PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

BRUNO DECORET

Suites de décomposition d'un espace de Banach à base inconditionnelle. Noyaux d'opérateurs définis sur certains espaces d'opérateurs

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 3
« Séminaire de géométrie », , p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_3_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t. 15-3

SUITES DE DECOMPOSITION D'UN ESPACE DE BANACH A BASE INCONDITIONNELLE. NOYAUX D'OPERATEURS DEFINIS SUR CERTAINS ESPACES D'OPERATEURS

par Bruno DECORET

Il existe une similitude fréquente entre l'espace de Banach ℓ^∞ des suites bornées et l'espace de Banach $\mathscr{L}(H)$ des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert séparable H, en particulier en ce qui concerne la bidualité (c_o, ℓ^∞) d'une part, $(\mathscr{L}(H)\ \ \mathscr{K}(H))$ d'autre part ($\mathscr{K}(H)$ étant l'espace des opérateurs compacts).

Dans [3] H. Fakhoury étudie le noyau d'un opérateur de ℓ^∞ dans ℓ^∞, s'annulant sur c_o. On est donc amené à faire de même pour un opérateur de $\mathscr{L}(H)$ dans $\mathscr{L}(H)$ s'annulant sur $\mathscr{K}(H)$. Il s'avère que l'on peut travailler avec les espaces $\mathscr{L}(V,W)$ et $\mathscr{K}(V,W)$, où V et W désignent des espaces de Banach, le premier étant muni d'une base de Schauder, ou bien le deuxième étant muni d'un système bi-orthogonal. Cela nous conduit à étudier ce type d'espace.

Dans (0), nous fixons les notations et rappelons les résultats de théorie des bases dont nous avons besoin.

Dans (1), nous introduisons une notion relative aux systèmes bi-orthogonaux sur un espace de Banach, permettant de donner des conditions suffisantes pour qu'un tel système soit une base, une base b-complète, une base contractante ou que l'espace lui-même soit réflexif. Nous montrons aussi que, dans des cas simples, tout opérateur de V dans W est compact, généralisant ainsi le théorème de Pitt sur les espaces ℓ^p.

Dans (2), nous abordons le problème des noyaux d'opérateurs sur l'espace $\mathscr{L}(V,W)$; nous montrons que, sous certaines conditions, un tel opérateur, à valeurs dans l'espace ℓ^∞ (ou un espace de type dénombrable) et s'annulant sur $\mathscr{K}(V,W)$, s'annule sur un sous-espace "plus grand" ; ces conditions permettent de prendre $V = \ell^1$ ou uniformément convexe et W quelconque, ou bien V quelconque et $W = c_o$, ou ℓ^∞ ou uniformément convexe. La démonstration est encore valable pour le théorème de Fakhoury cité plus haut. Une conséquence importante est que l'algèbre de Calkin $\mathscr{L}(\ell^2)/\mathscr{K}(\ell^2)$ ne s'injecte pas continûment linéairement dans $\mathscr{L}(\ell^2)$.

La technique des suites de décomposition rappelle la théorie des structures inconditionnelles locales de Dubinsky, Pelczynski et Rosenthal. Par ailleurs le théorème 1.14 de réflexivité est à rapprocher de la notion de ℓ^p-estimation, à l'aide de laquelle P. Enflo caractérise les espaces super-réflexifs.

0) NOTATIONS ET GÉNÉRALITÉS.

Si V est un espace de Banach, V' son dual, pour $x \in V$, $x' \in V'$ on notera indifféremment $x'(x)$, $\langle x \mid x' \rangle$ ou $\langle x' \mid x \rangle$ l'action de x' sur x. Soient V, W des espaces de Banach ; on désigne par $\mathscr{L}(V,W)$ l'espace des opérateurs bornés de V dans W muni de la norme uniforme, $\mathscr{K}(V,W)$ le sous-espace des opérateurs compacts.

PROPOSITION-DEFINITION 0-1. -

1°) *Pour* $x' \in V'$ *et* $y \in W$, *l'application* $x \mapsto \langle x \mid x' \rangle\, y$ *est un opérateur de norme* $\|x'\| \cdot \|y\|$ *de* V *dans* W, *noté* $x' \otimes y$.

2°) *Pour* $x'' \in V''$ $y' \in V'$ *l'application* $f \to \langle x'' \mid f \circ y' \rangle$ *est une forme linéaire continue de norme* $\|x''\|\ \|y'\|$ *sur* $\mathscr{L}(V,W)$, *notée* $x'' \otimes y'$; *en particulier, pour* $x \in V$, *on a* $\langle f \mid x \otimes y' \rangle = \langle f(x) \mid y' \rangle$.

La preuve est immédiate.

DEFINITION 0-2. - *Un système bi-orthogonal sur un espace normé V est une suite double* (v_n, v'_n) *avec* $v_n \in V$, $v'_n \in V'$ *et* $\langle v_n \mid v'_n \rangle = \delta_{nm}$. *On note* P_n *l'opérateur défini par* $P_n(x) = \sum_1^n \langle x \mid v'_j \rangle \; v_j$; *autrement dit* $P_n = \sum_1^n v'_j \otimes v_j$.

THEOREME 0-3. - *Soient V un espace de Banach et* (v_n, v'_n) *un système bi-orthogonal de V. Pour que* (v_n) *soit une suite basique, c'est-à-dire une base du sous-espace fermé qu'elle engendre, il faut et il suffit que la suite* P_n *soit bornée en norme. On dit alors que le système est* basique *et le nombre* $\sup \| P_n \|$ *s'appelle la* constante *du système.*

Dans la suite, nous supposerons que les systèmes bi-orthogonaux basiques envisagés ont une constante 1 (en particulier les bases sont monotones), ce qui est possible à une équivalence de norme près ; en outre si (v_n, v'_n) est un tel système sur V, on supposera que les v'_n séparent V et que $\| v_n \| = \| v'_n \| = 1$.

LEMME 0-4. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1°) (v_n) *est une base de* V;

2°) (v'_n, v_n) *est un système bi-orthogonal basique de* V'.

Rappelons qu'une base v_n de l'espace de Banach V est *contractante* si, pour $x' \in V'$, $\sup_{\|x\| = 1} \langle x - P_n(x) \mid x' \rangle$ tend vers 0. (v_n) sera dite "b-*complète*" si elle vérifie la condition suivante : pour toute suite (x_n) réelle, telle que $\sup_n \| \sum_1^n x_i \, v_i \| < \infty$, la suite $\sum_1^n x_i \, v_i$ est convergente dans V. On a alors les résultats suivants.

PROPOSITION 0-5. - *On a équivalence entre :*

1°) La base (v_n) *est contractante ;*

2°) (v'_n) *est une base de* V';

3°) (v_n, v'_n) *est un système bi-orthogonal basique de* V".

PROPOSITION 0-6. - *1°) Si la base (v_n) est contractante, la base (v'_n) est* b*-complète ;*

2°) Si la base (v_n) est b*-complète, l'espace* V *est isomorphe à un dual.*

THEOREME 0-7. - *L'espace de Banach* V*, possèdant une base (v_n) , est réflexif si et seulement si (v_n) est contractante et* b*-complète.*

NOTATIONS 0-8. - Etant donné le système bi-orthogonal (v_n, v'_n) sur l'espace V et A une partie de $\mathbb{N}$, on notera V_A le sous-espace formé des $x \in V$ tels que $\langle x \mid V'_n \rangle = 0$ pour tout $n \notin A$.

Si (w_n, w'_n) est un système bi-orthogonal sur W, et A, B $\subset \mathbb{N}$, on désignera par $\mathscr{L}(V_A, W_B)$ le sous-espace de $\mathscr{L}(V,W)$ formé des opérateurs dont le noyau contient V_{CA} et l'image est contenue dans W_B.

Pour $x \in V$, on appellera support de x l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $\langle x \mid V'_n \rangle \neq 0$, V_A est donc l'ensemble des x dont le support est inclus dans A.

1) SUITES DE DÉCOMPOSITION D'UN ESPACE À BASE.

Si (v_n, v'_n) est un système bi-orthogonal de l'espace de Banach V, l'application $x \mapsto (v_n(x))_n$ est une injection continue de V dans ℓ^∞ .

DEFINITION 1-1. - *On dira que le système bi-orthogonal (v_n, v'_n) de l'espace de Banach* V *est* inconditionnel *si l'image canonique de* V *dans ℓ^∞ est un idéal et si, pour tous $x \in V$ et $\Lambda \in \ell^\infty$, on a $\| \Lambda x \| < \| \Lambda \| \, \| x \|$.*

Notons que le mot idéal est employé au sens de la structure d'ordre ou d'anneau, indifféremment, la définition 1-1 signifie que, pour $x \in V$ et $\Lambda = (\lambda_n) \in \ell^\infty$, tel que $\| \Lambda \| = 1$, il existe $y \in V$, tel que $\| y \| \leqslant \| x \|$ et $\langle v'_n \mid y \rangle = \lambda_n \langle v'_n \mid x \rangle$, En particulier, pour toute partie A de N et tout $x \in V$, il existe $y \in V$, tel que $\| u \| \leqslant \| x \|$, $\langle v'_n \mid y \rangle = \langle v'_n \mid x \rangle$ si $n \in A$ et $\langle v'_n \mid y \rangle = 0$ si $n \notin A$. On pose $y = P_A(x)$ et on définit ainsi un projecteur P_A de norme 1. Si (V_n) est une base, on retrouve la définition d'une base inconditionnelle.

