 5.2 ALGEBRES ASSOCIEES A UNE VARIETE DIFFERENTIELLE.

Dans tout le reste de ce paragraphe, M désigne une variété différentielle séparée, de classe $C^{\infty}$, localement de dimension finie.

On pose $A = C^{\infty}_{\mathbb{R}}(M)$. A est une $\mathbb{R}$-algèbre associative, commutative, unifère. On peut introduire les A-modules $\Omega(A)$ et $Der(A)$ ainsi que la dérivation canonique $d_A : A \longrightarrow \Omega(A)$.

Pour tout ouvert U de M, on pose $A_U = C^{\infty}_{\mathbb{R}}(U)$. Si E est un fibré vectoriel de base M, on note $\Gamma(U, E)$ le $A_U$-module des sections $C^{\infty}$ de E au dessus de U. Le fibré tangent (resp. cotangent) est noté $T\,M$ (resp. $T\,M^*$). $\mathcal{E}(M) = \Gamma(M, T\,M)$ (resp. $\mathcal{E}^1(M) = \Gamma(M, T\,M^*)$) désigne le A-module des champs de vecteurs (resp. des 1-formes différentielles) $C^{\infty}$ sur M. Pour tout f dans A, on note df la 1-forme différentielle de f.

Il est bien connu que les A-modules $\mathcal{E}(M)$ et $Der(A)$ sont canoniquement isomorphes (cf. [7] p. 11). L'isomorphisme en question associe au champ de vecteurs X l'élément $L_X$ de $Der(A)$ donné par:

$$\forall f \in A, \quad \forall x \in M, \quad (L_X \cdot f)(x) = \langle X(x), d_x f \rangle .$$

On en déduit un isomorphisme canonique entre $\mathcal{E}^1(M)$ et $Der(A)^*$ qui, à toute 1-forme $\alpha$, associe l'élément $L_\alpha$ de $Der(A)^*$ donné par:

$$\forall X \in \mathcal{E}(M), \quad L_\alpha(X) = \langle \alpha , X \rangle .$$

Notons que, si U est un ouvert de carte, l'application canonique $j_U : \Omega(A_U) \longrightarrow \Omega(A_U)^{**}$ est un $A_U$-isomorphisme qui permet d'identifier les $A_U$-modules $\Omega(A_U)$ et $\mathcal{E}^1(U)$.

A partir de là, on définit aisément un isomorphisme canonique entre le A-module $\Gamma(M, \otimes^p T\,M \bullet \otimes^q T\,M^*)$ des champs de tenseurs p-fois contravariant et q-fois covariant sur M, et le A-module $(\otimes^p_A \Omega(A) \bullet_A \otimes^q_A Der(A))^*$.

On en déduit un isomorphisme canonique de A-algèbres graduées entre l'algèbre $\mathcal{E}_{contra}(M)$ (resp. $\mathcal{E}_{cov}(M)$) des champs de tenseurs sur M contravariants (resp. covariants), et l'algèbre $\bigotimes_A \Omega(A)^{*gr}$ (resp. $\bigotimes_A \mathrm{Der}(A)^{*gr}$).

Notons $\mathcal{S}(M)$ (resp. $\mathcal{A}(M)$) l'algèbre des champs de tenseurs sur M contravariants symétriques (resp. antisymétriques) et $\mathcal{S}_*(M)$ (resp. $\mathcal{E}(M)$) l'algèbre des champs de tenseurs sur M covariants symétriques (resp. des formes différentielles sur M).

Les isomorphismes précédents induisent les isomorphismes de A-algèbres graduées suivants:

$$\mathcal{S}(M) \approx \Sigma_A \Omega(A)^{*gr} \qquad \mathcal{A}(M) \approx \Lambda_A \Omega(A)^{*gr}$$

$$\mathcal{S}_*(M) \approx \Sigma_A \mathrm{Der}(A)^{gr} \qquad \mathcal{E}(M) \approx \Lambda_A \mathrm{Der}(A)^{gr} \quad .$$

D'après (5.1), $\mathcal{S}(M)$ (resp. $\mathcal{A}(M)$) devient ainsi une $\mathbb{R}$-algèbre de Poisson graduée de degré 1 (resp. une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie dégressive). Les produits $[\ ,\ ]$ et $\{\ ,\ \}$ obtenus sont les crochets classiques de Schouten-Nijenhuis.

D'autre part, l'algèbre Dif(A) définie dans l'exemple 1 de (1.2) s'identifie naturellement à l'algèbre usuelle des opérateurs différentiels $C^\infty$ sur M (cf.[7] p. 73). En outre, l'algèbre graduée Symb(A) s'identifie à la sous-algèbre de $C^\infty_{\mathbb{R}}(T^* M)$ formée des fonctions polynomiales sur chaque fibre de $T^* M$ (cf.[7] p. 77). En particulier, les éléments de Symb(A) sont locaux; cela est utile pour prouver le résultat suivant:

THÉOREME. - Les algèbres de Poisson graduées Symb(A) et $\mathcal{S}(M)$ sont canoniquement isomorphes.

Il suffit de montrer que l'application $\tilde{f}$ du théorème de (1.4) est un isomorphisme. Or, d'après la remarque suivant ce théorème, ceci est vrai dans le cas $M = \mathbb{R}^n$ puisque $\mathcal{S}(M)$ est alors engendré, en tant qu'algèbre associative, par $\mathcal{C}(M)$. Le cas général s'en déduit car les éléments de Symb(A) sont locaux.

## 5.3 PRE-VARIETES DE POISSON.

Supposons que $A = C^{\infty}_{\mathbb{R}}(M)$ est <u>une pré-algèbre de Poisson</u> définie par les applications $\partial_A : A \longrightarrow Der(A)$ et $h : \Omega(A) \longrightarrow Der(A)$.

D'après (5.2), la forme fondamentale F de A s'identifie à un champ de tenseurs $\Lambda$ de degré 2, contravariant, antisymétrique sur M. Par suite, pour tout ouvert U de M, $A_U = C^{\infty}_{\mathbb{R}}(U)$ est une pré-algèbre de Poisson de forme fondamentale $F_U = \Lambda|_U$ ; on note $\partial_U : A_U \longrightarrow Der(A_U)$ et $h_U : \Omega(A_U) \longrightarrow Der(A_U)$ les applications correspondantes.

Il est clair que les algèbres $A_U$ forment un faisceau de pré-algèbres de Poisson. On dit alors que <u>M est une pré-variété de Poisson</u> (sous-entendu, différentielle). Notons que A est une algèbre de Poisson si et seulement si $\{F, F\} = 0$, ou $\{\Lambda, \Lambda\} = 0$ ; on retrouve ainsi la définition des <u>variétés de Poisson</u> donnée dans [18].

Avec les notations précédentes, soit M une pré-variété de Poisson. En utilisant les identifications de (5.2), les applications $\psi$, $\sigma$, $\eta$ définies en (5.1) donnent les morphismes d'algèbres suivants, notés de la même manière:

$$\psi : \mathcal{C}_{cov}(M) \longrightarrow \mathcal{C}_{contra}(M)$$
$$\sigma : \mathcal{S}_{*}(M) \longrightarrow \mathcal{S}(M)$$
$$\eta : \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{A}(M) .$$

On a en particulier l'application A-linéaire ${}^t h : \mathcal{E}^1(M) \longrightarrow \mathcal{C}(M)$.

## 5.4 RANG EN UN POINT D'UNE PRE-VARIETE DE POISSON.

On garde les hypothèses de (5.3). Pour tout x dans la pré-variété de Poisson M, $\Lambda(x)$ détermine une forme bilinéaire alternée $F_x$ sur $T_x(M)^*$ vérifiant, pour tout f et g dans A,

$$\langle F_x , d_x f \wedge d_x g \rangle = [f, g](x) .$$

On en déduit une application linéaire $\tau_x : T_x(M)^* \longrightarrow T_x(M)$ telle que $\tau_x(d_x f) = \partial_A(f)(x)$, pour tout f dans A. Il est immédiat que les $\tau_x$ ,

$x \in M$, définissent un morphisme de fibrés vectoriels $\tau : T\, M^{*} \longrightarrow T\, M$. Pour chaque ouvert U de M, $\tau$ induit un morphisme entre sections de $T\, M^{*}$ et $T\, M$ au dessus de U, qui n'est autre que $- {}^{t}h_{U}$ (coïncidant avec $h_U$ si U est un ouvert de carte).

Le rang de $F_x$ (ou $\tau_x$) est un entier pair qui s'appelle le rang en x de la pré-variété de Poisson M, et on le note $rg_x(M)$. $\tau$ étant un morphisme de fibrés vectoriels, l'application rang de M dans $\mathbb{N}$ est semi-continue inférieurement (cf. [13] p. 119). En particulier, l'ensemble des x de M dont le rang est maximum est un ouvert de M.

5.5 PRE-VARIETES SYMPLECTIQUES.

Pour simplifier, supposons que la variété M est de même dimension en tout point, et que la pré-variété de Poisson M est de même rang en tout point. Si ce rang est égal à la dimension, M s'appelle une pré-variété symplectique. Il est immédiat que:

THEOREME. - Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) M est une pré-variété symplectique.

(ii) $\tau$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

(iii) Pour tout ouvert U de M, ${}^{t}h_{U}$ est bijectif.

COROLLAIRE. - Si M est une pré-variété symplectique, les applications $\psi$, $\sigma$, $\eta$ sont des isomorphismes.

La propriété étant locale, il suffit en effet de remarquer que, d'après (iii), $h_U : \Omega(A_U) \longrightarrow Der(A_U)$ est bijectif pour tout ouvert de carte U, donc, pour tout p dans $\mathbb{N}$, $\otimes^{p} h_U$, $\Sigma^{p} h_U$, $\Lambda^{p} h_U$ ainsi que leurs transposés sont bijectifs.

