ALI DEAIBES

Mesures sur les espaces uniformes de type (σ_1^∞)

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 3
« Séminaire de géométrie », , p. 63-73
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_3_63_0>

Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t. 15-3

MESURES SUR LES ESPACES UNIFORMES DE TYPE (σ_1^∞)

Ali DEAIBES

RESUME.

Suite à l'article [4], donnant une description des espaces uniformes de type (σ_α^∞), on étudie ici les espaces de formes linéaires m sur l'espace vectoriel $\mathcal{U}(X)$ [resp. $\mathcal{U}^\infty(X)$] des fonctions numériques uniformément continues [resp. et bornées] sur un espace uniforme X de type (σ_α^∞), qui sont bornées sur la boule unité Δ de $\mathcal{U}^\infty(X)$ et qui vérifient la condition de commutation $m(\sum_i f_i) = \sum_i m(f_i)$ pour toute famille $(f_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{U}^\infty(X)$, qui est discrète [resp. et uniformément bornée] et indexée par un ensemble I de cardinal strictement inférieur à χ_α.

INTRODUCTION.

On considère des espaces uniformes séparés (X, μ), où la structure uniforme μ est définie par une famille de recouvrements $\mathcal{V} = (V_\gamma)_{\gamma\in L}$. Soit $D(X, \mu) = D(X)$ l'ensemble des écarts d sur X qui sont μ-uniformément continus et soit $\mathcal{U}(X, \mu) = \mathcal{U}(X)$ [resp. $\mathcal{U}^\infty(X, \mu) = \mathcal{U}^\infty(X)$] l'espace vectoriel [resp. l'algèbre] des fonctions réelles uniformément continues [resp. et bornées] sur (X, μ).

Une famille $(F_i)_{i\in I}$ de parties de X est dite discrète s'il existe un écart $d \in D(X)$ tel qu'elle soit discrète dans l'espace (X, d) (on dira aussi qu'elle est d-discrète). Parallèlement une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions dans $\mathcal{U}(X)$ est dite discrète lorsque la famille des conoyaux $(\mathrm{Coz}(f_i))_{i\in I}$ est discrète.

En suivant [4], on dit que l'espace uniforme (X, μ) est de type (σ_α^∞) si pour toute famille discrète $(f_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{U}^\infty(X)$, de cardinal card $I < \chi_\alpha$, la fonction $f = \sum_i f_i$ est élément de $\mathcal{U}(X)$.

Pour un espace uniforme (X, μ) de type (σ_α^∞), on dit qu'une forme linéaire m sur l'espace vectoriel $\mathcal{U}(X)$ [resp. sur l'algèbre $\mathcal{U}^\infty(X)$] est α-additive lorsque pour toute famille $(f_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{U}^\infty(X)$ qui est discrète [resp. et uniformément bornée], de cardinal card $I < \chi_\alpha$, on a $m(\sum_i f_i) = \sum_i m(f_i)$. Pour $\alpha = 1$, on dit plus simplement que les formes linéaires 1-additives sont σ-additives.

On désigne par $\mathcal{M}_\alpha(X, \mu) = \mathcal{M}_\alpha(X)$ [resp. $\mathcal{M}^\infty(X, \mu) = \mathcal{M}_\alpha^\infty(X)$] l'espace vectoriel des formes linéaires m sur $\mathcal{U}(X)$ [resp. $\mathcal{U}^\infty(X)$] qui sont à la fois α-additives et bornées sur la boule unité Δ de $\mathcal{U}^\infty(X)$.

On dit encore qu'une partie simplement bornée H de $\mathcal{U}(X)$ vérifie la propriété (P) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $\mathcal{V} = (V_\gamma)_{\gamma \in L}$ de μ tel que, pour tout indice $\gamma \in L$, il existe un recouvrement $\mathcal{U}^\gamma = (U_\beta^\gamma)_{\beta \in L^\gamma}$ de μ tel que toute fonction $f \in H$ varie au plus de ε sur chaque partie $V_\gamma \cap U_\beta^\gamma$. L'ensemble des parties H vérifiant (P) est noté $\mathcal{H}_P(X, \mu) = \mathcal{H}_P$ tandis que l'ensemble des parties uniformément bornées de $\mathcal{H}_P$ est noté $\mathcal{H}_P^\infty$.