PROPOSITION 1-2. - *Si* (v_n) *est une base contractante inconditionnelle de l'espace* V, (v_n, v'_n) *est un système bi-orthogonal inconditionnel de* V".

PREUVE. - Soient $x \in B(V'')$ et $\Lambda = (\lambda_n) \in B(\ell^\infty)$, Il s'agit de trouver un $y \in V''$, de norme $\leqslant \|x\|$ tel que, pour tout n, on ait $\langle y, v'_n \rangle = \lambda_n \langle x \mid v'_n \rangle$ e.

Soit s_n l'élément de V définit par $s_n = \sum_1^n \lambda_k \langle x \mid V'_k \rangle v_k$. La base v_n étant inconditionnelle dans V, on a $\| x_n \| \leqslant \| P_n x \| \leqslant \|x\|$, puisqu'on sait déjà que (v_n, v'_n) est bi-orthogonal dans V". Par ailleurs, pour tout y' de V', la série réelle $\sum x_k \, y'(v_k)$ est inconditionnellement convergente, donc aussi la série $\sum x_k \lambda_k \, y'(v_k)$. Autrement dit, la suite (s_n) est une suite de Cauchy dans V" pour la topologie $\sigma(V'',V')$. Or $s_n \in B(V'')$ et $B(V'')$ est $\sigma(V'',V')$ compact ; il en résulte que la suite s_n converge vers un $y \in B(v'')$, pour $\sigma(V'',V')$. En particulier, $\langle y, v'_k \rangle = \lim_n \langle s_n, v'_k \rangle = \lambda_k \langle x, v'_k \rangle$, ce qu'on voulait.

PROPOSITION 1-3. - V *étant un espace de Banach muni d'une base* v_n, w *un espace de Banach muni d'un système bi-orthogonal* (w_n, w'_n). *Posons* $u_{nm} = v'_n \otimes w_m$ $u'_{nm} = v_n \otimes w'_m$. *La suite* (u_{nm}, u'_{nm}) *constitue un système bi-orthogonal de* $\mathscr{L}(V,W)$.

PREUVE. - D'après 0-1, on a $\| u_{nm} \| = \| u'_{nm} \| = 1$ et $\langle u_{nm}, u'_{pq} \rangle = \delta_{np} \delta_{mq}$. En outre les u'_{nm} séparent $\mathscr{L}(V,W)$; puisque (v_n) est une base.

Remarquons qu'ici, on a identifié $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on ne peut donc pas qualifier de "basique" le système précédent, cette notion dépendant de la bijection choisie entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; cet inconvénient disparait lorsqu'on parle d'inconditionnalité.

THEOREME 1.4. - *1°) Soit W un espace de Banach muni d'un système bi-orthogonal inconditionnel. Le système canonique de $\mathscr{L}(\ell^1, W)$ est inconditionnel.*

2°) Soit V un espace de Banach muni d'une base inconditionnelle. Alors le système canonique de $\mathscr{L}(V, \ell^\infty)$ est inconditionnel.

PREUVE. - 1°) Désignons par (e_n) la base canonique de ℓ^∞. Soient $f \in \mathscr{L}(\ell^1, W)$ et (a_{nm}) sa "matrice" c'est-à-dire $a_{nm} = u'_{nm}(f)$; on appellera (λ_{nm}) une suite de $B(\ell^\infty)$; il s'agit de prouver l'existence d'une $g \in \mathscr{L}(\ell^1, W)$, de norme $\leqslant \|f\|$ et telle que $u'_{nm}(g) = \lambda_{nm} a_{nm}$.

Or, (w_n, w'_n) étant inconditionnel, pour tout m, il existe $z_m \in W$ tel que $\|z_m\| \leqslant \|f(e_m)\| \leqslant \|f\|$ et $w'_n(z_m) = \lambda_{nm} a_{nm}$ pour tout n.

L'application qui a e_m fait correspondre z_m se prolonge de manière unique en un opérateur de ℓ^1 dans W de norme f, que nous noterons g, et vérifiant $u'_{nm}(g) = \lambda_{nm} u'_{nm}(f)$, ce que l'on cherchait.

2°) Soient toujours $f \in \mathscr{L}(V, \ell^\infty)$, a_{nm} sa matrice, $(\lambda_{nm}) \in B(\ell^\infty)$. Le raisonnement suivant se fait sur les "lignes" de la matrice, le précédent étant sur les "colonnes". Fixons n. Soit ℓ_n la forme linéaire sur V définie par $\ell_n(x) = f(x)_n$. Il est évident que, pour $x \in B(V)$, $|\ell_n(x)| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \|f\|$, ℓ_n est donc continue, de norme $\leqslant \|f\|$.

Pour $x \in V$, la série $\sum_m x_m v_m$ étant inconditionnellement convergente, la série $\sum_m \lambda_{nm} x_m v_m$ aussi, sa somme étant de norme $\leqslant \|x\|$ il en est de même de la série $\sum \lambda_{nm} a_{nm} x_m = \ell_n(\sum_m \lambda_{nm} x_m v_m)$. Appelons $k_n(x)$ sa somme.

On a donc

$$|k_n(x)| \leqslant \|\ell_n\| \quad \sum \lambda_{nm} x_m v_m \| \leqslant \|x\| \, \|f\|$$

Il en résulte que $k_n \in V'$ et $\|k_n\| \leqslant f$.

Définissons alors $g(x) = (k_n(x))_n$; g est ainsi un opérateur de V dans ℓ^∞ / et $\|g\| \leqslant \sup \|k_n\| \leqslant \|f\|$; en outre, par construction, $g(v_m)_n = k_n(v_m) = \ell_n(\lambda_{nm} v_m) = \lambda_{nm} a_{nm}$, c'est-à-dire $u'_{nm}(g) = \lambda_{nm} u'_{nm}(f)$ ce qu'on voulait.

En dehors de ℓ^1 ou ℓ^∞, on ne peut pas, en général avoir un résultat de ce type. En particulier, le système bi-orthogonal canonique de l'espace $\mathscr{L}(\ell^2)$ n'est pas inconditionnel. En effet, s'il en était ainsi, ce serait une base inconditionnelle de $\mathscr{K}(\ell^2)$; mais $\mathscr{K}''(\ell^2) = \mathscr{L}(\ell^2)$ est séparable ce qui impliquerait (Marti, th. V. 7 p. 74) que $\mathscr{K}(\ell^2)$ est réflexif, ce qui est absurde. Cela nous conduira a une autre notion, dans 2°).

Si V possède un système bi-orthogonal inconditionnel et si $A_1 \ldots A_n$ sont des parties de N, deux à deux disjoints, on voit que l'on a, pour $x \in V$, $1/n \leqslant \sup_i \|p_{AI}(x)\| \leqslant 1$. Il est légitime de poser :

DEFINITION 1.5. - *Pour un espace de Banach muni d'un système bi-orthogonal inconditionnel* (v_n, v'_n), *on appelle suite inférieure de décomposition la suite*

$$\delta_n(V) = \inf_{A_1 \ldots A_n \quad A_i \cap A_j = \emptyset} \quad \inf_{\|x\| = 1} \quad \sup_i \|p_{Ai}(x)\| \quad ;$$

On appelle suite supérieure de décomposition la suite

$$\gamma_n(V) = \sup_{A_1 \ldots A_n \quad A_i \cap A_j = \emptyset} \quad \sup_{\|x\| = 1} \quad \inf_i \|p_{Ai}(x)\| \quad .$$

LEMME 1.6. - *Avec les notations de 1-7 on a*

$$\frac{1}{\delta_n(V)} = \sup \{\|x_1+\ldots+x_n\| \mid \|x_k\| = 1,\ x_k \in V_{A_k},\ A_k \cap A_j = \emptyset \text{ pour } j \neq k = 1\ldots n\},$$

$$\frac{1}{\gamma_n(V)} = \inf \{\|x_1 + \ldots x_n\| \mid \|x_k\| = 1,\ x_k \in V_{A_k},\ A_k \cap A_j = \emptyset\ \ j \neq k = 1 \ldots n\}.$$

PREUVE. - On démontrera 1°, l'autre relation se démontrant de même. Soit α_n la borne supérieure écrite dans l'énoncé

Soient $x \in V$, $\|x\| = 1$ et $A_1 \ldots A_n$ deux à deux disjoints ; posons $\mu = \max \|x_k\|$ avec $x_k = P_{A_k}(x)$ et soit $y_k = \frac{x_k}{\|x_k\|}$, $k = 1\ldots n$. On a, par définition de α_n, $\|\sum y_k\| < \alpha_n$. Mais $\sum y_k = \frac{1}{\mu} \sum \frac{y}{\|x_k\|} x_k$ et, par inconditionnalité, $\|\sum \frac{\mu}{\|u_k\|} x_k\| \geq \|\sum x_k\| = 1$ ce qui donne $\frac{1}{\mu} \leq \alpha_n$ donc $\mu \geq 1/\alpha_n$ et, par passage à l'inf en x et en $A_1 \ldots A_n$, $\delta_n \geq 1/\alpha_n$. Réciproquement soient $A_1 \ldots A_n$ deux à deux disjoints et $x_k \in V_{A_k}$, avec $\|x_k\| = 1$; posons $x = \sum x_k$, $y_k = \frac{x_k}{\|x\|}$ et $y = \sum y_k$; alors $\|y\| = 1$, donc par définition de δ_n, $\max \|y_k\| \geq \delta_n$; or $\|y_k\| = \frac{1}{\|x\|}$, ce qui donne $\|x\| \leq 1/\delta_n$ et, en passant au sup pour tous les x_k, A_k, $\alpha_n \leq 1/\delta_n$. En comparant les deux, $\alpha_n = \delta_n$

REMARQUE. - On pourrait remplacer, dans 1-6.

