PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

BERNARD BONNARD

Couples de générateurs de certaines sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie symplectique affine, et applications

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 4 , p. 1-36

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_4_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t. 15-4

COUPLES DE GENERATEURS DE CERTAINES SOUS-ALGEBRES DE LIE DE L'ALGEBRE DE LIE SYMPLECTIQUE AFFINE , ET APPLICATIONS

par Bernard BONNARD

INTRODUCTION.

Un *système asservi* sur une variété M est la donnée suivante :

(i) une équation différentielle ordinaire sur M, dépendant d'un paramètre

$$\frac{dx}{dt} = F(x,u) \qquad (x \in M,\ u \in U)$$

(ii) Une classe de commandes admissibles A dont les éléments sont des fonctions u : $[0,T] \longrightarrow V$.

Avec des hypothèses de régularité sur F, à tout état initial x_o et à toute commande admissible u(t), on associe sur M une réponse $x(t,x_o,u)$, qui est par définition l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\frac{dx(t,x_o,u)}{dt} = F(x(t,x_o,u);u(t)),$$

$$u(0,x_o,u) = x_o \ .$$

On dit que l'état x_1 est *accessible* à x_o s'il existe une commande $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, telle que $x(T,x_o,u) = x_1$.
Un système est dit *transitif* (*contrôlable* en théorie de la commande) si tout état x_1 de M est accessible à tout état x_o de M.

Pour de nombreux systèmes, la classe des commandes admissibles est l'ensemble des fonctions constantes par morceaux à valeurs dans un ensemble U et un système asservi est, alors, la donnée d'une famille de champs de vecteurs sur une variété. De ce point de vue, auquel on se limitera, les propriétés locales de l'ensemble des états accessibles à un état donné ont été bien explorées [11], [15]. Mais le problème de déterminer si un système est transitif, qui est un problème mathématique de type global, est un problème difficile et les résultats obtenus relativement peu nombreux. Ils concernent essentiellement les systèmes où la commande u(t) prend ses valeurs dans un espace euclidien $\mathbb{R}^p$ tout entier ([9], [10], [12], [13]).

On appelle problème de mariage un problème ainsi posé : étant donné une classe $\mathcal{C}$ de champs de vecteurs sur une variété M et un champ X_1 appartenant à $\mathcal{C}$, peut-on lui associer un partenaire X_2 appartenant à $\mathcal{C}$, tel que le couple $\{X_1,X_2\}$ soit transitif sur M ? Un tel problème n'est pas sans signification, puisque sur toute variété paracompacte et connexe, il existe un couple de champs de vecteurs transitif [20]. Un tel problème a été résolu pour la classe des champs de Killing sur $\mathbb{R}^n$ [18].

L'objet essentiel de ce travail est de résoudre le problème de mariage sur $\mathbb{R}^{2n}$, avec la classe des champs de vecteurs affines, avec singularité, et hamiltoniens. Le partenaire est construit explicitement. Il est à trajectoires bornées.

Par ailleurs, nous apportons une réponse partielle au problème de mariage avec la classe des champs de vecteurs invariants à droite sur le groupe symplectique.

Ce travail est structuré en trois chapitres.

Le chapitre 0 contient les définitions et, dans le but de donner au lecteur une certaine indépendance vis à vis de la bibliographie, on y rappelle certains résultats classiques.

Le chapitre I est purement algébrique. On y résout certains problèmes de générateurs sur des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite sur le groupe symplectique affine. De tels problèmes sont intimement liés à notre problème de mariage.

Le chapitre II contient tous les résultats de transitivité sur le groupe symplectique et, finalement, le théorème de mariage.

CHAPITRE 0 - PRÉLIMINAIRES.

(0.1) DEFINITIONS.

On désigne par M une variété analytique, séparée, séparable et connexe et par $D = \{X^i\}$ une famille de champs de vecteurs analytiques sur M. Si X^i appartient à D, on note X^i_t le groupe à un paramètre qu'il engendre ; on rappelle que, si x_o est un état de M, $X_t.x_o$ est, par définition, la valeur à l'instant t de l'unique solution au problème de Cauchy

$$\frac{d(x(t))}{dt} = X(x(t)) \quad , \; x(0) = x_o .$$

On suppose les champs de vecteurs X^i complets, c'est-à-dire X^i_t est défini sur M pour tout réel t.

Désignons par G(D) le sous-groupe du groupe des difféomorphismes de M engendré par les difféomorphismes X^i_t , $X^i \in D$, $t \in R$; G(D) est l'ensemble des produits finis de tels éléments. G(D) opère sur M et l'orbite d'un état x de M relativement à cette action s'appelle l'*orbite* de x et on la note A(x). On vérifie aisément que A(x) est l'ensemble des états accessibles à x du système $\{X^i, -X^i\}$. On dit que le système D est *faiblement transitif* si pour tout état x de M, on a A(x) = M.

Notons S(D) le semi-groupe de difféomorphismes engendré par les éléments X^i_t ($X^i \in D$, $t \geq 0$). S(D) est l'ensemble des produits finis de tels éléments. L'orbite d'un état x relativement à l'action de S(D) est bien l'ensemble $A^+(x)$ des états accessibles à x, que l'on appelle aussi, pour cette raison, *orbite positive* de x. Dire que le système D est transitif équivaut donc à dire que le semi-groupe S(D) opère transitivement sur M. On appelle d'autre part *orbite négative* de x et on note $A^-(x)$ (ensemble des points recalables en x) l'orbite de x relativement à l'action de $S(\{-X_i\})$.

Notons $[X,Y]$ le crochet de Lie YX-XY de deux champs de vecteurs analytiques. On désigne par D_{AL} l'algèbre de Lie engendrée par D, i.e., la plus petite sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs analytiques de M contenant D.
Pour tout état x de M, l'ensemble $D_{AL}(x) = (V(x) \mid V \in D_{A.L.})$ est un sous-espace vectoriel du fibré tangent de M en x.

(0.2) RESULTATS GENERAUX ([11] , [17]).

(0.2.1) On peut munir l'orbite A(x) d'une structure de variété telle que les applications $(t_1,\ldots,t_k) \mapsto X_{t_1}^{i_1} \circ \ldots \circ X_{t_k}^{i_k}.x$ soient analytiques. La dimension de cette variété est égale à la dimension de $D_{A.L.}(x)$.

(0.2.2) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout x de M, la dimension de $D_{A.L.}(x)$ est égale à la dimension de la variété M.
- (ii) le système D est faiblement transitif.
- (iii) Pour tout x de M, $A^+(x)$ est contenue dans l'adhérence de son intérieur.
- (iv) Pour tout x de M, $A^-(x)$ est contenue dans l'adhérence de son intérieur.

(0.2.3) Un système faiblement transitif est transitif si et seulement, pour tout état x, l'orbite positive $A^+(x)$ est dense dans M.

On peut donc, par des méthodes calculatoires, obtenir des renseignements sur les ensembles d'états accessibles. Cependant la seule situation intéressante est dans le cas où le nombre des calculs sont finis, c'est-à-dire lorsque $D_{A.L.}$ est une algèbre de Lie de dimension finie. C'est bien le cas lorsque D est un sous-ensemble d'une classe de champs affines. Cela nous conduit donc à aborder cet aspect particulier.

(0.3) QUELQUES RESULTATS PARTICULIERS.

(0.3.1) Soit G un groupe de Lie d'élément neutre e. L'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite sur G est isomorphe à l'algèbre de Lie $\underline{g}$ du fibré tangent de G en e. Notons exp l'application exponentielle de $\underline{g}$ dans G. Soit X un champ de vecteurs invariant à droite, le groupe à un paramètre qu'il engendre est l'ensemble des translations à gauche $L_{\exp tX}$,i.e., $X_t.g = (\exp tX).g$. Si $D = \{X^i\}$ est une famille de champs de vecteurs invariants à droite l'orbite A(e) est le groupe $\{(\exp t_1 X^{i_1})\dots(\exp t_k X^{i_k})\ ;\ k \in \mathbb{N}\ ,\ X^{i_j} \in D\ ,\ t_k \in \mathbb{R}\}$. C'est l'unique sous-groupe de Lie de G dont l'algèbre de Lie est $D_{A.L.}$ ([12]). L'orbite positive $A^+(e)$ est le semi-groupe $\{(\exp t_1 X^{i_1})\dots(\exp t_k X^{i_k})\ ;\ k \in \mathbb{N},\ X^{i_j} \in D\ ,t_k \geq 0\}$. Le système D est transitif si et seulement si $A^+(e)$ contient un voisinage de l'élément neutre ([12]).

(0.3.2) Si l'algèbre de Lie $D_{A.L.}$ est de dimension finie, alors G(D) est un groupe de Lie. A tout champ de vecteurs X^i de D il existe un unique champ de vecteurs $\tilde{X}^i$ invariant à droite sur G(D) tel que $X^i_t = (\exp t\tilde{X}_i)$ et $D_{A.L.}$ est isomorphe à $\{\tilde{X}^i\}_{A.L.}$ ([9]). Le système D est donc faiblement transitif si et seulement si $\{\tilde{X}^i\}_{A.L.}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie de G(D) opérant transitivement sur M.

(0.3.3) Notons $GL(n,\mathbb{C})$ le groupe de Lie réel des matrices complexes inversibles d'ordre n. L'algèbre de Lie $\underline{gl}(n,\mathbb{C})$ est isomorphe, à l'algèbre de Lie des matrices complexes d'ordre n avec la loi de crochet $[A,B] = AB-BA$.

Si A appartient à $\underline{gl}(n,\mathbb{C})$, exp A coïncide avec l'exponentielle de matrice ordinaire $e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$.

Désignons par $GL(n,\mathbb{R})$ le sous-groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$ des matrices réelles inversibles. L'algèbre de Lie $\underline{gl}(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles d'ordre n.