On rappelle qu'on désigne classiquement par $\mathcal{H}(X, \mu) = \mathcal{H}$ [resp. $\mathcal{H}^\infty(X, \mu) = \mathcal{H}^\infty$] l'ensemble des parties H de $\mathcal{U}(X)$ qui sont simplement bornées [resp. uniformément bornées] et uniformément équi-continues. Il est clair que l'on a $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_P$ et $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}_P^\infty$, et que $\mathcal{H}_P$ et $\mathcal{H}_P^\infty$ sont stables par passage à l'enveloppe disquée.

A chaque espace uniforme (X, μ) on associe diverses structures uniformes et divers espaces de mesures. Sans vouloir être exhaustif, et pour nous limiter à ceux qui interviendront ici, citons pour bien préciser les définitions :

a) La structure uniforme $\sigma\mu$ de la convergence simple sur $\mathcal{U}(X)$, appelée structure uniforme affaiblie de μ.

b) La structure uniforme $p\mu$ définie par les recouvrements finis de μ, donnant comme complété l'espace compact $\widehat{pX}$, appelé compactifié de Samuel de (X, μ).

c) Pour tout ordinal α, la structure uniforme $D_c^\alpha \mu$ ayant pour base les recouvrements de μ, de cardinal strictement inférieur à χ_α, et qui sont d'ordre fini [5]. Pour un espace uniforme de type (σ_α^∞) on a l'égalité $D_c^1 \mu = \sigma\mu$ [4].

d) L'espace $M_\sigma(X)$ des formes linéaires σ-régulières m sur $\mathcal{U}^\infty(X)$, c'est-à-dire telles que $m(f_n) \longrightarrow 0$ pour toute suite (f_n) de $\mathcal{U}^\infty(X)$ telle que $f_n \downarrow 0$.

e) L'espace $M_u(X)$ des formes linéaires σ-régulières sur $\mathcal{U}(X)$.

f) L'espace $M^\infty(X)$ des formes linéaires sur $\mathcal{U}^\infty(X)$ dont les restrictions aux éléments $H \in \mathcal{H}^\infty$ sont simplement continues.

g) L'espace M(X) des formes linéaires sur $\mathcal{U}(X)$ dont les restrictions aux éléments $H \in \mathcal{H}$ sont simplement continues.

h) L'espace $\mathrm{Rad}(\widehat{pX})$ des mesures de Radon sur le compact $\widehat{pX}$, et l'espace $\check{M}(X)$ des mesures $m \in \mathrm{Rad}(\widehat{pX})$ dont le support est contenu dans le complété $\hat{X} = (X, \mu)^\wedge$.

Ces définitions nécessaires étant rappelées, l'essentiel de l'article est consacré à la démonstration des propriétés suivantes :

A) *Soit* X *un espace uniforme de type* (σ_α^∞). *L'espace* $\mathcal{M}_\alpha(X)$ [*resp.* $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X)$] *est exactement l'espace des formes linéaires* m *sur* $\mathcal{U}(X)$ [*resp. sur* $\mathcal{U}^\infty(X)$] *dont les restrictions aux éléments* $H \in \mathcal{H}_p(D_c^\alpha \mu)$ [*resp.* $H \in \mathcal{H}_p^\infty(D_c^\alpha \mu)$] *sont simplement continues. Autrement dit, on a les égalités* $\mathcal{M}_\alpha(X) = M(X, D_c^\alpha \mu)$ *et* $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X) = M^\infty(X, D_c^\alpha \mu)$.