$\frac{1}{\gamma_n} = \inf \{\ldots \|x\| = 1\}$ par $\inf \{\ldots / \|x\| \geq 1\}$ et

$\frac{1}{\delta_n} = \sup \{\ldots \|x\| = 1\}$ par $\sup \{\ldots / \|x\| \leq 1\}$.

COROLLAIRE 1.7. - *Pour tout espace de Banach* V *muni d'un système inconditionnel,*

1°) On a $\delta_n(V) \leq \gamma_n(V)$ *pour tout* n

2°) les suites (δ_n) *et* (γ_n) *sont décroissantes.*

PROPOSITION 1.8. - *Avec les mêmes hypothèses, on a*

$$\gamma_{np} \leq \gamma_n \gamma_p \quad et \quad \delta_{np} \geq \delta_n \; \delta_p$$

PREUVE. - Soient $x_1 \ldots x_{pn}$ des éléments de V, de norme 1, à supports disjoints.

Pour $k=1\ldots n$ on a $\| \sum_{kp+1}^{k(p+1)} x_j \| > \frac{1}{\gamma_{p(V)}}$. Posons $y_k = \sum_{kp+1}^{k(p+1)} x_j$. Alors,

d'après 1-6 et la remarque qui suit, $\| \sum_{k=1}^{n} y_k \| \geq \frac{1}{\gamma_n} \; \frac{1}{\gamma_p}$ c'est-à-dire

$\| \sum_{1}^{np} x_j \| \geq \frac{1}{\gamma_n \gamma_p}$. Passant alors à l'inf en (x_j) on a $\frac{1}{\gamma_{np}} \geq \frac{1}{\gamma_p \gamma_n}$ ou encore

$\gamma_{np} \leq \gamma_n \; \gamma_p$. On fait de même pour δ_{np}.

PROPOSITION 1.9. - *On a* $\gamma_n(\ell^p) = \delta_n(\ell^p) = (1/n)^{1/p}$ *pour* $1 \leq p \leq \infty$ *et*

$$\gamma_n(c_0) = \delta_n(c_0) = 1.$$

PREUVE. - Pour $p \neq \infty$, soient $x_1 \ldots x_n$ des éléments de ℓ^p de norme 1, à supports disjoints, on a évidemment $\| x_1 + \ldots + x_n \|^p = \| x_1 \|^p + \ldots \| x_n \|^p$; il en résulte que $\| x_1 + \ldots + x_n \| = (\frac{1}{n})^{1/p}$.

Ceci étant vrai pour toute décomposition, l'égalité subsiste pour le sup ou l'inf i.e. $1/\gamma_n(\ell^p) = \frac{1}{\delta_n}(\ell^p) = n^{1/p}$, ce qu'on voulait. Le résultat est immédiat pour ℓ^∞ ou c_0.

EXEMPLE 1.10. - Soit $V = c_0 \oplus \ell^1$; alors $\gamma_n(V) = 1$, $\delta_n(V) = 1/n$. En effet, pour n donné, soient $x_1 \ldots x_n$, de norme 1 à support disjoints, appartenant tous à c_0 ; on a $\| \sum_1^n x_k \| = 1$, d'où $\frac{1}{\gamma_n(V)} \leqslant 1$ et, en fait, $\gamma_n(1) = 1$;

Prenons $y_1 \ldots y_n$, de norme 1, à supports disjoints, appartenant tous à ℓ^1 ;

on a $\| \sum_1^n y_k \| = n$ donc $\frac{1}{\delta_n(V)} \geqslant n$ et, en fait, $\delta_n(V) = 1/n$.

THEOREME 1.11. - *Soit V un espace de Banach muni d'un système bi-orthogonal inconditionnel* (v_n, v_n') . *Si la suite de décomposition supérieure* γ_n *tend vers 0,* (v_n) *est une base* b-*complète.*

PREUVE. - Nous allons prouver d'abord que (v_n) est une base b-complète du sous-espace fermé V_0 qu'elle engendre. Pour cela, soit (x_n) une suite réelle telle que la suite $s_n = \sum_1^n x_k v_k$ soit bornée en norme. Nous allons prouver que la série $\sum x_k v_k$ converge dans V_0 (ou ce qui revient au même dans V) c'est-à-dire que la suite (s_n) est de Cauchy.

Supposons que (s_n) ne soit pas de Cauchy, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite (s_{n_k}) telle que $\| s_{n_{2k+1}} - s_{n_{2k}} \| \geqslant \varepsilon$. Les $s_{n_{2k+1}} - s_{n_{2k}}$ sont à supports disjoints ; donc, pour tout p on a , d'après 1.6

$\| \sum_1^p s_{n_{2k+1}} - s_{n_{2k}} \| \geqslant \frac{1}{\gamma_p} \varepsilon$ et, du fait que le système (v_n, v_n') est inconditionnel :

$$\| s_{n_{2p+1}} \| = \| \sum_1^{2p+1} s_{n_j} - s_{n_{j-1}} + s_{n_0} \| \geqslant \| \sum_1^p s_{n_{2k+1}} - s_{n_{2k}} \| > \frac{1}{\gamma_p} \varepsilon ;$$

Puisque γ_p tend vers 0, la suite $\| s_{n_{2p+1}} \|$ n'est pas bornée, ce qui contredit l'hypothèse.

Soit maintenant $x \in V$; la suite $P_n(x)$ est bornée en norme par $\|x\|$, donc la série $\langle x \mid v_n' \rangle v_n$ converge vers un $y \in V$, et, pour tout n, $\langle x \mid v_n' \rangle = \langle y \mid v_n' \rangle$; donc $x = y$. Il résulte que (v_n) est une base de V, b-complète d'après ce qui précède.

COROLLAIRE 1.12. - *Soit* V *un espace de Banach muni d'un système inconditionnel* (v_n, v'_n), *si, pour un* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\gamma_n(V) < 1$, (v_n) *est une base* b-*complète.*

PREUVE. - Si $\gamma_n(V) < 1$, d'après (1.8), on a $\gamma_{nk}(V) \leqslant (\gamma_n(V))^k$ donc la suite $(\gamma_{nk}(V))$ tend vers 0 et (γ_n) aussi, puisqu'elle est décroissante.

Le théorème 1-11 donne une condition suffisante, mais non nécessaire, pour qu'un système inconditionnel soit une base. c_0 en est un exemple.

Si v_n est une base inconditionnelle de V, (v'_n, v_n) constitue un système bi-orthogonal inconditionnel de V' ; en effet, si $x' \in V'$ et $\Lambda = (\lambda_n) \in B(\ell^\infty)$, on définit $y' \in V'$ par $\langle x | y' \rangle = \langle \Lambda x | x' \rangle$; y' vérifie $||y'|| \leqslant ||x'||$ et $\langle v_n | y' \rangle = \lambda_n \langle v_n | x' \rangle$, ce qu'on voulait. On est amené à chercher les rapports entre les suites de décomposition de V et V'.

PROPOSITION 1.13. - *L'espace de Banach* V *possède une base inconditionnelle* (v_n) *et* V' *étant muni du système* (v'_n, v_n) *on a*

1°) $\gamma_n(V) \leqslant \dfrac{1}{n\delta_n(V')}$, $\gamma_n(V') \leqslant \dfrac{1}{n\delta_n(V)}$;

2°) $\delta_n(V') \geqslant \dfrac{1}{\sum_1^n \gamma_i(V)}$, $\delta_n(V) \geqslant \dfrac{1}{\sum_1^n \gamma_i(V')}$.

PREUVE. - 1°) Nous montrerons la 1-ère inégalité, l'autre se démontrant de même. Soient $x_1 \ldots x_k \in V$, de supports A_k respectifs, deux à deux disjoints, de norme 1. Pour $\varepsilon > 0$ et pour $k = 1 \ldots n$, il existe $x'_k \in V'$ tel que $||x'_k|| = 1$ et que $1 \geqslant \langle x_k | x'_k \rangle \geqslant 1-\varepsilon$. Puisque $||P'_{A_k} x'_k|| \leqslant 1$ et $\langle x_k | P'_{A_k}(x'_k) \rangle = \langle x_k | x'_k \rangle$, on peut supposer, à cause de l'inconditionnalité de (v'_n, v_n) que $x'_k \in V'_{A_k}$; posons $x = \sum_1^n x_k$ et $x' = \sum_1^n x'_k$, alors on a $\langle x\ x' \rangle = \sum_1^n \langle x_k | x'_k \rangle \geqslant n(1-\varepsilon)$ donc $||x||\,||x'|| \geqslant n(1-\varepsilon)$. Or $||x'_k|| = 1$ et les x'_k sont à supports disjoints ; donc $||x'|| \leqslant 1/\delta_n(V')$; d'où $||x|| \geqslant \dfrac{n(1-\ )}{||x'||} \geqslant n(1-\varepsilon)\ \delta_n(V4)$.

On passe alors à l'inf en $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et, avec 1-6, $1/\gamma_n(V) \geqslant n(1-\varepsilon)\ \delta_n(V')$.

ε étant quelconque, on a $\gamma_n(V) \leqslant \frac{1}{n\delta_n(V')}$

2°) Soit $(x'_k)_{k=1\dots n}$ de norme 1 de supports disjoints, posons $x' = \sum x'_k$ et soit $x \in V$ tel que $||x|| = 1$.