Soit M une pré-variété symplectique. L'isomorphisme $\sigma$ (resp. $\eta$) permet de considérer $\mathcal{J}_{\star}(M)$ (resp. $\mathcal{E}(M)$) comme une $\mathbb{R}$-algèbre de Poisson (resp. une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie dégressive). En particulier, il y a un crochet sur les 1-formes tel que, pour tout $\alpha$ et $\beta$ dans $\mathcal{E}^1(M)$,

$$^t h([\alpha, \beta]) = [\,^t h(\alpha), \,^t h(\beta)] .$$

D'autre part, $\eta^2 : \mathcal{E}^2(M) \longrightarrow \mathcal{A}^2(M)$ est une bijection qui permet de définir l'unique 2-forme $\omega$ sur M telle que $\eta^2(\omega) = \Lambda$ ; $\omega$ vérifie alors:

$$(*) \qquad \langle \omega, \partial_A f \wedge \partial_A g \rangle = [f, g]$$

pour tout f et g dans A. Sachant que $F_x$ est non dégénérée pour tout $x \in M$, la 2-forme $\omega$ est non dégénérée. Notons que <u>la pré-variété symplectique M est entièrement déterminée par la 2-forme différentielle non dégénérée $\omega$</u>.

L'égalité $(*)$ montre, avec les notations classiques du produit intérieur, que $i_{\partial_A f} = -\,df$ pour tout f dans A, ce qui s'écrit

$i_{^t h(df)} = df$ . Plus généralement, $i_{^t h(\alpha)} = \alpha$ pour toute 1-forme différentielle $\alpha$ .

En comparant les cohomologies de Poisson et de De Rham, on peut montrer que $\{F, F\} = 0$ si et seulement si $d\omega = 0$ [8, 10]; dans ce cas M muni de $\omega$ est <u>une variété symplectique</u> au sens usuel [2].

La théorie générale des déformations a été introduite dans [15]. On adapte cette théorie au cas qui nous intéresse.

Dans toute cette partie, K est un anneau commutatif et $\Sigma$ est une K-algèbre graduée de type $\mathbb{N}$ dont la graduation est notée $(\Sigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\Sigma$ est supposée associative et unifère telle que $1 \in \Sigma^o$. $\Sigma$ est filtrée canoniquement par les sous-modules $\Sigma_n = \bigoplus_{k=o}^{n} \Sigma^k$. Pour $o \leqslant \lambda \leqslant n$, on note $p_{n,\lambda}$ la projection de $\Sigma_n$ sur $\Sigma^{n-\lambda}$ et on pose $p_n = p_{n,o}$.

## § 1. LA COHOMOLOGIE GRADUEE DE $\Sigma$.

Soit m un entier $\geqslant 1$. On appellera m-cochaine toute application f K-multilinéaire de $\Sigma \times \ldots \times \Sigma$ (m facteurs) dans $\Sigma$ telle que, pour tous entiers $k_1, \ldots, k_m$, f applique $\Sigma^{k_1} \times \ldots \times \Sigma^{k_m}$ dans $\Sigma_k$, où $k = k_1 + \ldots + k_m$.

On note $C^m$ le K-module des m-cochaines et on pose $C^o = K$. L'application bord $\partial : C^m \longrightarrow C^{m+1}$ est définie comme d'habitude par :

$$\partial f(s_1 \ldots, s_{m+1}) = s_1 f(s_2, \ldots, s_{m+1}) +$$

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^i f(s_1, \ldots, s_i s_{i+1}, \ldots, s_{m+1}) + (-1)^{m+1} f(s_1, \ldots, s_m) s_{m+1} .$$

On obtient alors les K-modules de cohomologie $H^m = Z^m / B^m$ ; on a $H^o = K$ et $H^1 = Z^1$.

On note $\pi : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$ la multiplication de $\Sigma$. Les applications K-linéaires

$$C^m \times C^n \longrightarrow C^{m+n}$$
$$(f, g) \longmapsto \pi.(f \otimes g)$$

définissent une loi interne notée $\smile$ sur $C = \bigoplus_{m=o}^{\infty} C^m$ faisant de C une K-algèbre associative unifère. Il est immédiat que si $f \in C^m$, $g \in C^n$, on a $\partial (f \smile g) = \partial f \smile g + (-1)^m f \smile \partial g$.

Soient m un entier $\geqslant 1$ et $\lambda$ un entier $\geqslant 0$. Une m-cochaine est dite homogène de degré $\lambda$ si pour tous entiers $k_1, \dots, k_m$ elle applique $\Sigma^{k_1} \times \dots \times \Sigma^{k_m}$ dans $\Sigma^{k-\lambda}$ où $k = k_1 + \dots + k_m$ (pour tout entier $r < 0$, on pose $\Sigma^r = 0$).

Soit f une m-cochaine ($m \geqslant 1$) et soit un entier $\lambda \geqslant 0$. La famille des applications $p_{k,\lambda} \cdot f : \Sigma^{k_1} \times \dots \times \Sigma^{k_m} \longrightarrow \Sigma^{k-\lambda}$ (où $k = k_1 + \dots + k_m$) quand $(k_1, \dots, k_m)$ décrit $\mathbb{N}^m$, définit une m-cochaine homogène de degré $\lambda$ que l'on notera $f_\lambda$. f est entièrement déterminée par la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}}$ et on peut écrire $f = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda$ ; cette somme a un sens puisque si $x \in \Sigma^{k_1} \times \dots \times \Sigma^{k_m}$ alors:

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{k} f_\lambda(x) \qquad \text{où} \quad k = k_1 + \dots + k_m .$$

Notons $C^{m,\lambda}$ l'ensemble des m-cochaines homogènes de degré $\lambda$ ; c'est un sous-K-module de $C^m$ et on vient de montrer que $C^m$ est le produit direct des sous-modules $C^{m,\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{N}$. On pose $C^{0,0} = K$ et $C^{0,\lambda} = 0$ pour $\lambda \geqslant 1$.

Il est immédiat que $\partial : C^m \longrightarrow C^{m+1}$ ($m \geqslant 0$) applique $C^{m,\lambda}$ dans $C^{m+1,\lambda}$. Les applications K-linéaires $\partial : C^{m,\lambda} \longrightarrow C^{m+1,\lambda}$ définissent les K-modules de cohomologie homogène de degré $\lambda$ notés $H^{m,\lambda} = Z^{m,\lambda} / B^{m,\lambda}$. On a $Z^{m,\lambda} = Z^m \cap C^{m,\lambda}$ et $B^{m,\lambda} = B^m \cap C^{m,\lambda}$ si bien que, pour $m \geqslant 1$, $Z^m = \prod_{\lambda=0}^{\infty} Z^{m,\lambda}$ et $B^m = \prod_{\lambda=0}^{\infty} B^{m,\lambda}$.
On a donc un isomorphisme canonique $\prod_{\lambda=0}^{\infty} H^{m,\lambda} \approx H^m$ .

Remarquons que le produit $\smile$ d'une m-cochaine homogène de degré $\lambda$ et d'une n-cochaine homogène de degré $\mu$ est une (m + n)-cochaine homogène de degré $\lambda + \mu$. En particulier, l'ensemble $C^0 = \bigoplus_{m=0}^{\infty} C^{m,0}$ des cochaines homogènes de degré 0 est une sous-algèbre de C .

Notons aussi que la composée d'une 1-cochaine (resp. homogène de degré $\lambda$ ) et d'une m-cochaine (resp. homogène de degré $\mu$) est une m-cochaine (resp. homogène de degré $\lambda+\mu$ ).

Exemple. - $id_{\Sigma}$ est une 1-cochaine homogène de degré 0 . Donc $\partial\, id_{\Sigma} = \pi$ est un 2-cobord homogène de degré 0 . La relation $\partial \pi = 0$ exprime l'associativité de $\pi$ .

## § 2. 1-COCHAINES ET AUTOMORPHISMES DE $\Sigma$.

On s'intéresse aux 1-cochaines $f = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda$ telles que $f_0 = id_{\Sigma}$ . Il est immédiat que ce sont les applications K-linéaires $f : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ conservant la filtration de $\Sigma$ et telles que, si on pose $f^k = f\big|_{\Sigma^k}$ pour $k \in \mathbb{N}$, $f^k$ soit une section de $p_k$ .

Dans ces conditions, posons $\Sigma^{(k)} = f^k(\Sigma^k)$. $(\Sigma^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une graduation du K-module $\Sigma$ dont la filtration associée est encore $(\Sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ . Chaque $f^k$ étant une bijection de $\Sigma^k$ sur $\Sigma^{(k)}$ , $f$ est une bijection de $\Sigma$ sur $\Sigma$ .

Il est évident que $f^{-1}$ est encore une 1-cochaine qui, si sa décomposition en cochaines homogènes est $f^{-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(f^{-1})_\lambda$ , vérifie aussi $(f^{-1})_0 = id_{\Sigma}$ . Les relations $\sum_{\lambda+\mu=\nu} f_\lambda \cdot (f^{-1}_\mu) = 0$ pour tout $\nu \geq 1$ permettent de déterminer les $(f^{-1}_\lambda)$ . En particulier $(f^{-1})_1 = -f_1$ .

Si $g = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda$ est une autre 1-cochaine telle que $g_0 = id_{\Sigma}$ , il est immédiat que $g.f$ est une 1-cochaine telle que $(g.f)_0 = id_{\Sigma}$ ; de plus $(g.f)_1 = g_1 + f_1$ . Ainsi:

<u>L'ensemble $G_1$ des 1-cochaines $f = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda$ telles que $f_0 = id_{\Sigma}$ est un groupe pour la composition des applications. L'application</u>

$$\begin{aligned} G_1 &\longrightarrow C^{1,1} \\ f &\longmapsto f_1 \end{aligned}$$ <u>est un morphisme de groupes.</u>

Soit f un élément de $G_1$. Pour que f soit un automorphisme de $\Sigma$, il faut et il suffit que $f \smile f = f.\pi$ d'où en égalant les parties homogènes de degré $\nu$ :

$$\sum_{\lambda+\mu=\nu} f_\lambda \smile f_\mu = f_\nu . \pi .$$

Pour $\nu = 0$, cette égalité est toujours vérifiée.

Pour $\nu \geqslant 1$, elle s'écrit

$$\sum_{\substack{\lambda+\mu=\nu \\ \lambda.\mu\neq 0}} f_\lambda \smile f_\mu = -\partial f_\nu . \tag{2.1}$$

En particulier $f_1$ est un 1-cocycle. Un tel 1-cocycle homogène de degré 1 (c'est à dire qui soit la composante homogène de degré 1 d'un automorphisme tel que f) s'appelle <u>un automorphisme infinitésimal</u>.

Les éléments de $G_1$ qui sont automorphismes de $\Sigma$ forment un sous-groupe $\overline{G_1}$ de $G_1$. L'ensemble des automorphismes infinitésimaux, qui est l'image de $\overline{G_1}$ par $f \longmapsto f_1$, est donc un sous-groupe $\overline{Z^{1,1}}$ de $Z^{1,1}$.

Si $f_1$ est un 1-cocycle homogène de degré 1, quelles sont les obstructions à ce que $f_1$ soit un automorphisme infinitésimal ? Par exemple, $f_1 \smile f_1$ est un 2-cocycle homogène de degré 2 et détermine donc un élément de $H^{2,2}$ ; pour que $f_1$ soit infinitésimal, il faut que cet élément soit nul. Une première obstruction est donc mesurée par $H^{2,2}$.

En raisonnant par induction, supposons donnée une suite de 1-cochaines $f_0, f_1, \dots, f_{r-1}$ $(r \geqslant 2)$ telle que $f_0 = id_\Sigma$ et chacue $f_\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant r-1$, est homogène de degré $\nu$ vérifiant (2.1). Il est immédiat de constater que la 2-cochaine homogène de degré r:
$\sum_{\substack{\lambda+\mu=r \\ \lambda.\mu\neq 0}} f_\lambda \smile f_\mu$ est un 2-cocycle et détermine donc un élément de $H^{2,r}$ ; pour que $f_1$ soit un automorphisme infinitésimal, il faut que cet élément soit nul. La $(r-1)^{\text{ième}}$ obstruction est donc mesurée par $H^{2,r}$.

On en déduit en particulier:

<u>Si, pour tout entier $r \geqslant 2$, $H^{2,r} = 0$, alors tout 1-cocycle homogène de degré 1 est un automorphisme infinitésimal.</u>

Soit maintenant f un élément de $\overline{G_1}$ distinct de $id_{\Sigma}$. Notons r le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $f_r \neq 0$ ; ainsi $f = id_{\Sigma} + f_r + f_{r+1} + \dots$ Les relations (2.1) montrent que $f_r$ est un 1-cocycle qui détermine donc un élément non nul de $H^{1,r}$. On en déduit en particulier :

<u>Si, pour tout entier $r \geqslant 1$, $H^{1,r} = 0$, alors il n'y a pas d'automorphisme de $\Sigma$ de la forme</u> $f = id_{\Sigma} + f_1 + f_2 + \dots$ <u>autre que l'identité.</u>

## § 3. 2-COCHAINES ET DEFORMATIONS DE $\Sigma$.

On s'intéresse maintenant aux 2-cochaines $F = \sum_{\lambda=0}^{\infty} F_{\lambda}$ telles que $F_0 = \pi$. On note $G_2$ leur ensemble. Tout élément F de $G_2$ définit une loi interne sur $\Sigma$, notée $\underset{F}{*}$, faisant de $\Sigma$ une K-algèbre unifère.

(3.1) <u>LE GROUPE $G_1$ OPERE A DROITE SUR L'ENSEMBLE $G_2$.</u>

Pour tout $F \in G_2$ et $f \in G_1$, on pose :

$$F.f = f^{-1} . F . (f \otimes f)$$

i.e. $F.f(s, s') = f^{-1}(F(f(s), f(s')))$ pour tout s et s' dans $\Sigma$.
On définit ainsi une 2-cochaine $F.f$ dont la composante homogène de degré $\lambda$ est :

$$(3.1.1) \quad (F.f)_{\lambda} = \sum_{h+i+j+k=\lambda} (f^{-1})_h . F_k . (f_i \otimes f_j) .$$

En particulier, $(F.f)_0 = \pi$ et $(F.f)_1 = F_1 + \partial f_1$.

Ainsi, $F.f$ est un élément de $G_2$ ; la loi $\underset{F.f}{*}$ est obtenue en transportant $\underset{F}{*}$ au moyen de la bijection f.

Il est immédiat que $\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_2 \\ (f\ ,\ F) & \longmapsto & F.f \end{array}$ est une action à droite

du groupe $G_1$ sur l'ensemble $G_2$. Nous noterons $G_2 / G_1$ l'espace des orbites correspondant. Deux éléments de $G_2$ qui sont dans la même orbite sont dits <u>équivalents</u>, et les lois internes correspondantes sont dites <u>équivalentes</u>.

Un élément de $G_2$ équivalent à $\pi$ est dit <u>trivial</u>. Une loi interne $*$ triviale est donc obtenue à partir de la multiplication de $\Sigma$ par transport de structure au moyen d'un élément f de $G_1$, c'est-à-dire :

$s * s' = f^{-1}(f(s)f(s'))$ pour tout s et s' dans $\Sigma$.

Le stabilisateur de $\pi$ dans $G_1$ est $\overline{G_1}$ ; on a donc une bijection canonique de l'ensemble des éléments triviaux de $G_2$ sur l'espace homogène $\overline{G_1} \backslash G_1$.

<u>(3.2) UNE DESCRIPTION DES ELEMENTS DE $G_2$</u>.

Soit F un élément de $G_2$. Il est clair que la filtration de $\Sigma$ est compatible avec la structure d'algèbre définie par $\underset{F}{*}$ ; notons U la K-algèbre filtrée ainsi obtenue. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $U_k = \Sigma_k$. Dans ces conditions, l'algèbre graduée associée à U est $\Sigma$ et, si on note $gr_k : U_k \longrightarrow \Sigma^k$ l'application canonique (qui n'est autre que $p_k$), l'application identique $\Sigma \longrightarrow U$ est telle que chaque restriction à $\Sigma^k$ : $\Sigma^k \longrightarrow U_k$ est une section de $gr_k$.

Réciproquement, donnons-nous une K-algèbre unifère filtrée U dont la filtration $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et exhaustive. On suppose que l'algèbre graduée associée à U est $\Sigma$ ; en particulier, $U_0 = \Sigma^0$. Notons $gr_k : U_k \longrightarrow \Sigma^k$ l'application canonique.

Soit alors $\delta : \Sigma \longrightarrow U$ une application K-linéaire conservant les filtrations et telle que $\delta^k = \delta\big|_{\Sigma^k}$ soit une section de $gr_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Dans ces conditions, posons $U^k = \delta^k(\Sigma^k)$; $(U^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une graduation du K-module U dont la filtration associée est $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Chaque $\delta^k$ étant une bijection de $\Sigma^k$ sur $U^k$, $\delta$ est une bijection de $\Sigma$ sur U.

Transportons la multiplication de U sur $\Sigma$ au moyen de $\delta$, c'est-à-dire posons $F(s, s') = \delta^{-1}(\delta(s)\,\delta(s'))$ pour tout s et s' dans $\Sigma$. On définit ainsi une 2-cochaine F. De façon précise, si $s \in \Sigma^k$ et $s' \in \Sigma^{k'}$, alors $\delta^k(s)\,\delta^{k'}(s')$ appartient à $U_{k+k'}$ ; en décomposant cet élément sur la somme directe $U_{k+k'} = \bigoplus_{i=0}^{k+k'} U^i$, on a :

$$\delta^k(s)\,\delta^{k'}(s') = \sum_{i=0}^{k+k'} u_i \qquad \text{avec } u_i \in U^i \text{. D'où:}$$

$F(s, s') = \sum_{i=0}^{k+k'} gr_i(u_i)$ avec $gr_i(u_i) \in \Sigma^i$. En particulier:

$$gr_{k+k'}(u_{k+k'}) = gr_{k+k'}(\delta^k(s)\ \delta^{k'}(s')) = gr_k(\delta^k(s))\ gr_{k'}(\delta^{k'}(s')) = ss'$$

Par suite, <u>F est un élément de</u> $G_2$.

Exprimons ceci autrement, en liaison avec (3.1).

Définissons la catégorie $C(\Sigma)$ dont les objets sont les applications $\Sigma \xrightarrow{\delta} U$ avec U et $\delta$ comme ci-dessus, et dont les morphismes d'un objet $\Sigma \xrightarrow{\delta} U$ dans un objet $\Sigma \xrightarrow{\delta'} U'$ sont les morphismes d'algèbres filtrées $\varphi : U \longrightarrow U'$ tels que $gr(\varphi) = id_{\Sigma}$. Notons qu'un tel morphisme ne dépend que de U et U' et non de $\delta$ et $\delta'$.

Remarquons que deux objets $\Sigma \xrightarrow{\delta} U$ et $\Sigma \xrightarrow{\delta'} U$ (avec la même algèbre U) sont toujours isomorphes au sens de $C(\Sigma)$; il suffit de prendre $id_U$ pour isomorphisme.

A tout objet $\Sigma \xrightarrow{\delta} U$, on a donc associé un élément F de $G_2$. Soient $\Sigma \xrightarrow{\delta} U$, $\Sigma \xrightarrow{\delta'} U'$ deux tels objets à qui l'on associe respectivement $F \in G_2$, $F' \in G_2$.

Si $\varphi : U \longrightarrow U'$ est un isomorphisme, on vérifie que $f = \delta^{-1} \cdot \varphi^{-1} \cdot \delta'$ est un élément de $G_1$ tel que $F' = F.f$ .

Réciproquement, si $f \in G_1$ est tel que $F' = F.f$ , on vérifie que $\varphi = \delta' \cdot f^{-1} \cdot \delta^{-1}$ est un isomorphisme de $\Sigma \xrightarrow{\delta} U$ sur $\Sigma \xrightarrow{\delta'} U'$ .

Comme à tout $F \in G_2$ , on sait associer canoniquement un objet $\Sigma \xrightarrow{\delta} U$, l'application $\delta \longmapsto F$ induit donc une bijection de $G_2 / G_1$ sur l'ensemble des classes d'objets isomorphes de la catégorie $C(\Sigma)$.