B) *Soit* X *un espace uniforme de type* (σ_1^∞). *L'espace* $\mathcal{M}_1(X)$ [*resp.* $\mathcal{M}_1^\infty(X)$] *est exactement l'espace des formes linéaires* m *sur* $\mathcal{U}(X)$ [*resp. sur* $\mathcal{U}^\infty(X)$] *telles que* $m(f_n) \longrightarrow 0$ *pour toute suite* (f_n) *de* $\mathcal{U}(X)$ [*resp. de* $\mathcal{U}^\infty(X)$] *qui décroît faiblement uniformément localement vers zéro.*

C) *La propriété* B), *comparable à la propriété de σ-régularité, lui est en fait équivalente pour les espaces uniformes de type* (A) [3], *en particulier pour les espaces topologiques complètement réguliers identifiés aux espaces uniformes fins.*

1. LES ESPACES $\mathcal{M}_\alpha(X)$ ET $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X)$.

Commençons par un lemme technique.

(1.1) LEMME. - *Soit* (X, μ) *un espace uniforme de type* (σ_α^∞). *Soient* $(g_\gamma)_{\gamma \in L}$ *et* $(h_\beta^\gamma)_{\beta \in L^\gamma}$, $\gamma \in L$, *des partitions uniformément équicontinues de l'unité telles que chacune d'elles soit réunion finie de familles discrètes de cardinal* $< \chi_\alpha$. *Alors pour toute* $f \in \mathcal{U}(X)$, *qui est bornée sur les conoyaux* $\mathrm{Coz}(g_\gamma)$, *et pour toute* $m \in \mathcal{M}_\alpha(X)$ *on a les égalités :*

$$f = \sum_\gamma \sum_{\beta \in L^\gamma} f g_\gamma h_\beta^\gamma \quad \text{et} \quad m(f) = \sum_\gamma \sum_{\beta \in L^\gamma} m(f g_\gamma h_\beta^\gamma).$$

PREUVE. - Chaque fonction $f g_\gamma h_\beta^\gamma$ est élément de l'algèbre $\mathcal{U}^\infty(X)$. Fixons une partition finie $(L_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de L, où chaque famille $(g_\gamma)_{\gamma \in L_k}$ est discrète. On a alors :

$$f = f \cdot \sum_k \sum_{\gamma \in L_k} g_\gamma = \sum_k f\Big(\sum_{\gamma \in L_k} g_\gamma\Big) = \sum_k \sum_{\gamma \in L_k} f g_\gamma = \sum_{\gamma \in L} f g_\gamma .$$

Par le même raisonnement on a, pour chaque $\gamma \in L$, $g_\gamma = \sum_{\beta \in L^\gamma} g_\gamma h_\beta^\gamma$, de sorte qu'en définitive on a $f = \sum_\gamma \sum_{\beta \in L^\gamma} f g_\gamma h_\beta^\gamma$. D'autre part la condition $m \in \mathcal{M}_\alpha(X)$ garantit que :

$$m(f) = m\Big(f \sum_k \sum_{\gamma \in L_k} g_\gamma\Big) = \sum_k m\Big(f \sum_{\gamma \in L_k} g_\gamma\Big) = \sum_k \sum_{\gamma \in L_k} m(f g_\gamma) = \sum_\gamma m(f g_\gamma)$$

et pour chaque $\gamma \in L$:

$$m(f g_\gamma) = \sum_{\beta \in L^\gamma} m(f g_\gamma h_\beta^\gamma)$$

ce qui fournit, en rassemblant, l'égalité $m(f) = \sum_\gamma \sum_{\beta \in L^\gamma} m(f g_\gamma h_\beta^\gamma)$. □

On tire de là :

(1.2) THEOREME. - *Soit* (X, μ) *un espace uniforme de type* (σ_α^∞). *alors toute forme linéaire* $m \in \mathcal{M}_\alpha(X)$ *est simplement continue sur toute partie* $H \in \mathcal{H}_p(D_c^\alpha \mu)$.