On a $|\langle x \mid x'\rangle| = |\sum_1^n \langle x \mid x'_k\rangle| = |\sum_1^n \langle P_k x \mid x'_k\rangle| \leqslant \sum_1^n |\langle P_k x \mid x'_k\rangle| \leqslant \sum_1^n ||P_k x||$.

Or les $P_k x$ sont à supports disjoints ; donc le plus petit est, $<\gamma_n(V)$ en norme, le suivant est inférieur en norme à $\gamma_{n-1}(V)$ et ainsi de suite.

Finalement $|\langle x \mid x'\rangle| \leqslant \sum_1^n ||P_k(x)|| \leqslant \gamma_n(V) + \dots + 1$; d'où $||x|| \leqslant \sum_1^n \gamma_k(V)$,

En passant au sup en (x'_k) on trouve $1/\delta_n(V') \leqslant \sum_1^n \gamma_k(V)$, ce qu'on voulait,

COROLLAIRE 1.14. - *Si l'espace de Banach V possède une base inconditionnelle (v_n) telle que $\delta_n(V) > \frac{1}{n}$ pour un n, la base (V_n) est contractante.*

PREUVE. - D'après 1.12, on a $\gamma_n(V') < 1$ donc (v'_n) est une base d'après 1-9. Remarquons que, réciproquement si $\delta_n(V) = 1/n$ pour tout n alors $\sum_1^n \gamma_n(V') = n$ donc $\gamma_n(V') = 1$ pour tout n, cela n'implique pas que (v'_n) n'est pas une base.

THEOREME 1.15. - *Soit V un espace de Banach muni d'un système bi-orthogonal inconditionnel tel que pour n, on ait $\frac{1}{n} < \delta_L(V) \leqslant \gamma_n(V) < 1$, alors (v_n) est une base et V est réflexif.*

PREUVE. - (v_n) est une base b-complète d'après 1-9 et contractante d'après 1.13 ; V est réflexif par le hthéorème de James (0-7).
Remarquons que 1-12 permet de montrer que $\gamma_n(V'')$ est < 1, impliquant que (v_n) est une base de V", donc que V est reflexif, sans utiliser le théorème de James.
Les seuls espaces pour lesquels nous ayons, pour l'instant, calculé les suites de décomposition sont les espaces ℓ^p et c_0. Nous verrons dans 2° et 3°, comme nous l'avons déjà constaté, que l'important est moins le calcul explicite que de savoir si $\gamma_n \to 0$ ou si $n\delta_n \to \infty$, ce qui donne tout son intérêt au théorème que nous allons donner.

Rappelons que l'on appelle module d'uniforme convexité d'un espace normé V l'application croissante de $[0,2]$ dans $[0,1]$ défini par

$$\delta_V(\varepsilon) = \inf \{1-||\tfrac{x+y}{2}||, ||x|| = ||y|| = 1, ||x-y|| = \varepsilon\}$$

la croissance de $\delta_V(.)$ fait ressortir que, si $||x-y|| \geqslant \varepsilon$, avec $||x|| = ||y|| = 1$ on a

$1 -|||\frac{x+y}{2}|| \geqslant \delta_V(\varepsilon)$; ceci implique, en particulier que V est uniformément convexe si $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \delta_V(\varepsilon) > 0$.

THEOREME 1.16. - *V étant un espace de Banach ayant une base inconditionnelle, on a*

1°) $\delta_2(V) > \frac{1}{2}(1-\delta_V(1))$,

2°) $\gamma_2(V) < 1 - \delta_V(1)$.

PREUVE. - 1°) Soient x et $y \in V$, $||x|| = ||y|| = 1$, à supports disjoints, on remarque que $||x-y|| \geqslant 1$, à cause de l'inconditionnalité ; donc $1 -||\frac{x+y}{2}|| \geqslant \delta_V(1)$; d'où $||x+y|| \leqslant 2(1-\delta_V(1))$. Passant au sup pour tous les couples (x,y) on obtient $1/\delta_2(V) \leqslant 2(1-\delta_V(1))$, soit $\delta_2(V) \geqslant 1/2\ (1-\delta_V(1))$.

2°) Soit $x \in V$, $||x|| = 1$ et $x = z+t$ une décomposition en deux éléments à supports disjoints, on prend les notations de façon à ce que $||z|| \geqslant ||t||$.
On voit alors que $||z|| \geqslant 1/2$ et, si l'on pose $y = -z+t$, par inconditionnalité, que $||y|| = ||z+t|| = 1$, On constate alors que $||x-y|| = ||2z|| \geqslant 1$, donc
$1 - ||\frac{x+y}{2}|| \geqslant \delta_V(1)$.
Mais $||t|| = \min(||z||,||t||)$; prenons le sup sur toutes les décompositions possibles de x et tous les x de norme 1, par définition de γ_2, on a $\gamma_2(V) < 1-\delta_V(1)$.

Les espaces uniformément convexes possèdent une autre propriété, utile dans la suite, vraie aussi pour ℓ^1.

PROPOSITION 1.17. - *Soit V uniformément convexe, ayant une base* ***inconditionnelle****, Pour tout* $\varepsilon > 0$ *, il existe* $\eta(\varepsilon) > 0$ *tel que, pour x,y à* ***supports disjoints***, $||x+y|| = 1$, *on ait* $||x|| \geqslant 1-\eta \Rightarrow ||y|| \leqslant \varepsilon$.

PREUVE. - Posons $\eta = \delta(2\varepsilon)$ et soient x et y à supports disjoints tels **que** $||x+y|| = 1$ et $||x|| > 1-$. Par inconditionnalité, on a $||x-y|| = 1$ **et** $\frac{||(x+y) + (x-y)||}{2} = ||x|| > 1 - \eta = 1 - \delta(2\varepsilon)$ d'où ,

$||(x+y) - (x-y)|| = 2||y|| \leqslant 2\varepsilon$ i.e. $||y|| \leqslant \varepsilon$. Ce qu'on voulait.

Examinons maintenant les cas opposés où l'on n'a pas $\gamma_n \to 0$ ou $n\delta_n \to \infty$.

THEOREME 1.18. - *Soit V un espace de Banach muni d'une base* ***inconditionnelle*** (v_n). *Si* $\gamma_2 = \frac{1}{2}$ *, alors V est isométriques à* ℓ^1.

PREUVE. - Prouvons d'abord, par récurrence que, pour tout n, $||\sum_1^n x_k v_k|| = \sum_1^n |x_k|$

pour n = 1 il n'y a rien à dire.

Si c'est vrai pour n-1, soient $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$, on peut supposer $x_k \geqslant 0$ **à cause de** l'inconditionnalité, alors soit

$$y = \frac{\sum_1^{n-1} x_k v_k}{||\sum_1^{n-1} x_k v_k||} = \frac{\sum_1^{n-1} x_k v_k}{\sum_1^{n-1} |x_k|}$$; y et v_n sont à supports **disjoints**,

de norme 1, donc $||\frac{y+v_n}{2}|| = 1$. Tout élément du segment $[y,v_n]$ **est de normé 1**, **en particulier on a**

$$||\frac{\sum_1^{n-1} |x_k|}{\sum_1^n |x_k|} y + \frac{x_n}{\sum_1^n |x_k|} v_n || = 1,$$ c'est-à-dire $||\sum_1^n x_k v_k|| = \sum_1^n |x_k|$ **, ce**

qu'on avait annoncé.

On en déduit que, pour tout $x = \sum_1^\infty x_n v_n$, on a $\|x\| = \sum_1 |x_k|$ et que l'application canonique de ℓ^1 dans V qui à (x_n) associe $\sum x_n v_n$ est une isométrie surjective.

THEOREME 1.19. - *Soit V un espace de Banach ayant un système bi-orthogonal inconditionnel* (v_n, v'_n),
Si $\gamma_2(V) = 1$ *, alors, pour tout* $x \in V$ *, on a* $\|x\| = \sup |\langle x, v'_n \rangle|$ *; si, en outre,* (v_n) *est une base, V est isométrique à* c_0.

PREUVE. - On prouve par récurrence que $\|\sum_1^1 x_n v_n\| = \sup |x_n|$. Pour n = 1 il n'y a rien à dire.
Soient $x_1 \ldots x_n$, on a $\|\sum_1^{n-1} x_k v_k\| = \sup_{1\ldots n-1} \|x_k\|$ et, puisque $\gamma_2 = 1$, on a $\max\left(\|\sum_1^{n-1} x_k v_k\|, \|x_n v_n\|\right) = \|\sum_1^n x_k v_k\|$, d'où $\|\sum_1^{n-1} x_k v_k\| = \sup_{1\ldots n} |x_k|$, ce qu'on voulait ; on a, de même $\|\sum_1^\infty x_k v_k\| = \sup \|x_k\|$. Si, maintenant, (v_n) est une base, pour tout $x = \sum x_k v_k$, la suite (x_k) tend vers 0 et l'application $x \mapsto (x_k)$ est alors une isométrie de V dans c_0. Elle est surjective car, si $(\lambda_n) \in c_0$, on a, pour tout m, n, $\|\sum_n^m \lambda_k v_k\| = \sup_{n\leq k\leq m} |\lambda_k|$ donc la suite $\sum \lambda_k v_k$ est de Cauchy et converge vers un $x \in V$ égal à $\sum \lambda_k v_k$,

On sait [12] que, si $1 \leq p < q < \infty$, tout opérateur de ℓ^q est compact et il en est est ainsi de tout opérateur de ℓ^p dans c_0 $(p < \infty)$. La démonstration donnée par Lidenstrauss et Tzafriri [19 p. 31] utilise la notion de bloc-base. Dans ce qui suit, nous généralisons ce résultat en reprenant le même shéma de démonstration,.