Soit G un sous-groupe de Lie fermé de $GL(n,\mathbb{R})$. On appelle G groupe affine le sous-groupe fermé de $GL(n+1,\mathbb{R})$ ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & S \end{pmatrix}$ $s \in \mathbb{R}^n$, $S \in G$. L'algèbre de Lie de ce groupe notée $\underline{g} \oplus \mathbb{R}^n$ est donc l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & X \end{pmatrix}$ $V \in \mathbb{R}^n$ $X \in \underline{g}$; c'est l'ensemble des couples (X,V) avec la loi de crochet $[(X,V),(Y,W)] = ([X,Y] , XW-YV)$.

Le GL(n,R) groupe affine opère sur $\mathbb{R}^n$ identifiée à la partie $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbb{R}^n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, avec l'action induite par l'action linéaire de $GL(n+1,\mathbb{R})$, i.e., avec la loi $(S,S).x = S.x+s$. Le groupe à un paramètre du champ de vecteurs affine $X.x+v$ de $\mathbb{R}^n$ est expt(X,v) opérant sur $\mathbb{R}^n$ avec la loi ainsi définie. Un système D de champs affines $\{X^i.x+v^i\}$ est donc faiblement transitif si et seulement si l'algèbre de Lie $\{(X^i,v^i)\}_{A.L.}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe du $GL(n,\mathbb{R})$ groupe affine opérant transitivement sur $\mathbb{R}^n$.

(0.4) GROUPE SYMPLECTIQUE.

On note $\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\}$ la base canonique du produit cartésien réel $\mathbb{R}^{2n}$ et on munit $\mathbb{R}^{2n}$ de sa structure euclidienne canonique.

Notons J l'élément $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ de $GL(2n,\mathbb{R})$, I_n désignant la matrice identité d'ordre n. Le groupe symplectique Sp(n,R) est l'ensemble des matrices S de $GL(2n,\mathbb{R})$ telles que ${}^tSJS = J$.

Le groupe unitaire U(n) est l'ensemble des matrices U de $GL(n,\mathbb{C})$ telles que ${}^t\bar{U}U = I_n$. Le groupe spécial unitaire SU(n) est l'ensemble des matrices de U(n) de déterminant 1. $Sp(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé de $GL(n,\mathbb{R})$, U(n) et SU(n) sont des sous-groupes compacts de $GL(n,\mathbb{C})$. A l'aide de l'homomorphisme injectif $\theta : A+iB \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ on identifie U(n) et SU(n) à des sous-groupes de $Sp(n,\mathbb{R})$ que l'on note de la même façon.

Les algèbres de Lie respectives se calculent aisément ;

$$\underline{sp}(n,R) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -{}^tX_1 \end{pmatrix} \quad X_i \in \underline{g\ell}(n,\mathbb{R}) \ X_2 \text{ et } X_3 \text{ symplectiques} \right\}$$

$$\underline{u}(n) = \left\{ H \in \underline{g}\ (n,\mathbb{C}) \ , \ {}^t\bar{H}+H = 0 \right\}$$

$$\underline{su}(n) = \left\{ H \in \underline{u}(n) \ , \ \text{trace } H = 0 \right\}$$

On appelle champ linéaire hamiltonien de $\mathbb{R}^{2n}$ un champ linéaire X.x où X appartient à $\underline{sp}(n,R)$ et champ affine hamiltonien un champ affine X.x+v où X appartient à $\underline{sp}(n,R)$

CHAPITRE II. RÉSULTATS ALGÉBRIQUES.

Pour qu'une famille de champs de vecteurs soit transitive il est nécessaire qu'elle soit faiblement transitive. D'autre part on a vu en 0.3 que le problème de faible transitivité d'une famille de champs de vecteurs affines hamiltoniens est un problème de générateurs sur l'algèbre de Lie $\underline{sp}(n,R) \oplus R^{2n}$ des champs de vecteurs invariants à droite sur le Sp(n,R) groupe affine. Ce chapitre est donc consacré à ce problème.

Dans I.1 nous définissons sur une algèbre de Lie semi-simple la notion d'élément fortement régulier et d'élément en position génitrice.

Un couple dont l'un des éléments est fortement régulier et l'autre en position génitrice engendre l'algèbre de Lie. Ensuite, nous caractérisons sur l'algèbre de Lie simple $\underline{Sp}(n,\mathbb{R})$ les éléments fortement réguliers de type compact et les éléments en position génitrice.

Enfin dans I.2., nous montrons que sous certaines conditions les couples de générateurs sur $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ servent à construire les couples de générateurs sur $\underline{sp}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{2n}$. Cela nous permet d'établir un critère de faible transitivité adapté au problème de mariage avec la classe des champs de vecteurs affines hamiltoniens .

I.1. CONSTRUCTION DE COUPLES ENGENDRANT UNE ALGEBRE DE LIE SEMI-SIMPLE. APPLICATION A L'ALGEBRE DE LIE $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$.

I.1.1. Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie. On note $[X,Y]$ le crochet de Lie de deux éléments X,Y de $\underline{g}$. Soit X un élément de g, on définit sur $\underline{g}$ l'endomorphisme adX par adX.Y adX.Y = $[X,Y]$. B(X,Y) = trace (adX o adY) définit sur $\underline{g} \times \underline{g}$ une forme bilinéaire symétrique appellée forme de Killing. On dit que $\underline{g}$ est semi-simple si la forme de Killing est non dégénérée. Si, de plus $\underline{g}$ est non réduite à $\{0\}$ et si les seuls idéaux de $\underline{g}$ sont $\{0\}$ et $\underline{g}$ on dit que $\underline{g}$ est simple. Si $\underline{g}$ est semi-simple alors $\underline{g}$ est isomorphe au produit de tous ses idéaux simples.

I.1.2. RAPPELS ([7]).

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Soit a une sous-algèbre de Cartan de $\underline{g}$, i.e., a est une sous-algèbre abélienne maximale de $\underline{g}$ telle que si A appartient à a, adA est semi-simple. Alors il existe un unique sous-espace vectoriel $\underline{b}$ de $\underline{g}$ tel que $\underline{g} = \underline{a} \oplus \underline{b}$ et que, pour tout élément A de $\underline{a}$, adA laisse $\underline{b}$ stable. L'algèbre de Lie engendrée par $\underline{b}$ est $\underline{g}$. On dit que la somme directe $\underline{a} \oplus \underline{b}$ est la décomposition canonique de $\underline{g}$ (relativement à $\underline{a}$).

Un élément A de $\underline{a}$ est appelé fortement régulier si la restriction de adA à $\underline{b}$ est un isomorphisme cyclique. Un élément B de $\underline{g}$ est dit en position génitrice si, pour tout élément A de $\underline{a}$ fortement régulier, l'algèbre de Lie engendrée par $(adA.B,\dots,ad^kA.B,\dots)$ est $\underline{g}$.

I.1.3. PROPOSITION (1 théorème de Kuranishi). - *Soit* $\underline{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple,* A *un élément fortement régulier et* B *un élément en position génitrice alors l'algèbre de Lie engendrée par* $\{A,B\}$ *est* $\underline{g}$.

La preuve est évidente. On sait donc, sur toute algèbre de Lie semi-simple, dans la mesure où l'on a exhibé une sous-algèbre de Cartan, construire des couples de générateurs. L'algèbre de Lie sp(n,R) est simple. Elle admet une sous-algèbre de Cartan compacte. On va donc caractériser les éléments fortement réguliers et les éléments en position génitrice associés.

I.1.4. NOTATIONS.

On rappelle (c.f.0.4) que si $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & {}^t\!-X_1 \end{pmatrix}$, X_i désignant des matrices d'ordre n, X_2 et X_3 étant symétriques ; $\underline{u}(n)$ est l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques de la forme $\begin{pmatrix} U & V \\ -V & U \end{pmatrix}$ U désignant une matrice antisymétrique d'ordre n et V une matrice symétrique d'ordre n ; $\underline{u}(n) = \mathbb{R}\, J \oplus \underline{su}(n)$.
Désignons par $\underline{s}$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de la forme $\begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}$ M et N désignant des matrices symétriques d'ordre n.
Notons X_{ij} la matrice d'ordre n dont le coefficient de la i-ème ligne, j-ème colonne est 1, les autres coefficients étant tous nuls.
Posons $A_k = \begin{pmatrix} 0 & X_{kk} \\ -X_{kk} & 0 \end{pmatrix}$ $1 \leqslant k \leqslant n$ et notons $\underline{a}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs A_k.

Désignons par $\underline{b}$ l'espace vectoriel engendré par les éléments ainsi ainsi définis :

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & X_{ij}-X_{ji} \\ X_{ji}-X_{ij} & 0 \end{pmatrix} \qquad F_{ij} = \begin{pmatrix} X_{ij}-X_{ji} & 0 \\ 0 & X_{ij}-X_{ji} \end{pmatrix} \quad 1 \leq i < j \leq n ,$$

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} X_{ij}+X_{ji} & 0 \\ 0 & -X_{ij}+X_{ji}) \end{pmatrix} \qquad H_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & X_{ij}+X_{ji} \\ X_{ij}+X_{ji} & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq i < j \leq n ,$$

$$G_{ii} = \begin{pmatrix} X_{ii} & 0 \\ 0 & -X_{ii} \end{pmatrix} \qquad H_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & X_{ii} \\ X_{ii} & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \leq i \leq n .$$

I.1.5. PROPOSITION. - *i)* $\underline{a}$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\underline{Sp}(n,\mathbb{R})$

ii) $\underline{Sp}(n,\mathbb{R}) = \underline{a} \oplus \underline{b}$ *est la décomposition canonique associée.*

iii) Soit A *un élément de* $\underline{a}$ *s'écrivant* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k$.