Remarque. - Si K est un corps, alors, pour toute algèbre filtrée U comme ci-dessus, il existe un objet $\Sigma \xrightarrow{\delta} U$. En effet, les suites exactes:

$$0 \longrightarrow U_{k-1} \longrightarrow U_k \xrightarrow{gr_k} \Sigma^k \longrightarrow 0$$

sont toutes soindées.

(3.3) DEFORMATIONS DE $\Sigma$ .

Un élément F de $G_2$ tel que $\underset{F}{*}$ soit associative s'appelle une déformation de $\Sigma$ . On note $\overline{G_2}$ leur ensemble.

Il est immédiat que $G_1$ opère à droite sur $\overline{G_2}$ . On pourra donc parler de déformations équivalentes, de déformations triviales. Notons que tout élément de $G_2$ équivalent à une déformation est une déformation. On a donc l'inclusion: $\overline{G_2} / G_1 \subset G_2 / G_1$ .

On dira parfois que $\pi$ est la déformation nulle.

Soit $\overline{C}(\Sigma)$ la sous-catégorie de $C(\Sigma)$ formée des objets $\Sigma \xrightarrow{\delta} U$, où U est associative. La description de (3.2) montre que l'on a une bijection de $\overline{G_2} / G_1$ sur l'ensemble des classes d'objets isomorphes de la catégorie $\overline{C}(\Sigma)$.

Soit $F = \sum_{\lambda=0}^{\infty} F_\lambda$ un élément de $G_2$. Pour que F soit une déformation, il faut et il suffit que $F \cdot (F \otimes id_\Sigma) = F \cdot (id_\Sigma \otimes F)$, d'où, en égalant les parties homogènes de degré $\nu$ :

$$\sum_{\lambda+\mu=\nu} F_\lambda \cdot (F_\mu \otimes id_\Sigma) - F_\lambda \cdot (id_\Sigma \otimes F_\mu) = 0 .$$

(Remarquer que le premier membre est une 3-cochaine homogène de degré $\nu$).
Pour $\nu = 0$, cette égalité est vérifiée: c'est l'associativité de $\pi$.
Pour $\nu \geqslant 1$, elle s'écrit:

$$\sum_{\substack{\lambda+\mu=\nu \\ \lambda\mu\neq 0}} F_\lambda \cdot (F_\mu \otimes id_\Sigma) - F_\lambda \cdot (id_\Sigma \otimes F_\mu) = \partial F_\nu . \tag{3.3.1}$$

En particulier, $F_1$ est un 2-cocycle. Un tel 2-cocycle homogène de degré 1 (c'est-à-dire qui soit la composante homogène de degré 1 d'une déformation) s'appelle une <u>déformation infinitésimale</u>.

Si F est un 2-cocycle homogène de degré 1, quelles sont les obstructions à ce que $F_1$ soit une déformation infinitésimale ?

Pour répondre à ceci, on vérifie le lemme suivant:

(3.3.2) <u>Pour toutes 2-cochaines F et G, on a</u> :

$$\partial\left[F \cdot (G \otimes id) - F \cdot (id \otimes G)\right] = \partial F \cdot (id \otimes G \otimes id) - \partial F \cdot (G \otimes id \otimes id)$$
$$+ F \cdot (\partial G \otimes id) - \partial F \cdot (id \otimes id \otimes G) + F \cdot (id \otimes \partial G) - F \smile G + G \smile F .$$

Cela prouve que $F_1 \cdot (F_1 \otimes id) - F_1 \cdot (id \otimes F_1)$ est un 3-cocycle homogène de degré 2 et détermine donc un élément de $H^{3,2}$; pour que $F_1$ soit infinitésimal, il faut que cet élément soit nul. Ainsi, une première obstruction est mesurée par $H^{3,2}$.

En raisonnant par induction, supposons donnée une suite de 2-cochaines $F_0, F_1, \ldots, F_{r-1}$ $(r \geqslant 2)$ telle que $F_0 = \pi$ et chaque $F_\nu (1 \leqslant \nu \leqslant r-1)$ est homogène de degré $\nu$ et vérifie (3.3.1). En utilisant (3.3.2), on constate que la 3-cochaine homogène de degré r :

$$\sum_{\substack{\lambda+\mu=r \\ \lambda\mu\neq 0}} F_\lambda \cdot (F_\mu \otimes id) - F_\lambda \cdot (id \otimes F_\mu)$$ est un 3-cocycle et détermine donc un élément de $H^{3,r}$ ; pour que $F_1$ soit une déformation infinitésimale, il faut que cet élément soit nul. La $(r-1)^{\text{ième}}$ obstruction est ainsi mesurée par $H^{3,r}$ .

On en déduit en particulier:

(3.3.3) <u>Si, pour tout entier $r \geqslant 2$, $H^{3,r} = 0$ , alors tout 2-cocycle homogène de degré 1 est une déformation infinitésimale.</u>

Soit maintenant $F = \sum_{\lambda=0}^{\infty} F_\lambda$ une déformation non nulle de $\Sigma$ .

Notons m le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $F_m \neq 0$ ; ainsi $F = \pi + F_m + F_{m+1} + \dots$ L'égalité (3.3.1) montre que $F_m$ est un 2-cocycle. Supposons que $F_m$ soit un 2-cobord, i.e. il existe $f_m \in C^{1,m}$ tel que $F_m = -\partial f_m$ .

Posons alors $\varphi_m = id_\Sigma + f_m$ . Si $F.\varphi_m = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (F.\varphi_m)_\lambda$ ,

alors $(F.\varphi_m)_\lambda = 0$ pour $\lambda = 1, \dots, m-1$ , et on vérifie que $(F.\varphi_m)_m = F_m + \partial f_m = 0$ . Par suite, $(F.\varphi_m)_{m+1}$ est un 2-cocycle. On suppose encore que c'est un 2-cobord et on recommence ce qui vient d'être fait. En itérant le procédé, on obtient une suite de déformations équivalentes à F et, en supposant que chaque 2-cocycle obtenu est un 2-cobord, on définit une suite $(f_\lambda)_{\lambda \geqslant m}$ où $f_\lambda \in C^{1,\lambda}$ .

Posons alors, pour $\lambda \geqslant m$, $\varphi_\lambda = id_\Sigma + f_\lambda$ et soit le produit infini $\varphi = \varphi_m \cdot \varphi_{m+1} \dots$ $\varphi$ est alors une 1-cochaine de $G_1$ bien définie, car dans le produit $(id + f_m) \cdot (id + f_{m+1}) \dots$ la somme des termes homogènes de degré $\nu$ ($\nu \geqslant m$) est finie. Il est immédiat que $F.\varphi = \pi$ si bien que F est une déformation <u>triviale</u>.

On peut conclure de ceci que, si F n'est pas triviale, il existe un entier $r \geqslant 1$ et une déformation $F' = \pi + F'_r + F'_{r+1} + \dots$ équivalente à F telle que $F'_r$ ne soit pas un cobord.

Si $F'' = \pi + (F'')_{r'} + (F'')_{r'+1} + \dots$ est une déformation ayant la même propriété que F' vis-à-vis de F, il est évident que $r'=r$ et que les 2-cocycles $F'_r$ et $F''_r$ déterminent la même classe dans $H^{2,r}$.

On a donc prouvé:

(3.3.4) Soit F une déformation non triviale. Il existe un entier $r \geqslant 1$ unique et un élément $\alpha$ non nul de $H^{2,r}$ unique, tels que l'on puisse trouver une déformation $F' = \pi + F'_r + F'_{r+1} + \dots$ équivalente à F, dont la composante homogène $F'_r$ appartienne à la classe $\alpha$.

L'entier r ainsi défini s'appelle le rang de la déformation F; par convention, le rang d'une déformation triviale (à qui l'on associera la la classe nulle de $H^2$) sera nul. Deux déformations équivalentes ont donc même rang. En outre, l'application $F \longmapsto \alpha$ se factorise en une application de $\overline{G_2} / G_1$ dans $H^2$.

(3.3.4) a le corollaire suivant:

(3.3.5) Si, pour tout entier $r \geqslant 1$, $H^{2,r} = 0$, alors il n'existe pas de déformation non triviale de $\Sigma$. On dit dans ce cas que $\Sigma$ est rigide.

## § 4. DEFORMATIONS DES ALGEBRES COMMUTATIVES.

Soit F une déformation de $\Sigma$. L'application symétrisée de F, notée $\tilde{F}$, est une déformation de l'algèbre opposée $\tilde{\Sigma}$ à $\Sigma$ (i.e. $\tilde{\Sigma}$ muni du produit $\tilde{\pi}$). Pour tout $f \in G_1$, on a $\widetilde{F.f} = \tilde{F}.f$.

La déformation F est dite commutative si la loi $\underset{F}{*}$ est commutative i.e. si $\tilde{F} = F$. Toute déformation équivalente à une déformation commutative est commutative. D'ailleurs, s'il existe une déformation commutative, l'algèbre $\Sigma$ (munie de $\pi$) est commutative.

On supposera dans tout ce paragraphe que la K-algèbre graduée $\Sigma$ est commutative. Dans ce cas, pour toute déformation F de $\Sigma$, $\tilde{F}$ est encore une déformation de $\Sigma$. De plus, toute déformation triviale est commutative.

Fixons F une déformation non commutative de $\Sigma$. Soit sa décomposition: $F = \sum_{\lambda=0}^{\infty} F_\lambda$. Il existe donc un plus petit entier $d \geqslant 1$ tel que $F_d$ ne soit pas symétrique. Remarquons que cet entier d ne dépend que de l'orbite de F dans $\overline{G_2} / G_1$. En particulier, il est supérieur ou égal au rang r de F (notons qu'ici, on a $r \geqslant 1$). d s'appelle le degré de la déformation non commutative F.

Posons $T = F - \tilde{F}$ ; T est une 2-cochaine alternée dont la décomposition est $T = \sum_{\lambda=0}^{\infty} T_\lambda$, où $T_\lambda = F_\lambda - \tilde{F}_\lambda$ est une 2-cochaine alternée homogène de degré $\lambda$, et on a $T_d \neq 0$.

Il est clair que T fait de $\Sigma$ une K-algèbre de Lie. En particulier, pour $a \in \Sigma^i$, $b \in \Sigma^j$, $c \in \Sigma^k$, on a la relation de Jacobi:

$$T(T(a, b), c) + T(T(b, c), a) + T(T(c, a), b) = 0 .$$

En regroupant les termes homogènes de degré $i + j + k - \nu$, on obtient pour tout entier $\nu \geqslant 0$:

$$(4.1) \sum_{\lambda+\mu=\nu} T_\lambda(T_\mu(a, b), c) + T_\lambda(T_\mu(b, c), a) + T_\lambda(T_\mu(c, a), b) = 0.$$

Pour $0 \leqslant \nu \leqslant 2d-1$, cette égalité est toujours vérifiée.

Pour $\nu = 2d$, elle montre que $T_d$ est un crochet de Lie sur $\Sigma$.

D'autre part, T est une bidérivation de l'algèbre $\Sigma$ munie de $\underset{F}{*}$, i.e. pour $a \in \Sigma^i$, $b \in \Sigma^j$, $c \in \Sigma^k$, on a:

$$T(a \underset{F}{*} b, c) = a \underset{F}{*} T(b, c) + T(a, c) \underset{F}{*} b .$$

En regroupant les termes homogènes de degré $i + j + k - \nu$, on obtient pour tout entier $\nu \geq 0$ :

$$(4.2) \quad \sum_{\lambda+\mu=\nu} T_\lambda(F_\mu(a, b), c) = \sum_{\lambda+\mu=\nu} \left[F_\mu(a, T_\lambda(b, c)) + F_\mu(T_\lambda(a, c), b)\right].$$

Pour $0 \leqslant \nu \leqslant d-1$, cette égalité est toujours vérifiée.

Pour $d \leqslant \nu \leqslant d+r-1$, elle montre que $T_\nu$ est une bidérivation de l'algèbre commutative $\Sigma$.

En particulier, $\Sigma$ muni du crochet $T_d$ est une K-algèbre de Poisson graduée de degré d. On dit alors que F est une déformation de cette algèbre de Poisson, et que le crochet $T = [\ ,\ ]_{\underset{F}{*}}$ est le crochet déformé par F du crochet $T_d$ (noté souvent $[\ ,\ ]$). On peut ainsi écrire:

$$[\ ,\ ]_{\underset{F}{*}} = [\ ,\ ] + T_{d+1} + T_{d+2} + \cdots$$

Notons que si la déformation F est décrite par l'objet $\Sigma \xrightarrow{\delta} U$, alors U est une K-algèbre hamiltonienne de degré d.

Comme ci-dessus, soit F une déformation non commutative de degré d et soit $T_d$ le crochet de Poisson sur $\Sigma$ qui s'en déduit. Pour tout $f \in G_1$, on a la décomposition:

$$F.f - \widetilde{F.f} = \sum_{\lambda=d}^{\infty} (F.f)_\lambda - (\widetilde{F.f})_\lambda \quad . \quad \text{De plus,}$$

$$(F.f)_d - (\widetilde{F.f})_d = \sum_{h+i+j+k=d} (f^{-1})_h \,.\, (F_k - \widetilde{F}_k) \,.\, (f_i \otimes f_j) \,.$$

Comme $F_k - \widetilde{F}_k = 0$ pour $k \in \{0, \ldots, d-1\}$, il reste:

$$(F.f)_d - (\widetilde{F.f})_d = F_d - \widetilde{F}_d = T_d \quad .$$

Ainsi, deux déformations équivalentes définissent le même crochet de Poisson sur $\Sigma$.

En conclusion, sachant que toute déformation commutative peut être considérée comme une déformation de l'algèbre de Poisson triviale $\Sigma$ (munie du crochet nul), tout élément de $\overline{G_2} / G_1$ définit une structure de K-algèbre de Poisson graduée de degré $\geqslant 1$ sur $\Sigma$.

## § 5. CODEFORMATIONS DES BIGEBRES GRADUEES.

On revient au cas général d'une algèbre $\Sigma$ non nécessairement commutative.

(5.1) $\Sigma$ étant graduée par les $\Sigma^k$, $k \in \mathbb{N}$, l'algèbre $\Sigma \otimes_K \Sigma$ est graduée par les sous-modules $(\Sigma \otimes \Sigma)^k = \bigoplus_{i+j=k} \Sigma^i \otimes \Sigma^j$.

Soit F une déformation de $\Sigma$ qui détermine un produit $\underset{F}{*}$ sur $\Sigma$. A partir de l'algèbre $(\Sigma, *)$, on définit l'algèbre $(\Sigma \otimes \Sigma, *)$ dont le produit est défini par, pour tout a, b, c, d dans $\Sigma$ :

$$(a \otimes b) * (c \otimes d) = (a * c) \otimes (b * d).$$

Il est clair que ce produit définit une déformation notée $F^2$ de l'algèbre graduée $\Sigma \otimes \Sigma$. Si $F^2$ se décompose en $F^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} F^2_\nu$, alors:

$$F^2_\nu(a \otimes b, c \otimes d) = \sum_{\lambda+\mu=\nu} F_\lambda(a, c) \otimes F_\mu(b, d).$$

On peut noter que si $f \in G_1$, alors $(F.f)^2 = F^2.(f \otimes f)$.

(5.2) On suppose dans la suite de ce paragraphe que $\Sigma$ est une bigèbre graduée dont le coproduit est noté c. En particulier, $c : \Sigma \longrightarrow \Sigma \otimes \Sigma$ est un morphisme d'algèbres graduées.

Une déformation F de $\Sigma$ est appelée une codéformation de la bigèbre graduée $\Sigma$ si l'algèbre déformée $(\Sigma, \underset{F}{*})$ est une bigèbre de coproduit c. Cela revient à dire que c est un morphisme d'algèbres pour les lois $*$ , autrement dit le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \Sigma\otimes\Sigma \arrow[r, "c\otimes c"] \arrow[d, "F"] & (\Sigma\otimes\Sigma)\otimes(\Sigma\otimes\Sigma) \arrow[d, "F^2"] \\ \Sigma \arrow[r, "c"] & \Sigma\otimes\Sigma \end{tikzcd}$$

L'algèbre déformée munie de sa filtration canonique $(\Sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ devient ainsi une <u>bigèbre filtrée</u>.

Notons $\overline{G_2^c}$ l'ensemble des codéformations de $(\Sigma, c)$ . De même, notons $G_1^c$ l'ensemble des éléments f de $G_1$ tels que $f : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ soit un morphisme de cogèbres (pour c). Il est clair que $G_1^c$ est un sous-groupe de $G_1$ et que le groupe $G_1^c$ opère à droite sur $\overline{G_2^c}$ (pour l'action induite par celle de $G_1$ sur $\overline{G_2}$). On pourra donc considérer l'ensemble des classes de codéformations équivalentes $\overline{G_2^c} / G_1^c$ .

(5.3) Donnons une description des codéformations à la manière de (3.2). Soit $\Sigma \xrightarrow{\delta} U$ un objet de $C(\Sigma)$. On suppose en outre que U est une <u>bigèbre filtrée</u> dont le coproduit est noté c' . On a alors:

(5.3.1) <u>Si $\delta$ est un morphisme de cogèbres de $\Sigma$ sur U, alors la déformation F associée à $\delta$ est une codéformation de $\Sigma$</u> .

En effet, l'hypothèse signifie que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "c"] & U \arrow[d, "c'"] \\ \Sigma\otimes\Sigma \arrow[r, "\delta\otimes\delta"] & U\otimes U \end{tikzcd}$$

Par suite, pour tout s et s' dans $\Sigma$ , on a:

$$\begin{aligned} c(s * s') &= c(\delta^{-1}(\delta(s)\,\delta(s'))) = (\delta\otimes\delta)^{-1} \,.\, c'(\delta(s)\,\delta(s')) \\ &= (\delta\otimes\delta)^{-1}\,(c'(\delta(s)) . c'(\delta(s'))) \\ &= (\delta\otimes\delta)^{-1}\,(\delta\otimes\delta(c(s)) . \delta\otimes\delta(c(s'))) = c(s) * c(s') \end{aligned}$$ cqfd.

## § 6. CODEFORMATIONS DES ALGEBRES SYMETRIQUES.

Dans ce paragraphe, $\mathfrak{g}$ désigne un K-module. On prend pour $\Sigma$ l'algèbre symétrique $S\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$, munie de sa graduation habituelle. Notons que $S^0\mathfrak{g} = K$ et $S^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

$S\mathfrak{g}$ muni de son coproduit usuel c est une bigèbre graduée; $c : S\mathfrak{g} \longrightarrow S\mathfrak{g} \otimes S\mathfrak{g}$ est l'unique morphisme d'algèbres vérifiant $c(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour tout x de $\mathfrak{g}$.

On se propose d'étudier les déformations de $S\mathfrak{g}$. Pour une telle déformation F, on notera le crochet associé $[\ ,\ ]_{\underset{F}{*}}$ par T, et on écrira $T = \sum_{\lambda=0}^{\infty} T_\lambda$ où chaque $T_\lambda$ est homogène de degré $\lambda$, avec $T_0 = 0$.

On a un premier résultat élémentaire:

(6.1) Pour toute déformation F de $S\mathfrak{g}$, F est triviale si et seulement si F est commutative.

Preuve. - La condition nécessaire est toujours vérifiée. Réciproquement, supposons F commutative. L'injection canonique de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre commutative $(S\mathfrak{g}, \underset{F}{*})$ se prolonge de manière unique en un morphisme d'algèbres $\psi$ de l'algèbre symétrique $S\mathfrak{g}$ dans l'algèbre $(S\mathfrak{g}, \underset{F}{*})$. Il est clair que $\psi \in G_1$ et que, si $\pi$ désigne le produit de l'algèbre symétrique $S\mathfrak{g}$, on a $F = \pi \cdot \psi^{-1}$ cqfd.

(6.2) Si $\mathfrak{g}$ est un K-module libre, toute déformation F est de degré $\leq 2$.

Preuve. - On doit prouver l'implication: $T_1 = T_2 = 0 \Longrightarrow T = 0$. Supposons donc $T_1 = T_2 = 0$. Alors $T = 0$ sur $\mathfrak{g}$; en utilisant le lemme 1 ci-dessous (page 56), on en déduit que $T = 0$ sur $S\mathfrak{g}$.

Passons à l'étude des codéformations de $S\mathfrak{g}$. On se place dans les conditions suivantes, valables dans tout le reste de ce paragraphe:

K est une $\mathbb{Q}$-algèbre et $\mathfrak{g}$ est un K-module libre.

Dans ce cas, l'ensemble des éléments primitifs de la cogèbre $S\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{g}$. (cf. [20] 1ère partie, ch III, th 5.4).

Par suite, si F est une codéformation de $S\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $S\mathfrak{g}$ munie de T (cf. [6] ch II, §1, prop. 4).

La proposition suivante montre qu'il n'existe pas de codéformation de $S\mathfrak{g}$ de degré $\geqslant 2$:

(6.2)' Toute codéformation F de $S\mathfrak{g}$ est, ou bien commutative, ou bien de degré 1.

Preuve. - On doit prouver l'implication: $T_1 = 0 \Longrightarrow T = 0$. Supposons donc $T_1 = 0$. D'après la remarque ci-dessus, on a $T(s, t) = T_1(s, t)$ pour tout s et t dans $\mathfrak{g}$. Donc T est nul sur $\mathfrak{g}$. On en déduit que $T = 0$ sur $S\mathfrak{g}$ tout entier en utilisant le lemme suivant:

LEMME 1. - Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de $\mathfrak{g}$. On munit I d'un ordre total. Pour toute application $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{N}$ à support fini, on pose

$$e^{\alpha} = e_{i_1}^{\alpha(i_1)} \dots e_{i_n}^{\alpha(i_n)} \quad \text{et} \quad e^{*\alpha} = e_{i_1}^{*\alpha(i_1)} * \dots * e_{i_n}^{*\alpha(i_n)}$$

où $\{i_1, \dots, i_n\}$ est le support de $\alpha$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_n$. Alors la famille des $e^{*\alpha}$ est une base du K-module $S\mathfrak{g}$.

Preuve. - On sait que la famille des $e^{\alpha}$ est une base de $S\mathfrak{g}$. On va prouver par récurrence sur k que les $e^{*\alpha}$ pour $|\alpha| \leqslant k$ est une base de $S_k\mathfrak{g}$. C'est trivial pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons que c'est vrai pour k. Pour tout n-uple $\beta$ tel que $|\beta| = k + 1$, on a:

(1) $\quad e^{*\beta} = e^{\beta} + r \quad$ avec $r \in S_k\mathfrak{g}$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à $r$, on voit que chaque $e^{\beta}$, $|\beta| = k+1$, s'exprime à l'aide des $e^{*\alpha}$, $|\alpha| \leqslant k+1$. La famille des $e^{*\alpha}$, $|\alpha| \leqslant k+1$, engendre donc $S_{k+1}\mathfrak{g}$. D'autre part, (1) montre que les $e^{*\beta}$, $|\beta| = k+1$, forment une base d'un sous-module supplémentaire de $S_k\mathfrak{g}$ dans $S_{k+1}\mathfrak{g}$ cqfd.

(6.3) On va donner une description des codéformations de $S\mathfrak{g}$ à la manière de (3.2). Soit F une codéformation de $S\mathfrak{g}$. On peut donc considérer la K-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie du crochet T (ou $T_1$). On note $U\mathfrak{g}$ l'algèbre enveloppante de cette algèbre de Lie. Munie de son coproduit usuel $c'$, $U\mathfrak{g}$ est une bigèbre filtrée; $c' : U\mathfrak{g} \longrightarrow U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ est l'unique morphisme d'algèbres tel que $c'(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$ pour tout $x$ dans $\mathfrak{g}$. Rappelons que $\mathfrak{g}$ est plongé dans $U\mathfrak{g}$ et $U_0\mathfrak{g} = K$, $U_1\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus K$.

Comme $(S\mathfrak{g}, *)$ est une bigèbre filtrée cocommutative dont l'ensemble des éléments primitifs est $\mathfrak{g}$, l'injection canonique $\mathfrak{g} \longrightarrow S\mathfrak{g}$ se prolonge en un unique isomorphisme de bigèbres $\psi : U\mathfrak{g} \longrightarrow S\mathfrak{g}$ (cf. [6], loc. cit. th 1). Il est clair que <u>l'objet $S\mathfrak{g} \xrightarrow{\psi^{-1}} U\mathfrak{g}$</u> (qui est un morphisme de cogèbres) <u>a pour déformation associée F.</u>

(6.4) Réciproquement, supposons que $\mathfrak{g}$ soit muni d'une structure de K-algèbre de Lie pour un crochet noté $[\ ,\ ]$. Ce crochet s'étend de manière unique en un crochet de Poisson de degré 1 sur $S\mathfrak{g}$, noté encore $[\ ,\ ]$.

Soit un objet $S\mathfrak{g} \xrightarrow{\delta} U\mathfrak{g}$ tel que $\delta$ soit un morphisme de cogèbres et soit F la codéformation associée à $\delta$ (cf. (5.3.1)). La réciproque consiste à prouver que: $\underline{T_1 = [\ ,\ ]}$.

On montrera d'abord les lemmes suivants:

LEMME 2. – Notons $\varepsilon$ (resp. $\varepsilon'$) la coünité de $S\mathfrak{g}$ (resp. $U\mathfrak{g}$). Le morphisme de cogèbres $\delta$ conserve ces coünités i.e. $\varepsilon' \cdot \delta = \varepsilon$.

Preuve. – Rappelons que $\varepsilon$ (resp. $\varepsilon'$) est la projection canonique de $S\mathfrak{g}$ (resp. $U\mathfrak{g}$) sur K. Notons aussi que, d'après la définition de la coünité $\varepsilon'$, on a:

$$(\varepsilon' \otimes \varepsilon')\,(c'(\delta(s))) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon') \cdot (\varepsilon' \otimes \mathrm{id})\,(c'(\delta(s))$$
$$= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon')\,(\mathrm{id} \otimes \delta(s)) = \mathrm{id} \otimes \varepsilon'(\delta(s)) = \varepsilon'(\delta(s))$$

pour tout $s \in S\mathfrak{g}$.

Introduisons une base $(e_i)_{i \in I}$ de $\mathfrak{g}$ ainsi que la base $(e^\alpha)$ de $S\mathfrak{g}$ définie dans le lemme 1. Notons que $e^0 = 1_K$. Pour tout $\alpha$, on pose $k_\alpha = \varepsilon'(\delta(e^\alpha))$; ainsi $k_0 = 1_K$. D'après le calcul préliminaire, $(\varepsilon' \otimes \varepsilon')\,(c'(\delta(e^\alpha))) = k_\alpha$. Or, par définition de c, on a:

$$c(e^\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,\gamma!}\, e^\beta \otimes e^\gamma, \text{ d'où:}$$

$$\varepsilon' \otimes \varepsilon'(\delta \otimes \delta(c(e^\alpha))) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,\gamma!}\, k_\beta\, k_\gamma .$$

$\delta$ étant un morphisme de cogèbres, on a: $k_\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,\gamma!}\, k_\beta\, k_\gamma$.

Une récurrence sur $|\alpha|$ montre que ces égalités impliquent $k_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \neq 0$. Par suite, $\varepsilon' \cdot \delta$ et $\varepsilon$ coïncident sur chaque élément de la base $(e^\alpha)$ cqfd.

LEMME 3. – $\delta\big|_{\mathfrak{g}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

Preuve. – En effet, pour tout x dans $\mathfrak{g}$, $\delta(x)$ appartient à $U_1\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus K$ donc il existe $x_1 \in \mathfrak{g}$ et $k \in K$ tels que $\delta(x) = x_1 + k$. Comme $\delta$ est une déformation, on a $x_1 = x$. De plus $\varepsilon'(\delta(x)) = k$ d'où $k = 0$ en vertu du lemme 2.

On est en mesure de conclure. Pour tout s, t dans $\mathfrak{g}$, on a:

$$T(s,t) = \delta^{-1}(\delta(s)\,\delta(t) - \delta(t)\,\delta(s)) = \delta^{-1}(st - ts) = [s, t]$$

en utilisant deux fois le lemme 3.

Ainsi, les crochets de Poisson $T_1$ et $[\ ,\ ]$ coïncident sur $\mathfrak{g}$. Par suite, ils coïncident sur $S\mathfrak{g}$ tout entier.

(6.5) Exemple. - On suppose, comme en (6.4), que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie pour un crochet noté $[\ ,\ ]$. On définit alors un objet $S\mathfrak{g} \xrightarrow{\sigma} U\mathfrak{g}$ par:

$$\sigma(x_1 \times \dots \times x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(k)}$$

pour $x_1, \dots, x_k$ dans $\mathfrak{g}$ et $k \geqslant 1$.

L'application $\sigma$ est appelée symétrisation et sa déformation associée S s'appelle une déformation de Weyl de $S\mathfrak{g}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les éléments $x^k$, $x \in \mathfrak{g}$, engendrent le K-module $S^k\mathfrak{g}$ ; par suite, $\sigma$ est l'unique application vérifiant:

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\sigma(x^k) = x^k$.

Il est aisé de déduire de ces égalités que $\sigma$ est un morphisme de cogèbres (cf. [ 6 ], p. 13). S est donc une codéformation de $S\mathfrak{g}$.

Notons qu'une codéformation F de $S\mathfrak{g}$ est une déformation de Weyl si et seulement si F conserve les puissances des éléments de $\mathfrak{g}$.

(6.6) Considérons l'application $F \longmapsto T_1$ qui, à toute codéformation F de $S\mathfrak{g}$, associe son crochet de Poisson. D'après (6.5), c'est une surjection de $\overline{G_2^o}$ sur l'ensemble des crochets de Lie définis sur $\mathfrak{g}$.

Il est clair que deux codéformations équivalentes ont le même crochet de Poisson associé. Réciproquement, soient F et F' deux codéformations ayant même crochet de Poisson associé. Elles définissent deux objets $S\mathfrak{g} \xrightarrow{\delta} U\mathfrak{g}$ et $S\mathfrak{g} \xrightarrow{\delta'} U\mathfrak{g}$ isomorphes ( cf. (3.2)) donc F et F' sont équivalentes.

Ainsi, l'application $F \longmapsto T_1$ induit une bijection de l'ensemble $\overline{G_2^o} / G_1^o$ des classes de codéformations équivalentes sur l'ensemble des crochets de Lie définis sur $\mathfrak{g}$ .

Remarque. - L'application $[\ ,\ ] \longmapsto S$ qui, à tout crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$, associe la déformation de Weyl correspondante est une section de l'application $F \longmapsto T_1$ .

## § 7. CODEFORMATIONS DES ALGEBRES SYMETRIQUES DE RANG FINI.

On reprend les notations et hypothèses du § 6, mais on suppose en outre que le K-module libre $\mathfrak{g}$ est de dimension finie n. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{g}$ . Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on pose

$$e_\alpha = \frac{1}{\alpha !} e_1^{\alpha_1} \times \ldots \times e_n^{\alpha_n} \qquad (\text{dans } S\mathfrak{g})$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\alpha ! = \alpha_1 ! \ldots \alpha_n !$

Il est clair que les $e_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , est une base de $S\mathfrak{g}$ telle que:

(i) $e_0 = 1$

(ii) $c(e_\gamma) = \sum\limits_{\alpha+\beta=\gamma} e_\alpha \otimes e_\beta$ pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$ .

On peut donc appliquer l'exercice n° 11 de [6], p. 74 .

(7.1) Soit F une codéformation de $S\mathfrak{g}$. Soient $c_{\alpha\beta\gamma}$ les constantes de structure de l'algèbre $(S\mathfrak{g}, \underset{F}{*})$ dans la base $(e_\alpha)$ i.e.

$$e_\alpha \underset{F}{*} e_\beta = \sum_\gamma c_{\alpha\beta\gamma}\, e_\gamma \quad .$$

Alors il existe une unique loi de groupe formel $f(X,Y) = (f_i(X,Y))_{1 \leq i \leq n}$ de dimension n sur K telle que , pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$ , on a:

$$f(X, Y)^\gamma = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta\gamma}\, X^\alpha\, Y^\beta \quad .$$

De plus, l'application canonique $\mathfrak{g} \longrightarrow K^n$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, T_1)$ sur l'algèbre de Lie de la loi de groupe formel $f(X, Y)$. On dira que $f(X, Y)$ est la loi de groupe formel associée à la codéformation F .

Réciproquement, toute loi de groupe formel de dimension n sur K est la loi de groupe formel associée d'une unique codéformation de $S\mathcal{G}$.

L'application $F \longmapsto f(X, Y)$ définit donc une bijection de l'ensemble $\overline{G_2^c}$ des codéformations de $S\mathcal{G}$ sur l'ensemble des lois de groupe formel de dimension n sur K.

Appelons équivalentes des lois de groupe formel de dimension n sur K ayant la même algèbre de Lie. L'application $F \longmapsto f(X, Y)$ induit donc une bijection de l'ensemble $\overline{G_2^c} / G_1^c$ des classes de codéformations équivalentes sur l'ensemble des classes de lois de groupe formel équivalentes.

Exemple. - Il est clair que la loi de groupe formel associée à la codéformation nulle de $S\mathcal{G}$ est la loi de groupe additif $X + Y$.

(7.2) Soient F une codéformation de $S\mathcal{G}$ et $f(X, Y)$ sa loi de groupe formel associée. On a un isomorphisme canonique de la bigèbre $S\mathcal{G}$ sur la bigèbre $K[Z_1, \ldots, Z_n]$ qui envoie $e_\alpha$ sur $\frac{1}{\alpha!} Z^\alpha$. Notons encore $\underset{F}{*}$ le produit transporté sur $K[Z_1, \ldots, Z_n]$.

Soient les polynomes $P(Z) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{\alpha!} Z^\alpha$ et $Q(Z) = \sum_\beta \frac{\mu_\beta}{\beta!} Z^\beta$. Avec les notations de (7.1), on a:

$$P \underset{F}{*} Q(Z) = \sum_{\alpha, \beta} \lambda_\alpha \mu_\beta \frac{Z^\alpha}{\alpha!} * \frac{Z^\beta}{\beta!} = \sum_{\alpha, \beta} \lambda_\alpha \mu_\beta \Big(\sum_\gamma c_{\alpha\beta\gamma} \frac{Z^\gamma}{\gamma!}\Big)$$

$$= \sum_\gamma \frac{Z^\gamma}{\gamma!} \Big[\sum_{\alpha, \beta} \lambda_\alpha \mu_\beta c_{\alpha\beta\gamma}\Big].$$

Or le crochet précédent peut s'écrire:

$$\sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^\alpha P}{\partial X^\alpha}\Big|_{X=0} \frac{\partial^\beta Q}{\partial Y^\beta}\Big|_{Y=0} = f\Big(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\Big)^\gamma . P(X)Q(Y)\Big|_{X=Y=0}$$

d'où la formule

(7.2.1) $$P \underset{F}{*} Q(Z) = \exp\Big(Z f\Big(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\Big)\Big) . P(X)Q(Y)\Big|_{X=Y=0}$$

En particulier, dans le cas de la déformation nulle, on a:

$$P \times Q(Z) = \sum_{\gamma} \frac{Z^{\gamma}}{\gamma!} \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}\right)^{\gamma} \cdot P(X)Q(Y) \Big|_{X=Y=0}$$

Revenons au cas général. Notons $g(X, Y)$ la partie non linéaire de $f(X, Y)$ i.e. $f(X, Y) = X + Y + g(X, Y)$. En reportant dans (7.2.1), on obtient:

$$P \underset{F}{\ast} Q(Z) = \sum_{\gamma} \frac{Z}{\gamma!} \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} + g\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\right)\right)^{\gamma} \cdot P(X)Q(Y) \Big|_{X=Y=0}$$

$$= \sum_{\gamma} \frac{Z^{\gamma}}{\gamma!} \left( \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}\right)^{\beta} \cdot g\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\right)^{\alpha} \cdot P(X)Q(Y) \Big|_{X=Y=0} \right)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \frac{Z^{\alpha}}{\alpha!} \frac{Z^{\beta}}{\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}\right)^{\beta} \left[ g\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\right)^{\alpha} \cdot P(X)Q(Y) \right] \Big|_{X=Y=0}$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{Z^{\alpha}}{\alpha!} \left[ \sum_{\beta} \frac{Z^{\beta}}{\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}\right)^{\beta} \left(g\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\right)^{\alpha} \cdot P(X)Q(Y)\right) \Big|_{X=Y=0} \right]$$

or, d'après le cas particulier vu ci-dessus, ce dernier crochet est égal à $g\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\right)^{\alpha} \cdot P(X)Q(Y) \Big|_{X=Y=Z}$ d'où la formule:

$$(7.2.2) \quad P \underset{F}{\ast} Q(Z) = \exp\left(Z\, g\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\right)\right) \cdot P(X)Q(Y) \Big|_{X=Y=Z}$$

<u>Remarque.</u> - Si $f(X, Y)$ est un polynome, alors la loi $\underset{F}{\ast}$ s'étend en un produit sur l'algèbre des séries formelles $K[[Z_1, \ldots, Z_n]]$ donné par les mêmes formules. On définit dans ce cas une déformation de l'algèbre de Poisson complétée $\widehat{S\mathfrak{g}}$.

(7.3) On va donner la loi de groupe formel associée à une codéformation de Weyl. On se limite au cas convergent. Pour cela, on suppose que <u>K est un corps valué complet non trivial de caractéristique nulle.</u> <u>Dans ce cas, la loi de groupe formel associée à une codéformation de Weyl F est la loi de groupe formel de Campbell-Hausdorff de l'algèbre de Lie</u> $(\mathfrak{g}, \xi)$ (cf.[6], ch.III, § 4, th.4)

Notons qu'ici la loi de groupe de Campbell-Hausdorff est convergente et définit sur un certain voisinage de zéro de $K^n$ un groupuscule de Lie $V$. Soit $\varphi : V \longrightarrow K^n$ l'injection canonique; $\varphi$ induit un isomorphisme $\varphi_* : U(V) \longrightarrow U(K^n)$ de l'espace des distributions sur $V$ à support contenu dans $\{0\}$ dans l'espace des distributions sur $K^n$ à support contenu dans $\{0\}$. Le groupuscule de Lie $V$ ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $U(V)$ s'identifie à $U\mathfrak{g}$. D'autre part, $U(K^n)$ s'identifie à l'algèbre symétrique $S(K^n)$ qui, elle-même, est isomorphe à $S\mathfrak{g}$. On obtient donc un isomorphisme d'espaces vectoriels $\psi : U\mathfrak{g} \longrightarrow S\mathfrak{g}$. Alors, $\psi^{-1}$ est la <u>symétrisation</u> dont la déformation associée est $F$.

## § 8. DEFORMATIONS DE MOYAL.

On suppose toujours que <u>$K$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre.</u>

On prend pour $\mathfrak{g}$ une <u>$K$-algèbre de Heisenberg</u> de dimension $n = 2m+1$, définie par une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (cf. (2.4), 1<u>ère</u> partie). En identifiant $S\mathfrak{g}$ et $K[X_1, \ldots, X_n]$ au moyen de cette base, le crochet de Poisson sur $K[X_1, \ldots, X_n]$ est donné par l'égalité (2.4.1), 1<u>ère</u> partie.

Notons $F$ la déformation de Weyl de $S\mathfrak{g}$ (cf. (6.5)). On vérifie sans difficultés que la loi de groupe formel $f(Y, Z)$ associée à la codéformation $F$ est:

$$\begin{cases} f_i(Y, Z) = Y_i + Z_i & \text{pour } i \in \{1, \ldots, 2m\} \\ f_n(Y, Z) = Y_n + Z_n + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} (Y_i Z_{i+m} - Y_{i+m} Z_i)\right). \end{cases}$$

Posons $h(Y, Z) = \sum_{i=1}^{m} (Y_i Z_{i+m} - Y_{i+m} Z_i)$. La formule (7.2.2) fournit une série formelle en la seule variable $X_n$ :

$$(8.1) \qquad P \underset{F}{*} Q(X) = \exp\left(\frac{X_n}{2} \cdot h\left(\frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z}\right)\right) \cdot P(Y)Q(Z)\Big|_{Y=Z=X} .$$

Puisque $h$ est un polynome, cette égalité s'étend aux séries formelles et exprime alors la déformation de Weyl de l'algèbre de Poisson complète $\widehat{S\mathfrak{g}}$.

<u>PROPOSITION.</u> – <u>Tout idéal de Poisson</u> $I_\lambda = (X_n - \lambda)$ <u>de</u> $S\mathfrak{g}$ (cf. prop. de (2.4), $1^{\text{ère}}$ partie) <u>est un idéal bilatère de l'algèbre déformée</u> $(S\mathfrak{g}, \underset{F}{*})$.

<u>Preuve.</u> – La formule (8.1) montre que, pour tous polynomes $P$ et $Q$ dans $K[X_1, \ldots, X_n]$, on a :

$$P \underset{F}{*} ((X_n - \lambda)Q) = (X_n - \lambda)(P \underset{F}{*} Q) \qquad \text{cqfd.}$$

Par passage au quotient, la déformation de Weyl $F$ détermine donc une déformation de degré 2 de l'algèbre de Poisson $S\mathfrak{g}/I_\lambda$ munie du crochet $\lambda\{\ ,\ \}$, où $\{\ ,\ \}$ est le crochet de Poisson classique. Cette déformation s'appelle <u>la déformation de Moyal de l'algèbre de Poisson classique</u> $S\mathfrak{g}/I_\lambda$. Notons $\underset{\lambda}{*}$ et $[\ ,\ ]_{\underset{\lambda}{*}}$ le produit et le crochet déformés. Pour deux polynomes $P$, $Q$ de $K[X_1, \ldots, X_{2m}]$, on a donc:

$$(8.2) \qquad P \underset{\lambda}{*} Q(X) = \exp\left(\frac{\lambda}{2} \cdot h\left(\frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z}\right)\right) \cdot P(Y)Q(Z)\Big|_{Y=Z=X}$$

et, comme $h$ est antisymétrique,

$$(8.3) \qquad [P, Q]_{\underset{\lambda}{*}}(X) = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\lambda}{2} \cdot h\left(\frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z}\right)\right) \cdot P(Y)Q(Z)\Big|_{Y=Z=X}.$$

Ces formules s'étendent aux séries formelles, fournissant ainsi les expressions de la déformation de Moyal de l'algèbre de Poisson classique complète.

La déformation de Moyal peut se décrire à la manière de (3.2) par l'objet $S\mathfrak{g}/I_\lambda \xrightarrow{\bar{\sigma}} U\mathfrak{g}/\sigma(I_\lambda)$ qui se déduit de la symétrisation $\sigma : S\mathfrak{g} \longrightarrow U\mathfrak{g}$. Il est clair que $\sigma(I_\lambda)$ est un idéal bilatère de $U\mathfrak{g}$ et que l'algèbre quotient $U\mathfrak{g}/\sigma(I_\lambda)$ est une algèbre hamiltonienne de degré 2, définie par $2m$ générateurs $x_i$, $y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et les relations:

$$x_i\, y_i - y_i\, x_i = \lambda \qquad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

$x_i\, x_j - x_j\, x_i = y_i\, y_j - y_j\, y_i = x_i\, y_j - y_j\, x_i = 0$ dès que $i \neq j$.

Pour $\lambda = 1_K$, c'est l'algèbre de Weyl (cf. (1.3), 1ère partie).

Passons maintenant au cas où K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

THEOREME. - Si K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, tout idéal de Poisson maximal $\mathfrak{a}$ de $S\mathfrak{g}$ est un idéal bilatère de l'algèbre déformée $(S\mathfrak{g}, \underset{F}{*})$.

Preuve. - D'après la proposition précédente et celle de (4.7), 1ère partie, il reste à examiner le cas où $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{2m} (X_i - a_i) + (X_n)$, avec $(a_1, \ldots, a_{2m}) \in K^{2m}$. Le résultat est alors immédiat en vertu de (8.1).

Ainsi, tout élément de $SPM(S\mathfrak{g})$ détermine une déformation quotient de la déformation de Weyl. Cette déformation quotient est décrite par l'objet $S\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \longrightarrow U\mathfrak{g}/\sigma(\mathfrak{a})$. En utilisant la bijection canonique $\psi_0 : SPM(S\mathfrak{g}) \longrightarrow Spm(U\mathfrak{g})$ introduite en (4.6), 1ère partie, on peut voir que $\sigma(\mathfrak{a}) = \psi_0(\mathfrak{a})$. Il serait intéressant de généraliser à d'autres algèbres de Lie (nilpotentes, par exemple) cette description des déformations quotients.

Exemple. - On considère les algèbres de Poisson classiques $\Sigma_{\mathbb{R}}$ (à coefficients réels) et $\Sigma_{\mathbb{C}}$ (à coefficients complexes). On a une injection naturelle $\Sigma_{\mathbb{R}} \rightarrow \Sigma_{\mathbb{C}}$. Si $P$ et $Q$ sont deux polynomes à coefficients réels, le produit et le crochet usuels de Moyal de $P$ et $Q$ sont $P \underset{-i\hbar}{*} Q$ et $[P, Q]_{\underset{-i\hbar}{*}}$ (cf. [1] et [21]), c'est-à-dire:

$$P \underset{-i\hbar}{*} Q(X) = \exp\left(-\frac{i\hbar}{2} \cdot h\left(\frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z}\right)\right) \cdot P(Y)Q(Z)\Big|_{Y=Z=X}$$

$$[P, Q]_{\underset{-i\hbar}{*}}(X) = -2i \sin\left(\frac{\hbar}{2} \cdot h\left(\frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z}\right)\right) \cdot P(Y)Q(Z)\Big|_{Y=Z=X}$$

Ces formules s'étendent aux séries formelles. Cette extension permet, grâce au théorème de Paley-Wiener, de définir le produit de Moyal dans l'espace $\mathcal{F}\mathcal{E}'$, image par la transformée de Fourier de l'espace des distributions à support compact sur $\mathbb{R}^{2m}$. On obtient alors des expressions intégrales pour $\underset{-i\hbar}{*}$, et l'on constate qu'elles ont encore un sens pour les fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^{2m}$, définissant ainsi le produit de Moyal sur l'espace $\mathcal{S}$ (cf. [19]).

## § 9. CONCLUSION.

Au vu de l'exemple précédent, donnons une définition générale des déformations quotients.

Soit A une K-algèbre de Poisson de type fini et relevable (cf. (3.5), 1ère partie). A est donc une algèbre de Poisson quotient $K[T_1, \dots, T_N]/I$ où I est un idéal de Poisson de $K[T_1, \dots, T_N]$. On se donne une déformation F' (resp. une codéformation F') de $K[T_1, \dots, T_N]$ telle que I soit un idéal bilatère pour $\underset{F'}{*}$. La loi quotient sur A détermine alors une application K-bilinéaire $F: A \times A \longrightarrow A$ faisant de A une K-algèbre associative unifère; F sera appelée une déformation (resp. une codéformation) de l'algèbre de Poisson A.

Pour étudier les codéformations de A, il suffit de prendre pour F' une déformation de Weyl de $K[T_1, \dots, T_N]$ puisque toute codéformation de $K[T_1, \dots, T_N]$ est équivalente à une telle déformation (cf. (6.5)). D'autre part, on dispose pour les codéformations des techniques des algèbres enveloppantes [14]. Il serait donc intéressant de développer des techniques analogues pour des déformations quotients plus générales.

# BIBLIOGRAPHIE

[1] : L. ABELLANAS and L. MARTINEZ ALONSO, Quantization from the algebraic viewpoint, J. Math. Phys., Vol. 17, n° 8, (1976), p. 1363-1365.

[2] : R. ABRAHAM, Foundations of Mechanics, Benjamin.

[3] : A. BOREL, Linear Algebraic Groups, Benjamin.

[4] : N. BOURBAKI, Algèbre, Ch. 3, Hermann.

[5] : N. BOURBAKI, Groupes et Algèbres de Lie, Ch. 1, Hermann.

[6] : N. BOURBAKI, Groupes et Algèbres de Lie, Ch. 2 et 3, Hermann.

[7] : N. BOURBAKI, Variétés Différentielles et Analytiques, Fasc. de résultats, § 8 à 15, Hermann.

[8] : J. BRACONNIER, Algèbres de Poisson, C.R.A.S., 284, (1977), p. 1345-1348.

[9] : J. BRACONNIER, Sur les crochets généralisés, C.R.A.S., 286, (1978), p. 763-766.

[10] : J. BRACONNIER, Applications des crochets généralisés aux algèbres de Lie et de Poisson, 286, (1978), p. 877-880.

[11] : C. CHEVALLEY, Groupes Algébriques, Hermann.

[12] : J. DIEUDONNE, Cours de Géométrie Algébrique, tome 2, P.U.F.

[13] : J. DIEUDONNE, Eléments d'Analyse, tome 3, Gauthier-Villars.

[14] : J. DIXMIER, Algèbres Enveloppantes, Gauthier-Villars.

[15] : M. GERSTENHABER, On the deformation of rings and algebras, Ann. Math., 79, (1964), p. 59-103.

[16] : I. S. KRASILSHCHIK and A. M. VINOGRADOV, What is the Hamiltonian Formalism?, Russian Math. Surveys, 30-1, (1975), p. 177-202.

[17] : S. LANG, Algebra, Addison-Wesley.

[18] : A. LICHNEROWICZ, Variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, J. of Diff. Geom. (à paraître).

[19] : R. OUZILOU, Cours de D.E.A., 1977-1978, Lyon.

[20] : J.P. SERRE, Lie Algebras and Lie Groups, Benjamin.

[21] : G.S. AGARWAL and E. WOLF, Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics, Phys. Rev. D 2, (1970), p. 2161-2185.

[22] : F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER, Quantum Mechanics as a deformation of Classical Mecanics,

## TABLE DES MATIERES