La condition 2) du théorème 1.1.9 est vérifiée lorsque W = ℓ^1 ou que W est uniformément convexe. Nous ignorons si cette condition est nécessaire.

THEOREME 1.20. - *Soient V et W deux espaces de Banach ayant une base* ***incondi tionnelle****. On suppose que :*

1°) Pour un entier n *on a l'inégalité* $\gamma_n(W) < \delta_n(V)$

2°) Pour $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que, pour tous* x *et* y *de* W *à* ***supports*** *disjoints dont la somme est de norme* 1, *l'inégalité* $\|x\| > 1-\eta$ *implique l'inégalité* $\|y\| < \varepsilon$.

PREUVE. - Prouvons la contraposé. Supposons qu'il existe un opérateur non compact T de V dans W. P_m désignant la n-ème projection canonique de V, Q_n la n-ème de W, T n'est pas limite des opérateurs de rang fini $Q_nT+T\,P_m - Q_m\,T\,P_m = U_{nm}$ donc $\inf \|T - U_{nm}\| = \|(1-Q_m)\,T\,(1-P_m)\| > 0$.

On peut supposer, en modifiant T, que cet inf est 1. Mais la suite $\|(1-Q_n)T(1-P_m)\|$ est décroissante, donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe n_ε, m_ε tels que, pour $n > n_\varepsilon$, $n > m_\varepsilon$, on ait $\|(1-Q_m)T(1-P_m)\| \leq 1+\varepsilon$; posant $T_\varepsilon = (1-Q_{m_\varepsilon})T(1-P_{m_\varepsilon})$. On voit donc que, pour tout ε il existe un opérateur T_ε tel que :

$$\forall n, m \qquad 1 \leq \|(1-Q_m)\,T_\varepsilon\,(1-P_m)\| \leq 1+\varepsilon.$$

Fixons k, il s'agit de prouver que $\gamma_k(W) \geq \delta_k(V)$ ou $\frac{1}{\gamma_k(W)} \leq \frac{1}{\delta_k(W)}$

Soit alors $\varepsilon > 0$. La condition imposée sur W implique qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour x, y à supports disjoints, $\|x+y\| = 1$. Et $\|x\| \geq 1-\eta \Rightarrow \|y\| \leq \varepsilon$

L'opérateur T réalise sa norme sur les éléments de V à support fini, donc il existe $m_1 \in W$, et $x_1 \in V_{[1,m_1]}$, $\|x_1\| = 1$ tel que $\|T_\varepsilon(x_1)\| > 1-\varepsilon$. Mais $T_\varepsilon(x_1) = \lim_j Q_j\,T_\varepsilon(x_1)$ donc il existe n_1 tel que $\|(1-Q_{n_1})\,T_\varepsilon(x_1)\| \leq \varepsilon$.

On pose $y_1 = Q_{n_1}\,T_\varepsilon(x_1) \qquad z_1 = T_\varepsilon(x_1) - y_1$.

On va construire, par récurrence, deux suites strictement croissantes d'entiers (m_j), (n_j), une suite (x_j) de V, deux suites (y_j), (z_j) de W telle que $\|x_j\| = 1$;

$x_j \in V_{[m_{j-1}]}$; $\|y_j\| > 1-\varepsilon$, $y_j \in W_{[n_{j-1},\,n_j]}$, $\|z_j\| < \varepsilon$ et $T_\varepsilon(x_j) = y_j + z_j$.

Le 1° rang de la récurrence étant fait on suppose les suites construites au rang j, on a vu que $\|(1-Q_{n_j})\,T\,(1-P_{m_j})\| \geqslant 1$ et l'opérateur $(1-Q_{n_j})\,T\,(1-P_{m_j})$ réalise sa norme sur les éléments de V à support fini, ce support pouvant naturellement être pris disjoint de $[1,m_j]$ autrement dit, il existe $m_{j+1} > m_j$ et $x_{j+1} \in V_{[m_j\ m_j+1]}$ tel que $\|(1-Q_{n_j})\,T_\varepsilon\,(1-P_{n_j})(x_{j+1})\| =$

$\|(1-Q_{n_j})\,T_\varepsilon\,(x_{j+1})\| > 1-\min(\varepsilon,\eta(\varepsilon)) > 1-\varepsilon$, et il existe $n_{j+1} > n_j$ tel que

$$\|Q_{n_{j+1}}(1-Q_{n_j})\,T_\varepsilon\,(x_{j+1})\| = \|(Q_{n_{j+1}}-Q_{n_j})\,T_\varepsilon\,(x_{j+1})\| > 1-\min(\varepsilon,\eta(\varepsilon)) > 1-\varepsilon\ ,$$

Posons $y_{j+1} = (Q_{n_{j+1}} - Q_{n_j})\,T_\varepsilon\,(x_{n_j})$ et $z_{j+1} = T_\varepsilon\,(w_{j+1}) - y_{j+1}$, on a $\|y_j\| > 1-\varepsilon$ et, par définition de η, compte tenu de ce que y_{j+1} et z_{j+1} sont à supports disjoints, $\|z_{j+1}\| \leqslant \varepsilon\ \|T_\varepsilon(x_{j+1}) \leqslant \varepsilon\ (1+\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. On a ainsi le $(j+1)^e$ rang de la récurrence. Les y_j ont été construits de norme $> 1-\varepsilon$, à supports disjoints, d'après (1-6) on a donc :

$$\|\sum_1^k y_j\| \geqslant (1-\varepsilon)\,\frac{1}{{}_1k^{(W)}}$$. Mais, par ailleurs

$$\|\sum_1^k y_j\| = \|T_\varepsilon(\sum_1^k x_j) + \sum_1^k z_j\| \leqslant \|T_\varepsilon\|\ \|\sum_1^k x_j\|$$

$$+ \sum \|z_j\| \leqslant (1+\varepsilon)\|\sum x_j\| + k\varepsilon$$, ce qui donne

$$\|\sum_1^k x_j\| \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{1-\varepsilon}{\gamma_k(V)} - k\varepsilon\right)$$

Or les (x_j) sont, par construction de norme 1 à supports disjoints donc

$$\frac{1}{\delta_k(V)} \geqslant \|\sum_1^k x_j\| \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{1-\varepsilon}{\gamma_k(W)} + k\varepsilon\right).$$ Comme ε est quelconque,

on conclut donc $\frac{1}{\gamma_k(W)} \leqslant \frac{1}{\delta_k(V)}$, ce qu'on voulait.

Au sujet des suites de décompositions, nous n'avons pas encore abordé **certaines** questions. Tout d'abord, cette notion est-elle liée à la norme ou à la **topologie** de l'espace considéré, autrement dit, que se passe-t-il si l'on remplace **la** norme par une équivalence ? Ensuite on se demande dans quels cas on peut **avoir** $\delta_n = \Upsilon_n$ pour tout n. Nous donnons une réponse partielle à toutes ces **questions.**

PROPOSITION 1. 21 - *Si deux normes sur l'espace* V *sont équivalentes, i.e.* ***s'il*** *existe* a, b *tels que*

$$a \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b \|x\|_1 \text{ pour tout } x \text{ ; alors}$$

$$\frac{a}{b} \delta_n^1 (V) \leqslant \delta_n^2 (V) \leqslant \frac{b}{a} \delta_n^1 (V) \text{ et}$$

$$\frac{a}{b} \Upsilon_n^1 (V) \leqslant \Upsilon_n^2(V) \leqslant \frac{b}{a} \Upsilon_n^2 (V) \text{ pour tout n.}$$

PREUVE. - Dans chacun des deux cas, une seule inégalité est à prouver, l'**autre** en résultant par symétrie. Soient $x_1 \ldots x_n$ de supports disjoints, tels que $\| x_k \|_1 = 1$, alors $\|x_k\|_2 < b$ donc $\| \sum_1^n x_k \|_1 \leqslant \frac{1}{a} \| \sum_1^n x_k \|_2 \leqslant \frac{b}{a} \frac{1}{\delta_n^2(V)}$; en passant au sup (x_k) on a $\frac{1}{\delta_n^1(V)} \leqslant \frac{b}{a} \frac{1}{\delta_n^2(V)}$ ou $\delta_n^2(V) \leqslant \frac{b}{a} \delta_n^1(V)$; de **même** $\| x_k \|_1 \geqslant a$ donc $\| \sum_1^n x_k \|_1 \geqslant \frac{1}{b} \| \sum_1^n x_k \|_2 \geqslant \frac{a}{b} \frac{1}{\Upsilon_n^1(V)}$ et et, en **passant** à l'inf en (x_k) ; on a $\frac{1}{\Upsilon_n^1} (V) \geqslant \frac{a}{b} \frac{1}{\Upsilon_n^2(V)}$ donc $\Upsilon_n^2 (V) \geqslant \frac{a}{b} \Upsilon_n^1(V)$

PROPOSITION 1.21. - V *étant muni d'une base inconditionnelle, on suppose* ***que*** *pour tout* $n, \delta_n(V) = \Upsilon_n(V)$; *alors il existe* p *tel que*

$$\delta_n(V) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 < p < \infty ,$$

LEMME. - *Soit* (λ_n) *une suite réelle positive croissante multiplicative* (i.e. $\lambda_{nm} = \lambda_n \lambda_m$). *Il existe* $a > 0$ *tel que, pour tout* n, $\lambda_n = n^{\alpha}$.