Alors

$$\mathrm{adA}.E_{ij} = -(\alpha_i-\alpha_j)F_{ij} \qquad \mathrm{adA}.F_{ij} = (\alpha_i-\alpha_j)\ E_{ij} \quad 1 \leq i < j \leq n ,$$

$$\mathrm{adA}.G_{ij} = -(\alpha_i+\alpha_j)H_{ij} \qquad \mathrm{adA}.H_{ij} = (\alpha_i+\alpha_j)G_{ij} \quad 1 \leq i < j \leq n ,$$

$$\mathrm{adA}.G_{ii} = -2\alpha_i\ H_{ii} \qquad \mathrm{adA}.H_{ii} = 2\alpha_i\ G_{ii} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Les valeurs de adA *sur* $\underline{b}$ *sont les nombres complexes* $\pm\, i(\alpha_k-\alpha_p)$ $\pm\, i(\alpha_k+\alpha_p)$ $1 \leq k < p \leq n$, $\pm\, i\ 2\alpha_k$ $1 \leq k \leq n$. A *est fortement régulier si et seulement si elles sont deux à deux distinctes.*

iv) Soit B *un élément de* $\underline{p}(n,\mathbb{R})$. B *s'écrit donc*

$$C + \Big(\sum_{1 \leq i < j \leq n} e_{ij}E_{ij}+f_{ij}F_{ij}\Big)+\Big(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} g_{ij}G_{ij}+h_{ij}H_{ij}\Big)$$

où C *appartient à* $\underline{a}$. *Désignons par* $\Delta_1(B)$ *l'ensemble des couples* (i,j) *tels que* $(e_{ij},f_{ij}) \neq (0,0)$ *et par* $\Delta_2(B)$ *ceux tels que* $(g_{ij},h_{ij}) \neq (0,0)$.

Alors :

a) Si A *est un élément fortement régulier de* $\underline{a}$ *, l'espace vectoriel engendré par* $(\mathrm{ad}A.B,\dots,\mathrm{ad}^k A.B,\dots)$ *est la somme directe* $\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_1(B)} \mathbb{R}E_\alpha \oplus \mathbb{R}F_\alpha\right) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_2(B)} \mathbb{R}G_\alpha \oplus \mathbb{R}H_\alpha\right)$.

b) Si l'algèbre de Lie engendrée par la Famille $\{E_\alpha, F_\alpha\ \alpha\in\Delta_1(B)\}$ *de vecteurs de* $\underline{su}(n)$ *est* $\underline{su}(n)$ *et si* $\Delta_2(B)$ *est non vide, alors* B *est en position génitrice.*

La preuve de tous ces résultats est élémentaire.

I.1.6. REMARQUES.

Un élément A de $\underline{a}$ s'écrivant $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k$, où les nombres α_k sont rationnellement indépendants, est un élément fortement régulier. Déterminer si un élément de $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ est en position génitrice équivaut donc à un calcul élémentaire de crochets de Lie. La condition (iv)b) signifie que dans certains cas on peut se contenter d'un calcul rendu encore plus élémentaire.

I.2. UN CRITERE DE FAIBLE TRANSITIVITE.

I.2.1. PRELIMINAIRES.

On rappelle que l'on note $\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. Soit $n_1,\dots,n_k$ des entiers positifs non nuls, tels que $n_1+\dots+n_k = n$. Désignons par $\mathbb{R}^{2n_i}$, $1\leqslant i\leqslant k$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$ engendré par les vecteurs $\{u_{n_1+\dots+n_{i-1}+1},\dots, u_{n_1+\dots+n_i}, v_{n_1+\dots+n_{i-1}+1},\dots,v_{n_1+\dots+n_i}\}$. Notons H le sous-groupe de $Sp(n,\mathbb{R})$ qui laissent stables les k espaces vectoriels $\mathbb{R}^{2n_1},\dots,\mathbb{R}^{2n_k}$. H est, de façon naturelle, isomorphe au produit direct des k groupes $Sp(n_1,\mathbb{R}),\dots,Sp(n_k,\mathbb{R})$.

L'algèbre de Lie h de H est donc isomorphe à l'algèbre de Lie produit direct $\underline{sp}(n_1,R) \oplus \ldots \oplus \underline{sp}(n_k,R)$. Elle est donc semi-simple. On vérifie que $\underline{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\underline{h}$ et $\underline{h} = \underline{a} \oplus (\underline{h} \cap \underline{b})$ est la décomposition canonique associée. On note $\underline{h} \oplus \mathbb{R}^{2n}$ l'algèbre de Lie du H groupe affine (c.f. 0.3).

I.2.2. PROPOSITION. - *Soit un élément de* $\underline{a}$, $B = (B^1,\ldots,B^k)$ *un élément de* $\underline{h} \sim \underline{sp}(N_1,\mathbb{R}) \oplus \ldots \oplus \underline{sp}(n_k,\mathbb{R})$ *et* $b=(b^1,\ldots,b^k)$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^{2n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^{2n_k}$.

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) A *est un élément fortement régulier sur* $\underline{h}$.

(ii) Spectre $\mathrm{ad}_{|\underline{h} \cap \underline{b}} A \cap$ Spectre $A = \emptyset$.

(iii) B *est en position génitrice sur* $\underline{h}$ *(relativement à* $\underline{a}$*)*.

(iv) b^i *est non nul pour* $1 \leq i \leq n$.

Alors l'algèbre de Lie engendrée par le couple $\{(A,0),(B,b)\}$ *est l'algèbre de Lie* $\underline{h} \oplus \mathbb{R}^{2n}$. *Le couple de champs de vecteurs affines hamiltoniens* $\{A.x,B.x+b\}$ *est faiblement transitif sur* $\mathbb{R}^{2n}$.

PREUVE. - Montrons que l'algèbre de Lie engendrée par le couple $\{(A,0),(B,b)\}$ est l'algèbre de Lie $\underline{h} \oplus \mathbb{R}^{2n}$. A est un opérateur semi-simple dont on note $\pm i\alpha_k$ $1 \leq k \leq n$ les valeurs propres imaginaires pures. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda^2+\alpha_k^2)$.

Désignons par ailleurs par $\pm i\alpha(A)$ les valeurs propres de la restriction de adA à $\underline{h} \cap \underline{b}$ et par (X_α,Y_α) les couples de $\underline{h} \cap \underline{b}$ tels que $\mathrm{adA}.X_\alpha = -\alpha(A)Y_\alpha$, $\mathrm{adA}.Y_\alpha = \alpha(A)X_\alpha$ (c.f. I.1.5). Puisque $P_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton), un calcul élémentaire de crochets de Lie montre que $(P_A(\mathrm{ad}_{|\underline{h} \oplus \mathbb{R}^{2n}}(A,0))(B,b) = ((P_A(\mathrm{ad}_{|\underline{h}}A)).B,(P_A(A)).b) =$

$= ((P_A(\mathrm{ad}_{|\underline{h}}A)).B,0)$.

Il est aisé de vérifier que $(P_A(\mathrm{ad}A)).X_\alpha = c_\alpha X_\alpha$, $(P_A(\mathrm{ad}A)).Y_\alpha = c_\alpha Y_\alpha$ où c_α est le coefficient $\prod_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 - \alpha^2(A))$. Il est non nul d'après (ii). Puisque B est en position génitrice sur $\underline{h}$ d'après (iii), on en déduit donc que $((P_A(\mathrm{ad}_{\underline{n}}A)).B,0)$ en position génitrice sur $\underline{h}\oplus 0$. Or A est fortement régulier sur $\underline{h}$ d'après (i), l'algèbre de Lie $\{(A,0),(B,b)\}_{A.L.}$ contient donc l'algèbre de Lie semi-simple $\underline{h}\oplus 0$ d'après I.1.3. En faisant opérer $\underline{h}\oplus 0$, à l'aide du crochet de Lie, sur l'élément $(0,b)$, b satisfaisant (iv), on vérifie que $\{(A,0),(B,b)\}_{A.L.}$ contient aussi $0\oplus\mathbb{R}^{2n}$. On a donc bien montré l'assertion.

L'algèbre de Lie $\underline{h} \oplus \mathbb{R}^{2n}$ est l'algèbre de Lie du H groupe affine. Ce groupe opère transitivement sur $\mathbb{R}^{2n}$ et le couple $\{A.x,\ B.x+b\}$ est donc faiblement transitif sur $\mathbb{R}^{2n}$ d'après 0.3.3.

I.2.3. REMARQUES. -

Un élément A de $\underline{a}$ s'écrivant $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k$, où les nombres α_k sont rationnellement indépendants, vérifie les conditions (i) et (ii).

Un élément $B = (B^1,\dots,B^k)$ de $\underline{h}$ est en position génitrice sur $\underline{h}$ si et seulement si B^i est en position génitrice sur $\underline{sp}(n_i,\mathbb{R})$ $1 \leq i \leq k$.

Si $\underline{h}$ est une algèbre de Lie semi-simple quelconque le critère I.2.2 est susceptible de s'extrapoler même si la condition (ii) n'est pas compatible avec la structure de l'algèbre de Lie semi-simple.

CHAPITRE II. SUR DES COUPLES DE CHAMPS DE VECTEURS TRANSITIFS.

Ce chapitre est consacré à la résolution du problème de mariage sur sur $\mathbb{R}^{2n}$, avec la classe des champs de vecteurs affines, hamiltoniens et avec singularité.

Dans II.1 nous reprenons [4] pour énoncer le théorème de réduction d'un champ linéaire hamiltonien, qui n'est autre qu'une jordanisation adaptée à la géométrie symplectique de $\mathbb{R}^{2n}$.

II.2 ne contient que des critères de transitivité élémentaires.

Sur un groupe de Lie simple non compact, les problèmes de transitivité avec une famille de champs de vecteurs invariants à droite sont des problèmes heuristiquement intéressants et donc très étudiés. Nous obtenons à cet égard dans II.3 un résultat original. Mais ce paragraphe est, dans le cadre strict du problème de mariage, avant tout un louvoiement. En effet, de façon générale, il nous semble difficile d'aborder de front un problème de transitivité avec une classe de champs de vecteurs affines. D'où l'idée de résoudre dans une première étape le problème avec la classe des champs de vecteurs linéaires, un champ de vecteurs affine pouvant s'interpréter grossièrement comme un champ de vecteurs linéaire perturbé.

Toutes les conditions objectives pour la démonstration du théorème de mariage sont alors réunis. Cela est réalisé explicitement dans II.4.

II.1. FORME NORMALE D'UN CHAMP DE VECTEURS LINEAIRE HAMILTONIEN

On commence par définir intrinsèqeement les champs de vecteurs irréductibles. Puis on donne leur forme normale.

Enfin on énonce le théorème de réduction en II.1.5.

I.1.1. DEFINITIONS.

Soit X un élément de $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$. On dit que X est hyperbolique réel si les diviseurs élémentaires de X forment un couple du type

$\{(\lambda-\alpha)^n,(\lambda+\alpha)^n\}\ \alpha>0$. X est dit hyperbolique réel dégénéré si $n=2p+1$ $p>1$ et si λ^{2p+1} est un diviseur élémentaire de X avec une multiplicité double. On dit que X est hyperbolique complexe si $n=2p$ et si les diviseurs élémentaires de X forment un couple du type $\{((\lambda-\alpha)(\lambda-\bar{\alpha}))^p\ ,\ ((\lambda+\alpha)(\lambda+\bar{\alpha}))^p\}\ \alpha=\rho+i\theta\quad \rho,\theta>0$. On dit que X est parabolique si λ^{2n} est le diviseur élémentaire de X. On dit que X est elliptique si le seul diviseur élémentaire de X est de type $(\lambda^2+\lambda^2)^n\ \alpha>0$.

II.1.2. DEFINITION. - *Deux elements* X,X' *de* $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ *sont dits équivalents,* $X\sim X'$, *s'il existe* P *appartenant à* $Sp(n,\mathbb{R})$ *tel que* $X'=P^{-1}XP$.

II.1.3. FORMES NORMALES SIMPLES.

Soit X un élément de $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$.

a) X est hyperbolique réel de diviseurs élémentaires $\{(\lambda-\alpha)^n,(\lambda+\alpha)^n\}$, $\alpha>0$ si et seulement si :

$$X\sim\begin{bmatrix} B_o & 0 \\ 0 & -{}^tB_o \end{bmatrix}\qquad B_o=\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

b) X est hyperbolique réel dégénéré si et seulement si :

$$X\sim\begin{bmatrix} B_o & 0 \\ 0 & -{}^tB_o \end{bmatrix}\qquad B_o=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

c) X est hyperbolique complexe de diviseurs élémentaires $\{((\lambda-\alpha)(\lambda-\bar{\alpha}))^p \ , \ ((\lambda+\alpha)(\lambda+\bar{\alpha}))^p\}$ $\alpha = \rho+i\theta$ $\rho,\theta > 0$ si et seulement si :

$$X \sim \left[\begin{array}{c:c} B_0 & 0 \\ \hdashline 0 & -{}^tB_0 \end{array}\right] \quad B_0 = \begin{bmatrix} D_2 & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & D_2 \end{bmatrix} \quad D_2 \begin{bmatrix} \rho & \theta \\ -\theta & \rho \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) X est parabolique si et seulement X est équivalent à l'un des deux champs :

$$\pm \left[\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} 0 & & 0 & 1 \\ & & ⋰ & \\ & ⋰ & & \\ 0 & 1 & & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & & & 1 \\ & & ⋰ & \\ & ⋰ & & \\ 1 & & & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right]$$

Les deux champs X et -X ne sont pas équivalents.

e) Si $n > 1$, X est elliptique de diviseur élémentaire $(\lambda^2+\alpha^2)^n$ $\alpha > 0$ si et seulement si X est équivalent à l'un des deux champs :

$$\pm \left[\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} & 0 & 1 & \alpha \\ & 1 & ⋰ & \\ & ⋰ & & \\ \alpha & & & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & & & -\alpha \\ & & & -1 \\ & & & 0 \\ -\alpha & -1 & & \end{matrix} & 0 \end{array}\right]$$

Si $n=1$, X est elliptique de diviseur élémentaire $(\lambda^2+\alpha^2)$ $\alpha > 0$ si et seulement si X est équivalent à l'un des deux champs :

Si $\alpha \neq 1$ $\pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix}$, si $\alpha = 1$ $\pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$

Les deux champs X et -X ne sont pas équivalents.

PREUVE. - Tous ces résultats ne sont qu'une légère modification de ceux de [4] théorème 5.1.

II. 1.4. REMARQUES. - Si X est hyperbolique, les diviseurs élémentaires de X déterminent la forme normale de façon univoque. En particulier les champs X et -X sont équivalents. Par contre, si X est parabolique ou elliptique, à chaque diviseur élémentaire est associé deux classes d'équivalence définies par X et -X.

Tout opérateur linéaire L s'écrit de façon unique S+N, où S désigne un opérateur semi-simple et N un opérateur nilpotent tel que SN = NS. Si L appartient à $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ il en est de même de S et de N, c'est d'ailleurs une propriété des sous-algèbres de Lie semi-simples de $\underline{g}(n,\mathbb{R})$. Le lecteur peut vérifier que les formes normales font apparaître clairement la partie semi-simple et la partie nilpotente.

II. 1.5. FORME NORMALE ([4] 5.1). - Soit X un élément de $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ sans diviseur élémentaire du type λ. Alors il existe des entiers positifs non nuls $n_1,\dots,n_k$, $n_1+\dots+n_k = n$, de sorte que, avec les notations de I.2.1, X soit équivalent à un élément $B = (B^1,\dots,B^k)$ de $\underline{h}$, B^i désignant sur $\underline{sp}(n_i,\mathbb{R})$ une des formes normales décrites en II.1.3.

II. 1.6. DEFINITION. - *Les éléments de* $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ *définis en II.1.1. sont donc irréductibles au sens de II.1.5. On les appelle pour cette raison éléments irréductibles.*

II.2 CRITERES DE TRANSITIVITE. - Le problème de déterminer si une famille de champs de vecteurs est transitive est un problème difficile. En effet on ne dispose pas de conditions suffisantes de transitivité On retiendra donc le critère qui va suivre, on verra en effet qu'il est à la clef de tous les résultats de transitivité du paragraphe II.3.

II.2.1. CRITERE..- Soit $D = \{X^i\}$ une famille de champs de vecteurs (analytiques et complets) sur une variété M. On rappelle que X^i_t désigne le groupe à un paramètre engendré par X^i. Alors la famille D est transitive si et seulement si :

(i) la famille D est faiblement transitive.

(ii) Pour tout état x de M, tout indice i et tout réel $t > 0$, $X^i_{-t}(x)$ appartient à l'adhérence de l'orbite positive $A^+(x)$ de x.

PREUVE. - Ces conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soit x_o, x_1 deux états de M, montrons que x_1 est accessible à x_o. D'après (i) et 0.2.2. il existe un ouvert U de sorte que x_1 soit accessible à tous les états de U. Soit y_1 un état de U , d'après (i) il existe une suite $X^{i_1}_{t_1}, \dots, X^{i_k}_{t_k}$, $t_k \in R$, telle que $X^{i_k}_{t_k} \circ \dots \circ X^{i_1}_{t_1} \cdot x_o = y_1$. Soit m le nombre d'indices i tels que $t_i < 0$ et i_p le premier indice de la suite $i_1, \dots i_k$ tel que $t_p < 0$. Notons $Z_1 = X^{i_{p-1}}_{t_{p-1}} \circ \dots \circ X^{i_1}_{t_1} : x_o$, $Z_2 = X^{i_p}_{t_p} \cdot Z_1$ et Z le difféomorphisme $X^{i_k}_{t_k} \circ \dots \circ X^{i_{p-1}}_{t_{p-1}}$. Puisque $z_2 = X^{i_p}_{t_p} \cdot z_1$ et que $Z^{-1}(U)$ est un voisinage de z_2 , il résulte de (ii) qu'il existe un état z_3 de $Z^{-1}(U)$ accessible à z_1 et donc à x_o. L'état de U, $y_2 = Z \circ z_3$ est donc tel qu'il existe une suite $X^{j_1}_{S_1}, \dots, X^{j_p}_{S_p}$ telle que $X^{j_p}_{S_p} \circ \dots \circ X^{j_1}_{S_1} \cdot x_o = y_2$ et le nombre d'indices i tels que $s_i < 0$ est m-1. En répétant un nombre m de fois cette opération, on montre donc qu'il existe un état y_{m+1} de U accessible à x_o. L'état x_1 étant accessible à y_{m+1} , x_1 est donc accessible à x_o.

II. 2.2. REMARQUE. - Soit X un champ de vecteurs complet sur une variété M. Un état x de M est dit Poisson-stable si, pour tout voisinage V_x de x, $\forall T > 0$, $\exists t \geq T$ tel que $X_t(x) \in V_x$, $X_{-t}(x) \in V_x$.

Le champ de vecteurs est dit Poisson-stable si l'ensemble de ses points Poisson-stables est dense sur M. C'est un résultat classique ([17] II.4.4) qu'une famille de champs de vecteurs (analytiques) Poisson-stables est transitive si et seulement si elle est faiblement transitive. Ce résultat a servi de modèle pour établir le critère, la démonstration de celui-ci reprenant le point essentiel de la démonstration de [17] II. 2.4.

Sur une variété produit, certains champs de vecteurs sont tels qu'ils définissent sur chaque variété composante un champ de vecteurs. Une famille de tels champs de vecteurs définie sur chaque variété composante une famille de champs de vecteurs. Le critère suivant va montrer que dans un cas particulier la famille de champs de vecteurs est transitive si chaque famille projetée est transitive sur sa variété respective.

II.2.3. CRITERE. - Notons par $M = (M^1,\dots,M^k)$ une variété produit de variétés M_i. Désignons par $\mathcal{P}$ la classe des champs de vecteurs de M ayant la propriété suivante : si Z appartient à $\mathcal{P}$, alors Z engendre sur chaque M^i un groupe à un paramètre Z^i_t tel que le groupe à un paramètre Z_t de Z soit défini par $Z_t\ (m_1,\dots,m_k) = (Z^1_t.m_1,\dots,Z^k_t.m_k)$. Soit X un champ de vecteurs de $\mathcal{P}$, X s'écrit donc $(X^1,\dots,X^k)$ X^i désignant un champ de vecteurs sur M_i. Notons $Y = \left\{ Y^i_j\ ;\ j\in [1,n_i], i\in [1,k]\right\}$ une famille de champs de vecteurs de $\mathcal{P}$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

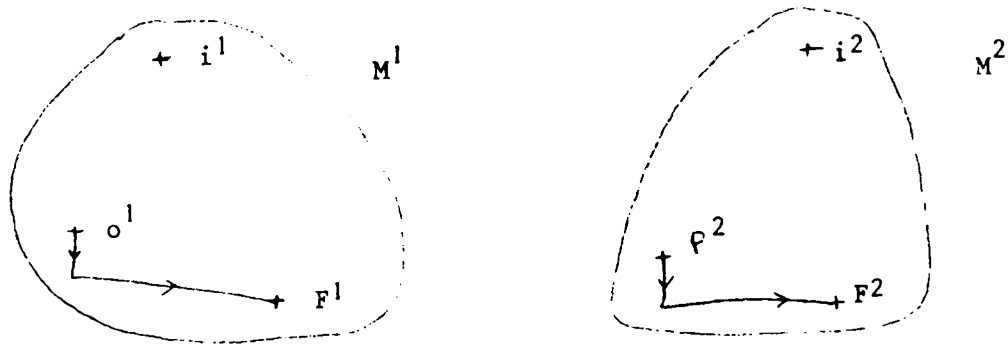
(i) il existe $o^1,\dots,o^{k-1}$, $o\in M^i$ tels que $X^i(o^i)=0$ pour $i\in [1,k-1]$.

(ii) Le champ de vecteurs Y^i_j s'écrit $(0,\dots,0,\ \bar{Y}^i_{j_i}$ (i-ème position $0,\dots,0)$ $\bar{Y}^i_j$ désignant un champ de vecteurs sur M^i.

Alors la famille de champs de vecteurs $\{X,Y\}$ est transitive si et seulement si chaque famille $\left\{X^i,\bar{Y}^i_j\ ,\ j\in [1,n_i]\right.$ est transitive sur M^i.

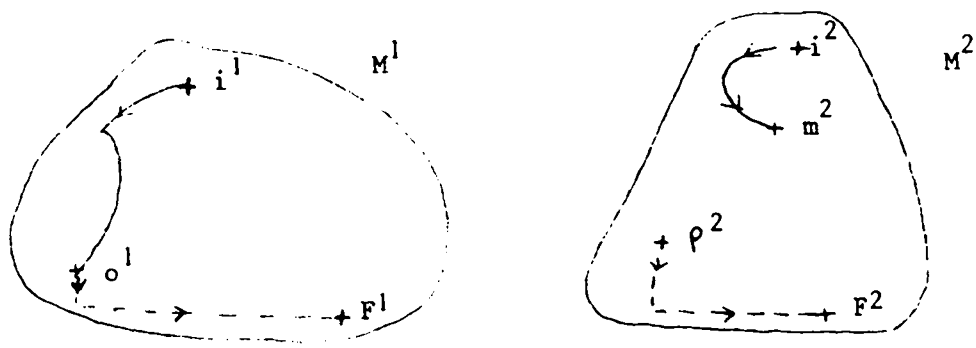
PREUVE. - La condition est évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Il n'est pas restrictif de supposer k=2, le cas général se traitant par récurrence de façon analogue. Soit $i=(i^1,i^2)$, $f=(f^1,f^2)$ deux états de $M=(M^1,M^2)$. Montrons que f est accessible à i; Distinguons 3 étapes :

ETAPE 1.



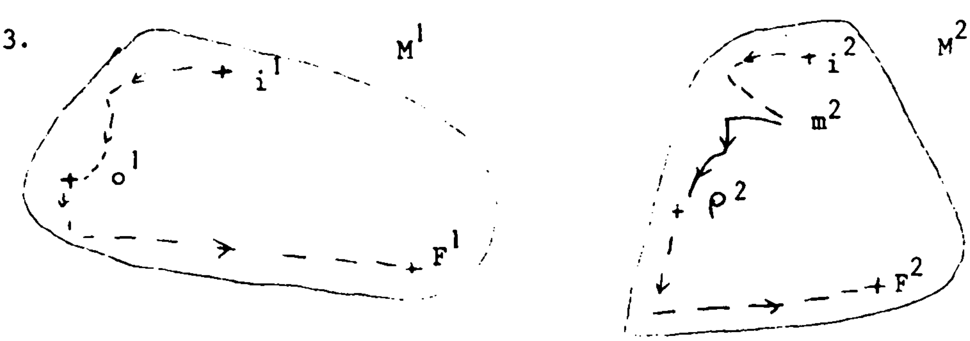
La famille de champs de vecteurs $\{X^1,\bar{Y}^1_j\}$ est transitive sur M^1, il existe donc un état ρ^2 de M^2 tel que (f^1,f^2) soit accessible à (o^1,ρ^2).

ETAPE 2.



La famille de champs de vecteurs $\{X^1,\bar{Y}^1_j\}$ est transitive sur M^1, il existe donc un état m^2 de M^2 tel que (o^1,m^2) soit accissible à (i^1,i^2).

ETAPE 3.



La famille de champs de vecteurs $\{X^2, \bar{Y}_j^2\}$ est transitive sur M^2. D'autre part o^1 est position d'équilibre de tous les champs de vecteurs de la famille $\{X, Y_j^2\}$ projetés sur M^1. Le point (o^1, ρ^2) est donc accessible à (o^1, m^2).

CONCLUSION. - A l'issue des trois étapes on a bien montré que F est accessible à i.

II.3 COUPLES DE VECTEURS TRANSITIFS SUR LE GROUPE SYMPLECTIQUE ET SUR $\mathbb{R}^{2n} - \{o\}$.

II. 3.1. DEFINITION. -*Les notations utilisées sont celles de I.1.4. Notons* T^n *le tore engendré par les éléments* $\exp tA_k$ $t \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. *Soit* A *un élément de* $\underline{a}$, A *s'écrit donc* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k$
On dit que A *est un partenaire priviligié si* A *est à trajectoire dense dans le tore* T^n *,i.e., l'adhérence (relativement à la topologie de* $Sp(n,\mathbb{R})$ *de l'ensemble* $\{\exp tA,\ t \in \mathbb{R}\}$ *est* T^n.
On rappelle que cela équivaut à dire que les nombres α_k *sont rationnellement indépendants.*

II.3.2. PROPOSITION. - *Soit* A *un partenaire priviligié et* B *un élément de* $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ *irréductible sous forme normale. Alors* A *est un élément fortement régulier de* $\underline{a}$ *et* B *est en position génitrice relativement à* $\underline{a}$. *L'algèbre de Lie* $\{A,B\}_{A.L.}$ *est donc* $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$.

PREUVE. - A est fortement régulier d'après I.1.6. Montrons que B est en position génitrice. On applique I.1.5 (iv)b). Si B est hyperbolique réel ou réel dégénéré $\Delta_1(B) = \{(i,i+1)\}$, si B est hyperbolique complexe. $\Delta_1(B) = \{(2i+1,2i+2),\ (i,i+2)\}$, si B est parabolique $\Delta_1(B) = \{(i,j);i+j=n+1 \text{ ou } i+j=n+2\}$, si B est elliptique $\Delta_1(B) = \{(i,j)\ ;\ i+j = n \text{ ou } n+1 \text{ ou } n+2\}$.

Un calcul élémentaire de crochets de Lie montre que, si un seul élément p du couple (i,j) coïncide avec un seul élément q du couple (k,ℓ), alors l'algèbre de Lie $\{E_{ij},F_{ij},E_{uv},F_{uv}\}_{A.L.}$ contient le couple $\{E_{uv},F_{uv}\}$ (u,v) étant l'unique couple de l'ensemble $\{i,j,k,\ell\}$ auquel on a retiré $\{p,q\}$ et tel que $1 \leq u \leq v \leq n$. On vérifie alors que dans les 4 cas ci-dessus $\{E_\alpha, F_\alpha ; \alpha \in \Delta_1(B)\}_{A.L.} = \underline{su}(n)$.

II.3.3 THEOREME. - *Soit* A *un partenaire privilégié et* B *un élément de* $\underline{sp}(n,R)$ *sous forme normale, de type hyperbolique (réel, réel dégénéré ou complexe) ou de type elliptique n impair. Alors le couple* $\{A,B\}$ *de champs de vecteurs invariants à droite sur* $Sp(n,\mathbb{R})$ *, est transitif sur* $Sp(n,R)$.

PREUVE. - Si n=1 et si B est de type elliptique alors $\{A,B\}$ est un couple de champs de vecteurs Poisson-stables, faiblement transitif sur $Sp(n,\mathbb{R})$ d'après II.3.2, il est donc transitif par application de II.2.2. Traitons les cas restants

B est donc l'un des éléments

$$B = \left[\begin{array}{c:c} B_o & 0 \\ \hdashline 0 & \end{array}\right] \qquad B_o = \begin{bmatrix} \rho & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \rho\,1 \end{bmatrix} \rho \geq 0 \text{ ou } B_o = \begin{bmatrix} D_2 & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & D_2 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \rho & \theta \\ -\theta & \rho \end{bmatrix} \quad , \; B = \varepsilon \left[\begin{array}{ccc:ccc} & & & 0 & & 1 \; \alpha \\ & 0 & & 1 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & \alpha & & 0 \\ \hdashline & & -\alpha & & & \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & -1 & & 0 & \\ -\alpha & -1 & 0 & & & \end{array}\right] .$$

Désignons par S l'élément de $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ ainsi défini :

si B est hyperbolique posons $S = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \rho & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & \rho & & & \\ \hdashline & & & -\rho & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -\rho \end{array}\right]$

Si B est elliptique posons $S = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & & 0 & \alpha \\ & & \alpha & 0 \\ \hline 0 & -\alpha & & 0 \\ -\alpha & 0 & & \end{array}\right]$.

Désignons par M l'élément B-M. Alors $[S,M] = 0$ et donc $\exp sB = (\exp sS)(\operatorname{ext} sM)$ $\forall s \in R$.
Puisque A est à trajectoire dense dans le tore T^n et que le couple de champs de vecteurs $\{A,B\}$ est faiblement transitif sur $Sp(n,\mathbb{R})$ d'après II.3.2 il résulte de 0.2.4 que le couple $\{A,B\}$ est transitif sur $Sp(n,R)$ si et seulement la famille de (n+1) champs de vecteurs $D = \{A_k \quad 1 \leq k \leq n, B\}$ est transitive sur $Sp(n,\mathbb{R})$. Montrons ce résultat. Notons $A^+(\Gamma)$ l'orbite positive, pour le système D, de l'élément neutre I de $Sp(n,\mathbb{R})$. La famille $\{A_k \quad 1 \leq k \leq n\}$ est transitive sur T^n, $A^+(\Gamma)$ est donc le semi-groupe engendré par T^n et $\exp tB \quad t \geq 0$. Appliquons II.2.1 et 0.3.1, D est transitive si et seulement si $\exp -tB$ appartient à $A^+(I)$ $\forall t > 0$. Montrons ce résultat.

On rappelle que l'on note $\{u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. Si I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2, notons par P l'élément de T^n ainsi défini : si B est hyperbolique réel ou elliptique, $P = I_2$ sur $\{u_{2i+1},v_{2i+1}\}$, $P = -I_2$ sur $\{u_{2i}, v_{2i}\}$, si B est hyperbolique complexe posons $P = (P_1P_2)$ où $P_1=I_2$ sur $\{u_{2i+1},v_{2i+1}\}$, $P_1=-I_2$ sur $\{u_{2i},v_{2i}\}$, $P_2=-I_2$ sur $\{u_1,u_2\}$, $\{v_1,v_2\}$, $\{u_5,u_6\}$, $\{v_5,v_6\}$,...,
$P_2 = I_2$ sur $\{u_3,u_4\}$, $\{v_3,v_4\}$, $\{u_7,u_8\}$, $\{v_7,v_8\}$,....

* On observe alors que $P^{-1}BP = S-M$. L'élément $\exp t(S-M) = P^{-1}(\exp tB)P$ appartient à $A^+(I)$. Puisque $[S,M] = 0$, l'élément $\exp tS = (\exp t/2(S+M))(\exp t/2(S-M))$ appartient donc à $A^+(I)$.

* L'élément $\exp -tS$ appartient aussi à $A^+(I)$. En effet si B elliptique, $\exp tS$ est périodique et si B est hyperbolique alors $\exp -tS$ s'écrit aussi $J^{-1}(\exp tS)J$.

* L'élément $\exp -tM = (\exp t(S-M))(\exp -tS)$ appartient donc aussi à $A^+(I)$.

En conclusion, $\exp -tB = (\exp -tS)(\exp -tM)$ appartient aussi à $A^+(I)$. La démonstration du théorème est donc achevée.

III.3.4. PROPOSITION. - *Soit* A *un partenaire privilégié et* B *un élément de* $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ *parabolique, sous forme normale. Alors le couple* $\{A.x, B.x\}$ *de champs de vecteurs linéaires hamiltoniens est transitif sur* $\mathbb{R}^{2n}-\{0\}$.

PREUVE. - B est donc l'un de deux éléments :

$$\varepsilon \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} & & & 0 \\ & 0 & & 1 \\ & & {\cdot}^{\cdot^{\cdot}} & \\ 0 & 1 & & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & & 1 \\ 0 & {\cdot}^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & 0 & \end{matrix} & 0 \end{array}\right] \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Puisque le couple $\{A,B\}$ de champs de vecteurs invariants à droite sur $Sp(n,\mathbb{R})$ est faiblement transitif sur $Sp(n,\mathbb{R})$ d'après II.3.2. et puisque $Sp(n,\mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathbb{R}^{2n}-\{0\}$, le couple $\{A.x, B.x\}$ de champs de vecteurs est donc faiblement transitif sur $\mathbb{R}^{2n}-\{0\}$. Puisque A est à trajectoire dense dans T^n, il résulte alors de 0.2.4. que le couple $\{A.x, B.x\}$ est transitif sur $\mathbb{R}^{2n}-\{0\}$ si et seulement si la famille D de $(n+1)$ champs de vecteurs $\{A_k.x \ \ 1 \leq k \leq n \ , \ B.x\}$ est transitive sur $R^{2n},\{0\}$. On peut évidemment supposer que $\varepsilon = +1$. La famille $\{A_k \ \ 1 \leq k \leq n\}$ est transitive sur T^n. D'après II.2.1., D est donc transitive sur $R^{2n}-\{0\}$ si $\forall y_o \in \mathbb{R}^{2n}-\{0\}$ $\forall t > 0$, $(\exp -tB) \cdot y^o$ appartient à l'orbite positive $A^+(y^o)$ de l'état y^o.

Montrons ce résultat.

Faisons la remarque suivante : y^o s'écrit $(p_1^o,\dots,p_n^o,q_1^o,\dots,q_n^o)$. La trajectoire $y(s) = (p_1(s),\dots,p_n(s),q_1(s),\dots,q_n(s)) = (\exp sB).y_o$ se calcule aisément par intégration en cascade ; $p_i(s)$, $q_i(s)$ sont des polynômes ; plus précisément on observe que, pour $p_i(s)$ les monômes de degré pair ont des coefficients du type p_k^o et les monômes de degré impair ont des coefficients du type q_k^o , et inversement pour $q_i(s)$. Soit (p,q) un vecteur de $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; $(p,-q)$ appartient à l'orbite de (p,q) sous l'action de T^n ; il existe donc un élément de T^n noté $T(p,q)$ (i) dépend de (p,q)) tel que $(T(p,q)).(p,q) = (p,-q)$.

Alors :

$*$ $y^1 = T(y^o).y^o$ appartient à $A^+(y_o)$

$*$ $y^2 = (\exp tB).y^1$ appartient à $A^+(y_o)$

$*$ $T(y^2).y^2$ appartient à $A^+(y_o)$.

On vérifie alors à l'aide de la remarque préliminaire que $T(y^2).y^2 = (\exp -tB).y^o$. L'assertion est donc montrée.

II. 3.5. REMARQUE. - On peut conjecturer que le couple $\{A,B\}$ de champs de vecteurs invariants à droite sur $Sp(n,\mathbb{R})$; où A est un partenaire privilégié et B un élément parabolique sous forme normale, est transitif sur $Sp(n,\mathbb{R})$. Il est évident que puisque B n'est pas équivalent à $-B$,une technique de démonstration du type de celle utilisée en II.3.3 ne s'applique pas . Le problème reste donc ouvert.

II. 3.6. PROPOSITION. - *Soit* A *un partenaire privilégié et* B *un élément de* $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$, n *pair, de type elliptique, sous forme normale. Alors le couple* $\{A.x,B.x\}$ *de champs de vecteurs linéaires hamiltoniens est transitif sur* $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$.

PREUVE. - B est donc l'un des deux éléments :

$$\varepsilon\left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 & & 1 & \alpha \\ & ⋰ & ⋰ & \\ 1 & ⋰ & & \\ \alpha & & & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & & & -\alpha \\ & & ⋰ & -1 \\ & ⋰ & ⋰ & 0 \\ -\alpha & -1 & & \end{matrix} & 0 \end{array}\right]$$

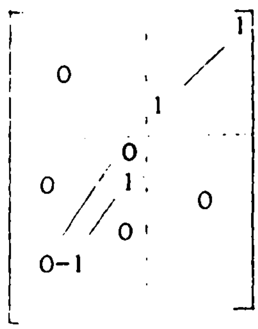
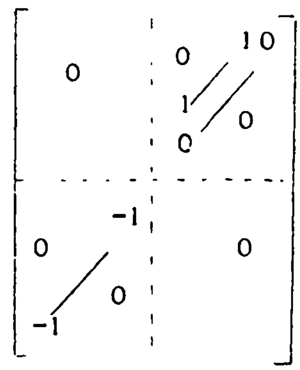
$\varepsilon = \pm 1$. Notons S l'élément

$$\varepsilon\left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} & & \alpha \\ & ⋰ & \\ \alpha & & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & & -\alpha \\ & ⋰ & \\ -\alpha & & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right]$$

et posons $N = B-S$. Définissons les familles de champs de vecteurs suivantes : $D_1 = \{A_k \; 1 \leq k \leq n \,,\, B\}$, $D'_1 = \{A_k.x \; 1 \leq k \leq n, B.x\}$, $D_2 = \{A_k \; 1 \leq k \leq n \,,\, N\}$ et $D'_2 = \{A_k.x \; 1 \leq k \leq n, N.x\}$. Par des considérations analogues à celles de II.3.4, on montre que le couple de champs de vecteurs $\{A.x, B.x\}$ est transitif sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$ si la famille D'_1 est transitive sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$. Montrons que D'_1 est transitive sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$. On peut supposer $\varepsilon = +1$.

Notons respectivement par $A^+_{D_1}(I)$ et $A^+_{D_2}(I)$ les orbites de l'identité de D_1 et D_2. Montrons que $A^+_{D_1}(I)$ contient $A^+_{D_2}(I)$. Désignons par P l'élément de T^n ainsi défini sur la base canonique $\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\}$ de $\mathbb{R}^{2n}$: $P.u_{2i+1} = u_{2i+1}, P.v_{2i+1} = v_{2i+1}$, $Pu_{2i} = -u_{2i}$, $Pv_{2i} = -v_{2i}$. On vérifie alors que $P^{-1}BP = -S+N$. L'élément $\exp tN = (\exp t/2(S+N))\,(\exp t/2(-S+N))$ appartient donc à $A^+_{D_1}(I)$ $\forall t \geq 0$. Il résulte alors de 0.3.1 que $A^+_{D_1}(I)$ contient donc l'orbite positive $A^+_{D'_2}(y)$ de y, pour D'_2.

Notons respectivement E et F les sous-espaces vectoriels de dimension n, de $\mathbb{R}^{2n}$ engendrés par $\{u_1,u_3,\dots,u_{2p-1},v_1,v_3,\dots,v_{2p-1}\}$ et $\{u_2,u_4,\dots, u_{2p},v_2,v_4,\dots,v_{2p}\}$. N laisse stable ces deux espaces. Notons respectivement par N_1 et N_2 la restriction de N à E et F. On vérifie que :

$N_1 =$  $N_2 =$ 

N_1 et N_2 sont deux éléments paraboliques de $\underline{sp}(n/2,\mathbb{R})$. Il suffit alors de recopier la démonstration de II. 3.4. pour s'assurer que les deux familles de champs de vecteurs linéaires associées aux familles de champs de vecteurs invariants à droite $\{A_{k|E}$ k impair, $N_1\}$, $\{A_{k|F}$ k pair, $N_2\}$ sont transitives respectivement sur $E - \{0\}$ et $F - \{0\}$. D'autre part le champ linéaire $N_1.x^1$ admet une singularité sur $E - \{0\}$. La famille de champs de vecteurs D_2' est donc transitive sur la variété produit $E - \{0\} \times F - \{0\}$ d'après II.2.3.

En résumé, $A^+_{D_1'}(y)$ contient $A^+_{D_2'}(y)$ pour tout état y de $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$, la famille D_2' est transitive sur $E - \{0\} \times F - \{0\}$ qui est dense dans $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$. La famille D_1' étant faiblement transitive, il résulte alors de 0.2.2. que D_1' est transitive sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$.

II.3.7. RESUME. - Soit A un partenaire privilégié et B un élément irréductible de $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ sous forme normale. Alors :

(i) B est en position génitrice sur $\underline{sp}(n,R)$ relativement à $\underline{a}$.

(ii) Le couple $\{A.x, B.x\}$ de champs de vecteurs linéaires hamiltoniens est transitif sur $R^{2n} - \{0\}$.

PREUVE. - (i) n'est autre que II.3.2. Puisque $Sp(n,\mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$, (ii) résulte des propositions précédentes.

II.4. COUPLES DE CHAMPS DE VECTEURS HAMILTONIENS TRANSITIFS SUR $\mathbb{R}^{2n}$.

II.4.1. UN CRITERE DE TRANSITIVITE. - Les notations utilisées sont celles de I.2.1. Soit A un partenaire privilégié, $B = (B^1,\dots,B^k)$ un élément de $\underline{h} \simeq \underline{sp}(n_1,\mathbb{R})\oplus\dots\oplus\underline{sp}(n_k,\mathbb{R})$ et $b = (b^1,\dots,b^k)$ un vecteur de $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^{2n_1} \oplus\dots\oplus \mathbb{R}^{2n_k}$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) B^i est un élément irréductible de $\underline{sp}(n_i,\mathbb{R})$ sous forme normale.

(ii) b^i est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^{2n_i}$ pour $1 \leq i \leq k$ et b appartient à l'image de B.

Alors le couple $\{A.x, B.x+b\}$ de champs de vecteurs affines hamiltoniens est transitif sur $\mathbb{R}^{2n}$.

PREUVE. -

A-Réduction du problème.

Le couple $\{A.x, B.x+b\}$ de champs de vecteurs est faiblement transitif. En effet, on applique I.2.2 : A vérifie les conditions (i) et (ii) d'après I.2.3, B^i est en position génitrice sur $\underline{sp}(n_i,\mathbb{R})$ d'après II.3.7 et donc B est en position génitrice sur $\underline{h}$ d'après I.2.3, B satisfait donc la condition (iii), enfin b vérifie la condition (iv).

Notons D la famille de (n+1) champs de vecteurs $\{A_k.x\ ,\ 1 \leq k \leq n\ ,\ B.x+b\}$. Puis le couple $\{A.x,\ B.x+b\}$ de champs de vecteurs est faiblement transitif et puisque A est à trajectoire dense dans le tore T^n , il résulte de 0.2.4 que le couple $\{A.x,\ B.x+b\}$ de champs de vecteurs est transitif si et seulement si D est transitive.

$\mathbb{R}^{2n}$ s'écrit $\mathbb{R}^{2n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^{2n_k}$ et la famille D de champs de vecteurs se projette sur chaque espace $\mathbb{R}^{2n_i}$ en une famille D_i de champs de vecteurs. Montrons que D satisfait les conditions de II.2.3. Puisque b appartient à l'image de B, chacun des champs de vecteurs $B^i.x^i+b^i$ admet au moins une singularité sur $\mathbb{R}^{2n_i}$, la condition (i) est donc satisfaite. D'autre part la famille de champs de vecteurs $\{A_k \quad 1 \leq k \leq n\}$ vérifie la condition (ii). D'après II.2.2. , D est donc transitive si et seulement pour tout i, $1 \leq i \leq k$, la famille D_i de champs de vecteurs $\{A_k^i\,.x^i \quad n_1+\ldots+n_{i-1}+1 \leq k \leq n_1+\ldots+n_i \;,\; B^i.x^i+b^i\}$, A_k^i désignant la restriction de A_k à $\mathbb{R}^{2n_i}$, est transitive sur $\mathbb{R}^{2n_i}$.

CONCLUSION. - Pour que l'assertion de II.4.1 soit exacte, il suffit donc de montrer que la famille D de champs de vecteurs $\{A_k.x \quad 1 \leq k \leq n \;,\; B.x+b\}$ est transitive sur $\mathbb{R}^{2n}$, lorsque B est un élément irréductible de $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ sous forme normale et b un vecteur non nul de $\mathbb{R}^{2n}$ appartenant à l'image de B.

B-Résolution du problème réduit.

On va résoudre par une série de lemmes le problème ainsi réduit. Le cas où le champ B.x+b est Poisson-stable, qui est évident est résolu en premier.

LEMME 1. - *Soit* B *un élément de* $\underline{sp}(1,R)$ *elliptique sous forme normale et* b *un vecteur non nul de* $\mathbb{R}^2$. *Alors la famille* D *de champs de vecteurs* $\{A_k.x \quad 1 \leq k \leq n \;,\; B.x+b\}$ *est transitive sur* $\mathbb{R}^2$.

Preuve. - D est une famille faiblement transitive de champs de vecteurs Poisson-stables. L'assertion résulte donc de II.2.2.

LEMME 2. - *La famille de champs de vecteurs* $\{A_k.x \quad 1 \leq k \leq n,\ B.x+b\}$ *est transitive si et seulement si il existe un réel* $\lambda > 0$ *tel que la famille de champs de vecteurs* $\{A_k.x \quad 1 \leq k \leq n\ ,\ B.x+\lambda b\}$ *soit transitive.*

PREUVE. - Le difféomorphisme de fibré tangent dérivé d'une homothétie judicieuse sur $\mathbb{R}^{2n}$ applique une famille sur l'autre. La transitivité est bien sûr préservée.

LEMME 3. - *Soit* B *un élément de* $\underline{p}(n,\mathbb{R})$ *irréductible sour forme normale (que l'on peut supposer n'être pas un élément elliptique de* $\underline{sp}(1,\mathbb{R})$) *. Alors il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que la famille* D_b *de champs de vecteurs* $\{A_k.x \quad 1 \leq k \leq n\ ,\ B.x+b\}$ *soit transitive sur la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^{2n}$ *(c'est-à-dire que tout état de cette boule est accessible à tout autre état de cette boule), pour tout vecteur* b *de* $\mathbb{R}^{2n}$ *(non forcément dans l'image de* B*), non nul et de norme euclidienne plus petite que* ε *.*

PREUVE. - Soit K un compact de $\mathbb{R}^{2n}$, on rappelle que $V_1(K)$ est la topologie définie sur l'espace des applications f de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$, C^1 , par la "norme" $\|f\| = \sup_{x \in k} (\|f(x)\| + \|df(x)\|)$. Pour tout compact K de $\mathbb{R}^{2n}$ et tout voisinage V relativement à $V_1(K)$ du champ de vecteurs B.x, B.x+b appartient à V pourvu que b soit de norme assez petite. D'après II.3.7 , pour b = 0, la famille D_b est transitive sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$. Il résulte de [2] qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la famille D_b soit transitive sur la sphère unité S^{2n-1} de $\mathbb{R}^{2n}$, pour tout vecteur b, $\|b\| < \varepsilon$. Notons F l'ensemble des points de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^{2n}$ tels que la demi-trajectoire positive et négative du champ B.x+b issues d'un point de F soient toutes deux non bornées.

Pour b, $\|b\| < \varepsilon$, tout état de F est accessible à tout autre état de F. Puisque $B.x+b$ est non Poisson-stable, F est dense dans la boule unité fermée. D_b est faiblement transitive, il résulte donc de 0.2.2 que D_b est transitive sur la boule unité fermée.

LEMME 4. - *Soit* B *un élément de* $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ *, irréductible sous forme normale (que l'on peut supposer n'être pas un élément elliptique de* $\underline{sp}(1,\mathbb{R})$ *. Alors la famille* D_b *de champs de vecteurs* $\{A_k.x \quad 1 \leq k \leq n \ , \ B.x+b\}$ *est transitive sur* $\mathbb{R}^{2n}$ *pour tout vecteur* b *non nul appartenant à l'image de* B.

PREUVE. - D'après le lemme 2 et le lemme 3, il suffit de montrer qu'il existe $h > 0$, $h \leq \varepsilon$, tel que, si b vérifie $0 < \|b\| < h$ D_b a la propriété que tout état de $\mathbb{R}^{2n}$ est accessible à un état de la boule unité et recalable sur un état de la boule unité. On fait alors une étude cas par cas. Les démonstrations sont un peu laborieuse et seul le cas où le champ B/x+b admet une région stable et une région instable est intéressant et sera reproduit ici. Pour le reste je renvoie à [2] .

Supposons donc que B est un élément de $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$ hyperbolique réel ou complexe. B s'écrit donc :

$$\left[\begin{array}{c|c} B_o & 0 \\ \hline 0 & -{}^tB_o \end{array}\right] \quad B_o = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \lambda > 0 \text{ ou } B_o = \begin{bmatrix} D_2 & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & I_2 \\ & & & D_2 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} \rho & \theta \\ -\theta & \rho \end{bmatrix} \rho > 0.$$

On rappelle que l'on note $\{u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. Désignons respectivement par E^+ et E^- les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{2n}$ de base $\{u_1,\ldots, u_n\}$, $\{v_1,\ldots,v_n\}$. $\mathbb{R}^{2n}$ s'écrit donc $E^+ \oplus E^-$. Notons (r,s) le point singulier du champ de vecteurs $B.x+b$. Notons respectivement par I et S les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^{2n}$, (E^+,s) et (E^-,r).

I et S sont des invariants pour les trajectoires de B.x+b. D'autre part toute demi-trajectoire positive issue d'un point de S converge vers (r,s) et toute demi-trajectoire négative issue d'un point de I converge vers (r,s). Soit η , $0<\eta<\varepsilon$, tel que (r,s) appartienne à la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^{2n}$ pour tout b, $\|b\|<\eta$. Montrons que pour D_b, $0<\|b\|<\eta$, tout état (p^o,q^o) de $\mathbb{R}^{2n}$ est reculable sur un état de la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^{2n}$.

* Soit R > 0, l'ensemble des points (p,q) de $\mathbb{R}^{2n}$ tels que la trajectoire du champ de vecteurs B/x+b (p(t),q(t)) issue de (p,q) est telle qu'il existe T > 0 de sorte que $|p_i(T)|>R$ $1\leq i\leq n$ est dense dans $\mathbb{R}^{2n}$. D_p étant par ailleurs faiblement transitif, il résulte de 0.2.2 que (p^o,q^o) est recalable sur un état (p^1,q^1) vérifiant $|p_i^1|>\mathrm{Max}(|r_1|,\dots,|r_n|)(r=(r_1,\dots,r_n))$, $1\leq i\leq n$.

* L'orbite de (p^1,q^1) relativement à l'action de T^n rencontre dans S. Puisque la famille de champs de vecteurs $\{A_k \quad 1\leq k\leq n\}$ est transitive sur T_n , on peut donc recaler (p^1,q^1) sur un état de S noté (r,q^2).

* La demi-trajectoire positive du champ de vecteurs B.x+b issue de (r,q^2) converge vers (r,s). Comme (r,s) appartient à la boule unité ouverte (r,q^2) est donc recalable en un état (r,q^3) de cette boule.

A l'issue des trois étapes on a bien montré l'assertion. On montre de façon analogue que tout état de $\mathbb{R}^{2n}$ est accessible à un état de la boule unité. Le cas hyperbolique réel ou complexe est donc résolu.

II.4.2. DEFINITION. - *Définissons la classe $\mathscr{C}$ de champs de vecteurs de* $\mathbb{R}^{2n}$ *de la façon suivante :*

Si X_1 *appartient à* $\mathscr{C}$, X_1 *s'écrit* X.x+v *où :*

* X *est un élément de* $\underline{sp}(n,\mathbb{R})$
* X *n'admet pas de diviseur élémentaire du type* λ *, i.e., la réduite de Jordan de* X *n'a pas de bloc nul.*
* v *est un vecteur de* $\mathbb{R}^{2n}$ *appartenant à l'image de* X.

II.4.3. THEOREME. - *Pour tout champ de vecteurs* X_1 *de* $\mathcal{C}$ *il existe un champ de vecteurs* X_2 *de* $\mathcal{C}$ *, dont toutes les trajectoires sont bornées dans* $\mathbb{R}^{2n}$ *, tel que le couple* $\{X_1,X_2\}$ *soit transitif sur* $\mathbb{R}^{2n}$.

PREUVE. - On montre qu'il existe des entiers positifs $n_1,\dots,n_k$, $n_1+\dots+n_k = n$ et un difféomorphisme α de $\mathbb{R}^{2n}$, dont le difféomorphisme dérivé $d\alpha$ préserve la classe $\mathcal{C}$(c'est-à-dire si $X \in \mathcal{C}$, $d\alpha(X) \in \mathcal{C}$). tel que $d\alpha(X_1)$ vérifie (i) et (ii) de II.4.1. Soit A un partenaire privilégié, alors le champ de vecteurs $X_2 = d\alpha^{-1}(A.x)$ est le partenaire recherché.

X_1 s'écrit donc $X.x+v$ où $X \in \underline{sp}(n,R)$. Appliquons II.1.5., il existe $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}^*$, $n_1+\dots+n_k = n$ et $P \in Sp(n,R)$ tel que $P^{-1}XP$ s'écrive $B = (B^1,\dots, B^k)$, B^i désignant un élément de $\underline{sp}(n_i,\mathbb{R})$ irréductible sous forme normale. Posons $\alpha_1 : x \mapsto P.x$. Soit $h = (h_1,\dots,h_k)$ un vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $h_i = 0$ si la projection de $P^{-1}.v$ sur $\mathbb{R}^{2n_i}$ est non nulle, et $h_i \notin \text{Ker } B_i$ sinon posons $\alpha_2 : x \mapsto x+h$. Alors le difféomorphisme $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1$ est le difféomorphisme recherché.

BIBLIOGRAPHIE -

1 W. BOOTHBY, *A transitivity problem from control theory*, J. Differential equations 17, 296-307. (1975).

2 B. BONNARD, *Controlabilité sur le groupe symplectique et couples de champs de vecteurs hamiltoniens contrôlables sur* $\mathbb{R}^{2n}$, Thèse 3ème cycle - Metz (1978).

3 R.W. BROCKETT. *System theory on group manifolds and coset spaces* Siam J. Control (10) 2. 1972.

4 CIAMPI, *Classical hamiltonian linear systems,* Queen's papers in pure and applied mathematics, n° 31.

5 GANTMACHER, *Théorie des matrices,* Tome 1, Dunod.

6 C. GODBILLON, *Géométrie différentielle et mécanique analytique,* Hermann, Paris 1969.

7 HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces,* Academic Press 1962.

8 N. JACOBSON, *Lie algebras,* Interscience.

9 R. HIRSCHORN, *Controllability in nonlinear systems,* J. Differential Equations 19, 46-61 (1975).

10 R. HIRSCHORN, *Global controllability of nonlinear systems,* Siam J. Control (1976).

11 V. JURDJEVIC, H.J. SUSSMANN, *Controllability of non linear systems,* J. Differential Equations 12, 95-116 (1972).

12 V. JURDJEVIC, H.J. SUSSMANN, *Control systems on Lie groups,* J. Differential Equations 12, 313-329 (1972).

13 I. KUPKA, V. JURDJEVIC, *Conditions suffisantes d'accessibilité sur les groupes de Lie semi-simples.* A paraître.

14 F.B. LEE, L. MARKUS, *Foundations of optimal control theory,* John Wiley and Sons (1967).

15 C. LOBRY, *Contrôlabilité des systèmes non linéaires,* Siam J. control (8) 4 (1970).

16 C. LOBRY, *Controllability of non linear systems on compact manifolds,* Siam J. Control (12) 4 (1974).

17 C. LOBRY, Cours 3ème cycle. Bordeaux (1976).

18 G. SALLET, *Couples de champs de vecteurs de Killing complètement contrôlables sur les sphères et espaces euclidiens,* Thèse 3ème cycle, Metz (1976).

19 H.J. SUSSMANN, *On the number of vector Fields needed to achieve controllability,* Siam J. Control (13) 2 - 1975.

20 H.J. SUSSMANN, N. LEVITT, *On controllability by means of two vector Fields,* Siam J. Control (13) 6 - 1975.

21 H.J. SUSSMANN, *Some properties of vector Field systems that are not altered by small perturbations,* J. Differential Equations, 20, 293-315 (1976).

B. BONNARD
U.E.R. de Math. et Inf.
Université de Bordeaux I
351, crs de la Libération
33405 TALENCE