PREUVE. - Supposons H disqué et considérons une suite généralisée $(f_i)_{i\in I}$ de H tendant simplement vers zéro. Fixons $\varepsilon > 0$ et associons à ε des recouvrements $\mathscr{V} = (V_\gamma)_{\gamma\in L}$ et $\mathscr{U}^\gamma = (U_\beta^\gamma)_{\beta\in L^\gamma}$, de la structure uniforme $D_c^\alpha\mu$, répondant aux conditions de la définition de la propriété P pour la structure uniforme $D_c^\alpha\mu$, et tels que chacun d'eux soit réunion finie de familles discrètes de cardinal $< \chi_\alpha$. Considérons des partitions uniformément équicontinues de l'unité subordonnées respectivement aux recouvrements $\mathscr{V}$ et $\mathscr{U}^\gamma$, $\gamma \in L$, et notés $(g_\gamma)_{\gamma\in L}$ et $(h_\beta^\gamma)_{\beta\in L^\gamma}$. Alors pour tout indice $i \in I$ on a, avec le lemme :

$$f_i = \sum_\gamma \sum_{\beta\in L^\gamma} f_i g_\gamma h_\beta^\gamma \quad \text{et} \quad m(f_i) = \sum_\gamma \sum_{\beta\in L^\gamma} m(f_i g_\gamma h_\beta^\gamma).$$

Introduisons l'ensemble M des couples (γ, β) tels que $V_\gamma \cap U_\beta^\gamma \neq \phi$ et fixons pour chaque $(\gamma, \beta) \in M$ un point $x_{\gamma\beta} \in V_\gamma \cap U_\beta^\gamma$. Introduisons encore les nombres, pour $(\gamma, \beta) \in M$:

$$t_{\gamma\beta}^i = f_i(x_{\gamma\beta}), \qquad i \in I$$

$$t_{\gamma\beta} = \sup_{f\in H} \|f\|_{V_\gamma \cap U_\beta^\gamma}$$

et rappelons que, m étant bornée sur le disque unité Δ de $\mathscr{U}^\infty(X)$, on peut supposer $\|m\| = \sup_{f\in\Delta} |m(f)| \leqslant 1$.

Alors les fonctions $g_i = \sum_{(\gamma,\beta)\in M} t_{\gamma\beta}^i g_\gamma h_\beta^\gamma$ et $g = \sum_{(\gamma,\beta)\in M} t_{\gamma\beta} g_\gamma h_\beta^\gamma$ sont éléments de $\mathscr{U}(X)$ et

$$m(g_i) = \sum_{(\gamma,\beta)\in M} t_{\gamma\beta}^i m(g_\gamma h_\beta^\gamma) \quad \text{et} \quad m(g) = \sum_{(\gamma,\beta)\in M} t_{\gamma\beta} m(g_\gamma h_\beta^\gamma)$$

Il résulte de là que la famille $(t_{\gamma\beta}|m(g_\gamma h_\beta^\gamma)|)_{(\gamma,\beta)\in M}$ est sommable, d'où l'on tire l'existence d'une partie finie $J \subset M$ telle que $\sum_{(\gamma,\beta)\notin J} t_{\gamma\beta}|m(g_\gamma h_\beta^\gamma)| \leqslant \varepsilon$.

Par ailleurs on a $\|f_i - g_i\| \leqslant \varepsilon$ pour chaque $i \in I$, d'où $|m(f_i)| \leqslant \varepsilon + |m(g_i)|$. Mais la condition $|t_{\beta\gamma}^i| \leqslant t_{\beta\gamma}$ pour chaque $i \in I$ donne aussitôt :

$$|m(g_i)| \leqslant \sum_{(\gamma,\beta)\in J} |t^i_{\gamma\beta} m(g_\gamma h^\gamma_\beta)| + \sum_{(\gamma,\beta)\notin J} t_{\gamma\beta} |m(g_\gamma h^\gamma_\beta)|$$

$$\leqslant \varepsilon + \sum_{(\gamma,\beta)\in J} |t^i_{\gamma\beta}|.$$

En résumé, on obtient l'inégalité, pour chaque $i \in I$

$$|m(f_i)| \leqslant 2\varepsilon + \sum_{(\gamma,\beta)\in J} |f_i(x_{\gamma\beta})|$$

et il ne reste plus qu'à choisir un indice $i_o \in I$ tel que l'on ait $\sum_{(\gamma,\beta)\in J} |f_i(x_{\gamma\beta})| \leqslant \varepsilon$ pour tout $i \geqslant i_o$, pour pouvoir conclure à la condition $|m(f_i)| \leqslant 3\varepsilon$ pour $i \geqslant i_o$, ce qui termine tout. □

En reprenant la preuve mot pour mot en remplaçant l'espace vectoriel $\mathcal{U}(X)$ par l'algèbre $\mathcal{U}^\infty(X)$ et la famille $\mathcal{H}_p(D^\alpha_c\mu)$ par la famille $\mathcal{H}^\infty_p(D^\alpha_c\mu)$ on obtient :

(1.3) THEOREME. - *Soit* (X, μ) *un espace uniforme de type* (σ^∞_α). *Alors toute forme linéaire* $m \in \mathcal{M}^\infty_\alpha(X)$ *est simplement continue sur toute partie* $H \in \mathcal{H}^\infty_p(D^\alpha_c\mu)$.

On a vu dans l'introduction les inclusions $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}^\infty_p$, de sorte que les théorèmes (1.2) et (1.3) donnent les inclusions $\mathcal{M}_\alpha(X) \subset M(X, D^\alpha_c\mu)$ et $\mathcal{M}^\infty_\alpha(X) \subset M^\infty(X, D^\alpha_c\mu)$ pour les espaces X de type (σ^∞_α). En fait on a même :

(1.4.) THEOREME. - *Pour tout espace uniforme* (X, μ) *de type* (σ^∞_α) *on a les égalités (au sens algébrique et non pas au sens uniforme)*

a) $\mathcal{M}_\alpha(X) = M(X, D^\alpha_c\mu)$;

b) $\mathcal{M}^\infty_\alpha(X) = M^\infty(X, D^\alpha_c\mu)$.

En particulier, pour $\alpha = 1$, *on a* $\mathcal{M}_1(X) = M(X, \sigma\mu)$ *et* $\mathcal{M}^\infty_1(X) = M^\infty(X, \sigma\mu)$.

PREUVE. - Il suffit de démontrer l'inclusion $M(X, D^\alpha_c\mu) \subset \mathcal{M}_\alpha(X)$. Or, fixons $m \in M(X, D^\alpha_c\mu)$. On sait déjà [3], que m est bornée sur le disque unité Δ de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$. Pour le reste considérons une famille discrète $(f_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$, de cardinal card $I < \chi_{\alpha}$. La partie H de $\mathcal{U}(X)$, définie par l'ensemble des sommes finies $f_J = \sum_{i \in J} f_i$, est élément de $\mathcal{H}(X, D_c^{\alpha}\mu)$, de sorte que :

$$m(\Sigma f_i) = \lim_J m(f_J) = \lim_J \sum_{i \in J} m(f_i) = \sum_i m(f_i)$$

et tout est dit. L'égalité *b)* se démontre de la même manière. Le reste provient de l'égalité $D_c^1\mu = \sigma\mu$ déjà notée. □

Les propriétés générales des espaces M(X) et $M^{\infty}(X)$, [2], [7], fournisssent donc le corollaire suivant :

(1.5) COROLLAIRE. - *Soit* (X, μ) *un espace uniforme de type* $(\sigma_{\alpha}^{\infty})$. *L'espace* $\mathcal{M}_{\alpha}(X)$ *s'identifie à un sous-espace vectoriel de l'espace* $\mathcal{M}_{\alpha}^{\infty}(X)$, *l'identification se faisant en associant à chaque* $m \in \mathcal{M}_{\alpha}(X)$ *sa restriction* $\bar{m}$ *à l'algèbre* $\mathcal{U}^{\infty}(X)$. *En particulier pour qu'une forme linéaire* $m \in \mathcal{M}_{\alpha}^{\infty}(X)$ *soit élément de* $\mathcal{M}_{\alpha}(X)$ *il faut et il suffit que, pour toute* $f \in \mathcal{U}(X)$, *la suite* $\bar{m}[(f \wedge k) \vee (-k)]$ *ait une limite quand l'entier* k *tend vers* $+\infty$

2. LES ESPACES $\mathcal{M}_1(X)$ ET $\mathcal{M}_1^{\infty}(X)$ ET QUELQUES APPLICATIONS

Introduisons la définition suivante :

(2.1) DEFINITION. - *On dit qu'une suite* (f_n) *de* $\mathcal{U}(X)$ *décroît faiblement uniformément localement vers zéro, ce qu'on note* $f_n \downarrow 0$ $(\sigma.u.\ell)$, *s'il existe un recouvrement dénombrable* $\mathcal{V} = (V_k)$ *de* $\sigma\mu$ *tel que la suite* (f_n) *décroisse uniformément vers zéro sur chaque partie* V_k.

L'intérêt de cette notion apparaît dans l'énoncé suivant, relatif aux espaces de type (σ_1^{∞}) :

(2.2) PROPOSITION. - *Soit* (X, μ) *un espace uniforme de type* (σ_1^∞). *Pour toute forme linéaire* m *sur* $\mathcal{U}(X)$ [*resp. sur* $\mathcal{U}^\infty(X)$], *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $m \in \mathcal{M}_1(X)$ [*resp.* $m \in \mathcal{M}_1^\infty(X)$] ;

b) On a $m(f_n) \longrightarrow 0$ *pour toute suite* (f_n) *de* $\mathcal{U}(X)$ [*resp. de* $\mathcal{U}^\infty(X)$] *telle que* $f_n \downarrow 0$ $(\sigma.u.\ell)$.

PREUVE. - *a)* $\Rightarrow$ *b)* : Fixons $m \in \mathcal{M}_1(X)$ et la suite $f_n \downarrow 0$ $(\sigma.u.\ell)$ dans $\mathcal{U}(X)$. Alors la partie $H = \{f_n \ ; \ n \geq 1\}$ est élément de $\mathcal{H}_p(D_c^1\mu)$, de sorte que $m(f_n) \longrightarrow 0$ avec (1.3).

b) $\Rightarrow$ *a)* : Fixons m vérifiant *b)* et prouvons déjà que m est bornée sur le disque unité Λ de $\mathcal{U}^\infty(X)$, en suivant le raisonnement de [3 ; p. 100] : sinon on pourrait construire une suite (g_n) de $\mathcal{U}^\infty(X)$ telle que $0 \leq g_n \leq 2^{-n}$ et $|m(g_n)| = 2^n - 1$. Posons $h_n = \sum_{k \leq n} g_n$ et $h = \sum g_k$; alors la suite $f_n = h - h_n$ est élément de $\mathcal{U}^\infty(X)$ et $f_n \downarrow 0$ uniformément sur X, donc a fortiori $f_n \downarrow 0$ $(\sigma.u.\ell)$. On a donc $m(h_n) \longrightarrow m(h)$, ce qui implique la contradiction $m(h) = +\infty$ puisque l'on a, pour tout n :

$$|m(h_n)| \geq 2^n - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 1) = n.$$

Pour voir que l'on a $m \in \mathcal{M}_1(X)$, fixons une suite discrète (f_n) de $\mathcal{U}(X)^+$. La suite $h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, croît faiblement uniformément localement vers la fonction $h = \sum f_k \in \mathcal{U}(X)$. On en déduit que la suite $g_n = h - h_n = \sum_{n+1}^{\infty} f_k$ est telle que $g_n \downarrow 0$ $(\sigma.u.\ell)$, d'où l'on tire aisément $m(h_n) \longrightarrow m(h)$, ce qui termine tout. □

Comme première application on a :

(2.3) PROPOSITION. - *Soit* (X, μ) *un espace uniforme de type* (σ_1^∞). *Alors les deux espaces* $\mathcal{M}_1(X)$ *et* $\mathcal{M}_1^\infty(X)$ *sont engendrés par leur cône positif.*

PREUVE. - Pour l'espace $\mathcal{M}_1^\infty(X) = M^\infty(X, \sigma\mu)$ il s'agit d'une propriété valable pour tout espace $M^\infty(X)$ [3]. Pour l'espace $\mathcal{M}_1(X) = M(X, \sigma\mu)$ on utilise le critère (4.4.3) de [3] selon lequel $M(X, \sigma\mu)$ est engendré par son cône positif si et seulement si toute $m \in M(X, \sigma\mu)$ est bornée sur chaque disque $\Delta(f) = \{g \ ; \ |g| \leqslant |f|\}$ de $\mathcal{U}(X)$, $f \in \mathcal{U}(X)$. Raisonnons par l'absurde en supposant m non bornée sur un disque $\Delta(f_o)$. Il existe alors une suite (f_n) de $\Delta(f_o)$ telle que $|m(f_n)| \geqslant n^2$. La partie $h = \left\{\frac{f_n}{n}, \ n \geqslant 1\right\}$ de $\mathcal{U}(X)$ est élément de $\mathcal{H}_p(D_c^1\mu)$, d'où l'on tire $m\left(\frac{f_n}{n}\right) \longrightarrow 0$, contrairement à l'inégalité $|m(f_n)| \geqslant n$. □

(2.4) COROLLAIRE 1. - *Pour tout espace uniforme* (X, μ) *de type* (σ_α^∞) *les espaces* $\mathcal{M}_\alpha(X)$ *et* $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X)$ *sont engendrés par leur cône positif.*

PREUVE. - Il suffit de remarquer que $\mathcal{M}_\alpha(X) \subset \mathcal{M}_1(X)$ et $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X) \subset \mathcal{M}_1^\infty(X)$ et d'utiliser le critère [3, (4.4.3)]. □

(2.5.) COROLLAIRE 2. - *Soit* (X, μ) *un espace uniforme de type* (C) [3]. *Alors l'espace* $M(X)$ *est engendré par son cône positif.*

PREUVE. - On sait, avec [1], [3], que l'espace uniforme $(X, \sigma\mu)$ est de type (σ_1^∞), de sorte que $\mathcal{M}_1(X, \sigma\mu) = M(X, \sigma\mu)$ est engendré par son cône positif. On en déduit, toujours avec le critère (4.4.3) de [3], que $M(X, \mu)$ l'est aussi. □

(2.6) PROPOSITION. - *Soit* (X, μ) *un espace uniforme de type* (σ_α^∞). *Alors* $M(X, \mu) = \check{M}(X, \mu)$, *autrement dit l'espace* (X, μ) *est un* B-*espace* [3].

PREUVE. - L'espace uniforme (X, μ) est de type (U.P) [4], de sorte que $M(X, \mu)^+ = \check{M}(X, \mu)^+$ d'après [3, (4.5.6) et (4.5.7)]. D'autre part (X, μ) est aussi de type (C), donc $M(X, \mu)$ est, d'après (2.5), engendré par son cône positif, d'où l'égalité $M(X) = \check{M}(X)$. □

(2.7) COROLLAIRE. - *Pour tout espace uniforme* (X, μ) *de type* (σ_α^∞) *on a* $\mathcal{M}_\alpha(X) = \check{M}(X, D_c^\alpha \mu)$.

3. σ-REGULARITE ET σ-ADDITIVITE.

Une forme linéaire σ-régulière m sur $\mathcal{U}(X)$ [resp. sur $\mathcal{U}^\infty(X)$] est toujours σ-additive, mais la réciproque est fausse en général même si m est positive. Pour le voir il suffit de considérer un espace uniforme précompact (X, μ), qui est toujours de type (σ_1^∞), et pour lequel $\mathcal{M}_1^\infty(X) = \mathcal{M}_1(X) = M^\infty(X) = \mathrm{Rad}(\widehat{pX})$ est un espace qui diffère en général de $M_\sigma(X)$.

On rappelle qu'un espace uniforme (X, μ) est dit de type (A) dans [3], et "inversion-closed" dans [6], si pour toute fonction strictement positive $f \in \mathcal{U}(X)$, la fonction $\frac{1}{f}$ est encore élément de $\mathcal{U}(X)$. D'après [3] on sait que tout espace de type (A) est de type (σ_1^∞).

Cela étant, on a pour les espaces de type (A) :

(3.1) PROPOSITION. - *Soit* (X, μ) *un espace uniforme de type* (A). *Pour toute forme linéaire* m *sur* $\mathcal{U}(X)$ [*resp. sur* $\mathcal{U}^\infty(X)$], *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) m *est σ-régulière sur* $\mathcal{U}(X)$ [*resp. sur* $\mathcal{U}^\infty(X)$] ;

b) On a $m(f_n) \longrightarrow 0$ *pour toute suite* (f_n) *de* $\mathcal{U}(X)$ [*resp. de* $\mathcal{U}^\infty(X)$] *telle que* $f_n \downarrow 0$ $(\sigma.u.\ell)$;

c) m *est σ-additive et bornée sur le disque unité* Δ *de* $\mathcal{U}^\infty(X)$.

PREUVE. - On a déjà *b)* ⇒ *c)* avec la proposition (2.2). Il suffit donc de prouver l'implication *c)* ⇒ *a)*. Grâce à la proposition (2.3) on peut supposer m positive. Si m est une forme linéaire sur $\mathcal{U}(X)$ le résultat se déduit de [3, (4.5.9)]. Si m est une forme linéaire sur $\mathcal{U}^\infty(X)$, le résultat se déduit de (1.4) et de la caractérisation des espaces uniformes de type (A) donnée dans [8] sous la forme suivante : Pour toute suite (f_n) de $\mathcal{U}^\infty(X)$ telle que $f_n \downarrow 0$, la partie $H = \{f_n \ ; \ n \geq 1\}$ de $\mathcal{U}^\infty(X)$ est élément de $\mathcal{H}^\infty(X, \mu)$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. AZZAM, *Mesures sur les espaces uniformes*, Prépublications univ. Saint-Etienne, 2, 1974, 53 p.

[2] J. BERRUYER et B. IVOL, *Espaces de mesures et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 1-36.

[3] A. DEAIBES, *Espaces uniformes et espaces de mesures*, Publ. Dép. Math. Lyon, 12-4, 1975, p. 1-66.

[4] A. DEAIBES et R. PUPIER, *Sur la sommabilité de familles de fonctions uniformément continues*, Comm. Math. Univ. Carolinae, 18-4 (1977), p. 741-753.

[5] Z. FROLIK, *Three technical tools in uniform spaces*, Seminar uniform spaces 1973-1974, Prague (1975), p. 1-26.

[6] J. PACHL, *Free uniform measures on sub-inversion closed spaces*, Comm. Math. Univ. Carolinae, 17-2, 1976, p. 291-306.

[7] J. PACHL, *Free uniform measures*, Comm. Math. Univ. Carolinae, 15-3, 1974, p. 541-553.

[8] M. ZAHRADNIK, *Inversion closed uniform spaces have the Daniell property*, Seminar uniform spaces, 1973-1974, Prague (1975), p. 233-234.

Ali DEAIBES
Faculté des Sciences
Université libanaise
HADATH-BEYROUTH
Liban