L'application $n \longrightarrow \text{Log}\,\lambda_n$ est un homomorphisme du monoïde multiplicatif $\mathbb{N}^*$ dans le groupe R. elle se prolonge donc de façon unique en un homomorphisme de Q_+^{λ} dans R par symétrisation et, comme elle est croissante elle se prolonge encore de façon unique à $\mathbb{R}_+^*$, par densité d'ordre de $\mathbb{Q}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et complétude d'ordre de $\mathbb{R}_+^*$. Soit f ce prolongement ; on a $f(x) = \alpha \,\text{Log}\, x$ pour un certain $\alpha > 0$. Puisque f est croissante ; d'où $\lambda_n = n^{\alpha}$.

PREUVE DE 1.21. - D'après 1.8, on a $\delta_{np} = \delta_n \delta_p$; autrement dit, $1/\delta_n$ est multiplicative et croissante ; donc il existe α tel que $\frac{1}{\delta_n} = n^{\alpha}$; on pose $\alpha = 1/p$ et on remarque que $p > 1$ puisque $1/\delta_n \leq n$, il vient finalement $\delta_n = (1/n)^{1/p}$.

2) SYSTÈMES DE PROJECTEURS ET NOYAUX D'OPÉRATEURS.

Nous avons vu que, si V est un espace de Banach à base (v_n) et W un espace de Banach muni d'un système bi-orthogonal (w_n, w'_n), l'espace $\mathcal{L}(V,W)$ est muni d'un système canonique, mais qui n'est, en général, pas inconditionnel même si (v_n) et (w_n, w'_n) le sont. On va introduire une autre notion, généralisant celle-ci et stable pour les espaces d'opérateurs.

DEFINITION 2.1. - *On appellera système de projecteurs sur l'espace de Banach* V *une suite* (f_n) *de projecteurs de norme* 1 *tels que :*

1) pour $n \neq m$, $f_n \circ f_m = 0$,

2) pour $x \in V$, $(f_n(x) = 0 \;\forall_n) \Longrightarrow x = 0$.

On dira que le système est une base de projecteurs si, en plus on a :

3) pour tout $x \in V$, $x = \sum_1^{\infty} f_n(x)$, Remarquons tout de suite que, puisque $f_n \circ f_m = 0$, les opérateurs $\sum_1^k f_{n_j}$ sont des projecteurs.

DEFINITION 2.2. - *On dira que le système de projecteurs* (f_n) *de l'espace de Banach* V *est inconditionnel si, pour tout* $x \in V$ *et toute suite réelle* (λ_n) *telle que* $|\lambda_n| \leqslant 1$, *il existe un* $y \in V$ *tel que* $\|y\| \leqslant \|x\|$ *et* $f_n(y) = \lambda_n f_n(x)$.

En particulier, si (f_n) est inconditionnel, pour tout $x \in \mathbb{N}$ et toute partie A de N il existe $y \in V$, $\|y\| \leqslant \|x\|$ et $f_n(y) = f_n(x)$ si $n \in A$, $f_n(y) = 0$ si $n \notin A$. On définit ainsi un projecteur de norme 1 de V, noté P_A (on notera P_n pour $A = [1,n]$), dont l'image est le sous-espace $V_A = \{x \in V \text{ , } f_n(x) = 0 \text{ si } n \in A\}$.

DEFINITION 2.3. - (f_n) *étant un système de projecteurs inconditionnel sur* V *on notera*

$$\delta_n(V) = \inf_{A_1 \ldots A_n \subset \mathbb{N}} \ _{A_i \cap A_1 = \emptyset} \ \inf_{\|x\| = 1} \ \sup \|P_{A_k}(x)\| ,$$

$$\gamma_n(V) = \sup_{A_1 \ldots A_n \subset \mathbb{N}} \ , \ _{A_i \cap A_j = \emptyset} \ \sup_{\|x\| = 1} \ \inf_k \|P_{A_k}(x)\| .$$

Les définitions qui précèdent étant des généralisations des analogues de 1°), on retrouvera donc certains résultats de 1°) comme corollaires de ceux qui suivent en particulier le lemme suivant se montre de la même façon que 1-6.

LEMME 2.4. - *Sous les conditions de 2-3, on a :*

$$\frac{1}{\delta_n(V)} = \sup_{A_1 \ldots A_n, A_i \cap A_j = \emptyset} \left\{ \left\| \sum_1^n x_k \right\| , \|x_k\| = 1 \quad x_k \in V_{A_k} \right\} ,$$

$$\frac{1}{\gamma_n(V)} = \inf_{A_1 \ldots A_n, \ A_i \cap A_j = \emptyset} \left\{ \left\| \sum_1^n x_k \right\| , \|x_k\| = 1 \ , \ x_k \in V_{A_k} \right\} .$$

THEOREME 2.5. - *Soit W un espace de Banach muni d'un système de projecteurs* (f_n) *et V un espace de Banach.*

1°) La suite (φ_n) : $\varphi_n(u) = f_n \circ u$ *est un système de projecteurs sur* $\mathscr{L}(V,W)$.

2°) Si (f_n) *est inconditionnel,* (φ_n) *aussi et* $\delta_n(\mathscr{L}(V,W)) \geq \delta_n(W)$.

PREUVE. - 1°) Si $n \neq m$, pour tout u, on a $\varphi_n \circ \varphi_m(u) = f_m \circ f_n \circ u = 0$ donc $\varphi_n \circ \varphi_m = 0$. Si u est tel que pour tout n, $\varphi_n(u) = 0$ alors pour tout $x \in V$, on a $f_n(u(x)) = 0$; donc $u(x) = 0$ et finalement $u = 0$.

2°) Voyons d'abord que (φ_n) est inconditionnel. Soit $u \in \mathscr{L}(V,W)$ et $(\lambda_n) \in B(\ell^\infty)$. Pour tout $x \in V$, il existe $y \in W$ tel que $f_n(y) = \lambda_n f_n(u(x))$ et $\|y\| \leq \|u\| \, \|x\|$; soit $t : x \mapsto y$; t est un opérateur de norme $\leq \|u\|$ et tel que $\varphi_n(t) = f_n \circ t = \lambda_n f_n \circ u = \lambda_n \varphi_n(u)$.

Maintenant, soient $A_1 \ldots A_n \subset \mathbb{N}$, les A_k étant disjoints, et $u \in \mathscr{L}(V,W)$ avec $\|u\| = 1$. Posons $u_k = P_{A_k} \circ u$, il s'agit de minorer $\max \|u_k\|$. Or, pour $\varepsilon > 0$ il existe $x \in V$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|u(x)\| \geq 1-\varepsilon$: il existe alors un indice i tel que $\|P_{A_i}(u(x))\| > (1-\varepsilon)\,\delta_n(W)$, il en résulte que

$\max \|u_k\| \geq \|u_i\| \geq \|P_{A_i}(u(x))\| \geq (1-\varepsilon)\,\delta_n(W)$. Or $\delta_n(\mathscr{L}(V,W))$ est le borne

inférieure en x et en (A_k) de $\max \|u_k\|$, il en résulte donc, ε étant quelconque; que $\delta_n(\mathscr{L}(V,W)) \geq \delta_n(W)$, ce qu'on voulait.

THEOREME 2.6. - *Soit V un espace de Banach muni d'une base de projecteurs* (f_n) *et W un espace de Banach.*

1°) La suite $\varphi_n : \varphi_n(u) = u \circ f_n$ *est un système de projecteurs de* $\mathscr{L}(V,W)$.

2°) Si (f_n) *est inconditionnelle,* (φ_n) *est inconditionnel et on a*

$$\delta_n(\mathscr{L}(V,W)) \geq 1/\sum_1^n \gamma_k(V).$$

PREUVE. - 1°) Il est évident que $\varphi_n \circ \varphi_m = 0$ si $n \neq m$. Par ailleurs si $\varphi_n(u) = 0$ pour tout n, pour $x \in V$, on a $x = \sum_1^\infty f_n(x)$ donc $u(x) = \sum_1^\infty u \circ f_n(x) = 0$ donc $u = 0$.

2°) Soit $u \in \mathscr{L}(V,W)$ et $(\lambda_n) \in B(\ell^\infty)$, on définit t par $t(x) = \sum \lambda_n f_n(x)$ et t vérifie $\varphi_n(t) = \lambda_n \varphi_n(u)$ et $\|t\| \leq \|u\|$.

Soient $A_1 \dots A_n$ des parties disjointes de N et $u_i \in \mathscr{L}(V,W)_{A_k} = \mathscr{L}(V_{A_k},W)$ avec $\|x_k\| = 1$. Il s'agit, en vertu de 2.4, de majorer $\|u_1+\dots+u_n\|$. Or prenons $x \in V$, de norme 1, on a

$\|u_1+\dots+u_n(x)\| \leq \sum_1^n \|u_k(x)\| \leq \sum_1^n \|P_{A_k}(x)\|$. On remarque alors que le plus petit des $\|P_{A_k}(x)\|$ est $\leq \gamma_n(V)$; le suivant est $\leq \gamma_{n-1}(V)$ et, finalement, on a $\|u_1+\dots+u_n(x)\| \leq \sum_1^n \gamma_n(V)$. En considérant la borne supérieure en $(u_1 \dots u_k)$ et appliquant 2.4 ; on a donc $\frac{1}{\delta_n(V)} \leq \sum_1^n \gamma_k(V)$, ce qu'on voulait.

Les théorèmes précédents sont surtout utiles dans le cas ou W possède un système bi-orthogonal ou V une base. Dans ce cas, les opérateurs $\varphi_n(u)$ sont de rang 1, donc compacts. On peut se demander si, réciproquement, tout opérateur compact est somme d'une série d'opérateurs de ce type, autrement dit, si la suite (φ_n) est une base de projecteurs de l'espace $\mathscr{L}(V,W)$. En général, la réponse est non, mais on a toutefois une réponse positive dans les cas suivants.

PROPOSITION 2.7. - *Soient W un espace de Banach muni d'une base (w_n) et V un espace de Banach. La suite (φ_n) définie dans 2-5 est une base de projecteurs de $\mathscr{K}(V,W)$.*

PREUVE. - Désignons toujours par P_n les projecteurs canoniques de V, on veut prouver que, si $u \in \mathcal{K}(V,W)$, u est somme, en norme, de la série $\varphi_n(u) = (w'_n \circ u) \otimes w_n$, c'est-à-dire est limite en norme de la suite $P_n \circ u$. Or la suite P_n converge point par point dans W vers l'identité donc converge aussi vers l'identité uniformément sur tout compact, d'après Banach Steinhauss, et en particulier sur $u(B(V))$; autrement dit la suite $P_n \circ u$ converge vers u sur $B(V)$, ce qu'on voulait.

PROPOSITION 2.8. - *Soient V un espace de Banach ayant une base contractante (v_n) et W un espace de Banach. La suite φ_n définie en 2-6 est une base de projecteurs de $\mathcal{K}(V,W)$.*

PREUVE. - Puisque (v_n) est contractante, (v'_n) est une base de V'. Soit $u \in \mathcal{K}(V,W)$, l'adjoint u^* de u est compact de W' dans V', donc, d'après 2-7, est limite en norme des opérateurs $P'_n \circ u^*$. Or P'_n est l'adjoint de P_n ; donc u^* est limite des $(u_o T_n)^*$; ceci implique que u est limite, en norme de $u \circ P_n$, ce qui signifie qu'il est somme de la série $\sum \; v'_n \otimes u(v_n)$ c'est-à-dire $\sum \varphi_n(u)$, ce qu'on voulait.

Un cas usuel de ce qui précède sera celui où V est muni d'une base et W d'un système bi-orthogonal, dans ce cas l'espace $\mathcal{L}(V,W)$ est muni d'un système bi-orthogonal canonique, les coefficients d'un opérateur sur ce système étant les termes de sa matrice. Les théorèmes 2-5 et 2-7 reviennent alors à raisonner avec des "lignes" de matrices, 2-6 et 2-8 se faisant sur les "colonnes", l'intérêt est de conserver l'inconditionnalité, ce qui n'est pas le cas avec les coefficients.

Le lemme 2-10 est la généralisation d'un résultat bien connu sur les familles sommables, le lemme 2-11 se démontre, en théorie des ordres, par une méthode d'ordre dichotomique la preuve donnée, plus topologique, est due à Whittley.

LEMME 2.10. - *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels. On suppose qu'il existe une suite (λ_n) positive, convergent vers 0,telle que, pour toute partie finie $\{i_1 \dots i_n\}$ de I , on ait $|x_{i_1} + \dots + x_{i_n}| \leq n\lambda_n$. Alors l'ensemble J des $i \in I$ tels que $x_i \neq 0$ est dénombrable.*

PREUVE. - Soit $J_n = \{ i \in I, |x_i| > \lambda_n \}$. J_n est de cardinal $\leq 2n-1$, **sinon** il existerait n éléments $i_1 \dots i_n$ de J_n tels que $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ soient de **même signe.** Mais alors

$$|x_{i_1} + \dots + x_{i_n}| > n \lambda_n \text{ , ce qui contredit l'hypothèse.}$$

Mais, puisque $\lambda_n \to 0$, J est la réunion des J_n, donc est dénombrable.

LEMME 2.11.-- *Il existe* **N** *dans une famille non dénombrable de parties infinies d'intersections mutuelles finies.*

PREUVE. - Identifions $\mathbb{N}$ avec $[0,1] \cap Q$. Pour tout $x \in [0,1] \cap Q$, il **existe une** suite x_n d'éléments qui converge vers x, soit $A_x = \{ x_n \}$, A_x est infini **puisque** $x \notin Q$, $A_x \cap A_y$ est fini pour $x \neq y$ et l'ensemble des A_x a même cardinal **que** $[0,1] - Q$ donc n'est pas dénombrable. $\{A_x\}$ répond donc à la question.

Rappelons la définition-proposition classique,

DEFINITION 2.12. - *On dit qu'un espace de Banach* E *est de type dénombrable* ***s'il*** *vérifie les trois conditions équivalentes :*

1°) il existe dans E' *une suite séparant les points de* E,

2°) E' *est* $\sigma(E',E)$ *séparable,*

3°) il existe une injection continue de E *dans* ℓ^∞.

EXEMPLE 2.13. - Soient V un espace de Banach séparable et W un espace de **Banach** de type dénombrable ; alors $\mathscr{L}(V,W)$ est de type dénombrable.

PREUVE. - Soit (x_n) une suite dense dans V, y'_n une suite de W' séparant **W. La** suite $(x_n \otimes y'_m)$ sépare $\mathscr{L}(V,W)$ car, si $\langle u \mid x_n \otimes y'_m \rangle = 0$ pour tout n, m, **alors** $u(x_n) = 0$ pour tout n, donc $u = 0$.

Le résultat principal est le

THEOREME 2.14. - *Soit* V *un espace de Banach muni d'un système de projecteurs* (f_n) *inconditionnel et tel que* $1/n\delta_n(V)$ *converge vers* 0. *Pour tout opérateur* T *de* V *dans un espace de Banach* E *de type dénombrable, s'annulant sur tous les sous-espaces* $V_n = I_m(f_n)$, *il existe une partie* A *infinie de* $\mathbb{N}$ *telle que* T *s'annule sur le sous-espace* $V_A = \{ x \in V \ , | \ f_n(x) = 0 \text{ si } n \notin A \}$.

PREUVE. - Soit $\mathscr{A}$ une famille non dénombrable de parties infinies de $\mathbb{N}$, deux à deux presque disjointes, une telle famille existe, d'après 2-11. Nous allons prouver, par l'absurde que Ker T contient un V_A pour $A \in \mathscr{A}$.
Sinon, pour tout $A \in \mathscr{A}$, il existe x_A tel que $T(x_A) \neq 0$ avec $x_A \in A$ et l'on peut supposer $\|x_A\| = 1$. Montrons d'abord que, pour $A_1 \ldots A_n \in \mathscr{A}$, on a

$$\|T(A_1) + \ldots + T(A_n)\| \leq \frac{1}{\delta_n(V)} \quad .$$

En effet, posons $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j \neq i} A_j$ et $y_i = P_{B_i}(x_{A_i})$. $A_i \setminus B_i$ est fini et $x_{A_i} - y_i \in V_{A_i \setminus B_i}$, en particulier $x_{A_i} - y_i \in \text{Ker } T$ c'est-à-dire $T(x_{A_i}) = T(y_i)$, d'où $\| T(x_{A_1}) + \ldots + T(x_{A_n}) \| = \| T(y_1 + \ldots + y_n) \| \leq \| y_1 + \ldots + y_n \|$.

Par ailleurs, en vertu de l'inconditionnalité, on a $\| y_i \| \leq \| x_{A_i} \| = 1$, les y_i étant à support disjoints, on a, d'après 2-4, et compte tenu de l'incpnditionnalité.

$$\| y_1 + \ldots + y_n \| \leq \left\| \frac{y_1}{\| y_1 \|} + \ldots + \frac{y_n}{\| y_n \|} \right\| \leq \frac{1}{\delta_n(V)} \quad ;$$

d'où $\| T(x_{A_1}) + \ldots + T(x_{A_n}) \| \leq \dfrac{1}{\delta_n(V)}$, ce qu'on voulait.

Soit alors (e'_p) une suite de E', séparant E, on suppose en outre $\|e'_p\| = 1$, ce qui est toujours possible. On a alors, pour tout p,

$$| \langle T(x_{A_1}) \mid e'_p \rangle + \ldots + \langle T(x_{A_n}) \mid e'_p \rangle | \leq \frac{1}{\delta_n(V)} \quad .$$

Appliquons alors 2-10 avec $\lambda_n = \frac{1}{n\delta_n(V)}$ qui tend vers 0. On voit que la famille réelle $(\langle T(x_A) \mid e'_p \rangle)$ est à support dénombrable pour tout p. Mais les e'_p séparent E ; donc la famille $T(x_A)_{A\in\mathscr{A}}$ est aussi à support dénombrable, ce qui contredit l'hypothèse et achève la démonstration.

COROLLAIRE 2.15. - (Fakhoury). - *Soit* T *un opérateur de* ℓ^∞ *dans un espace de type dénombrable* E, *s'annulant sur* c_0 . *Il existe une partie infinie* A *de* N *telle que* T *s'annule sur* $\ell^\infty(A)$.

PREUVE. - On applique 2.14 avec $\delta_n(\ell^\infty) = 1$. On retrouve le fait connu que c_0 n'est pas facteur direct de ℓ^∞.

COROLLAIRE 2.16. - *Soient* W *un espace de Banach muni d'un système bi-orthogonal inconditionnel* (w_n, w'_n) *tel que* $n\delta_n(W) \to \infty$ *et* V *un espace de Banach. Pour tout opérateur* T *de* $\mathscr{L}(V,W)$ *dans un espace de Banach* E *de type dénombrable qui s'annule sur l'espace* $\mathscr{K}(V,W)$, *il existe une partie infinie* A *de* N *telle que* T *s'annule sur* $\mathscr{K}(V,W_A) = \{u \in \mathscr{L}(V,W) \mid u(V) \subset W_A\}$. *Si, en outre,* V *est séparable,* $\mathscr{K}(V,W)$ *n'est pas le noyau d'un opérateur de* $\mathscr{L}(V,W)$ *dans lui-même et, en particulier, n'est pas facteur direct.*

PREUVE. - D'après 2.5, $n\delta_n(\mathscr{L}(V,W) \to \infty$ et comme $\mathscr{K}(V,W)$ contient les $\mathscr{L}(V,W_n)$ on applique 2.14. Si W est séparable, $\mathscr{L}(V,W)$ est de type dénombrable et on a la deuxième conclusion.

COROLLAIRE 2.17. - *Soient* V *un espace de Banach muni d'une base inconditionnelle* (v_n) *telle que* $\gamma_n(V) \to 0$, *et* W *un espace de Banach. Pour tout opérateur* T *de* $\mathscr{L}(V,W)$ *dans un espace de Banach* E, *de type dénombrable, qui s'annule sur* $\mathscr{K}(V,W)$, *il existe une partie infinie* A *de* N *telle que* T *s'annule sur* $\mathscr{L}(V_A,W) = \{u \in \mathscr{L}(V,W) \mid u(V_n) = 0 \text{ pour } n \notin A\}$.
Si W *est de type dénombrable,* $\mathscr{K}(V,W)$ *n'est pas le noyau d'un opérateur de* $\mathscr{L}(V,W)$ *dans lui-même et, en particulier, n'est pas facteur direct.*

PREUVE. - Puisque $\gamma_n(V) \to 0$, $(\sum_1^{n-} \gamma_k(V))_n \to 0$ aussi ; donc, d'après 2-6, on a $1/n\delta_n(V,W) \to 0$. Comme $\mathcal{K}(V,W)$ contient les $\mathcal{L}(R\, v_n, W)$, on peut appliquer 2-14.

Si W est de type dénombrable. $\mathcal{K}(V,W)$ l'est aussi ; donc on peut prendre $E = \mathcal{L}(V,W)$, ce qui termine la démonstration.

Le corollaire 2.16 s'applique, en particulier si $W = \ell^p$ avec $1 < p \leqslant \infty$ et 2.17 $V = \ell^p$ $1 \leqslant p < \infty$. Le cas le plus intéressant étant celui où $V = W = \ell^2$ Les deux raisonnements "lignes" ou "colonnes" sont bons, mais il en existe un troisième qui n'utilise ni les suites de décomposition, ni les systèmes de projecteurs. On remarque, en effet, que si A est une partie de $\mathbb{N}$ et si $u \in \mathcal{L}(\ell^2_A, \ell^2_A)$, $v \in \mathcal{L}(\ell^2_{C_A}, \ell^2_{C_A})$ (c'est-à-dire u réduit ℓ^2_A et v réduit $\ell^2_{C_A}$) avec $\|u\| = \|v\| = 1$ alors $\|u+v\| = 1$. On fait alors un raisonnement analogue à 2.14. Notons au passage que la remarque précédente signifie que $\gamma_n(\mathcal{L}(\ell^2)) = 1$, alors que $\delta_n(\mathcal{L}(\ell^2)) = (\frac{1}{n})^{1/2}$, résumons ce qui concerne ℓ^2.

COROLLAIRE 2.18. - *Soient* H *un espace de Hilbert séparable, et* T *un opérateur de* $\mathcal{L}$(H) *dans un espace de type dénombrable qui s'annule sur* $\mathcal{K}$(H). *Alors il existe un sous-espace fermé* F *de* H, *isométrique à* H *tel que* T *s'annule sur* $\mathcal{L}$(F,H) *et* $\mathcal{L}$(H,F). *En particulier,* $\mathcal{K}$(H) *n'est pas facteur direct de* $\mathcal{L}$(H) *et l'algèbre de Calkin* $\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$ *ne s'injecte pas linéairement et continuement dans* $\mathcal{L}$(H) .

APPENDICE .

Le résultat qui va suivre complète le théorème 2.18 ; il m'a été suggéré par M. le Professeur Pelczinski ; à qui j'adresse tous mes remerciements.

THEOREME. - *Soit* H *un espace de Hilbert séparable. Alors tout facteur direct de* $\mathcal{L}$(H) *qui contient* $\mathcal{K}$(H) *est isomorphe à* $\mathcal{L}$(H).

LEMME. - *Soit* E *un espace de Banach tel que* $\ell^{\infty}(E)$ *soir isomorphe à un facteur direct de* E. *Soit* F *un espace de Banach isomorphe à un facteur direct de* E *et tel que* E *soit isomorphe à un facteur direct de* F . *Alors* E *est isomorphe à* F .

PREUVE DU LEMME. - On a, par hypothèse les isomorphismes suivants, pour certains espaces G, K, M $E \simeq N \oplus F \oplus K$. $F \simeq E \oplus G$. $E \simeq \ell^{\infty}(E) \oplus M$. En outre on a, naturellement $\ell^{\infty}(E) \oplus E \simeq \ell^{\infty}(E)$, $\ell^{\infty}(F) \oplus F \simeq \ell^{\infty}(F)$ et $\ell^{\infty}(F \oplus K) \simeq \ell^{\infty}(F) \oplus \ell^{\infty}(K)$.

On peut alors écrire la suite d'isomorphismes

$$E \simeq \ell^{\infty}(E) \oplus M \simeq \ell^{\infty}(F) \oplus \ell^{\infty}(K) \oplus M \simeq F \oplus \ell^{\infty}(F) \oplus \ell^{\infty}(K) \oplus M$$

$$\simeq E \oplus G \oplus \ell^{\infty}(F) \oplus \ell^{\infty}(K) \oplus M \simeq E \oplus G \oplus \ell^{\infty}(E) \oplus M \simeq G \oplus \ell^{\infty}(E) \oplus M \simeq G \oplus E \simeq F.$$

En définitive $E \simeq F$, ce qui démontre le lemme.

PREUVE DU THEOREME. - D'après le corollaire 2.18, tout facteur direct de $\mathscr{L}(H)$ conenant $\mathscr{K}(H)$ contient un facteur direct isomorphe à $\mathscr{L}(H)$. Il suffit de prouver, pour utiliser le lemme que $\ell^{\infty}(\mathscr{L}(H))$ s'identifie à un facteur direct de $\mathscr{L}(H)$. Or, s it (A_n) une suite de parties infinies de N, partitionnant N Alors $\ell^{\infty}(\mathscr{L}(H))$ s'identifie au sous-espace $\bigoplus_n \mathscr{L}(H_{A_n})$, H étant rapporté à une base hilbertienne, h_n , avec $H_{A_n} = \{x \in H \text{ , } \langle x\, h_i \rangle = o \text{ pour } i \notin A_n\}$. En effet pour $T = \sum T_n \in \bigoplus \mathscr{L}(H_{A_n})$ on a évidemment $\| T \| = \sup \| T_n \|$.
Le sous-espace $\bigoplus \mathscr{L}(H_{A_n})$ est facteur direct par le projecteur $\sum_n P_{A_n}$ ou P_{A_n} est la projection orthogonale sur H_{A_n} , la somme étant convergente pour la topologie forte d'opérateurs.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. DIESTEL, Geometry of Banach spaces. Lectures Notes. Springer Verlag.

[2] P. ENFLO , Banach spaces which can be given an equivalent uniform convexe norm. Israël Journ. 13 (1972) p. 281.288.

[3] H. FAKHOURY, Etude du noyau d'un opérateur défini sur l'espace des suites bornées et applications. Bull. sc. math. 2° série 100 (1976) p. 44-45.

[4] W.B. JOHNSON, On finite dimensional subspaces of Banach spaces with local inconditional structures. Studia Mathematica L.I. (1974).

[5] R.C. JAMES, Bases and Reflexivity on Banach spaces. Pac. J. Math. 41 (1972). p. 409-419.

[6] M.A. KRASNOLESKII and Y. RUTICKII : Convex fonctions and Orlicz spaces. Groningen. Netherlands (1961).

[7] J. LIDENSTRAUSS , On complemented subspaces of m. Israël J. of Math. 5 (1967) p. 153-156.

[8] J. LIDENSTRAUSS and L. TZAFRIRI , On orlicz sequence spaces I, II, III, Israël ; J. Of Math. 10 (1971), p. 379-390. 11 (1972) p. 355-379. 14 (1973) p. 368-389.

[9] J. LIDENSTRAUSS and L. TZAFRIRI : Classical Banach spaces. Lectures notes en math. Springer Verlag.

[10] J. MARTI, Introduction to theory of bases. Springer tracts, VoL. 18 (1969).

[11] R.C. JAMES and J. SCHAFFER, Super-reflexivity and the girth or spheres. Israël Journal of math. 11 (1972).

[12] H.R. PITT, A note on bilinear forms. J. Lond. Math. Soc. 11 (1936) P. 171-174.

[13] H.P. ROSENTHAL, On quasi complemented subspaces of Banach spaces. Journal of Functional analysis, 4 (1969) p. 176-214.

[14] H.P. ROSENTHAL, On totaly incomparable Banach spaces. Journal of Functional analysis, 4 (1969) p. 167-175.

[15] I. SINGER, Bases in Banach spaces Springer Verlag 1970.

B. DECORET
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE