

MICHEL GUEUGNON

Perturbations singulières et noyaux de Poisson

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 2
, p. 1-112

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_2_A1_0

© Université de Lyon, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PERTURBATIONS SINGULIÈRES ET NOYAUX DE POISSON

par Michel GUEUGNON

INTRODUCTION. -

Le but de ce travail est d'étudier certaines perturbations singulières relatives au problème de Dirichlet dans le demi-espace \mathbb{R}_+^n . Deux approches différentes utilisant les espaces $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$, de J.L. Lions et E. Magénès [1] seront développées dans ce papier. Dans la première, on considère un opérateur elliptique B , d'ordre $2m'$ et une famille d'opérateurs $B_\varepsilon = \varepsilon A + B$, pour $\varepsilon \in]0, 1]$, d'ordre $2m$ ($m > m'$) satisfaisant l'hypothèse de Greenlee [1]. On étudie alors la convergence d'un problème de Dirichlet relatif à B_ε et on définit les correcteurs selon J.L. Lions [1]. La méthode utilisée, basée sur des théorèmes d'existence et d'unicité est classique, et ne fait que prolonger certains résultats de W.M. Greenlee [1] D. Huet [1], [2], J.L. Lions [1]. Dans la deuxième approche, on considère des opérateurs elliptiques de la forme $L(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1}, \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_n})$ où L est un polynôme à n variables d'ordre $2m_1$ et le problème associé $Lu_\varepsilon = 0$ avec données de Dirichlet au bord. On utilise la donnée explicite d'une solution du problème au moyen de noyaux de Poisson selon P. Fife [1]. Celui-ci ne donne qu'un résultat de convergence ponctuelle et intérieure, mais n'étudie pas la convergence sur la frontière du domaine. Dans le présent travail, on utilise des méthodes de transformation de Fourier pour montrer une convergence globale dans des espaces $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$ en imposant certaines hypothèses de régularité à l'origine des données frontières. Des exemples simples sont donnés enfin pour montrer l'utilisation de cette deuxième méthode au calcul de correcteurs et pour comparer les résultats obtenus à ceux de M.J. Vishik et L.P. Ljusternik (cf. P. Fife [1]) et à ceux de J.L. Lions [1].

Le chapitre 0 est un rappel succinct de propriétés des espaces de Sobolev $H^k(\mathbb{R}^{n-1})$ et $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$ (J.L. Lions et E. Magénès [1]) qui seront utilisées dans ce travail.

Le chapitre I traite la première méthode. Le paragraphe (1.2) étend le théorème 6.15 de D. Huet [1] dans le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ aux espaces $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$. Les paragraphes (1.3) et (1.4) définissent des correcteurs d'ordre zéro pour le problème homogène et non homogène respectivement. Le paragraphe (1.5) définit des correcteurs d'ordre supérieur.

Les chapitres II, III, IV, V traitent la deuxième méthode.

Le chapitre II donne la construction des Noyaux de Poisson de P. Fife [1] et étudie les propriétés, nécessaires à la suite, de certaines de leurs éléments constitutifs dans le cas des opérateurs frontières de Dirichlet. On traite aussi dans ce chapitre le cas particulier où les racines du polynôme caractéristique sont simples, car dans ce cas les noyaux sont obtenus directement à partir des racines.

Dans le chapitre III on donne la solution de P. Fife [1] du problème de Dirichlet homogène et quelques-unes de ses propriétés de régularité lorsque les données frontières sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{n-1})$ d'une part. D'autre part on étend la solution et on en étudie sa régularité dans le cas où les données au bord sont évaluées avec les normes de Hörmander. (Agmon-Douglis-Nirenberg [1]). Ensuite on traite le cas particulier $m_0 = 0$, car on peut alors faire le lien avec le théorème d'existence et d'unicité 7.3 de Lions et Magénès [1], les deux solutions coïncident alors. Enfin on étudie le cas particulier $m_1 = m_0$ qui est le cas traité par Agmon-Douglis-Nirenberg [1], car ce sera le cas du problème limite de notre problème de perturbations singulières.

Dans le chapitre IV on considère le problème dépendant de ε et on donne une solution dépendant de ε de ce problème au moyen de noyaux de Poisson du chapitre II. On démontre alors un théorème de convergence de cette solution vers la solution du problème limite étudié dans le chapitre III et on donne des estimations sur la rapidité de cette convergence.

Dans le chapitre V, on montre sur des exemples simples comment la donnée explicite d'une solution du problème perturbé permet d'avoir des développements asymptotiques et aussi des correcteurs assez simples. On fait entre autres une comparaison de ces résultats ainsi obtenus et ceux de J.L. Lions [1] et M.J. Vishik et L.P. Ljusternik donnés dans P. Fife [1] .

C H A P I T R E 0

Rappels sur les espaces $H^k(\mathbb{R}^{n-1})$ et $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$

0.1.- Espaces $H^k(\mathbb{R}^{n-1})$, k réel quelconque.

Soit \mathbb{R}^{n-1} l'espace euclidien réel à $n-1$ dimensions. On notera $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ l'élément générique de cet espace.

On note $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ l'espace des fonctions à valeurs réelles, de carré sommable sur Ω , muni de la norme :

$$(0.1.1) \quad \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^2 dx \right)^{1/2} .$$

Soit S'_x l'espace des distributions tempérées sur \mathbb{R}^{n-1} . On désigne par \mathcal{F}_x la transformation de Fourier en x isomorphisme de S'_x sur S'_ξ , où $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ est la variable duale de x . On désigne par \mathcal{F}_ξ l'isomorphisme inverse de \mathcal{F}_x .

Pour k réel quelconque, $H^k(\mathbb{R}^{n-1})$ est l'espace des $u \in S'_x$ tels que :

$$(0.1.2) \quad [1 + |\xi|^2]^{k/2} \mathcal{F}_x u \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

muni de la norme

$$(0.1.3) \quad \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^{n-1})} = \|[1 + |\xi|^2]^{k/2} \mathcal{F}_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Soit $p = (p_1, \dots, p_{n-1})$, $|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$, on note :

$$D^p u = \frac{\partial^{p_2 + \dots + p_{n-1}}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_{n-1}^{p_{n-1}}} u$$

les dérivées étant prises au sens des distributions.

Alors lorsque k est un entier ≥ 0 l'espace $H^k(\mathbb{R}^{n-1})$ est défini comme l'espace de Hilbert des distributions u sur \mathbb{R}^{n-1} telles que $D^p u \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ pour $|p| \leq k$ muni de la norme :

$$(0.1.4) \quad \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^{n-1})} = \left(\sum_{|p| \leq k} \|D^p u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \right)^{1/2}$$

et bien sûr il coïncide avec la définition précédente.

0.2.- Espaces $H^k(\mathbb{R}_+^n)$, k entier ≥ 0 .

On désigne par \mathbb{R}_+^n le sous-espace de \mathbb{R}^n formé des points $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y)$ qui vérifient $y > 0$.

On définit alors $H^k(\mathbb{R}_+^n)$, k entier ≥ 0 comme précédemment avec (0.1.4).

0.3.- Espaces $H^k(\mathbb{R}_+^n)$, k entier ≥ 0 .

Ce sera par définition l'adhérence dans $H^k(\mathbb{R}_+^n)$ de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans \mathbb{R}_+^n .

0.4.- Espaces $H^{-k}(\mathbb{R}_+^n)$, k entier ≥ 0 .

Ce sera par définition le dual fort de $H_0^k(\mathbb{R}_+^n)$.

0.5.- Espaces $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$, k réel quelconque, r entier ≥ 0 .

Ce sera par définition l'espace des distributions u sur \mathbb{R}_+^n telles que $D_x^p u \in H^k(\mathbb{R}_+^n)$ pour $|p| \leq r$. C'est un espace de Hilbert pour la norme :

$$(0.5.1) \quad \|u\|_{T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)} = \left(\sum_{|p| \leq r} \|D_x^p u\|_{H^k(\mathbb{R}_+^n)}^2 \right)^{1/2}$$

où D_x désigne la dérivation par rapport à la variable $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

On a l'inclusion algébrique et topologique suivante :

$$(0.5.2) \quad T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n) \subset T^{k',r'}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{pour } k \geq k' \\ \text{pour } r \geq r' .$$

Remarque 0.5.1. - Pour une définition de $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$ avec r quelconque, cf. Lions et Magénès [1] . Dans ce travail, on utilisera seulement la définition 0.5.

0.6.- Quelques inclusions utiles.

$$(0.6.1) \quad H^{k+r}(\mathbb{R}_+^n) \subset T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n) \subset H^k(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{pour } r \geq 0 .$$

$$(0.6.2) \quad H^k(\mathbb{R}_+^n) \subset H^{k'}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{pour } k \geq k'$$

$$(0.6.3) \quad T_o^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) = T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) \cap H_o^m(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{pour } r \text{ entier } \geq 0 .$$

C H A P I T R E I

Problèmes de perturbations singulières relatives

au problème de Dirichlet dans le demi-espace

Calcul de Correcteurs

1.1.- Position du problème et rappels.

Soient Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^n (dans ce travail $\Omega = \mathbb{R}_+^n$), m et m' des entiers avec $0 \leq m' < m$. Pour $u, v \in H^m(\Omega)$ [resp. $H^{m'}(\Omega)$] on définit :

$$(1.1.1) \quad a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m} (a_{pq} D^q u, D^p v)_{L^2(\Omega)}$$

$$\left[\text{resp. } (1.1.2) \quad b(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m'} (b_{pq} D^q u, D^p v)_{L^2(\Omega)} \right] .$$

On suppose que les coefficients a_{pq} ($|p|, |q| \leq m$) et b_{pq} ($|p|, |q| \leq m'$) sont des restrictions à Ω de fonctions de $B(\bar{\Omega})$ (espace des fonctions complexes indéfiniment différentiables et bornées ainsi que chacune de leurs dérivées sur l'adhérence $\bar{\Omega}$ de Ω). Les formes $a(u, v)$ et $b(u, v)$ sont continues sur $H^m(\Omega)$ et $H^{m'}(\Omega)$ respectivement. Il existe donc des constantes positives M et N telles que

$$(1.1.3) \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_{H^m(\Omega)} \|v\|_{H^m(\Omega)} \quad \forall (u, v) \in H^m(\Omega)$$

et

$$(1.1.4) \quad |b(u, v)| \leq N \|u\|_{H^{m'}(\Omega)} \|v\|_{H^{m'}(\Omega)} \quad \forall (u, v) \in H^{m'}(\Omega) .$$

Les opérateurs différentiels associés à $a(u, v)$ et $b(u, v)$ sont respectivement

$$(1.1.5) \quad A = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p [a_{pq}(x) D^q]$$

$$(1.1.6) \quad B = \sum_{|p|, |q| \leq m'} (-1)^{|p|} D^p [b_{pq}(x) D^q] \quad .$$

H1.- On suppose $b(u, v)$ $H_0^{m'}(\Omega)$ -elliptique, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma > 0$:

$$(1.1.7) \quad |b(u, u)| \geq \gamma \|u\|_{H_0^{m'}(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^{m'}(\Omega) \quad .$$

H2.- On suppose qu'il existe α et $\beta \geq 0$ telles que pour $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$:

$$(1.1.8) \quad |\varepsilon a(u, u) + b(u, u)| \geq \alpha \varepsilon \|u\|_{H^m(\Omega)}^2 + \beta \|u\|_{H^{m'}(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^m(\Omega)$$

On a alors le résultat suivant. (Théorème 6.15, p. 138, D. Huet [1]) .

Théorème 1.1.- Soit h donnée dans $H^{-m'}(\Omega)$. Pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, on désigne par u_ε la solution du problème de Dirichlet :

$$(1.1.9) \quad \begin{cases} u_\varepsilon \in \mathring{H}^m(\Omega) \\ (\varepsilon A + B) u_\varepsilon = h \end{cases}$$

Problème qui est équivalent à :

$$(1.1.9)' \quad \varepsilon a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, v) = (h, v) \quad \forall v \in \mathring{H}^m(\Omega) \quad .$$

On désigne par u la solution du problème :

$$(1.1.10) \quad \begin{cases} u \in \mathring{H}^{m'}(\Omega) \\ Bu = h \end{cases}$$

Problème qui est équivalent à :

$$(1.1.10)' \quad b(u, v) = (h, v) \quad \forall v \in \mathring{H}^{m'}(\Omega) \quad .$$

Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, u_ε tend vers u dans $H^{m'}(\Omega)$.

On utilisera aussi le lemme suivant (lemme 2.1 page 278 , Lions et Magénès [1]).

Lemme 1.1.- Sous les hypothèses faites ci-dessus dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}_+^n$,
soient u_ε la solution de (1.1.9) avec $h \in T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$, $k \geq -m$ et $r \geq 0$;
alors $u_\varepsilon \in T^{k+2m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et il existe une constante C (indépendante de u_ε)
telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{T^{k+2m,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|h\|_{T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)} .$$

1.2.- Théorème de convergence dans les $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$.

On suppose désormais que $\Omega = \mathbb{R}_+^n$.

1.2.1.- Cas du problème de Dirichlet homogène.

On redonne h et h^ε dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ telles que $h^\varepsilon \rightarrow h$ dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ et $f_\varepsilon \in T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ de sorte que $\varepsilon^{1/2} f_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)$.

On considère alors u_ε la solution du problème de Dirichlet

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} u_\varepsilon \in T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) \\ (\varepsilon A + B) u_\varepsilon = h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon \end{cases}$$

Problème équivalent à :

$$(1.2.1)' \quad \varepsilon a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, v) = (h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon, v) \quad \forall v \in T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) .$$

On considère d'autre part u la solution du problème limite :

$$(1.2.2) \quad \begin{cases} u \in T_0^{m',r}(\mathbb{R}_+^n) \\ Bu = h \end{cases}$$

Remarque 2.1.- Le problème (1.2.1) admet bien une solution unique, car

$h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon \in H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)$, donc il existe $u_\varepsilon \in H_0^m(\mathbb{R}_+^n)$. Et comme $h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon \in T^{-m}(\mathbb{R}_+^n)$ entraîne que $u_\varepsilon \in T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ à cause du lemme 1.1 avec $k = -m$ et en tenant

compte de (0.6.3).

Pour le problème (1.2.2), il n'y a qu'à se référer à Lions et Magénès [1] puisque l'opérateur B est $H_0^{m'}$ elliptique.

Théorème 2.1. - Sous les hypothèses ci-dessus $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ et
 $\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve : Considérons $w_\varepsilon \in T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ solution de :

$$(1.2.3) \quad (\varepsilon A + B) w_\varepsilon = h \quad .$$

Le théorème 1.1 entraîne alors que $w_\varepsilon \rightarrow u$ dans $H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)$. On peut encore écrire l'égalité (1.2.3) sous forme variationnelle

$$(1.2.3)' \quad \varepsilon a(w_\varepsilon, v) + b(w_\varepsilon, v) = (h, v) \quad \forall v \in H_0^m(\mathbb{R}_+^n) \quad .$$

Retranchons (1.2.3)' de (1.2.1)', on obtient :

$$(1.2.4) \quad \varepsilon a(u_\varepsilon - w_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon - w_\varepsilon, v) = (h_\varepsilon - h, v) + (\varepsilon f_\varepsilon, v) \quad \forall v \in H_0^m(\mathbb{R}_+^n)$$

En particulier pour $v = u_\varepsilon - w_\varepsilon$, on a l'inégalité :

$$(1.2.5) \quad (\varepsilon a(u_\varepsilon - w_\varepsilon, u_\varepsilon - w_\varepsilon) + b(u_\varepsilon - w_\varepsilon, u_\varepsilon - w_\varepsilon))$$

$$\leq C \|h^\varepsilon - h\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)} \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)} +$$

$$\|\varepsilon^{1/2} f_\varepsilon\|_{H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)} \|\varepsilon^{1/2} (u_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{H^m(\mathbb{R}_+^n)} \quad .$$

Et en tenant compte de (1.1.8)

$$\alpha \varepsilon \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^m(\mathbb{R}_+^n)}^2 + \beta \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \|h^\varepsilon - h\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)} \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)}$$

$$\|\varepsilon^{1/2} f_\varepsilon\|_{H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)} \|\varepsilon^{1/2} (u_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{H^m(\mathbb{R}_+^n)} \quad .$$

D'où finalement l'inégalité

$$(1.2.6) \quad \|\varepsilon^{1/2}(u_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{H^m(\mathbb{R}_+^n)} + \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \\ \leq K[\|h_\varepsilon - h\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)} + \|\varepsilon^{1/2}f_\varepsilon\|_{H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)}] .$$

Comme par hypothèse le second membre converge vers zéro quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

On aura :

$$(1.2.7) \quad \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0 .$$

$$(1.2.8) \quad \|\varepsilon^{1/2}(u_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{H^m(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0 .$$

L'inégalité triangulaire entraîne :

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)} + \|w_\varepsilon - u\|_{H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)} .$$

D'où :

$$(1.2.9) \quad \|u_\varepsilon - u\|_{H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$$

$$(1.2.10) \quad \|\varepsilon^{1/2}(u_\varepsilon - u)\|_{H^m(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0 .$$

L'inégalité (1.2.8) appliquée à (1.2.1)' permet comme pour (1.2.6) d'obtenir l'existence d'une constante K_0 telle que :

$$(1.2.11) \quad \|\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon\|_{H^m(\mathbb{R}_+^n)} + \|u_\varepsilon\|_{H^m(\mathbb{R}_+^n)} \leq \\ \leq K_0[\|\varepsilon^{1/2}f_\varepsilon\|_{H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)} + \|h_\varepsilon\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)}] .$$

On est alors dans les conditions 2.1.10 de la démonstration du lemme 2.1 de

D. Huet [2] et on peut alors déduire par récurrence sur r , l'inégalité

$$(1.2.12) \quad \begin{aligned} & \|\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon\|_{T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)} + \|u_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \\ & \leq K [\|\varepsilon^{1/2} f_\varepsilon\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)} + \|h_\varepsilon\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)}] \end{aligned}$$

qui correspond à l'inégalité 2.1.5 de D. Huet [2] et en se reportant à la deuxième partie de la démonstration du théorème 2.1 de D. Huet [2] on déduit de (1.2.9) et (1.2.10) par récurrence sur r :

$$\begin{aligned} & \|u_\varepsilon - u\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0 \\ & \|\varepsilon^{1/2}(u_\varepsilon - u)\|_{T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème, cf. M. Schmitt [1] .

1.2. - Cas du problème de Dirichlet non homogène.

On se donne $g_j^\varepsilon \in H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ et $g_i \in H^{m'+r-i-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $i = 0, 1, \dots, m'-1$ vérifiant la condition suivante :

Il existe $v_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et $v \in T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ telles que l'on ait :

$$(1.2.13) \quad \begin{cases} \gamma_j v_\varepsilon = g_j^\varepsilon & \text{pour } j = 0, 1, \dots, m-1 \\ \gamma_j v = g_j & \text{pour } j = 0, 1, \dots, m'-1 \\ v_\varepsilon \rightarrow v & \text{dans } T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n) \\ \varepsilon^{1/2} v_\varepsilon \rightarrow 0 & \text{dans } T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) \end{cases}$$

On considère alors les problèmes :

$$(1.2.14) \quad \begin{cases} B_\varepsilon u_\varepsilon = h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon \\ \gamma_j u_\varepsilon = g_j^\varepsilon & j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

$$(1.2.15) \quad \begin{cases} Bu = h \\ \gamma_j u = g_j & j = 0, 1, \dots, m'-1 \end{cases}$$

Théorème 2.2.- Avec les hypothèses du théorème 2.1 sur f_ε , h_ε et les opérateurs

B' , A , B , les problèmes (1.2.14) et (1.2.15) admettent une solution unique

$u_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et $u \in T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ respectivement et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(1.2.16) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } T^{m'}(\mathbb{R}_+^n) \text{ et } \varepsilon^{1/2} u_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) .$$

Preuve : L'existence et l'unicité de $u \in T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ solution du problème (1.2.15) sont données par Lions et Magénès [1] car B est $H_0^{m'}$ -elliptique.

Soit v_ε introduit ci-avant, on a $Av_\varepsilon \in T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et $Bv_\varepsilon \in T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ alors, voir remarque 2.1, il existe une unique $w_\varepsilon \in T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ solution de

$$(1.2.17) \quad B_\varepsilon w_\varepsilon = \varepsilon(f_\varepsilon - Av_\varepsilon) + h_\varepsilon - Bv_\varepsilon$$

et donc $u_\varepsilon = w_\varepsilon + v_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ existe et est solution du problème (1.2.14).

L'unicité suit immédiatement de celle du problème homogène.

Considérons maintenant $w \in T_0^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ solution de

$$(1.2.18) \quad Bw = h - Bv .$$

Comme $\varepsilon^{1/2} Av_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et $Bv_\varepsilon \rightarrow Bv$ dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ le théorème 2.1 entraîne $w_\varepsilon \rightarrow w$ dans $T_0^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ et $\varepsilon^{1/2} w_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$. Mais comme $u_\varepsilon = w_\varepsilon + v_\varepsilon$ et $u = w + v$ on a le résultat cherché.

1.3.- Correcteurs d'ordre zéro pour le problème homogène.

On garde les notations et hypothèses précédentes et on suppose de plus :

$$(1.3.1) \quad u \in T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$$

$$(1.3.2) \quad \begin{cases} \|h_\varepsilon - h\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)} = o(\varepsilon^{1/2}) \\ \|f_\varepsilon\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \end{cases}$$

Soient $G_{\varepsilon 1}$ et $G_{\varepsilon 2}$ appartenant à $T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et $T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ respectivement vérifiant :

$$(1.3.3) \quad \|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq M$$

$$(1.3.4) \quad \|G_{\varepsilon 2}\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq M .$$

Définition 3.1. - On dira que θ_ε est un correcteur d'ordre zéro si c'est une solution de :

$$(1.3.5) \quad \begin{cases} \theta_\varepsilon \in T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) - u \\ B_\varepsilon \theta_\varepsilon = \varepsilon A \theta_\varepsilon + B \theta_\varepsilon = \varepsilon G_{\varepsilon 1} + \varepsilon^{1/2} G_{\varepsilon 2} \end{cases}$$

Ce problème admet une solution unique car $u \in T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ entraîne que $\gamma u \in H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ et donc $\gamma \theta_\varepsilon \in H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ et l'on est dans les conditions du problème (1.2.14) dont nous avons démontré l'existence et l'unicité d'une solution dans le théorème 2.1.

Théorème 3.1. - Sous les hypothèses précédentes :

$$(1.3.6) \quad u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ dans } T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) \text{ faible}$$

$$(1.3.7) \quad \|u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2} .$$

Preuve : Soustrayons (1.2.2) et (1.3.5) de (1.2.1) et posons :

$$w_\varepsilon = u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u) \in T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) , \text{ on aura :}$$

$$(1.3.8) \quad B_\varepsilon w_\varepsilon = -\varepsilon A u - \varepsilon G_{\varepsilon 1} + \varepsilon f_\varepsilon - \sqrt{\varepsilon} G_{\varepsilon 2} + h_\varepsilon - h .$$

Comme $u \in T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$, on a $Au \in T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et en procédant comme pour

(1.2.11) et (1.2.12) on obtient l'inégalité :

$$(1.3.9) \quad \|\varepsilon^{1/2} w_\varepsilon\|_{T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)} + \|w_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \\ \leq K[\|\varepsilon^{1/2}(Au + G_{\varepsilon 1} + f_\varepsilon)\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)} + \|\varepsilon^{1/2}G_{\varepsilon 2} + h_\varepsilon - h\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)}]$$

$$(1.3.10) \leq K \varepsilon^{1/2} [\|Au\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)} + \|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)} + \|f_\varepsilon\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)} + \\ + \|G_{\varepsilon 2}\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)} + K_1]$$

en tenant compte de l'hypothèse (1.3.2) qui signifie $\|h_\varepsilon - h\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq K_1 \varepsilon^{1/2}$ et vu (1.3.2) (1.3.3) et (1.3.4) on aura que $\|w_\varepsilon\|_{T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)}$ est borné et on peut extraire une sous-suite convergant faiblement dans $T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$. Mais comme $\|w_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2}$ la limite sera nulle d'où le théorème.

Théorème 3.2.- Ajoutons aux hypothèses du théorème 3.1 :

$$(1.3.11) \quad G_{\varepsilon 1} \rightarrow G_1 \quad \text{dans} \quad T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)$$

$$(1.3.12) \quad G_{\varepsilon 2} \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)$$

$$(1.3.13) \quad \|h_\varepsilon - h\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)} = O(\varepsilon^{1/2}) \quad \text{et} \quad (1.3.14) \quad f_\varepsilon \rightarrow f \quad \text{dans} \\ T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n) .$$

$$\text{Alors (1.3.15) } \quad u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u) \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{fort.}$$

$$(1.3.16) \quad \varepsilon^{-1/2}[u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u)] \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{fort.}$$

Pour cela on commencera par démontrer le lemme :

Lemme 3.2. - Soit $w_\varepsilon \in H^m(\mathbb{R}_+^n)$, $u \in H^m(\mathbb{R}_+^n)$ avec :

$$(1.3.17) \quad B_\varepsilon w_\varepsilon = \varepsilon F_\varepsilon - \varepsilon Au + \varepsilon^{1/2} G_\varepsilon$$

où $F_\varepsilon \rightarrow F$ dans $H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)$, $G_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)$.

Alors :

$$w_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } H^m(\mathbb{R}_+^n)$$

$$\varepsilon^{-1/2} w_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } H^{m'}(\mathbb{R}_+^n) .$$

Preuve : (1.3.17) peut s'écrire sous forme variationnelle en divisant par ε :

$$(1.3.18) \quad \varepsilon^{-1} b_\varepsilon(w_\varepsilon, w_\varepsilon) = (F_\varepsilon, w_\varepsilon) - a(u, w_\varepsilon) + (G_\varepsilon, \varepsilon^{-1/2} w_\varepsilon) .$$

La démonstration du théorème 3.1 dans le cas $r = 0$ appliquée à (1.3.10) montre que w_ε converge faiblement vers zéro dans $H^m(\mathbb{R}_+^n)$. Donc comme $F_\varepsilon \rightarrow$ dans $H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)$, $(F_\varepsilon, w_\varepsilon) \rightarrow 0$ et de même comme $u \in H^m(\mathbb{R}_+^n)$ $a(u, w_\varepsilon) \rightarrow 0$.

De même la démonstration du théorème 3.1 montre que $\|\varepsilon^{-1/2} w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C$ donc :

$$|(G_\varepsilon, \varepsilon^{-1/2} w_\varepsilon)| \leq \|G_\varepsilon\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)} \|\varepsilon^{-1/2} w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|G_\varepsilon\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)}$$

et comme $G_\varepsilon \rightarrow 0$ par hypothèse dans $H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)$ il en sera de même du premier membre de l'inégalité.

D'où $\varepsilon^{-1} b_\varepsilon(w_\varepsilon, w_\varepsilon) \rightarrow 0$, ce qui avec (1.1.8) entraîne le résultat.

Preuve du théorème 3.2 : Considérons l'égalité (1.3.8). Si l'on pose $F_\varepsilon = f_\varepsilon - G_\varepsilon$ qui converge vers $F = f - G_1$ dans $T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ donc en particulier dans $H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)$ (Hypothèses (1.3.14) et (1.3.11)), et $G_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2} (h_\varepsilon - h) - G_{\varepsilon 2}$ qui converge

vers zéro dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ donc dans $H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)$ (hypothèses (1.3.12) et (1.3.13)), on peut appliquer le lemme 3.2 et donc $w_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ et $\varepsilon^{-1/2} w_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)$. Ce qui donne le résultat (1.3.15)-(1.3.16) pour $r = 0$.

On suppose alors le théorème vrai jusqu'à l'ordre $r - 1$ et montrons qu'il est encore vrai à l'ordre r .

Posons $r_\varepsilon = D_{x,w_\varepsilon}^q$ avec $|q| \leq r-1$ et soit $i \in [1, n-1]$. Il suffit alors de démontrer que $\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} \rightarrow 0$ dans $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ et $\varepsilon^{-1/2} \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} \rightarrow 0$ dans $H^{m'}(\mathbb{R}_+^n)$. Pour cela on calculera $B_\varepsilon \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}$ et on montrera que l'on est dans les conditions d'applications du lemme 3.2.

De (1.3.8) on tire :

$$(1.3.20) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, B_\varepsilon w_\varepsilon}^q = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, G_{\varepsilon 1}}^q + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, f_\varepsilon}^q - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, A_\varepsilon}^q \\ - \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, G_{\varepsilon 2}}^q + \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, (h_\varepsilon - h)}^q .$$

Par hypothèse on a :

$$(1.3.21) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, G_{\varepsilon 1}}^q \in H^{-m}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{qui converge vers} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, G_1}^q .$$

$$(1.3.22) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, f_\varepsilon}^q \in H^{-m}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{qui converge vers} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, f}^q$$

$$(1.3.23) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, G_{\varepsilon 2}}^q \in H^{-m}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{qui converge vers zéro}$$

$$(1.3.24) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, (h_\varepsilon - h)}^q \in H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{et} \quad \varepsilon^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x, (h_\varepsilon - h)}^q \quad \text{converge} \\ \text{vers zéro.}$$

D'autre part A et B donnés par (1.1.5) et (1.1.6) respectivement peuvent s'écrire aussi :

$$(1.3.25) \quad A = \sum_{|p| \leq 2m} \alpha_p(x) D^p, \quad B = \sum_{|p| \leq 2m'} \beta_p(x) D^p$$

où les α_p et les β_p sont encore des restrictions à \mathbb{R}_+^n de fonctions de $B(\mathbb{R}_+^n)$. Et on peut voir alors que :

$$(1.3.26) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} D_x^q, Au = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|p| \leq 2m \\ |s| \leq r-1}} \gamma_{ps}(x) D_x^s, (D_u^p) \in H^{-m}(\mathbb{R}_+^n).$$

Calculons $B_\varepsilon \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}$. On aura :

$$(1.3.27) \quad B_\varepsilon \left(\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (B_\varepsilon r_\varepsilon) + \left[B_\varepsilon \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (B_\varepsilon r_\varepsilon) \right]$$

où :

$$(1.3.28) \quad B_\varepsilon r_\varepsilon = B_\varepsilon (D_x^q w_\varepsilon) = D_x^q (B_\varepsilon w_\varepsilon) + [B_\varepsilon (D_x^q w_\varepsilon) - D_x^q (B_\varepsilon w_\varepsilon)]$$

et finalement :

$$(1.3.29) \quad B_\varepsilon \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} D_x^q (B_\varepsilon w_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} [B_\varepsilon (D_x^q w_\varepsilon) - D_x^q (B_\varepsilon w_\varepsilon)] \\ + \left[B_\varepsilon \left(\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (B_\varepsilon r_\varepsilon) \right].$$

Se reportant à la démonstration du lemme 2.1, p. 434 de D. Huet [2] on a :

$$(1.3.30) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} [B_\varepsilon (D_x^q w_\varepsilon) - D_x^q (B_\varepsilon w_\varepsilon)] = \varepsilon F_{2\varepsilon} + H_{2\varepsilon}$$

avec

$$(1.3.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{2\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|p| \leq 2m \\ |s| \leq r-2}} \gamma_{ps}(x) D_x^s, (D^p w_\varepsilon) \in H^{-m}(\mathbb{R}_+^n) \\ H_{2\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|q| \leq 2m' \\ |t| \leq r-2}} \delta_{qt}(x) D_x^t, (D^q w_\varepsilon) \in H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n) \end{array} \right.$$

et

$$(1.3.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|F_{2\varepsilon}\|_{H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)} \leq K_4 \|w_\varepsilon\|_{T^{m,r-1}(\mathbb{R}_+^n)} \\ \|H_{2\varepsilon}\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)} \leq K_5 \|w_\varepsilon\|_{T^{m',r-1}(\mathbb{R}_+^n)} \end{array} \right.$$

De même on a :

$$(1.3.33) \quad B_\varepsilon \left(\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (B_\varepsilon r_\varepsilon) = -\varepsilon F_{3\varepsilon} - H_{3\varepsilon}$$

avec :

$$(1.3.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{3\varepsilon} = \sum_{|p| \leq 2m} \frac{\partial \alpha_p}{\partial x_i} D^p r_\varepsilon \in H^{-m}(\mathbb{R}_+^n) \\ H_{3\varepsilon} = \sum_{|p| \leq 2m'} \frac{\partial \beta_p}{\partial x_i} D^p r_\varepsilon \in H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n) \end{array} \right.$$

et

$$(1.3.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|F_{3\varepsilon}\|_{H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)} \leq K_6 \|r_\varepsilon\|_{H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)} \leq K_7 \|w_\varepsilon\|_{T^{m,r-1}(\mathbb{R}_+^n)} \\ \|H_{3\varepsilon}\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)} \leq K_8 \|w_\varepsilon\|_{T^{m',r-1}(\mathbb{R}_+^n)} \end{array} \right. .$$

En tenant compte de (1.3.25) dans (1.3.20) et de (1.3.28), (1.3.30) et (1.3.33) on obtient :

$$(1.3.36) \quad B_\varepsilon \left(\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} \right) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q G_{\varepsilon 1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q f_\varepsilon - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|p| \leq 2m \\ |s| \leq r-1}} \gamma_{ps}(x) D_{x'}^s (D^p u) \\ \left[-\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q G_{\varepsilon 2} + \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q (h_\varepsilon - h) + \varepsilon F_{2,\varepsilon} + H_{2\varepsilon} - \varepsilon F_{3\varepsilon} - H_{3\varepsilon} \right] .$$

Or l'hypothèse de récurrence appliquée à 1.3.32 et 1.3.35 montre que :

$$\begin{array}{ll} \|F_{2\varepsilon}\|_{H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0 & \|\varepsilon^{-1/2} H_{2\varepsilon}\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0 \\ \|F_{3\varepsilon}\|_{H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0 & \|\varepsilon^{-1/2} H_{3\varepsilon}\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0 \end{array} .$$

(1.3.36) s'écrit donc sous la forme de (1.3.17) avec :

$$F_\varepsilon = - \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q G_{\varepsilon 1} + \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q f_\varepsilon + F_{2,\varepsilon} - F_{3\varepsilon}$$

On remplace Au par $-\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|p| \leq 2m \\ |s| \leq r-1}} \gamma_{ps}(x) D_{x'}^s (D_u^p) \in H^{-m}(\mathbb{R}_+^n)$

$$G_\varepsilon = - \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q G_{\varepsilon 2} + \varepsilon^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q (h_\varepsilon - h) + \varepsilon^{-1/2} H_{2\varepsilon} - \varepsilon^{-1/2} H_x$$

On est donc dans les hypothèses du lemme 3.2 ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

1.4.- Correcteurs d'ordre zéro pour le problème non homogène.

On considère alors les problèmes (1.2.14) et (1.2.15) et on garde les hypothèses du paragraphe 1.2.b auxquelles on ajoute celles du théorème 3.1.

Remarque 4.1.- En général $\gamma_j u \neq g_j$ pour $j \in [m', m-1]$ et donc la convergence qui a lieu dans $T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ n'a pas lieu en général dans $T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$; d'où l'introduction de correcteurs.

Soit donc $\theta_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ solution du problème :

$$(1.4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon A\theta_\varepsilon + B\theta_\varepsilon = \varepsilon G_{\varepsilon 1} + \sqrt{\varepsilon} G_{\varepsilon 2} \\ \gamma_j \theta_\varepsilon = g_j - \gamma_j u \quad j \in [m', m-1] \\ \gamma_j \theta_\varepsilon = 0 \quad j \in [0, m'-1] \end{array} \right.$$

où $G_{\varepsilon 1}$ et $G_{\varepsilon 2}$ satisfont (1.3.3) et (1.3.4).

Ce problème a une solution unique, cf. théorème 2.2.

Commençons par considérer le problème (1.2.14) simplifié, c'est-à-dire :

$$(1.4.2) \quad \begin{cases} B_\varepsilon u_\varepsilon = h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon \\ \gamma_j u_\varepsilon = g_j \quad j \in [0, m-1] \end{cases}$$

Théorème 4.1. - Sous les hypothèses ci-dessus :

$$(1.4.3) \quad u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u) \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{faible}$$

$$(1.4.4) \quad \|u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u)\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2} .$$

Preuve : Considérons $w_\varepsilon = u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u)$. Retranchons (1.2.15) et (1.4.1) de (1.4.2). On aura en tenant compte que $u \in T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$:

$$(1.4.5) \quad B_\varepsilon w_\varepsilon = -\varepsilon G_{\varepsilon 1} + \varepsilon f_\varepsilon - \sqrt{\varepsilon} G_{\varepsilon 2} - \varepsilon Au + h_\varepsilon - h .$$

D'autre part la linéarité de l'opération trace de $T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}_+^n)$ entraînera :

$$(1.4.6) \quad \gamma_j w_\varepsilon = 0 \quad \forall j \in [0, m-1] .$$

On est alors dans les conditions d'application du théorème 3.1 d'où le résultat.

Si de plus on se place dans les hypothèses du théorème 3.2, on obtient la convergence forte.

Revenons au cas plus général (1.2.14) et considérons $l_j^\varepsilon \in H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ satisfaisant aux hypothèses

$$(1.4.7) \quad \|l_{j\varepsilon}\|_{H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = O(\varepsilon^{1/2}) \quad j = 0, \dots, m'-1 \quad \text{dans} \quad H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$(1.4.8) \quad \|l_{j\varepsilon} - (g_j - \gamma_j u)\|_{H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = O(\varepsilon^{1/2}) \quad j = m', \dots, m-1 \quad \text{dans} \\ H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

Supposons de plus :

$$(1.4.9) \quad \|g_{j\varepsilon} - g_j\|_{H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = o(\varepsilon^{1/2}) \quad j = 0, 1, \dots, m'-1 .$$

Soit donc alors $\theta_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ solution du problème :

$$(1.4.10) \quad \begin{cases} \varepsilon A\theta_\varepsilon + B\theta_\varepsilon = \varepsilon G_{\varepsilon 1} + \sqrt{\varepsilon} G_{\varepsilon 2} \\ \gamma_j \theta_\varepsilon = \lambda_j^\varepsilon \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

où $G_{\varepsilon 1}$ et $G_{\varepsilon 2}$ comme théorème 3.1.

Théorème 4.2.- Les hypothèses du théorème 4.1 et celles ci-dessus entraînent :

$$(1.4.11) \quad u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{dans } T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{faible}$$

$$(1.4.12) \quad \|u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)\|_{T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2} .$$

Preuve : Considérons les fonctions de $H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\varepsilon^{-1/2}(g_j^\varepsilon - \lambda_j^\varepsilon - g_j)$ pour $j \in [0, m-1]$ et $\varepsilon^{-1/2}(g_j^\varepsilon - \lambda_j^\varepsilon - \gamma_j u)$ $j \in [m', m-1]$. Les hypothèses (1.4.7) (1.4.8) (1.4.9) entraîne leur convergence vers zéro. Donc de la remarque 4.1, p. 446 de D. Huet [2], il existera $v'_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $v \in T^{m,r}(\mathbb{R}^{n-1})$ telles que :

$$(1.4.13) \quad \begin{cases} \gamma_j v'_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2}(g_j^\varepsilon - \lambda_j^\varepsilon - \gamma_j u) & j \in [m', m-1] \\ \gamma_j v' = \varepsilon^{-1/2}(g_j^\varepsilon - \lambda_j^\varepsilon - g_j) & j \in [0, m'-1] \\ \gamma_j v = 0 & j \in [0, m-1] \end{cases}$$

et telle que $v'_\varepsilon \rightarrow v$ dans $T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$.

Considérons alors $v_\varepsilon = \varepsilon^{1/2}(v'_\varepsilon - v) \in T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$. Elle vérifie :

$$(1.4.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{-1/2} v_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans } T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) \\ \gamma_j v_\varepsilon = g_j^\varepsilon - \ell_j^\varepsilon - g_j \quad j \in [0, m'-1] \\ \gamma_j v_\varepsilon = g_j^\varepsilon - \ell_j^\varepsilon - \gamma_j u \quad j \in [m', m-1] \end{array} \right.$$

D'autre part B étant continu sur $T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ à valeurs dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ $\varepsilon^{-1/2} v_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ donc dans $T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ entraîne que $\varepsilon^{-1/2} Bv_\varepsilon = B \varepsilon^{-1/2} v_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}_+^n)$.

Soit alors w_ε solution du problème

$$(1.4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_\varepsilon \in T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) \\ B_\varepsilon w_\varepsilon = -\varepsilon[g_{\varepsilon 1} + Av_\varepsilon - f_\varepsilon Au] + \varepsilon^{1/2}[\varepsilon^{-1/2}(h_\varepsilon - h) - B\varepsilon^{-1/2}v_\varepsilon - G_{\varepsilon 2}] \end{array} \right. .$$

Les hypothèses considérées ci-dessus entraînent que nous sommes dans les mêmes conditions que dans la démonstration du théorème 3.1. Donc la solution existe et est unique et $w_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ faible,

$$\|w_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2} .$$

Or $w_\varepsilon = u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u) - v_\varepsilon \in T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ à cause de (1.4.14) et vérifie (1.4.15), d'où :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u) = w_\varepsilon + v_\varepsilon &\rightarrow 0 \quad \text{dans } T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) \text{ faible et} \\ \|u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u)\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)} &\leq \|w_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)} + \\ &+ \|v_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2} . \end{aligned}$$

Ce qui achève le théorème.

Remarque 4.2. - Si l'on se place dans les hypothèses du théorème 3.2, on obtiendra la convergence forte pour w_ε et donc aussi pour $u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u)$.

1.5.- Correcteurs d'ordre ≥ 1 .

On considère de nouveau le problème (1.2.1) et on suppose qu'il existe

$$u, u^1, \dots, u^M \in T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$$

et $L^1, L^2, \dots, L^M \in T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ tels que

$$(1.5.1) \quad \varepsilon A(u + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^M u^M) + B(u + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^M u^M) = \\ = \varepsilon L^1 + \dots + \varepsilon^M L^M + \varepsilon^{M+1} A u^M + h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$.

Le problème limite est toujours donné par (1.2.2). L'identité (1.5.1) équivaut aux égalités suivantes :

$$(1.5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Au + Bu^1 = L^1 \\ Au^1 + Bu^2 = L^2 \\ \dots \\ Au^{M-1} + Bu^M = L^M \end{array} \right.$$

Définition 5.1.- Un élément θ_ε^M de $T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ sera dit correcteur d'ordre M si solution du problème :

$$\theta_\varepsilon^M \in T_0^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) - (u + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^M u^M) \\ \varepsilon A \theta_\varepsilon^M + B \theta_\varepsilon^M = -(\varepsilon L^1 + \varepsilon^2 L^2 + \dots + \varepsilon^M L^M) + \varepsilon^M (\varepsilon G_{\varepsilon 1} + \varepsilon^{1/2} G_{\varepsilon 2})$$

où $G_{\varepsilon 1}$ et $G_{\varepsilon 2}$ sont les mêmes que dans (1.3.3) et (1.3.4).

On a alors les estimations données par le théorème suivant.

Théorème 5.1.- On se place dans les hypothèses du théorème (3.1) et celles ci-dessus. On a alors :

$$(1.5.4) \quad \|u_\varepsilon - (u + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^M u^M + \theta_\varepsilon^M)\|_{T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^M$$

$$(1.5.5) \quad \|u_\varepsilon - (u + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^M u^M + \theta_\varepsilon^M)\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{M+1/2} .$$

Preuve : Posons $w_\varepsilon = u_\varepsilon - (u + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^M u^M + \theta_\varepsilon^M)$ et retranchons les équations (1.5.1) et (1.5.3) de (1.2.1), on obtient :

$$(1.5.6) \quad \varepsilon A w_\varepsilon + B w_\varepsilon = -\varepsilon^{M+1} A u^M - \varepsilon^M (\varepsilon G_{\varepsilon 1} + \varepsilon^{1/2} G_{\varepsilon 2}) .$$

On se ramène ainsi au problème du même genre que celui traité dans la preuve du théorème 3.1 avec les mêmes hypothèses, d'où le résultat.

Théorème 5.2.- Si l'on ajoute les hypothèses (1.3.11), (1.3.12), (1.3.13) et (1.3.14) on aura :

$$(1.5.7) \quad \varepsilon^{-M} [u_\varepsilon - (u + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^M u^M + \theta_\varepsilon^M)] \rightarrow 0 \text{ dans } T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) \text{ fort}$$

$$(1.5.8) \quad \varepsilon^{-M-1/2} [u_\varepsilon - (u_\varepsilon - (u + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^M u^M + \theta_\varepsilon^M))] \rightarrow 0$$

dans $T^{m',r}(\mathbb{R}_+^n)$ fort.

Noyaux de Poisson

2.1.- Notations et hypothèses.

2.1.a.- Les opérateurs différentiels

De manière générale nous écrirons les opérateurs différentiels à coefficients constants à n variables $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sous la forme $P(\frac{1}{i} D_x)$ où $D_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) \cdot P(\bar{\xi})$, où $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, est un polynôme dit polynôme caractéristique de l'opérateur. Nous distinguerons la dernière variable en posant $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ et $y = x_n$ et on écrira $(x, y) \in \mathbb{R}^n$. De plus on posera $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ et $i\eta = \xi_n$. Le polynôme caractéristique peut alors être écrit $P(\bar{\xi}) = P(\xi, i\eta)$.

Nous nous intéresserons aux solutions de l'équation :

$$(2.1.1) \quad \mathbb{L} \left(\frac{\varepsilon}{i} D_x \right) u(\bar{x}) = 0$$

dans le demi-espace $y = x_n > 0$, satisfaisant à certaines conditions frontières sur le plan $y = 0$. Ici \mathbb{L} sera un polynôme de degré pair $2m_1$, et ε un petit paramètre réel. Nous supposerons aussi le degré du terme d'ordre le plus petit être pair, soit $2m_0$. Finalement nous supposerons $m_1 > m_0 \geq 0$. La principale hypothèse sur \mathbb{L} sera du type forte ellipticité, à savoir :

Hypothèse I.- Il existe une constante $E > 0$ telle que :

$$(2.1.2) \quad \operatorname{Re} \mathbb{L}(\bar{\xi}) \geq E (|\bar{\xi}|^{2m_1} + |\bar{\xi}|^{2m_0}) \quad \forall \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n .$$

Soient $\mathbb{L}_1(\bar{\xi})$ et $\mathbb{L}_0(\bar{\xi})$ les polynômes homogènes consistant en les termes de \mathbb{L} d'ordre $2m_1$ et $2m_0$ respectivement. En particulier l'hypothèse I entraîne que \mathbb{L}_1 et \mathbb{L}_0 sont elliptiques.

Nous écrirons désormais $L(\xi, \eta) \equiv \mathbb{L}(\xi, i\eta)$ avec des définitions analogues pour L_1 et L_0 .

L'équation (2.1.1) devient alors :

$$(2.1.3) \quad L\left(\frac{\xi}{i} D_x, -\varepsilon D_y\right) u(x, y) = 0 \quad .$$

Nous noterons $\eta_i(\xi)$ les racines du polynôme en η $L(\xi, \eta) = 0$. Les racines joueront un rôle principal dans toute la suite. Nous ne serons intéressés que par les racines dont la partie réelle est positive et nous ferons l'hypothèse :

Hypothèse II.- Pour chaque vecteur réel $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec $|\omega| = 1$, il existe exactement m_1 racines $\gamma_i(\omega)$ ($i = 1, \dots, m_1$) de $L_1(\omega, \gamma) = 0$ avec partie réelle positive et exactement m_0 racines $\alpha_i(\omega)$ ($i = 1, \dots, m_0$) de $L_0(\omega, \alpha) = 0$ avec partie réelle positive.

Remarque 1.1.- Cette hypothèse est vérifiée dès que $n > 2$.

Hypothèse III.- Les racines $\eta_i(\xi)$ sont analytiques comme fonctions de la variable réelle ξ . De plus il existe un voisinage de l'origine et un voisinage de l'infini dans le plan complexe de la variable σ tels que $\eta_i(\sigma\omega)$ sont des fonctions analytiques de σ et du vecteur réel ω pour σ dans ces voisinages et ω dans un voisinage de la sphère $|\omega| = 1$.

Comme conséquence de ces hypothèses, on a les propriétés des racines résumées dans le lemme suivant. (Pour la démonstration cf. P. Fife [1]).

Lemme 1.1.- Exactement la moitié des $\eta_i(\xi)$. (Par exemple la première moitié) a une partie réelle positive pour $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. On a aussi les propriétés

asymptotiques suivantes, où les β_i ($i = m_0+1, \dots, m_1$) sont les racines non nulles de partie réelle positive de $L(0, \eta) = 0$:

$$(2.1.4) \quad \eta_i(\rho\omega) = \rho\gamma_i(\omega) + o(1) \quad (\rho \rightarrow \infty, \rho \in \mathbb{R}^+) \quad i = 1, \dots, m_1$$

$$(2.1.5) \quad \eta_i(\rho\omega) = \rho\alpha_i(\omega) + o(\rho^2) \quad (\rho \rightarrow 0, \rho \in \mathbb{R}^+) \quad i = 1, \dots, m_0$$

$$(2.1.6) \quad \eta_i(\rho\omega) = \beta_i + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0, \rho \in \mathbb{R}^+) \quad i = m_0+1, \dots, m_1 .$$

2.1.b.- Les opérateurs frontières.

Soient $B_i(\xi, \eta)$ ($i = 1, \dots, m_1$) des polynômes de degré μ_i , et γ_i certains entiers. Nous nous intéresserons aux solutions de l'équation (2.1.3) dans le demi-espace $y > 0$ satisfaisant :

$$(2.1.7) \quad B_j \left(\frac{\xi}{i} D_x, -\varepsilon D_y \right) u(x, 0) = \varepsilon^{-\gamma_j} \varphi_j(x) .$$

Nous imposerons l'hypothèse suivante sur les B_j et L .

Hypothèse IV.- Nous définissons $L^+(\xi, \tau) = \prod_{k=1}^{m_1} (\tau + \eta_k(\xi))$ et

$L_1^+(\omega, \tau) = \prod_{i=1}^{m_1} (\tau + \gamma_i(\omega))$. Comme polynôme en τ , les fonctions $B_j(\xi, \tau)$ sont linéairement indépendantes modulo $L^+(\xi, \tau)$.

(1) Pour chaque $\xi \neq 0$ réel et

(2) Pour chaque complexe ξ dans un voisinage de l'origine.

De plus pour chaque réel $\omega \neq 0$, les polynômes $B_i^!(\omega, \tau)$ sont linéairement indépendants modulo $L_1^+(\omega, \tau)$, où $B_j^!$ consistent en les termes d'ordre le plus élevé de B_j .

Remarque 1.2.- $B_j(\xi, -\tau) = Q_j(\xi, \tau) L^+(\xi, \tau) + R_j(\xi, \tau)$ avec $d^\circ R_j < m_1$, $\xi \neq 0$ et comme polynôme en τ :

$$(2.1.8) \quad R_j(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{m_1} b^{jk}(\xi) \tau^{k-1} .$$

L'hypothèse IV équivaut à $d(\xi) = \det(b^{jk}(\xi)) \neq 0 \quad \forall \xi \neq 0$ c'est-à-dire que cette matrice est inversible.

De même :

$$B_j^!(\omega, -\tau) = Q_j^!(\omega, \tau) L_1^+(\omega, \tau) + R_j^!(\omega, \tau) \quad \text{avec } d^\circ R_j^! < m_1, \quad \omega \neq 0$$

et comme polynôme en τ :

$$(2.1.9) \quad R_j^!(\omega, \tau) = \sum_{k=1}^{m_1} b^{,jk}(\omega) \tau^{k-1} \quad .$$

La deuxième partie de l'hypothèse IV équivaut à $d'(\xi) = \det(b^{,jk}(\omega)) \neq 0 \quad \forall \omega \neq 0$ c'est-à-dire que cette matrice est inversible.

2.2.- Le noyau de Poisson.

Dans cette section nous allons rappeler la construction des noyaux de Poisson de P. Fife [1] pour le problème :

$$(2.2.1) \quad L\left(\frac{1}{i} D_x, -D_y\right) u(x, y) = 0 \quad y > 0$$

$$(2.2.2) \quad B_j\left(\frac{1}{i} D_x, -D_y\right) u(x, 0) = \varphi_j(x) \quad j = 1, \dots, m_1 \quad .$$

Par noyaux de Poisson on entend des fonctions $K_j(x, y)$, $j = 1, \dots, m_1$ telles que pour certaines classes de fonctions $\varphi_j(x)$, la convolution

$$(2.2.3) \quad u(x, y) = \sum_{j=1}^{m_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(x-\tau, y) \varphi_j(\tau) d\tau$$

soit solution de (2.2.1) et (2.2.2).

2.2.a.- Définitions et constructions préliminaires.

$\chi(\rho)$ sera une fonction indéfiniment différentiable définie pour $\rho \in \mathbb{R}^+$ et telle que

$$(2.2.4) \quad \chi(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \rho \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } \rho \geq 1 \end{cases}$$

On pose $|\xi| = \rho$ et $\omega = \frac{\xi}{\rho}$ donc $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $|\omega| = 1$.

C_a désignera un contour simple fermé borné du plan complexe à gauche de la droite $\operatorname{Re} z = -2\alpha$ et entourant l'ensemble :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : z = -\frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}, \quad i = 1, \dots, m_1 \quad \rho \geq a \quad |\omega| = 1 \right\}$$

où a est quelconque dans \mathbb{R}_*^+ et α tel que $\operatorname{Re} \eta_i(\rho\omega) \geq 3a\rho$

(Fife [1] lemme 3.1).

On note, si toutes les racines $\eta_i(\sigma\omega)$ sont distinctes dans un voisinage de l'origine :

$$(2.2.5) \quad G_i(\sigma, \omega, y) = e^{-\eta_i(\sigma\omega)y}.$$

Sinon nous définissons, toujours pour σ dans un voisinage de 0 :

$$(2.2.6) \quad G_k(\sigma, \omega, y) \equiv \int_C \frac{z^{k-1} e^{\sigma y z}}{\widehat{L}_1(\sigma, \omega, z)} dz \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, m_0$$

et

$$(2.2.7) \quad G_k(\sigma, \omega, y) \equiv \int_{C'} \frac{z^{k-m_0-1} e^{zy}}{\widehat{L}_2(\sigma, \omega, z)} dz \quad \text{pour } k = m_0+1, \dots, m_1$$

où

$$(2.2.8) \quad \widehat{L}_1(\sigma, \omega, z) = \prod_{i=1}^{m_0} \left(z + \frac{\eta_i(\sigma\omega)}{\sigma} \right)$$

et

$$(2.2.9) \quad \widehat{L}_2(\sigma, \omega, z) = \prod_{i=m_0+1}^{m_1} (z + \eta_i(\sigma\omega)).$$

C est un contour fermé borné autour de $\left\{ \frac{-\eta_i(\sigma\omega)}{\sigma} \quad i = 1, \dots, m_0 \quad |\omega| = 1 \quad |\sigma| < a \right\}$.

C' est un contour fermé borné autour de $\left\{ -\eta_i(\sigma\omega) \quad |\omega| = 1 \quad |\sigma| \leq a \right.$
 $\left. i = m_0+1, \dots, m_1 \right\}$.

Remarque 2.1.- a sera choisi de sorte que C' soit à gauche de la droite

Re $z = -2\beta$ où β est une constante telle que $\text{Re } \beta_i \geq 3\beta$ (Lemme 3.1, P. Fife [1]).

Finalement nous considérons pour σ dans un voisinage de 0

$$(2.2.10) \quad A^{kl}(\sigma\omega, y) \equiv B_l(\sigma\omega, -D_y) G_k(\sigma, \omega, y) \equiv R_l(\sigma\omega, -D_y) G_k(\sigma, \omega, y)$$

où $b_l(\xi, \tau) \equiv B_l(\xi, \tau) \pmod{L^+(\xi, \tau)}$ donc ordre de $b_l \leq m_l - 1$.

L'hypothèse IV entraîne que la matrice $(A^{kl}(\sigma\omega, 0))$ est inversible pour $\sigma \neq 0$ et l'on note alors :

$A_{jk}(\sigma\omega)$ cette matrice inverse.

D'autre part on notera successivement :

$$(2.2.11) \quad L^+(\xi, \tau) = \prod_{k=1}^{m_1} (\tau + \eta_k(\xi)) = \sum_{p=0}^{m_1} a_p(\xi) \tau^{m_1-p} \quad (a_0 = 1)$$

$$(2.2.12) \quad L_j^+(\xi, \tau) = \sum_{p=0}^j a_p(\xi) \tau^{j-p} \quad j = 0, 1, \dots, m_1 - 1$$

On a alors : (Agmon-Douglis-Nirenberg [1] p. 632)

$$(2.2.13) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{L_{m_1-1-j}^+(\xi, \tau) \tau^k}{L^+(\xi, \tau)} d\tau = \delta_{jk}$$

où C est une courbe de Jourdan qui contient en son intérieur les $(-\eta_i)$

(2.2.14) Soit $(b_{jk}(\xi))$ la matrice inverse de $(b^{jk}(\xi))$ considérée en (2.1.8)

$$(2.2.15) \quad \text{Soit alors } N_k(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{m_1} (b_{ik}(\xi) L_{m_1-i}^+(\xi, \tau))$$

On a :

$$(2.2.16) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{N_k(\xi, \tau) B_l(\xi, -\tau)}{L^+(\xi, \tau)} d\tau = \delta_{lk} \quad (\text{Agmon-Douglis-Nirenberg [1], p. 634})$$

Et on pose finalement :

$$(2.2.17) \quad N_k(\rho, \omega, \zeta) = \rho^{-m_1 + \mu_k + 1} \frac{N_k(\rho\omega, \rho\zeta)}{2i\pi}$$

et (2.2.16) entraîne que :

$$(2.2.18) \quad \int_{C_a} \frac{N_k(\rho, \omega, \zeta) \rho^{-\mu_k} B_\ell(\rho\omega, -\rho\zeta)}{\prod_{i=1}^{m_1} \left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho} \right)} d\zeta = \delta_{k\ell} .$$

En effet il suffit de remplacer $N_k(\rho, \omega, \zeta)$ par sa valeur dans (2.2.17) et de faire le changement de variable $\tau = \rho\zeta$.

2.2.b.- Noyaux de Poisson

Avec les notations précédentes, nous considérons les noyaux suivants :

$$(2.2.19) \quad K_j(x, y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{|z|=a} \frac{dz}{2\pi iz} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk}(\xi+z\omega) G_k(\rho+z, \omega, y) e^{ix \cdot (\xi+z\omega)} d\xi$$

$$+ (2\pi)^{-n+1} \int_{C_a} d\zeta \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \rho^{-\mu_j} N_j(\rho, \omega, \zeta) \left(\prod_{i=1}^{m_1} \left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho} \right) \right)^{-1} e^{\rho(ix \cdot \omega + \zeta y)} d\xi$$

$$\equiv K_{j_0}(x, y) + K_{j_1}(x, y) .$$

Remarque 2.2.- L'intégrale sur le contour $|z| = a$ est introduite pour éviter une éventuelle discontinuité en $\xi = 0$ des $A_{jk}(\xi)$. S'il n'y a pas de telles singularités on pourra supprimer z en appliquant le théorème des résidus.

Remarque 2.3.- On voit sur (2.2.19) que les noyaux sont composés de deux parties : l'une au voisinage de $\rho = 0$ et l'autre au voisinage de l'infini. Nous étudierons dans ce chapitre le comportement asymptotique des $A_{jk}(\rho\omega)$ au voisinage de $\rho = 0$ d'une part et des $N_j(\rho, \omega, \zeta)$ au voisinage de $\rho = +\infty$ d'autre part. La première étude sera faite seulement dans le cas des opérateurs frontières de Dirichlet.

2.3.- Comportement asymptotique des $A_{jk}(\rho\omega)$ pour $\rho = 0$ lorsque les opérateurs frontières sont de Dirichlet. (Cas général).

Considérons les opérateurs frontières associés aux polynômes :

$$(2.3.1) \quad B_j(\xi, \eta) = (-\eta)^{j-1} \quad j = 1, \dots, m_1$$

2.3.a.- La matrice $[A^{k\ell}(\rho\omega, 0)]$ au voisinage de 0

$\alpha) \quad k \leq m_0$.

(2.2.6) et (2.2.10) entraînent que :

$$(2.3.2) \quad A^{k\ell}(\rho\omega, y) = \int_C \frac{\rho^{\ell-1} z^{k+\ell-2} e^{\rho y z}}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})} dz$$

Car $B_\ell(\frac{1}{i} D_x, -D_y) = D_y^{\ell-1}$ dans le cas (2.3.1)

D'où :

$$(2.3.3) \quad A^{k\ell}(\rho\omega, 0) = \rho^{\ell-1} \int_C \frac{z^{k+\ell-2} dz}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})}$$

Comme $A^{k\ell}(\rho\omega, 0)$ est analytique au voisinage de $\rho = 0$ par construction on aura le premier terme de son développement en série en cherchant la limite lorsque $\rho \rightarrow 0$ du rapport $\frac{A^{k\ell}(\rho\omega, 0)}{\rho^{\ell-1}}$, mais comme le lemme 1.1 donne :

$$\frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho} = \alpha_i(\omega) + o(\rho) \quad \text{on aura :}$$

$$(2.3.4) \quad A^{k\ell}(\rho\omega, 0) = \rho^{\ell-1} (\alpha_{k\ell}(\omega) + o(\rho))$$

où

$$(2.3.5) \quad \alpha_{k\ell}(\omega) = \int_C \frac{z^{k+\ell-2}}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \alpha_i(\omega))} dz$$

β) $k \geq m_0 + 1$

(2.2.7) et (2.2.10) entraînent que :

$$(2.3.6) \quad A^{kl}(\rho\omega, y) = \int_{C'} \frac{z^{k+l-m_0-2} e^{yz}}{\prod_{i=m_0+1}^{m_1} (z + \eta_i(\rho\omega))} dz$$

Donc :

$$(2.3.7) \quad A^{kl}(\rho\omega, 0) = \int_{C'} \frac{z^{k+l-m_0-2}}{\prod_{i=m_0+1}^{m_1} (z + \eta_i(\rho\omega))} dz .$$

Comme $\eta_i(\rho\omega) = \beta_i + o(\omega)$ au voisinage de $\rho = 0$ $i \geq m_0 + 1$ d'après le lemme 1.1, un raisonnement analogue au précédent dans le paragraphe α) entraîne :

$$(2.3.8) \quad A^{kl}(\rho\omega, 0) = \alpha_{kl}(\omega) + o(\rho)$$

où

$$(2.3.9) \quad \alpha_{kl}(\omega) = \int_{C'} \frac{z^{k+l-m_0-2}}{\prod_{i=m_0+1}^{m_0} (z + \beta_i)} dz$$

La matrice des $A^{kl}(\rho\omega, 0)$ aura donc un développement de la forme suivante au voisinage de $\rho = 0$:

$$\left[\begin{array}{cccc} \alpha_{11}(\omega) + o(\rho) & \rho(\alpha_{12}(\omega) + o(\rho)) & \rho^2(\dots) & \dots \dots \dots \rho^{m_1-1}(\alpha_{1m_1}(\omega) + o(\rho)) \\ \alpha_{21}(\omega) + o(\rho) & \rho(\alpha_{22}(\omega) + o(\rho)) & \rho^2(\dots) & \dots \dots \dots \rho^{m_1-1}(\alpha_{2m_1}(\omega) + o(\rho)) \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ \alpha_{m_0,1}(\omega) + o(\rho) & \rho(\alpha_{m_0,2}(\omega) + o(\rho)) & \rho^2(\dots) & \dots \dots \dots \rho^{m_1-1}(\alpha_{m_0,m_1}(\omega) + o(\rho)) \\ \alpha_{m_0+1,1}(\omega) + o(\rho) & \alpha_{m_0+1,2}(\omega) + o(\rho) & (\dots) & \dots \dots \dots (\alpha_{m_0+1,m_1}(\omega) + o(\rho)) \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ \alpha_{m_1,1}(\omega) + o(\rho) & \alpha_{m_1,2}(\omega) + o(\rho) & (\dots) & \dots \dots \dots (\alpha_{m_1,m_1}(\omega) + o(\rho)) \end{array} \right]$$

Notations.- On notera A_1 la matrice $(\alpha_{jk}(\omega))_{\substack{1 \leq j \leq m_0 \\ 1 \leq k \leq m_0}}$
 A_2 la matrice $(\alpha_{jk}(\omega))_{\substack{m_0+1 \leq j \leq m_1 \\ m_0+1 \leq k \leq m_1}}$

2.3.b.- La matrice $[A_{jk}(\rho\omega)]$ au voisinage de $\rho = 0$ (cas général)

Théorème 3.1.- Au voisinage de $\rho = 0$, on a les propriétés asymptotiques suivantes :

$$(2.3.10) \quad A_{jk}(\rho\omega) = O(\rho^{-(j-1)}) \quad j, k \leq m_0$$

$$(2.3.11) \quad A_{jk}(\rho\omega) = O(\rho^{-(j-1)+m_0}) \quad j \leq m_0 \quad k \geq m_0+1$$

$$(2.3.12) \quad A_{jk}(\rho\omega) = O(\rho^{-(m_0-1)}) \quad j \geq m_0+1 \quad k \leq m_0$$

$$(2.3.13) \quad A_{jk}(\rho\omega) = O(1) \quad j \geq m_0+1 \quad k \geq m_0+1$$

Preuve : La matrice inverse d'une matrice étant égale à la matrice transposée des cofacteurs divisée par le déterminant, on va chercher le premier terme du développement au voisinage de $\rho = 0$ des termes du déterminant d'une part et des cofacteurs d'autre part. Par définition première, le déterminant est obtenu en faisant la somme (à la signature près des permutations) des produits d'un terme de la première colonne, d'un terme de la deuxième colonne qui ne soit pas sur la même ligne que le terme précédent, ..., d'un terme de la $k^{\text{ième}}$ colonne qui ne soit pas sur la même ligne que les termes précédents etc... et ceci en faisant toutes les permutations possibles.

Considérons donc la matrice $A^{k\ell}(\rho\omega, 0)$ développée ci-dessus. Le terme de plus bas degré en ρ de son déterminant sera obtenu en ne retenant que les produits de termes pris dans le carré $1 \leq k \leq m_0$ et $1 \leq \ell \leq m_0$ et le carré $m_0+1 \leq k, \ell \leq m_1$. Dans le premier carré on a en faisant le produit des différentes colonnes

des termes de la forme $C(1 \times \rho \times \rho^2 \times \dots \times \rho^{m_0-1}) = C \rho^{\frac{m_0(m_0-1)}{2}}$ et dans le deuxième carré il n'y a que des constantes. Donc le terme de plus bas degré du développement du déterminant de $A^{k\ell}(\rho\omega, 0)$ en puissance de ρ sera :

$$(2.3.14) \quad A \rho^{\frac{m_0(m_0-1)}{2}} \quad \text{où} \quad A = \det(A_1) \times \det(A_2) .$$

Pour les cofacteurs nous procéderons de même en distinguant les différents cas suivants :

$$\alpha) \quad j, k \leq m_0$$

Le cofacteur est obtenu comme le déterminant de la matrice considérée à la quelle on a enlevé le $j^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne. On se retrouve dans un cas analogue au précédent. On aura donc le terme de plus bas degré en ρ en multipliant $\det A_2$ au déterminant du cofacteur du terme (j, k) de la matrice A_1 . La puissance de ρ sera alors $\frac{m_0(m_0-1)}{2} - (k-1)$ puisque l'on a retiré la colonne des ρ^{k-1} .

$$\beta) \quad j \leq m_0 \quad \underline{\text{et}} \quad k \geq m_0 + 1$$

Dans ce cas là on considère seulement le carré des m_0-1 lignes et colonnes du coin supérieur gauche de la matrice et le carré $m_0+1 \leq j \leq m_1$ et $m_0 \leq \ell \leq m_1$ avec $\ell \neq k$. On obtient comme exposant de ρ : $\frac{m_0(m_0-1)}{2} - (m_0-1)$.

$$\gamma) \quad j \geq m_0 + 1 \quad \underline{\text{et}} \quad k \leq m_0$$

On supprime la $k^{\text{ième}}$ colonne c'est-à-dire celle où apparaissent les ρ^{k-1} dans les m_0 premières lignes. On considérera alors le carré $1 \leq j \leq m_0$ et $1 \leq \ell \leq m_0+1$ avec $\ell \neq k$ et le carré $m_0+1 \leq \ell \leq m_1$, $\ell \neq j$ et $m_0+2 \leq k \leq m_1$.

$$\text{L'exposant } \rho \text{ sera alors } \frac{m_0(m_0-1)}{2} + m_0 - (k-1) .$$

δ) $j \geq m_0 + 1$ et $k \geq m_0 + 1$

Dans ce cas là on aura à multiplier $\det A_1$ au cofacteur du terme (j,k) de la matrice A_2 et la puissance de ρ sera $\frac{m_0(m_0-1)}{2}$.

D'où en divisant par le déterminant et en transposant la matrice des cofacteurs, on obtient le résultat énoncé :

Ecrivons le développement asymptotique de la matrice des $A_{jk}(\rho\omega)$ au voisinage de $\rho = 0$. On a :

$$(2.3.15) \quad \begin{pmatrix} \beta_{11}(\omega)(1+O(\rho)) & \beta_{12}(\omega)(1+O(\rho)) & \dots & \beta_{1m_0}(\omega)(1+O(\rho)) & \rho^{m_0} \beta_{1m_0+1}(\omega)(1+O(\rho)) & \dots & \rho^{m_0} \beta_{1m_1}(\omega)(1+O(\rho)) \\ \frac{\beta_{21}(\omega)}{\rho}(1+O(\rho)) & \frac{\beta_{22}(\omega)}{\rho}(1+O(\rho)) & \dots & \frac{\beta_{2m_0}(\omega)}{\rho}(1+O(\rho)) & \rho^{m_0-1} \beta_{2m_0+1}(\omega)(1+O(\rho)) & \dots & \rho^{m_0-1} \beta_{2m_1}(\omega)(1+O(\rho)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\beta_{m_0+1,1}(\omega)}{\rho^{m_0-1}}(1+O(\rho)) & \frac{\beta_{m_0+1,2}(\omega)}{\rho^{m_0-1}}(1+O(\rho)) & \dots & \frac{\beta_{m_0+1,m_0}(\omega)}{\rho^{m_0-1}}(1+O(\rho)) & \rho \beta_{m_0+1,m_0+1}(\omega)(1+O(\rho)) & \dots & \rho \beta_{m_0+1,m_1}(\omega)(1+O(\rho)) \\ \frac{\beta_{m_0+1,1}(\omega)}{\rho^{m_0-1}}(1+O(\rho)) & \frac{\beta_{m_0+1,2}(\omega)}{\rho^{m_0-1}}(1+O(\rho)) & \dots & \frac{\beta_{m_0+1,m_0}(\omega)}{\rho^{m_0-1}}(1+O(\rho)) & \beta_{m_0+1,m_0+1}(\omega)(1+O(\rho)) & \dots & \beta_{m_0+1,m_1}(\omega)(1+O(\rho)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\beta_{m_1,1}(\omega)}{\rho^{m_0-1}}(1+O(\rho)) & \frac{\beta_{m_1,2}(\omega)}{\rho^{m_0-1}}(1+O(\rho)) & \dots & \frac{\beta_{m_1,m_0}(\omega)}{\rho^{m_0-1}}(1+O(\rho)) & \beta_{m_1,m_0+1}(\omega)(1+O(\rho)) & \dots & \beta_{m_1,m_1}(\omega)(1+O(\rho)) \end{pmatrix}$$

2.3.c.- Calcul explicite des $\beta_{jk}(\omega)$ en fonction des α_{jk} .

Pour cela il suffit de se reporter à chaque cas de la démonstration précédente et d'exprimer à quoi correspond chaque cofacteur divisé par le déterminant.

α) $j \leq m_0$ et $k \leq m_0$

$$(2.3.16) \quad \beta_{jk}(\omega) = \frac{\text{cof}_i^* \alpha_{kj}(\omega)}{\det A_1}$$

où cof_i^* désigne le cofacteur dans la matrice A_i $i = 1, 2$.

β) $j \geq m_0 + 1$ et $k \leq m_0$

$$(2.3.17) \quad \beta_{jk}(\omega) = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha_{j1}(\omega) & \dots & \widehat{\alpha_{m_0-1}(\omega)} & \dots & \alpha_{m_0+1}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widehat{\alpha_{k1}(\omega)} & \dots & \widehat{\alpha_{km_0-1}(\omega)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m_0+1}(\omega) & \dots & \alpha_{m_0-1, m_0-1}(\omega) & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} \alpha_{m_0+1, m_0}(\omega) & \dots & \widehat{\alpha_{m_0+1, j}(\omega)} & \dots & \alpha_{m_0+1, m_0+1}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m_1, m_0}(\omega) & \dots & \widehat{\alpha_{m_1, j}(\omega)} & \dots & \alpha_{m_1, m_1}(\omega) \end{pmatrix}}{\det A_1 \times \det A_2}$$

où les termes surmontés d'un \wedge sont supprimés.

γ) $j \leq m_0$ et $k \geq m_0 + 1$

$$(2.3.18) \quad \beta_{jk}(\omega) = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha_{j1}(\omega) & \dots & \widehat{\alpha_{j,j}(\omega)} & \dots & \alpha_{j, m_0+1}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m_0+1}(\omega) & \dots & \widehat{\alpha_{m_0+1, j}(\omega)} & \dots & \alpha_{m_0+1, m_0+1}(\omega) \end{pmatrix} \times \text{cof}_2^* \alpha_{k, m_0+1}}{\det A_1 \times \det A_2}$$

δ) $j \geq m_0 + 1$ et $k \geq m_0 + 1$

$$(2.3.19) \quad \beta_{jk}(\omega) = \frac{\text{cof}_2^* \alpha_{kj}(\omega)}{\det A_2} .$$

Remarque 3.1. - On voit en étudiant la matrice (2.3.15) que l'on a des singularités à l'origine seulement pour les termes A_{jk} avec $k \leq m_0$ et $1 \leq j \leq m_1$. On pourra alors dans les expressions correspondant aux $A_{jk}(\xi)$ autres que ceux-ci supprimer l'intégration sur le contour $|z| = a$ dans (2.2.19). Le corollaire suivant du théorème 3.1 permettra aussi de s'affranchir de cette intégration dans certains cas.

Corollaire 3.1. - Si $\text{Min}(m_0, j) < n$ l'intégrale

$$(2.3.20) \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) A_{jk}(\rho\omega) G_k(\rho, \omega, y) e^{ix-\xi} d\xi$$

est absolument convergente.

Preuve : D'après Fife [1] $A_{jk}(\rho\omega) G_k(\rho, \omega, y)$ est analytique en ξ dans un voisinage de l'origine sauf peut-être à l'origine. Le théorème 3.1 précédent donne :

$$\text{Si } j \leq m_0 \quad |A_{jk}(\rho\omega)| \leq C\rho^{-(j-1)} \quad \text{si } k \leq m_0 \quad (1)$$

$$\leq C\rho^{-(j-1)+m_0} \quad \text{si } k \geq m_0+1 \quad (2)$$

$$\text{Si } j \geq m_0+1 \quad |A_{jk}(\rho\omega)| \leq C\rho^{-(m_0-1)} \quad \text{si } k \leq m_0 \quad (3)$$

$$\leq C \quad \text{si } k \geq m_0+1 \quad (4)$$

où C désigne différentes constantes. On a d'autre part :

$$\int |\chi\left(\frac{\rho}{a}\right)| |A_{jk}(\rho\omega)| |G_k(\rho, \omega, y)| d\xi = \int_{|\omega|=1} \int_0^\infty |\chi\left(\frac{\rho}{a}\right)| \rho^{n-2} |A_{jk}(\rho\omega)| |G_k| d\rho d\omega .$$

Mais $|\chi\left(\frac{\rho}{a}\right)| \rho^{n-2} |A_{jk}(\rho\omega)| |G_k|$ est continue en ρ sauf peut être en 0 . Elle est prolongeable par continuité dans les cas (2) et (4) ci-dessus et dans ces cas. donc l'intégrale est absolument convergente. Dans les cas (1) cette fonction est équivalente à l'origine à $\rho^{n-2-(j-1)}$ donc l'intégrale convergera si et seulement si $-(n-j+1) < 1 \Leftrightarrow j < n$. Dans le cas (3) elle est équivalente à l'origine à $\rho^{n-2-(m_0-1)}$. donc l'intégrale converge si et seulement si $-(n-2-(m_0-1)) < 1 \Leftrightarrow m_0 < n$ d'où le résultat.

2.4.- Comportement asymptotique des $N_k(\rho, \omega, \xi)$ au voisinage de $\rho = +\infty$.

2.4.a.- La matrice des $b_{ik}(\rho\omega)$ au voisinage de $\rho = +\infty$.

Comme $\eta_i(\rho\omega) = \rho\gamma_i(\omega) + O(1)$ quand $\rho \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, m_1$ d'après le lemme 1.1, on peut écrire :

$$(2.4.1) \quad L^+(\rho\omega, \rho\tau) = \prod_{i=1}^{m_1} (\rho\tau + \eta_i(\rho\omega)) = \rho^{m_1} L_1^+(\omega, \tau) + P(\rho, \omega, \tau)$$

où on aura : $\rho^{-m_1} P(\rho, \omega, \tau) = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ lorsque $\rho \rightarrow \infty$ (1)

Utilisons les notations introduites en 2.1.b et dans l'hypothèse IV, alors :

$$(2.4.2) \quad B_j(\rho\omega, -\rho\tau) = \rho^{\mu_j} B_j^!(\omega, -\tau) + C_j(\rho\omega, \rho\tau)$$

où on aura : $\rho^{-\mu_j} C_j(\rho\omega, \rho\tau) = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ (2)

Remplaçons $B_j^!(\omega, -\tau)$ par son expression

$$(2.4.3) \quad B_j^!(\omega, -\tau) = Q_j^!(\omega, \tau) L_1^+(\omega, \tau) + R_j^!(\omega, \tau) .$$

On pourra alors écrire :

$$(2.4.5) \quad B_j(\rho\omega, -\rho\tau) = [\rho^{m_1} L_1^+(\omega, \tau) + P(\rho, \omega, \tau)] \rho^{\mu_j - m_1} Q_j^!(\omega, \tau) \\ + \rho^{\mu_j} R_j^!(\omega, \tau) + C_j(\rho\omega, \rho\tau) - \rho^{\mu_j - m_1} P(\rho, \omega, \tau) Q_j^!(\omega, \tau) .$$

Or en tenant compte de (1) et (2) ci-dessus, on a :

$$(3) \quad \rho^{-\mu_j} (C_j(\rho\omega, \rho\tau) - \rho^{\mu_j - m_1} P(\rho, \omega, \tau) Q_j^!(\omega, \tau)) = O\left(\frac{1}{\rho}\right) \text{ quand } \rho \rightarrow \infty .$$

Cette expression est un polynôme en τ de degré $< \mu_j$, dont chaque coefficient est $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$.

Divisons alors ce polynôme par $\rho^{-m_1} L^+(\rho\omega, \rho\tau)$ qui est un polynôme en τ de degré m_1 , dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1 et les autres coefficients sont constants ou $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ quand $\rho \rightarrow \infty$. On aura :

$$\rho^{-\mu_j} (C_j(\rho\omega, \rho\tau) - \rho^{\mu_j - m_1} P(\rho, \omega, \tau) Q_j^!(\omega, \tau)) = \rho^{-m_1} L^+(\rho\omega, \rho\tau) Q_j''(\rho, \omega, \tau) + R_j''(\rho, \omega, \tau)$$

où $d_\tau^0 R_j''(\rho, \omega, \tau) < m_1$.

Mais par définition de la division euclidienne les coefficients de $Q_j''(\rho, \omega, \tau)$ et par suite de $R_j''(\rho, \omega, \tau)$ seront $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ quand $\rho \rightarrow \infty$.

Finalement reportant cette expression dans (2.4.5), on aura :

$$B_j(\rho\omega, -\rho\tau) = L^+(\rho\omega, \rho\tau)[\rho^{\mu_j - m_1}(Q_j^!(\omega, \tau) + Q_j''(\rho, \omega, \tau))] + \rho^{\mu_j}(R_j^! + R_j'') .$$

Donc, l'unicité de la division euclidienne entraîne :

$$(2.4.6) \quad R_j(\rho\omega, \rho\tau) = \rho^{\mu_j}(R_j^!(\omega, \tau) + R_j''(\rho, \omega, \tau)) = \rho^{\mu_j}(R_j^!(\omega, \tau) + O(\frac{1}{\rho}))$$

$$\text{Or } R_j(\rho\omega, \rho\tau) = \sum_{k=1}^{m_1} b^{jk}(\rho\omega) \rho^{k-1} \tau^{k-1}$$

$$\text{et } R_j^!(\omega, \tau) = \sum_{k=1}^{m_1} b'^{jk}(\omega) \tau^{k-1} .$$

Donc (2.4.6) entraîne :

$$\sum_{k=1}^{m_1} b^{jk}(\rho\omega) \rho^{k-1} \tau^{k-1} = \rho^{\mu_j} \left[\sum_{k=1}^{m_1} b'^{jk}(\omega) \tau^{k-1} + O(\frac{1}{\rho}) \right] .$$

D'où :

$$(2.4.7) \quad b^{jk}(\rho\omega) = \rho^{\mu_j - k + 1} [b'^{jk}(\omega) + O(\frac{1}{\rho})] .$$

Puisque $b^{jk}(\rho\omega)$ est inversible et si $b_{k\ell}(\rho\omega)$ est son inverse, on a :

$$\sum_{k=1}^{m_1} \rho^{-\mu_j + k - 1} b^{jk}(\rho\omega) \times \rho^{\mu_j - k + 1} b_{k\ell}(\rho\omega) = \delta_{j\ell} .$$

Cherchons donc le développement au voisinage de $\rho = \infty$ de la matrice $(\rho^{\mu_j - k + 1} b_{k\ell}(\rho\omega))$ en fonction de celui de la matrice $(\rho^{-\mu_j + k - 1} b^{jk}(\rho\omega))$.

Or d'après (2.4.7) le développement de cette dernière matrice au voisinage de $\rho = \infty$ est $(b'^{jk}(\omega) + O(\frac{1}{\rho}))$.

Par définition de la matrice inverse comme étant la transposée de la matrice des cofacteurs multipliée par l'inverse du déterminant on a puisque $\Delta = \Delta' + O(\frac{1}{\rho})$ où $\Delta' = \det(b'^{jk}(\omega)) \neq 0$

$$\rho^{\mu_\ell - k + 1} b_{k\ell}(\rho\omega) = b'_{k\ell}(\omega) + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

c'est-à-dire :

$$(2.4.8) \quad b_{k\ell}(\rho\omega) = \rho^{-\mu_\ell + k - 1} b'_{k\ell}(\omega) [1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)] .$$

2.4.b.- Les $N_k(\rho, \omega, \tau)$ au voisinage de $\rho = \infty$

La définition (2.1.15) donne :

$$N_k(\rho\omega, \rho\tau) = \sum_{i=1}^{m_1} b_{ik}(\rho\omega) L_{m_1-i}(\rho\omega, \rho\tau)$$

$$\text{Or } b_{ik}(\rho\omega) = \rho^{-\mu_k + i - 1} b'_{ij}(\omega) [1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)] .$$

Et si l'on note $\widehat{L}_{m_1-i}(\xi, \tau)$ le terme de plus haut degré du polynôme $L_{m_1-i}(\xi, \tau)$

on a :

$$L_{m_1-i}(\rho\omega, \rho\tau) = \rho^{m_1-i} \widehat{L}_{m_1-i}(\omega, \tau) [1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)] .$$

Donc :

$$(2.4.9) \quad N_k(\rho\omega, \rho\tau) = \rho^{-\mu_k + m_1 - 1} \left(\sum_{i=1}^{m_1} b'_{ik}(\omega) \widehat{L}_{m_1-i}(\omega, \tau) [1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)] \right) .$$

On définit alors :

$$(2.4.10) \quad N_k(\infty, \omega, \tau) = \sum_{i=1}^{m_1} b'_{ik}(\omega) \widehat{L}_{m_1-i}(\omega, \tau) .$$

Mais d'après (2.2.17)

$$N_k(\rho, \omega, \tau) = \rho^{-m_1 + \mu_k + 1} \frac{N_k(\rho\omega, \rho\tau)}{2i\pi} .$$

D'où finalement :

$$(2.4.11) \quad N_k(\rho, \omega, \tau) = \left[\sum_{i=1}^{m_1} b'_{ik}(\omega) \widehat{L}_{m_1-i}(\omega, \tau) \right] [1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)] .$$

Maintenant on a successivement d'après les résultats précédents

$$B_\ell(\rho\omega, -\rho\tau) = \rho^{\mu_\ell} [B'_\ell(\omega, -\tau) + O\left(\frac{1}{\rho}\right)] .$$

Donc :

$$\rho^{\mu\ell} B_\ell(\rho\omega, -\rho\tau) \rightarrow B'_\ell(\omega, -\tau) \quad \text{quand } \rho$$

$$N_k(\rho, \omega, \tau) \rightarrow N_k(\infty, \omega, \tau)$$

$$\prod_{i=1}^{m_1} \left(\tau + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho} \right) \rightarrow \prod_{i=1}^{m_1} (\tau + \gamma_i(\omega)) = L_1^+(\omega, \tau) .$$

Or nous pouvons passer à la limite dans (2.2.16) ce qui donne :

$$(2.4.18) \quad \int_{C_a} \frac{N_k(\infty, \omega, \tau) B'_\ell(\omega, -\tau) d\tau}{L_1^+(\omega, \tau)} = \delta_{k\ell} .$$

2.5.- Des propriétés de $G_k(\sigma, \omega, y)$

Celles-ci feront l'objet de deux lemmes qui seront très utiles dans la suite de ce travail.

Lemme 5.1.- (P. Fife [1] p. 111). Les fonctions $G_k(\sigma, \omega, y)$ $k = 1, 2, \dots, m_1$ sont définies et analytiques pour la variable complexe σ dans un voisinage de l'origine, pour tout vecteur ω réel de norme 1, et pour tout réel $y > 0$. De plus :

- 1) Pour chaque σ et ω , ces fonctions sont linéairement indépendantes (comme fonctions de y) et solutions de :

$$(2.5.1) \quad L^+(\sigma\omega, -D_y) G_k = 0 ;$$

- 2) Pour $k = 1, 2, \dots, m_0$ elles peuvent être exprimées sous la forme

$$G_k(\sigma, \omega, y) = e^{-\alpha\sigma y} \widehat{G}_k(\sigma, \omega, \sigma y)$$

où α est telle que $\text{Re } \eta_i(\rho\omega) \geq 3\alpha\rho$ et les fonctions $\widehat{G}_k(\sigma, \omega, \tau)$ et leurs dérivées sont bornées comme suit, où $\sigma = \rho$ est réel :

$$(2.5.2) \quad |D^{k'} \widehat{G}_k(\rho, \omega, \tau)| \leq E_k,$$

pour $\rho \geq 0$, $|\omega| = 1$, $\tau \geq 0$. Ici $D^{k'}$ désigne des dérivées par rapport à ρ , ω et/ou τ d'ordre k' , et E_k , sont des constantes positives dépendant seulement de L^+ et k ;

3) Pour $\sigma = \rho$ réel et $k = m_0+1, \dots, m_1$, les G_k peuvent être exprimées sous la forme

$$(2.5.3) \quad G_k(\rho, \omega, y) = e^{-(\beta y + \alpha \rho y)} \widehat{G}_k(\rho, \omega, y)$$

où les \widehat{G}_k et leurs dérivées ont la même majoration que dans (2) ci-dessus.

Lemme 5.2. - Si $k \leq m_0$ et l un entier quelconque positif ou nul, nous avons :

$$(2.5.4) \quad |D_y^l G_k(\rho, \omega, y)| \leq C \rho^l e^{-\alpha \rho y}$$

où la constante C ne dépend que de L^+ et l et ρ dans un voisinage de l'origine.

Si $k \geq m_0+1$, nous avons :

$$(2.5.5) \quad |D_y^l G_k(\rho, \omega, y)| \leq C e^{-(\beta y + \alpha \rho y)}.$$

Preuve : C'est une conséquence du lemme 5.1 précédent. En effet si $k \leq m_0$

$$G_k(\rho, \omega, y) = e^{-\alpha \rho y} \widehat{G}_k(\rho, \omega, \rho y)$$

et $|D_\tau^l \widehat{G}_k(\rho, \omega, \tau)| \leq E_l$, où E_l ne dépend que de L^+ et l .

Par dérivation d'un produit, on a donc :

$$D_y^l G_k(\rho, \omega, y) = e^{-\alpha \rho y} [(-\alpha \rho)^l \widehat{G}_k + \dots + (-\alpha \rho)^p \rho^{\ell-p} D_\tau^{\ell-p} \widehat{G}_k + \dots + \rho^\ell D_\tau^\ell \widehat{G}_k]$$

car $D_y \widehat{G}_k = D_\tau \widehat{G}_k \frac{\partial \tau}{\partial y}$.

D'où l'on déduit la première inégalité :

$$|D_y^\ell G_k(\rho, \omega, y)| \leq c \rho^\ell e^{-\alpha \rho y} .$$

De même lorsque $k \geq m_0 + 1$ le lemme 5.2 donne :

$$G_k(\rho, \omega, y) = e^{-(\beta y + \alpha \rho y)} \widehat{G}_k(\rho, \omega, \rho y) .$$

Donc :

$$D_y^\ell G_k(\rho, \omega, y) = e^{-(\beta y + \alpha \rho y)} [(-\beta y - \alpha \rho y)^\ell \widehat{G}_k + \dots + \rho^\ell D_\tau^\ell \widehat{G}_k(\rho, \omega, \tau)]$$

et comme $|D_\tau^\ell \widehat{G}_k(\rho, \omega, \tau)| \leq E_k$, on a le résultat annoncé.

2.6.- Etude des noyaux de Poisson dans le cas de racines simples du polynôme caractéristique.

Théorème 6.1.- Si l'on suppose toutes les racines du polynôme caractéristique distinctes, on a :

$$(2.6.1) \quad \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk}(\rho \omega) G_k(\rho, \omega, y) = \int_{C_a} \rho^{-\mu_j} \frac{N_j(\rho, \omega, \zeta)}{\prod_{i=1}^{m_1} \left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho \omega)}{\rho} \right)} e^{\rho \zeta y} d\zeta .$$

Preuve : Dans ce cas là d'après (2.2.5), nous avons :

$$G_k(\rho, \omega, y) = e^{-\eta_k(\rho \omega) y} \quad k = 1, 2, \dots, m_1 .$$

On peut alors calculer :

$$A^{k\ell}(\rho \omega, y) = B_\ell(\rho \omega, -D_y) G_k(\rho, \omega, y) = D_y^\ell G_k(\rho, \omega, y) = [-\eta_k(\rho \omega)]^{\ell-1} e^{-\eta_k(\rho \omega) y} .$$

D'où :

$$(2.6.2) \quad A^{k\ell}(\rho \omega, 0) = [-\eta_k(\rho \omega)]^{\ell-1} .$$

C'est donc une matrice de Vander Mond inversible puisque toutes les racines sont distinctes. Et sa matrice inverse aura pour terme générique :

$$(2.6.3) \quad A_{jk}(\rho\omega) = \frac{\sigma_{m_1-j} \prod_{i \neq k}^{m_1} [(\tau + \eta_i(\rho\omega))]}{\prod_{i \neq k}^{m_1} (\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega))} .$$

Où σ_{m_1-j} désigne le polynôme symétrique en les racines du polynôme entre crochets c'est-à-dire la somme des produits m_1-j à m_1-j des racines du polynôme entre crochets. Par exemple pour $j = 1$ on aura le produit des $(-\eta_i(\rho\omega))$ pour $i \neq k$ et pour $j = m_1-1$ on aura leur somme.

Appliquons alors le théorème des résidus au deuxième membre de l'égalité à démontrer. On aura puisque les racines sont simples :

$$A = 2\pi i \sum_{k=1}^{m_1} \rho^{-\mu_j} \frac{N_j(\rho, \omega, \frac{-\eta_k(\rho\omega)}{\rho})}{\prod_{i \neq k}^{m_1} (\frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho} - \frac{\eta_k(\rho\omega)}{\rho})} e^{-\eta_k(\rho\omega)y} .$$

Or par définition on a vu (2.2.17) que :

$$N_j(\rho, \omega, \frac{-\eta_k(\rho\omega)}{\rho}) = \rho^{-m_1+\mu_j+1} \frac{N_j(\rho\omega, -\eta_k(\rho\omega))}{2\pi i}$$

et

$$N_j(\rho\omega, -\eta_k(\rho\omega)) = L_{m_1-j}^+(\rho\omega, -\eta_k(\rho\omega)) \text{ car } B_\ell(\rho\omega, -\tau) = (\tau)^{\ell-1}$$

$$= \sum_{p=0}^{m_1-j} a_p^+(\rho\omega) (-\eta_k(\rho\omega))^{m_1-j-p} \text{ d'après (2.2.12)}$$

où $a_p^+ = (-1)^p \sigma_p \left[\prod_{i=1}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega)) \right]$ (relation entre les coefficients du polynôme

(2.2.11) et ses racines). Et comme :

$$(2.6.4) \quad \sum_{p=0}^{m_1-j} (-1)^p \sigma_p \left[\prod_{i=1}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega)) \right] (-\eta_k(\rho\omega))^{m_1-j-p}$$

$$= (-1)^{m_1-1} \sigma_{m_1-j} \left[\prod_{i \neq k}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega)) \right] .$$

On obtient :

$$(2.6.5) \quad A = \sum_{k=1}^{m_1} \frac{\sigma_{m_1-j} \left[\prod_{i \neq k}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega)) \right]}{\prod_{i \neq k}^{m_1} (\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega))} e^{-\eta_k(\rho\omega)y}$$

Ce qui achève le théorème.

Remarque 6.1. - Donc dans le cas où les racines sont simples et les singularités à l'origine pas trop fortes pour que l'intégrale converge, les noyaux s'écrivent alors :

$$(2.6.6) \quad K_j(x, y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{k=1}^{m_1} \frac{\sigma_{m_1-j} \left[\prod_{i \neq k}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega)) \right]}{\prod_{i \neq k}^{m_1} (\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega))} e^{ix \cdot \xi - \eta_k(\rho\omega)y} d\xi .$$

Remarque 6.2. - Dans ce cas là le développement au voisinage de l'origine des $A_{jk}(\rho\omega)$ peut se faire plus directement à partir de l'expression (2.6.3). Faisons alors le calcul lorsque de plus les $\alpha_i(\omega)$ et les β_i sont distinctes.

a) $j \leq m_0$ et $k \leq m_0$

Chaque élément de la somme $\sigma_{m_1-j} \left[\prod_{i \neq k}^{m_1} (\tau - \eta_i(\rho\omega)) \right]$ est un produit de (m_1-j) racines autres que $-\eta_k(\rho\omega)$ et $m_1-j \geq m_1-m_0$. On obtiendra donc les termes en la plus petite puissance de ρ en ne considérant que les racines $\eta_i(\rho\omega)$ avec $i \geq m_0+1$ car dans ce cas $\eta_i(\rho\omega) = \beta_i + O(\rho)$ et donc :

$$\sigma_{m_1-j} \left[\prod_{i \neq k}^{m_1} (\tau - \eta_i(\rho\omega)) \right] = \rho^{m_0-j} \left(\prod_{i=m_0+1}^{m_1} \beta_i \sigma_{m_0-j} \left[\prod_{i \neq k}^{m_0} (\tau + \alpha_i(\omega)) \right] + O(\rho) \right) .$$

De même on aura :

$$\prod_{i \neq k}^{m_1} (\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega)) = \rho^{m_0-1} \left(\prod_{i \neq k}^{m_0} (\alpha_k(\omega) - \alpha_i(\omega)) \prod_{i=m_0+1}^{m_1} \beta_i + O(\rho) \right) .$$

Il suffit de tenir compte du lemme 2.1.1 sur les racines $\eta_i(\rho\omega)$. D'où dans le

cas $j \leq m_0$ et $k \leq m_0$, on a :

$$(2.6.7) \quad A_{jk}(\rho\omega) = \frac{1}{\rho^{j-1}} [\beta_{jk}(\omega) + o(\rho)] = \frac{1}{\rho^{j-1}} \left[\frac{\sigma_{m_0-j} \left(\prod_{i \neq k}^{m_0} (\tau + \alpha_i(\omega)) \right)}{\prod_{i \neq k}^{m_0} (\alpha_k(\omega) - \alpha_i(\omega))} + o(\rho) \right]$$

b) $j \leq m_0$ et $k \geq m_0+1$

Chaque élément de la somme σ_{m_1-j} est encore un produit de (m_1-j) racines autres que $-\eta_k$ et $m_1-j \geq m_1-m_0$. Mais cette fois $k \geq m_0+1$, donc :

$$\sigma_{m_1-j} \left(\prod_{i \neq k}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega)) \right) = \rho^{m_0-j+1} \left[\prod_{i \neq k}^{m_1} \beta_i \sigma_{m_0-j+1} \left[\prod_{i=1}^{m_0} (\tau + \alpha_i(\omega)) \right] + o(\rho) \right]$$

et

$$\prod_{i \neq k}^{m_1} (\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega)) = \beta_k^{m_0} \prod_{i \neq k}^{m_1} (\beta_k - \beta_i) + o(\rho) .$$

D'où finalement :

$$(2.6.8) \quad A_{jk}(\rho\omega) = \rho^{m_0-j+1} (\beta_{jk}(\omega) + o(\rho)) = \rho^{m_0-j+1} \left[\frac{\prod_{i \neq k}^{m_1} \beta_i \sigma_{m_0-j+1} \left[\prod_{i=1}^{m_0} (\tau + \alpha_i(\omega)) \right]}{\beta_k^{m_0} \prod_{i \neq k}^{m_1} (\beta_k - \beta_i)} + o(\rho) \right] .$$

c) $j \geq m_0+1$ et $k \leq m_0$.

Dans ce cas là $m_1-j < m_1-m_0$, il suffira donc de prendre les termes de la somme σ_{m_1-j} ne contenant que des produits de β_i . On a alors :

$$\sigma_{m_1-j} \prod_{i \neq k}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega)) = \sigma_{m_1-j} \left[\prod_{i=m_0+1}^{m_1} (\tau + \beta_i) \right] + o(\rho)$$

et

$$\prod_{i \neq k}^{m_1} (\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega)) = \rho^{m_0-1} \left(\prod_{i \neq k}^{m_0} (\alpha_k(\omega) - \alpha_i(\omega)) \prod_{i=m_0+1}^{m_1} \beta_i + o(\rho) \right) .$$

D'où :

$$(2.6.9) \quad A_{jk}(\rho\omega) = \frac{1}{\rho^{m_0-1}} (\beta_{jk} + O(\rho)) = \frac{1}{\rho^{m_0-1}} \left[\frac{\sigma_{m_1-j} \left[\prod_{i=m_0+1}^{m_1} (\tau + \beta_i) \right]}{\prod_{i \neq k}^{m_0} (\alpha_k(\omega) - \alpha_i(\omega)) \prod_{i=m_0+1}^{m_1} \beta_i} + O(\rho) \right]$$

d) $j \geq m_0+1$ et $k \geq m_0+1$

Le résultat est immédiat d'après b) et c) , on a :

$$(2.6.10) \quad A_{jk}(\rho\omega) = \beta_{jk}(\omega) + O(\rho) = \frac{\sigma_{m_1-j} \left[\prod_{i \neq k}^{m_1} (\tau + \beta_i) \right]}{\beta_k^{m_0} \prod_{i \neq k}^{m_1} (\beta_k - \beta_i)}$$

On retrouve ainsi par un calcul plus direct les résultats du cas général avec les $\beta_{jk}(\omega)$ calculés explicitement en fonction des racines $\alpha_i(\omega)$ de $L_0(\omega, \alpha) = 0$ et avec les racines β_i non nulles à partie réelle positive de $L(0, \beta_i) = 0$.

Solutions du problème de Dirichlet non homogène

Théorème 0.1. - Soient $K_j(x,y)$ définis par (2.2.19) et $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m_1$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact. Alors :

$$(3.0.1) \quad u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(x-\tau, y) \varphi_j(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^{m_1} u_j(x,y)$$

est solution du problème de Dirichlet suivant :

$$(3.0.2) \quad L\left(\frac{1}{i} D_x, -D_y\right) u(x,y) = 0 \quad y > 0$$

$$(3.0.3) \quad B_\ell\left(\frac{1}{i} D_x, -D_y\right) u(x,0) = \varphi_\ell(x) \quad \ell = 1, 2, \dots, m_1 .$$

Le théorème sera encore valable si les $\varphi_j(x)$ ne sont plus à support compact mais décroissantes assez rapidement à l'infini en particulier pour $\varphi_j(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Pour la démonstration on se reportera à P. Fife [1] .

Explicitons les $K_j(x-\tau, y)$ dans (3.0.1), on aura :

$$(3.0.4) \quad u_j(x,y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{|z|=a} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk}(\xi+z\omega) G_k(\rho+z, \omega, y) \\ \cdot e^{i(x-\tau)(\xi+z\omega)} \varphi_j(\tau) d\xi d\tau \\ + (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{C_a} d\zeta \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \rho^{-(j-1)} N_j(\rho, \omega, \zeta) \cdot \\ \cdot \left(\pi\left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)\right)^{-1} e^{\rho(i(x-\tau)\omega + \zeta y)} \varphi_j(\tau) d\xi d\tau .$$

On peut en utilisant Fubini et la définition de l'intégrale de Fourier écrire (3.0.4) sous la forme :

$$\begin{aligned}
(3.0.5) \quad u_j(x,y) &= (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{|z|=a} \frac{dz}{2\pi iz} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk}(\xi+z\omega) G_k(\rho+z, \omega, y) \\
&\quad e^{ix(\xi+z\omega)} \widehat{\varphi}_j(\xi+z\omega) d\xi \\
&+ (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{C_a} d\zeta \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \rho^{-(j-1)} N_j(\rho, \omega, \zeta) \left(\pi\left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)\right)^{-1} \\
&\quad e^{\rho(ix\omega + \zeta y)} \widehat{\varphi}_j(\xi) d\xi \\
&= u_j^1(x,y) + u_j^2(x,y)
\end{aligned}$$

$$\text{où } \widehat{\varphi}_j(\lambda) = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi_j(\tau) e^{-i\tau \cdot \lambda} d\tau .$$

Notations 1. - Si $f(x) \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^{n-1})$ on notera sa transformée de Fourier inverse par $\overline{\mathcal{F}}$.

On rappelle que si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ est un multi-indice, on a :

$$(3.0.6) \quad D^\alpha \overline{\mathcal{F}}(f(\xi))(x) = \overline{\mathcal{F}}((i\xi)^\alpha f(\xi))(x)$$

et $\xi = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$

$$(3.0.7) \quad \widehat{D^\alpha f(x)}(\xi) = (+i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

On utilisera dans la suite les notations suivantes :

$$(3.0.8) \quad f_{jk}^{\alpha\beta}(\xi, y) = \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) A_{jk}(\xi) D_y^\beta G_k(\rho, \omega, y) \widehat{D^\alpha \varphi_j}(\xi)$$

$$(3.0.9) \quad f_j^{\alpha\beta}(\xi, y) = \sum_{k=1}^{m_1} f_{jk}^{\alpha\beta}(\xi, y)$$

$$(3.0.10) \quad g_j^\beta(\xi, y) = (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \int_{C_a} \frac{\rho^{-(j-1)} N_j(\rho, \omega, \zeta) (\rho\zeta)^\beta e^{\rho \zeta y}}{\prod_{i=1}^{m_1} \left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)} d\zeta$$

3.1.- Propriétés de la solution dans le cas général.

Théorème 1.1. - Soient $\varphi_j(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1, \dots, m_1$ alors pour $j \leq m_0$ et $\forall y \geq 0$, les $D_y^{j-1} u_j(x,y)$ appartiennent à l'espace $H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ comme fonctions

de x et

$$(3.1.1) \quad \|D_y^{j-1} u_j(x,y)\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \|\varphi_j\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

et si $j \geq m_0 + 1$, les fonctions de x $D_y^{m_0-1} u_j(x,y)$ sont dans $H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ et

$$(3.1.2) \quad \|D_y^{m_0-1} u_j(x,y)\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \|\varphi_j\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

et C est indépendante de y .

Preuve : Lorsque $y = 0$ et $j = 1, \dots, m_0$ $D_y^{j-1} u_j(x,0) = \varphi_j(x)$ et le théorème est immédiat, de même si $j = m_0 + 1, \dots, m_1$ $D_y^{m_0-1} u_j(x,0) = 0$.

Supposons alors $y > 0$, il nous suffit de montrer que $D_y^{j-1} u_j^1$ et $D_y^{j-1} u_j^2$ sont dans $H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ c'est-à-dire si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ que $D_x^\alpha D_y^{j-1} u_j^1$ et $D_x^\alpha u_j^2$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ pour tout α tel que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} \leq r$.

Or si $j \leq m_0$, $\sum_{k=1}^{m_1} A_{jk}(\rho\omega) D_y^{j-1} G_k(\rho, \omega, y)$ n'a pas de singularités à l'origine à cause du lemme (2.5.2) et du théorème (2.3.1), on peut donc s'affranchir de l'intégration sur le contour $|z| = a$ et on a avec les notations ci-dessus :

$$(3.1.3) \quad D_x^\alpha D_y^{j-1} u_j^1(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_\xi [f_j^{\alpha(j-1)}(\xi,y)](x) .$$

Il nous suffit donc de montrer que $f_j^{\alpha(j-1)}(\xi,y)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ pour $y > 0$ à cause du théorème de Plancherel. On a :

$$(3.1.4) \quad \sum_{|\alpha| \leq r} \|D_x^\alpha D_y^{j-1} u_j^1(x,y)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 = (2\pi)^{-n+1} \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_j^{\alpha(j-1)}(\xi,y)|^2 d\xi$$

Or $|\chi(\frac{\rho}{a}) \sum_{j=1}^{m_1} A_{jk} D_y^{j-1} G_k|$ est borné indépendamment de y . En effet le lemme

(2.5.2) donne :

$$|D_y^{j-1} G_k(\rho, \omega, y)| \leq C \rho^{j-1} e^{-\alpha \rho y} \leq C \rho^{j-1} \quad \text{car } e^{-\alpha \rho y} \leq 1 \quad \forall \rho, y \geq 0 .$$

Donc :

$$|\chi(\frac{\rho}{a}) \sum_{j=1}^{m_1} A_{jk} D_y^{j-1} G_k| \leq (\chi(\frac{\rho}{a})) \sum_{j=1}^{m_1} |\rho^{j-1} A_{jk}(\rho \omega)|$$

et cette quantité est bornée comme fonction continue sur $[0, a]$, la continuité en 0 étant due au théorème (2.3.1) .

Donc :

$$\sum_{|\alpha| \leq r} \|D_x^\alpha D_y^{j-1} u_j^1(x, y)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \leq C \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{D^\alpha \varphi_j}(\xi)|^2 d\xi = C \|\varphi_j\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})}^2$$

d'où la première partie.

De même on a :

$$(3.1.5) \quad D_x^\alpha D_y^{j-1} u_j^2(x, y) = \overline{\mathcal{F}} [g_j^{j-1}(\xi, y) \widehat{D^\alpha \varphi_j}(\xi)](x) .$$

Et comme précédemment en appliquant la formule de Plancherel :

$$(3.1.6) \quad \sum_{|\alpha| \leq r} \|D_x^\alpha D_y^{j-1} u_j^2\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 = (2\pi)^{-n+1} \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |g_j^{j-1}(\xi, y)|^2 |\widehat{D^\alpha \varphi_j}(\xi)|^2 d\xi .$$

Or :

$$|g_j^{j-1}(\xi, y)|^2 = \rho \left| \int_{C_a} \frac{N_j(\rho, \omega, \zeta) \zeta^\beta e^{\rho \zeta y}}{\pi(\zeta + \frac{\eta_i(\rho \omega)}{\rho})} d\zeta \right|^2 (1 - \chi(\frac{\rho}{a}))^2 .$$

La courbe de Jourdan C_a étant bornée, $N_j(\rho, \omega, \zeta)$ étant continue et bornée à l'infini à cause de (2.4.11) , et $\frac{\eta_i(\rho \omega)}{\rho}$ étant bornés à l'infini à cause du lemme (2.1.1), la fonction étant nulle pour $\rho \geq a$, on a donc :

$$\left| \frac{N_j(\rho, \omega, \zeta) \zeta^\beta}{\frac{\eta_i(\rho\omega)}{\zeta + \frac{\rho}{\omega}}} \right| \leq C \quad (C \text{ est indépendante de } \rho \text{ et } \omega).$$

Donc :

$$(3.1.7) \quad |g_j^{j-1}(\xi, y)|^2 \leq C \times (\text{Long } C_a)^2 \times \left(\sup_{\zeta \in C_a} |e^{\rho\zeta y}| \right)^2 \leq C_1 e^{-2\rho a y} \leq C_1.$$

D'où on tire de (3.1.6) :

$$\|u_j^2(x, y)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq r} \int |\widehat{D^\alpha \varphi_j}(\xi)|^2 d\xi = C_1 \|\varphi_j\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})}^2$$

On a ainsi la première partie du théorème.

Dans le cas où $j \geq m_0 + 1$ on procède comme précédemment. Ici la singularité à l'origine des $A_{jk}(\rho\omega)$ est de l'ordre de $\rho^{-(m_0+1)}$ d'après le théorème (2.3.1) et donc la dérivation en y d'ordre $m_0 - 1$ supprime cette singularité.

Corollaire. - Si $\varphi_j(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1, \dots, m_1$, alors $D_y^{j-1} u_j(x, y)$ est indéfiniment différentiable comme fonction de x pour tout y fixé positif ou nul lorsque $j \leq m_0$ et il en est de même de $D_y^{m_0-1} u_j(x, y)$ pour $j \geq m_0 + 1$.

Preuve : C'est une conséquence du lemme de Sobolev et du théorème (3.1.1).

Notations 2. - Pour des fonctions $u(x, y)$ et $\varphi(x)$ définies sur \mathbb{R}_+^n et \mathbb{R}^{n-1} respectivement. On note lorsque cela a un sens. (Cf. Agmon-Douglis-Nirenberg [1])

$$(3.1.8) \quad |u|_{j, H^r(\mathbb{R}_+^n)} = \left(\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{H^r(\mathbb{R}_+^n)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{où } j \in \mathbb{N}$$

$$(3.1.9) \quad |\varphi|^*_{j-1/2, H^r(\mathbb{R}^{n-1})} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} [|\xi|^{j-1/2} (1 + |\xi|^2)^{r/2} |\widehat{\varphi}(\xi)|]^2 d\xi \right)^{1/2}$$

où $j \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.2. - Soit $\varphi_j \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que $|\varphi_j|_{1/2, H^r(\mathbb{R}^{n-1})}^* < \infty$,

alors $|D_y^{j-1} u_j|_{1, H^r}$ est fini pour $j \leq m_0$ et on a :

$$(3.1.10) \quad |D_y^{j-1} u_j|_{1, H^r(\mathbb{R}_+^n)} \leq C |\varphi_j|_{1/2, H^r(\mathbb{R}^{n-1})}^* .$$

$$\text{De même pour } j \geq m_0 + 1 \quad |D_y^{m_0-1} u_j|_{1, H^r(\mathbb{R}_+^n)} \leq C |\varphi_j|_{1/2, H^r(\mathbb{R}^{n-1})}^* \quad (3.1.11)$$

Preuve : On a :

$$|D_y^{j-1} u_j|_{1, H^r} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \|D_{x_i} D_y^{j-1} u_j\|_{H^r(\mathbb{R}_+^n)}^2 \right)^{1/2} .$$

On est donc ramené à calculer $D^p D_{x_i} D_y^{j-1} u_j$ où $p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ et $|p| \leq r$. Comme dans le théorème précédent, les dérivations D_y^{j-1} font disparaître la singularité des $A_{jk}(\rho\omega)$. Et on a :

$$(3.1.11) \quad D^p D_{x_i} D_y^{j-1} u_j = \overline{\mathcal{F}} [f^{(\alpha+e_i)(\alpha_n+j-1)}(\xi, y)](x)$$

$$\text{où } e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$$

$$p = (\alpha, \alpha_n) .$$

Donc ceci appartiendra à $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ si la quantité suivante est finie :

$$(3.1.12) \quad \|D^p D_{x_i} D_y^{j-1} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 = \\ = (2\pi)^{-n+1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_j^{(\alpha+e_i)(\alpha_n+j-1)}(\xi, y)|^2 d\xi dy .$$

Or le lemme (2.5.2) donne dans le cas où $k \leq m_0$:

$$|D_y^{\alpha_n} D_y^{j-1} G_k(\rho, \omega, y)|^2 \leq C \rho^{2(\alpha_n+j-1)} e^{-2\alpha\rho y} .$$

Et le théorème 2.3.1 donne pour $\rho \leq a$ les majorations :

$$|A_{jk}(\rho\omega)|^2 \leq C \rho^{-2(j-1)} \quad \text{lorsque } j, k \leq m_0 .$$

Donc :

$$(3.1.13) \quad \sum_{k=1}^{m_0} |A_{jk}(\rho\omega)|^2 |D_y^{\alpha_n} D_y^{j-1} G_k(\rho, \omega, y)|^2 \leq C \rho^{2\alpha_n} e^{-2\alpha\rho y} .$$

D'où :

$$(3.1.14) \quad (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \sum_{k=1}^{m_0} |f_{jk}^{(\alpha+e_i)(\alpha_n+j-1)}(\xi, y)|^2 d\xi dy \leq \\ \leq (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} C \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{-2j+2} \rho^{2\alpha_n+2j-2} \left[\int_0^\infty e^{-2\alpha\rho y} dy \right] |D_{x_i}^{\alpha} \widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi$$

et après intégration en y :

$$(3.1.15) \quad \leq C(2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} C \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \frac{1}{2\alpha\rho} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \xi_i^2 \rho^{2\alpha_n} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi .$$

De même lorsque $k \geq m_0+1$, le lemme (2.5.2) entraîne :

$$|D_y^{\alpha_n} D_y^{j-1} G_k|^2 \leq C e^{-2(\beta y + \alpha\rho y)}$$

et comme :

$$|A_{jk}(\rho\omega)|^2 \leq C \quad \text{pour } \rho \leq a \text{ et } j \leq m_0 \text{ et } k \geq m_0+1$$

$$(2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \sum_{k=m_0+1}^{m_1} |f_{jk}^{(\alpha+e_i)(\alpha_n+j-1)}(\xi, y)|^2 d\xi dy \leq \\ \leq C(2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \left[\int_0^\infty e^{-2(\beta+\alpha\rho)y} dy \right] |D_{x_i}^{\alpha} \widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \\ (3.1.16) \quad \leq C(2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \xi_i^2 |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi .$$

Finalement en réunissant (3.1.15) et (3.1.16) on a :

$$(3.1.17) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{|p| \leq r} \|D_{x_i}^p D_y^{j-1} u_j^1\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \sum_{|p| \leq r} \rho^{2\alpha_n} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \\ + C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \sum_{|p| \leq r} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi .$$

Comme pour $\rho \leq a$ $\rho^2 \leq C_\rho$ et $\sum \xi_i^2 = \rho^2$, on tire de (3.1.17)

$$\|D_y^{j-1} u_j^1\|_{1, H^r(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{(1+\rho^2)^r} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi = C |\varphi_j|_{1/2, H^r(\mathbb{R}^{n-1})}^{*2} .$$

Pour $u_j^2(x, y)$ on utilisera le lemme suivant qui nous servira dans la suite.

Lemme 1.1. - Lorsque $\rho \geq a$ on a l'inégalité suivante pour β_0 entier positif ou nul :

$$(3.1.18) \quad \int_0^\infty \left| \int_{C_a} N_j(\rho, \omega, \zeta) \left(\pi \left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho} \right) \right)^{-1} \zeta^{\beta_0} e^{\rho\zeta y} d\zeta \right|^2 dy \leq \frac{C}{\rho} .$$

Preuve : C'est une conséquence de l'inégalité (3.1.7) qui donne

$$\left| \int_{C_a} \dots \right|^2 \leq C_1 e^{-2\rho\alpha y}$$

et en intégrant par rapport à y les deux membres de cette inégalité on obtient (3.1.18).

Revenons au théorème, on a :

$$(3.1.19) \quad D_x^p D_y^{j-1} u_j^2 = \mathfrak{F} \left[g_j^{\alpha_n+j-1}(\xi, y) \widehat{D^{\alpha+ei} \varphi_j(\xi)} \right] (x)$$

et donc la formule de Plancherel donne :

$$(3.1.20) \quad \|D_x^p D_y^{j-1} u_j^2\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 = (2\pi)^{-n+1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |g_j^{\alpha_n+j-1}(\xi, y) \widehat{D^{\alpha+ei} \varphi_j(\xi)}|^2 d\xi dy$$

Or le lemme 1.1 donne l'inégalité :

$$(3.1.21) \quad |g_n^{\alpha+j-1}(\xi, y)|^2 \leq C \rho^{2\alpha_{n-1}} \left(1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)\right)^2.$$

Donc (3.1.20) donne :

$$\|D^p D_{x_i} D_y^{j-1} u_j^2\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \int \left(1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)\right)^2 \rho^{2\alpha_{n-1}} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \xi_i^2 |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{|p| \leq r} \|D_{x_i} D_y^{j-1} u_j^2\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)\right)^2 \rho^{-1} \sum_{\xi_i^2} \sum_{|p| \leq r} \rho^{2\alpha_n} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho(1 + \rho^2)^r |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi = C |\varphi_j|_{1/2, H^r(\mathbb{R}^{n-1})}^{*2}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de la première affirmation du théorème c'est-à-dire le cas $j \leq m_0$.

Dans le cas où $j \geq m_0 + 1$, on fait la même démarche de calculs : ici les $A_{jk}(\rho\omega)$ ne sont discontinues à l'origine seulement pour $k \leq m_0$ et cette discontinuité est en ρ^{-m_0+1} . Celle-ci est donc supprimée par la dérivation $D_y^{m_0-1}$ et donc pas de problème pour les termes u_j^1 . Pour u_j^2 la dérivation $D_y^{m_0-1}$ introduit un terme en ρ^{m_0-1} et dans l'expression de u_j^2 apparaît le terme ρ^{j-1} , mais comme $j \geq m_0 + 1$ on aura $m_0 - 1 - j + 1 < 0$ et comme l'intégration se fait pour $\rho \geq a$ on aura $\rho^{m_0-j} \leq a^{m_0-j} = c^{te}$ et on est alors ramené au même type de majoration que précédemment. D'où le théorème.

Remarque 1.1. - De ces deux théorèmes et de leurs démonstrations, on voit qu'il y a deux difficultés majeures pour obtenir des fonctions ne serait-ce que dans $L^2(\mathbb{R}_+^n)$.

La première est, comme on l'a déjà vu plusieurs fois, les discontinuités des $A_{jk}(\rho\omega)$ pour $\rho = 0$, la deuxième vient du fait que l'on est amené à calculer une intégrale de la forme $\int_0^\infty e^{-\rho y} dy = \frac{1}{\rho}$ et donc ainsi d'augmenter la singularité en $\rho = 0$. On s'est affranchi de la première difficulté par des dérivations en y et dans le deuxième cas par une hypothèse de régularité sur les conditions frontières à l'origine. Nous allons voir maintenant comment on peut supprimer ces difficultés en ne faisant que des hypothèses de régularités sur les conditions frontières à l'origine en plus des conditions classiques à l'infini. On aura le théorème suivant :

Théorème 1.3. - Supposons que :

$$(3.1.22) \quad |\varphi_j|^*_{-j+1/2, H^{m_1+r}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \quad j \leq m_0$$

$$(3.1.23) \quad |\varphi_j|^*_{-m_0+1/2, H^{m_1+r-j+m_0}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \quad j \geq m_0+1$$

On peut alors définir la fonction $u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_1} u_j(x,y)$ où :

$$(3.1.24) \quad u_j(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_\xi [f_j^{00}(\xi,y)](x) + \overline{\mathcal{F}}_\xi [g_j^0(\xi,y) \widehat{\varphi}_j(\xi)](x)$$

$u(x,y)$ ainsi définie est alors une solution du problème (3.0.2), (3.0.3) qui appartient à $T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)$.

Preuve : Il faut commencer par montrer que sous les hypothèses (3.1.22) et (3.1.23)

$u_j(x,y) = u_j^1(x,y) + u_j^2(x,y)$ a un sens pour tout $j \leq m_1$. La transformation de Fourier étant un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, il nous suffit de montrer que :

$$\xi \rightarrow f_j^{00}(\xi,y) \text{ est dans } L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$\text{et } \xi \rightarrow g_j^0(\xi,y) \widehat{\varphi}_j(\xi) \text{ est dans } L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

Nous pouvons écrire :

$$f_j^{00}(\xi,y) = \sum_{k=1}^{m_1} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{j-1} A_{jk}(\xi) G_k(\rho,\omega,y) \rho^{1/2} \rho^{-j+1/2} \widehat{\varphi}_j(\xi) \quad j \leq m_0$$

Comme cette fonction est nulle pour $\rho \geq a$ on peut majorer $\rho^{1/2}$ par $a^{1/2}$. Le théorème (2.3.1) montre alors que $\rho^{j-1} A_{jk}(\xi)$ est continue sur $[0, a]$, donc est borné. D'où

$$(3.1.24) \quad |f_j^{oo}(\xi, y)|^2 \leq C \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{2(-j+1/2)} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \quad j \leq m_0.$$

Ce qui entraîne le premier résultat à cause de (3.1.22) pour $j \leq m_0$.

On fait de même lorsque $j \geq m_0 + 1$ en écrivant :

$$f_j^{oo}(\xi, y) = \sum_{k=1}^{m_1} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{m_0-1} A_{jk}(\xi) G_k(\rho, \omega, y) \rho^{1/2} \rho^{-m_0+1/2} \widehat{\varphi}_j(\xi)$$

Ce qui donne précédemment entraîne :

$$(3.1.25) \quad |f_j^{oo}(\xi, y)|^2 \leq C \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{2(-m_0+1/2)} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2.$$

Pour la deuxième fonction, on a :

$$g_j^o(\xi, y) = (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \int_{C_a} \frac{\rho^{-(j-1)} N_j(\rho, \omega, \zeta) e^{\rho \zeta y}}{\prod_{i=1}^{m_1} \left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho \omega)}{\rho}\right)} d\zeta$$

Comme cette fonction est nulle pour $\rho \leq a$, on peut majorer $\rho^{-(j-1)}$ par $a^{-(j-1)}$ et comme on l'a vu pour (3.1.7) le reste de l'expression est borné. On a alors :

$$(3.1.26) \quad |g_j^o(\xi, y) \widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \leq C |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right))^2.$$

On a ainsi le résultat cherché, puisque par hypothèse $\widehat{\varphi}_j(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Nous allons montrer maintenant que $u(x, y)$ appartient à $T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$. On montrera successivement pour cela l'appartenance des $u_{jk}^1(x, y)$ et $u_j^2(x, y)$ à $T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$. Il faut donc montrer que ces fonctions sont dans $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ et sont donc des distributions et que leurs dérivées aux sens des distributions $D^q(D_x^p u_{jk}^1(x, y))$

appartiennent à $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ pour des multi-indices $p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ avec $|p| \leq r$ et $q = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ avec $|q| \leq m_1$. La démonstration étant la même pour p et q égaux à zéro, on la fait directement pour p et q quelconques.

La dérivation de la transformée de Fourier et de son inverse permet d'écrire :

$$(3.1.27) \quad D^q(D_x^p u_{jk}^1(x,y)) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left[\xi_1^{\alpha_1+\beta_1} \dots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} f_{jk}^{00}(\xi,y) \right](x) \\ = \overline{\mathcal{F}}_{\xi} [f_{jk}^{\alpha+\beta, \beta_0}(\xi,y)](x) .$$

Donc d'après Plancherel, il suffit de montrer que $[f_{jk}^{\alpha+\beta, \beta_0}(\xi,y)](x)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ car, alors :

$$(3.1.28) \quad \|D^q(D_x^p u_{jk}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \overline{\mathcal{F}}_{\xi} [f_{jk}^{\alpha+\beta, \beta_0}(\xi,y)] \right|^2(x) dx dy \\ = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_{jk}^{\alpha+\beta, \beta_0}(\xi,y)|^2 d\xi dy .$$

On aura :

$$(3.1.29) \quad f_{jk}^{\alpha+\beta, \beta_0}(\xi,y) = (-i)^{\alpha+\beta} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) A_{jk}(\xi) D_y^{\beta_0} G_k(\rho,\omega,y) \widehat{D^{\alpha+\beta} \varphi_j}(\xi) .$$

Or pour $\rho \leq a$, le théorème 2.3.1 donne :

$$|A_{jk}(\rho\omega)| \leq C \rho^{-(j-1)} \quad \text{pour } j,k \leq m_0$$

et le lemme 2.5.2 donne :

$$\left| \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G_k(\rho,\omega,y) \right| \leq C \rho^{\beta_0} e^{-\alpha\rho y} \quad \text{pour } k \leq m_0 .$$

Donc dans le cas où $j,k \leq m_0$ on a

$$|f_{jk}^{\alpha+\beta, \beta_0}(\xi,y)| \leq C \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{-(j-1)} \rho^{\beta_0} e^{-\alpha\rho y} |\widehat{D^{\alpha+\beta} \varphi_j}(\xi)| .$$

D'où :

$$(3.1.30) \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0 \left| f_{jk}^{\alpha+\beta, \beta_0}(\xi, y) \right|^2 d\xi dy \leq \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{-2j+1} \rho^{2\beta_0} \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi$$

après intégration en y . Cette quantité est finie par hypothèse.

D'autre part lorsque $k \geq m_0+1$ le lemme 2.5.2 donne :

$$\left| \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G_k(\rho, \omega, y) \right|^2 \leq C e^{-2(\beta+\alpha\rho)y} \quad \rho \leq a$$

et le théorème 2.3.1 donne si $j \leq m_0$ et $k \geq m_0+1$

$$|A_{jk}(\rho\omega)|^2 \leq C \rho^{-2(j-1)+2m_0} \quad \text{donc bornée pour } \rho \leq a, \text{ donc :}$$

$$(3.1.31) \quad \|f_{jk}^{\alpha+\beta, \beta_0}(\xi, y)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \|\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2$$

Si $j \geq m_0+1$ et $k \leq m_0$ on a encore à cause du lemme 2.5.2

$$\left| \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G_k(\rho, \omega, y) \right|^2 \leq C \rho^{2\beta_0} e^{-2\alpha\rho y} \quad \rho \leq a$$

et le théorème 2.3.1 donne :

$$|A_{jk}(\rho\omega)|^2 \leq C \rho^{-2(m_0-1)} \quad \rho \leq a$$

D'où dans ce cas là :

$$(3.1.32) \quad \|f_{jk}^{\alpha+\beta, \beta_0}(\xi, y)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{2\beta_0-2(m_0-1)} \frac{1}{2\alpha\rho} \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{-2m_0+1} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad \text{par hypothèse et finalement}$$

lorsque $j, k \geq m_0 + 1$

$$\left| \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G_k(\rho, \omega, y) \right|^2 \leq C e^{-2(\beta + \alpha \rho)y} \quad \rho \leq a$$

et

$$|A_{jk}(\rho\omega)|^2 \leq C \quad \rho \leq a$$

et comme plus haut on aura :

$$(3.1.33) \quad \|f_{jk}^{\alpha+\beta, \beta_0}(\xi, y)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \|\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2$$

Cela termine la démonstration de $u_{jk}^1(x, y) \in T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n) \quad \forall j, k \leq m_1$.

Il reste donc à montrer que $u_j^2(x, y) \in T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$.

Comme précédemment cela revient à montrer que :

$$g_j^{\beta_0}(\xi, y) \widehat{D^{\alpha+\beta} \varphi_j}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}_+^n) .$$

Or on a en tenant compte du lemme 1.1 :

$$(3.1.34) \quad \|g_j^{\beta_0}(\xi, y) \widehat{D^{\alpha+\beta} \varphi_j}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\frac{\rho}{a}))^2 \rho^{2\beta_0 - 2j + 1} |\widehat{D^{\alpha+\beta} \varphi_j}(\xi)|^2 d\xi \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\frac{\rho}{a}))^2 \rho^{2m_1 + 2r - 2j + 1} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

à cause des hypothèses sur $\widehat{\varphi_j}$ au voisinage de l'infini.

Il reste à montrer que $u(x, y)$ est solution du problème (3.0.2), (3.0.3) .

Lorsque $u_j(x, y) \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m_1 ayant calculer au sens des distributions

$$L\left(+\frac{1}{i} D_x, -D_y\right) u_j(x,y) = L\left(\frac{1}{i} D_x, -D_y\right) \overline{\mathcal{F}}_{\xi}(f_j^{oo}(\xi,y))(x) + \\ L\left(\frac{1}{i} D_x, -D_y\right) \overline{\mathcal{F}}_{\xi}[g_j^o(\xi,y) \hat{\varphi}_j(\xi)](x)$$

Or d'après (3.0.6) on aura :

$$(3.1.35) \quad L\left(\frac{1}{i} D_x, -D_y\right) u_j(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi}(L(\xi, -D_y) f_j^{oo}(\xi,y))(x) + \\ \overline{\mathcal{F}}_{\xi}(L(\xi, -D_y) g_j^o(\xi,y) \hat{\varphi}_j(\xi))(x) .$$

Et comme $L(\xi, -D_y) G_k(\rho,\omega,y) = 0$ d'après le lemme 2.5.1, on aura :

$$\overline{\mathcal{F}}_{\xi}(L(\xi, -D_y) f_j^{oo}(\xi,y))(x) = 0 .$$

De même on a

$$L(\xi, -D_y) g_j^o(\xi,y) = (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \int_{C_a} \frac{\rho^{-(j-1)} N_j(\rho,\omega,\zeta) L(\xi, -\rho\zeta) e^{\rho\zeta y}}{\prod_{i=1}^{m_1} \left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)} d\zeta = 0$$

à cause du théorème des résidus et le fait que $L(\xi, \eta_i(\rho\omega)) = 0$ et si $\eta_i(\rho\omega)$ est de multiplicité γ , $\left(\frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial \zeta^{\gamma-1}} L(\xi, -\rho\zeta)\right) \left(\frac{-\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right) = 0$.

$$D'où \quad L\left(\frac{1}{i} D_x, -D_y\right) u_j(x,y) = 0 \quad \forall j \leq m_1 .$$

Montrons que la fonction $y \rightarrow f_j^{oo}(\xi,y)$ est continue à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$.
Pour cela évaluons :

$$\|f_{jk}^{oo}(\xi,y) - f_{jk}^{oo}(\xi,y_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) |A_{jk}(\rho\omega)|^2 |G_k(\rho,\omega,y) - G_k(\rho,\omega,y_0)|^2 |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi .$$

Or lorsque $k \leq m_0$

$$G_k(\rho,\omega,y) - G_k(\rho,\omega,y_0) = \int_C \frac{z^{k-1} (e^{\rho y z} - e^{\rho y_0 z})}{\prod_{i=1}^{m_0} \left(z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)} dz .$$

Le théorème des accroissements finis donne :

$$e^{\rho y z} - e^{\rho y_0 z} = (y - y_0) \rho z e^{\rho y_1 z} \quad \text{où } y_1 \in]y_0, y[\quad .$$

D'autre part la courbe de Jourdan C étant bornée et $\frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}$ étant bornée pour $\rho \leq a$ on aura :

$$\begin{aligned} |G_k(\rho, \omega, y) - G_k(\rho, \omega, y_0)| &\leq C \rho |y - y_0| \sup_{z \in C} e^{\rho y_1 z} \\ &\leq C \rho |y - y_0| e^{-\alpha \rho y} \quad . \end{aligned}$$

Mais comme G_k n'est défini et utilisé que pour $\rho \leq a$ et que $e^{-\alpha \rho y} \leq 1$ on a :

$$|G_k(\rho, \omega, y) - G_k(\rho, \omega, y_0)| \leq C' |y - y_0| \quad \text{où } C' \text{ est indépendante de } \rho$$

et ω .

D'où

$$\|f_{jk}^{oo}(\xi, y) - f_{jk}^{oo}(\xi, y_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{-2(j-1)} |y - y_0|^2 |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi$$

lorsque $j < m_0$ (majoration de $A_{jk}(\rho\omega)$ du théorème 2.3.1) .

De même on a la majoration :

$$\chi^2\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{-2(j-1)} \leq C \rho^{-2(j-1/2)} (1 + \rho^2)^{r+m_1} \quad .$$

Car la première expression est nulle pour $\rho \geq a$.

Finalement :

$$\|f_{jk}^{oo}(\xi, y) - f_{jk}^{oo}(\xi, y_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C |y - y_0| |\varphi_j|_{-j+1/2, H^{m_1+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^*$$

Ceci est démontré pour $j, k \leq m_0$, il en serait de même pour les autres $j, k \leq m_1$ et donc :

$y \rightarrow f_j^{00}(\xi, y)$ est continue à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, donc

$y \rightarrow \overline{f}_\xi(f_j^{00}(\xi, y))$ sera continue à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ et on a

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow 0} \overline{f}_\xi(f_j^{00}(\xi, y)) &= \overline{f}_\xi(\lim_{y \rightarrow 0} f_j^{00}(\xi, y)) \\
 (3.1.36) \qquad \qquad \qquad &= \overline{f}_\xi\left(\sum_{k=1}^{m_1} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) A_{jk}(\xi) A^{k1}(\rho\omega, 0) \widehat{\varphi}_j(\xi)\right)(x) \\
 &= \overline{f}_\xi\left(\chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \delta_{j1} \widehat{\varphi}_j(\xi)\right)(x)
 \end{aligned}$$

De la même manière $y \rightarrow g_j^0(\xi, y)$ est continue. ($y \rightarrow e^{\rho\zeta y}$) et $y \rightarrow g_j^0(\xi, y) \widehat{\varphi}_j(\xi)$ est continue à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ pour $y \geq 0$ donc il en sera de même pour

$$y \rightarrow \overline{f}_\xi(g_j^0(\xi, y) \widehat{\varphi}_j(\xi))$$

et
$$\lim_{y \rightarrow 0} \overline{f}_\xi(g_j^0(\xi, y) \widehat{\varphi}_j(\xi)) = \overline{f}_\xi(\lim_{y \rightarrow 0} g_j^0(\xi, y) \widehat{\varphi}_j(\xi)) .$$

Or
$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} g_j^0(\xi, y) &= (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \int_{C_a} \frac{\rho^{-(j-1)} N_j(\rho, \omega, \zeta)}{\prod_{i=1}^{m_1} \left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)} d\zeta \\ &= (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \delta_{j1} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 (3.1.37) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \overline{f}_\xi(g_j^0(\xi, y) \widehat{\varphi}_j(\xi)) &= \overline{f}_\xi((1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \widehat{\varphi}_1(\xi)) d\xi \quad \text{si } j = 1 \\
 &= 0 \qquad \qquad \qquad \text{si } j \neq 1
 \end{aligned}$$

Et en réunissant (3.1.36) et (3.1.37) on a :

$$\lim_{y \rightarrow 0} u_j(x, y) = \delta_{j1} \varphi_j(x) .$$

Donc $\lim_{y \rightarrow 0} u(x,y) = u(x,0) = \varphi_j(x)$.

D'autre part on a vu que $\frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u(x,y)$ appartenait à $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ pour $\ell \leq m_1$ et la continuité des applications $y \rightarrow \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} f_j^{oo}(\xi,y)$ de \mathbb{R}^+ à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ et celle de $y \rightarrow \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} g_j^o(\xi,y) \hat{\varphi}_j(\xi)$ entraîne la continuité de $y \rightarrow \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} \overline{\mathcal{F}}_{\xi}(f_j^{oo}(\xi,y))$ et de $y \rightarrow \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} \overline{\mathcal{F}}_{\xi}(g_j^o(\xi,y) \hat{\varphi}_j(\xi))$

et donc :

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} \overline{\mathcal{F}}_{\xi}(f_j^{oo}(\xi,y)) &= \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} f_j^{oo}(\xi,y) \right) \\ &= \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left(\sum_{k=1}^{m_1} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) A_{jk}(\xi) A^{k\ell}(\xi,0) \hat{\varphi}_j(\xi) \right) . \end{aligned}$$

D'où :

$$(3.1.38) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} \overline{\mathcal{F}}_{\xi}(f_j^{oo}(\xi,y)) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left(\chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \delta_{j\ell} \hat{\varphi}_j(\xi) \right) .$$

De même on montre :

$$(3.1.39) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} \overline{\mathcal{F}}_{\xi}(g_j^o(\xi,y) \hat{\varphi}_j(\xi)) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left((1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \delta_{j\ell} \hat{\varphi}_j(\xi) \right) .$$

Et (3.1.38), (3.1.39) entraîne :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u_j(x,y) = \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u_j(x,0) = \delta_{j\ell} \hat{\varphi}_j(x) .$$

Finalement :

$$\frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u(x,0) = \sum_{j=1}^{m_1} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u_j(x,0) = \hat{\varphi}_{\ell}(x) .$$

Ce qui achève le théorème.

3.2.- Cas particulier où $m_0 = 0$

Dans ce cas là le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\mathbb{L}(\bar{\xi}) = L_1(\xi, \eta) + L_2(\xi, \eta) + C$$

où $L_1(\xi, \eta)$ est le polynôme homogène de degré $2m_1$, L_2 un polynôme dont le degré de chacun de ses termes est compris entre 1 et $2m_1-1$ et C est une constante.

L'hypothèse I de Paul Fife devient alors :

$$\exists E > 0 \text{ telle que } \operatorname{Re} \mathbb{L}(\bar{\xi}) \geq E(|\bar{\xi}|^{2m_1} + 1) \quad \forall \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n .$$

On a alors le :

Lemme 2.1.- Sous l'hypothèse précédente l'opérateur associé à \mathbb{L} est $H_0^{m_1}(\mathbb{R}_+^n)$ -elliptique c'est-à-dire :

$$\forall u \in H_0^{m_1}(\mathbb{R}_+^n) \quad \operatorname{Re}(\mathbb{L}u, u) \geq E' \|u\|_{H^{m_1}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \quad E' > 0 .$$

Preuve : Soit donc $u \in H_0^{m_1}(\mathbb{R}_+^n)$ et considérons \tilde{u} le prolongement de u par 0 à \mathbb{R}^n entier. Il est clair que $\tilde{u} \in H_0^{m_1}(\mathbb{R}^n)$ c'est-à-dire que les $D^p \tilde{u}$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $|p| \leq m_1$. Chaque terme de \mathbb{L} est de la forme :

$$a_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \quad \text{où } a_\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et } |\alpha| \leq 2m_1 .$$

Donc : $(L\tilde{u}, \tilde{u})$ est une combinaison linéaire de terme de la forme :

$$(-i)^{|\alpha|} a_\alpha(\tilde{u}, \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \tilde{u}) = (-i)^{|\alpha|} a_\alpha (D^p \tilde{u}, D^q \tilde{u})$$

au signe près et où $|p| + |q| = |\alpha|$ et $|p|, |q| \leq m_1$.

Alors $D^p \tilde{u}$ et $D^q \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et on peut appliquer le théorème de Parseval,

c'est-à-dire

$$(D^p \tilde{u}, D^q \tilde{u}) = (\widehat{D^p \tilde{u}}, \widehat{D^q \tilde{u}}) = \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|} \xi^{p+q} |\widehat{\tilde{u}}(\xi)|^2 d\xi .$$

D'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(L\tilde{u}, \tilde{u}) &= \operatorname{Re}(Lu, u) = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} L(\xi) |\widehat{\tilde{u}}|^2 d\xi \\ &\geq E \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2m_1} + 1) |\widehat{\tilde{u}}|^2 d\xi \end{aligned}$$

et comme $\frac{(1 + |\xi|^2)^{m_1}}{1 + |\xi|^{2m_1}} \leq C$, on a :

$$\operatorname{Re}(Lu, u) \geq \frac{E}{C} \|\tilde{u}\|_{H^{m_1}(\mathbb{R}_+^n)}^2 = \frac{E}{C} \|u\|_{H^{m_1}(\mathbb{R}_+^n)}^2 .$$

Dans le cas particulier où $m_0 = 0$ les hypothèses (3.1.22) et (3.1.23) se réduisent à :

$$\varphi_j(x) \in H^{m_1+r-j+1/2} \quad \text{pour } j = 1, \dots, m_1 .$$

Et l'on voit (Lions et Magénès [1]) que $L \in H_0^{m_1}(\mathbb{R}_+^n)$ -elliptique entraîne que l'application

$$u \rightarrow (Lu, \vec{\gamma}u) \quad \text{où } \vec{\gamma}u = (u(x,0), \dots, \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial y^{m_1-1}} u(x,0))$$

est un isomorphisme de $T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$ sur $T^{-m, r}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=0}^{m_1-1} H^{m_1+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Cela signifie donc qu'étant données $\varphi_j(x) \in H^{m_1+r-j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1, \dots, m_1$ il existe une unique solution du problème (3.0.2), (3.0.3) qui appartient à $T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$.

Théorème 2.1. - Lorsque $m_0 = 0$ et $\varphi_j(x) \in H^{m_1+r-j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, la solution de (3.0.3) donnée par $u(x, y) = \sum_{j=1}^{m_1} u_j(x, y)$ (où $u_j(x, y)$ données par (3.1.24))

appartient à $T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$ et coïncide donc avec celle de Lions et Magénès [1].

Preuve : Cela est immédiat de la démonstration précédente du théorème 1.3 car $u_j^2(x, y) \in T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$ n'utilisait que l'hypothèse sur $\varphi_j(x)$ à l'infini. De même on avait vu que pour $k \geq m_0 + 1$ les $u_{jk}^1(x, y)$ appartenaient à $T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$ avec la seule hypothèse que $\varphi_j(x) \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ au voisinage de l'origine. Et donc pour tout $k \geq 1$ puisque ici $m_0 = 0$. D'où le théorème.

3.3.- Cas particulier où $m_1 = m_0$

C'est le cas où le polynôme caractéristique est homogène de degré m_1 , donc le cas étudié par Agmon-Douglis-Nirenberg [1]. Une solution est donnée au moyen de noyaux, qui ont le lien suivant avec ceux construits par P. Fife dans le cas où $\mu_j < n-1$, car alors on peut prendre $a = 0$ dans (2.2.19). En effet l'intégrale définissant $K_{j1}(x, y)$ est alors convergente à l'origine. On a :

$$(3.3.1) \quad K_j(x, y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{C_a} d\zeta \rho^{-\mu_j} N_j(\rho, \omega, \zeta) \left(\pi \left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho} \right) \right)^{-1} e^{\rho(ix \cdot \omega + \zeta y)} d\zeta d\xi$$

Mais si l'on suppose $L(\xi, \eta)$ homogène de degré $m = m_1 = m_0$, alors :

$$(3.3.2) \quad \eta_i(\rho\omega) = \rho \eta_i(\omega) .$$

Car $L(\rho\omega, \eta_i(\rho\omega)) = 0$ et $L(\rho\omega, \rho\eta_i(\omega)) = \rho^m L(\omega, \eta_i(\omega)) = 0$.

D'autre part nous avons supposé

$$B_j(\xi, \tau) = (-\tau)^{j-1}$$

donc homogène de degré $\mu_j = j-1$, on obtient d'après (2.2.15)

$$(3.3.3) \quad N_k(\xi, \tau) = L_{m-k}^+(\xi, \tau) .$$

Ce polynôme est homogène de degré $m-k$ (Agmon-Douglis-Nirenberg [1]) et donc (2.2.17) entraîne :

$$N_j(\rho, \omega, \zeta) = \rho^{-m+\mu_j+1} \frac{N_j(\rho\omega, \rho\zeta)}{2\pi i} = \frac{N_j(\omega, \zeta)}{2\pi i} .$$

D'où après passage en coordonnées polaires (3.3.1) devient

$$(3.3.4) \quad K_j(x, y) = \frac{(2\pi)^{-n+1}}{2\pi i} \int_{C_a} d\zeta \int_{|\xi|=1} d\omega\xi \int_0^\infty \rho^{-n-2-\mu_j} \frac{N_j(\omega, \zeta)}{(\zeta + \eta_j(\omega))} e^{\rho(ix.\omega + \zeta y)} d\rho$$

Sur cette expression on voit bien que l'intégrale est convergente si et seulement si $\mu_j < n-1$. Alors par intégration par partie en ρ et après permutation des intégrations, on obtient :

$$(3.3.5) \quad K_j(x, y) = (2\pi)^{-n+1} (n-2-\mu_j)! (-1)^{n-1-\mu_j} \int_{|\xi|=1} d\omega\xi \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{N_j(\omega, \zeta)}{L^+(\xi, \zeta) (ix.\omega + \zeta y)^{n-1-\mu_j}} d\zeta \right]$$

On retrouve ainsi exactement le noyau de Poisson donné par Douglis-Nirenberg [1] lorsque $\mu_j < n-1$ pour des opérateurs frontières de Dirichlet.

Nous verrons dans le chapitre suivant que le cas $m_1 = m_0$ correspond à un problème limite. Et nous montrerons que dans certains sens une solution de ce problème sera limite d'une suite de solutions de problèmes non homogènes, ces solutions étant celles données dans le début de ce chapitre. Pour cela il nous faudra une autre solution que celle donnée par Agmon-Douglis-Nirenberg. Ce sera l'objet de ce paragraphe.

Soit donc le problème :

$$(3.3.6) \quad \begin{cases} L_0 \left(\frac{1}{i} D_x, -D_y \right) u(x, y) = 0 & y > 0 \\ \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} u(x, 0) = \varphi_j(x) & j = 1, \dots, m_0 \end{cases}$$

où $L_0(\xi, \eta)$ est un polynôme homogène de degré $2m_0$.

Soient $\alpha_i(\omega)$ ($i = 1, \dots, m_0$) les m_0 racines de $L_0(\omega, \alpha) = 0$ avec partie réelle positive. (On suppose toujours être dans les hypothèses du chapitre II).

L'homogénéité de L_0 entraîne que les racines de $L_0(\rho\omega, \eta)$ sont données par :

$$\eta_i(\rho\omega) = \rho \alpha_i(\omega) \quad i = 1, \dots, m_0 .$$

On définit alors comme dans le cas général :

$$(3.3.7) \quad G'_k(\rho, \omega, y) = e^{-\rho \alpha_i(\omega) y} \quad \text{si les racines } \alpha_i(\omega) \text{ sont simples}$$

sinon

$$(3.3.8) \quad G'_k(\rho, \omega, y) = \int_C \frac{z^{k-1} e^{-\rho y z}}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \alpha_i(\omega))} dz .$$

Ici la différence avec le cas général est que les $G_k(\sigma, \omega, y)$ sont analytiques sans restriction du domaine et on a donc pas besoin d'introduire a , c'est-à-dire de considérer un noyau au voisinage de 0 et un noyau au voisinage de l'infini.

On considère alors :

$$(3.3.9) \quad A^{kl}(\rho\omega, y) = \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} G'_k(\rho, \omega, y) = \int_C \frac{\rho^{\ell-1} z^{k+\ell-2} e^{-\rho y z}}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \alpha_i(\omega))} dz$$

et donc :

$$(3.3.10) \quad A^{kl}(\rho\omega, 0) = \rho^{\ell-1} \alpha_{kl}(\omega)$$

où les $\alpha_{kl}(\omega) = \int_C \frac{z^{k+\ell-2} dz}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \alpha_i(\omega))}$ sont ceux données dans (2.3.5) .

Comme les polynômes $(-\tau)^{\ell-1}$ sont manifestement linéairement indépendants

($\nu = 1 \dots m_0$), la matrice $A^{k\ell}(\rho\omega, 0)$ est inversible et tenant compte de (2.3.16) on a la matrice :

$$(3.3.11) \quad \left[A^{k\ell}(\rho\omega, 0) \right]^{-1} = \left[A_{jk}(\rho\omega) \right] = \left[\rho^{-j+1} \beta_{jk}(\omega) \right]$$

On considère alors les noyaux de Poisson :

$$(3.3.12) \quad K_j(x, y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi iz} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi\left(\frac{\rho}{b}\right) \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} \sum_{k=1}^{m_0} (\rho+z)^{-j+1} \beta_{jk}(\omega) G'_k(\rho+z, \omega, y) e^{ix(\xi+z\omega)} d\xi$$

$$+ (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\rho}{b}\right)) \sum_{k=0}^{m_0} \rho^{-j+1} \beta_{jk}(\omega) G'_k(\rho, \omega, y) e^{ix \cdot \xi} d\xi .$$

Ici b peut être quelconque et la fonction χ est celle introduite en (2.2.4). Comme dans le cas général l'intégration sur le contour $|z| = b$ est introduit pour éviter la singularité en $\rho = 0$.

Théorème 3.1. - Soit $\varphi_j(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, la fonction $u(x, y) = \sum_{j=1}^{m_0} K_j * \varphi_j$ est solution du problème 3.3.6.

Preuve : Dans chacun des $K_j(x, y)$ définis ci-dessus on peut prendre b suffisamment grand pour que le support de $\varphi_j(x)$ soit à l'intérieur de la boule de rayon b .

Donc on a :

$$(3.3.13) \quad u_j(x, y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi iz} \iint_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} \sum_{k=1}^{m_0} (\rho+z)^{-j+1} \beta_{jk}(\omega) G'_k(\rho+z, \omega, y) e^{i(x-\tau)(\xi+z\omega)} \varphi_j(\tau) d\xi d\tau .$$

La dérivabilité et la linéarité du produit de convolution donne :

$$\begin{aligned}
L_0 u(x,y) &= \sum_{j=1}^{m_0} L_0 K_j(x,y) * \varphi_j(x) \\
&= \sum_{j=1}^{m_0} \int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi iz} \iint \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} \sum_{k=1}^{m_0} (\rho+z)^{-j+1} \beta_{jk}(\omega) \\
&\quad L((\rho+z)\omega, -D_y) G'_k e^{i(x-\tau)(\xi+z\omega)} \varphi_j(\tau) d\xi d\tau .
\end{aligned}$$

Or d'après (3.3.8)

$$\begin{aligned}
L_0((\rho+z)\omega, -D_y) G'_k(\rho+z, \omega, y) &= \int_C \frac{\zeta^{k-1} L_0((\rho+z)\omega, -(\rho+z)\zeta) e^{(\rho+z)y\zeta}}{\prod_1^{m_0} (z + \alpha_i(\omega))} d\zeta \\
&= (\rho+z)^{m_0} \int_C \frac{\zeta^{k-1} L_0(\omega, -\zeta) e^{(\rho+z)y\zeta}}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \alpha_i(\omega))} d\zeta .
\end{aligned}$$

D'après le théorème des résidus il est clair que cette quantité est nulle puisque $L_0(\omega, \alpha_i(\omega)) = 0$ et si $\alpha_i(\omega)$ est racine de multiplicité p alors $\alpha_i(\omega)$ est racine des dérivées du polynôme $L_0(\omega, -\zeta)$ jusqu'à l'ordre $p-1$.
D'où $L_0 u(x,y) = 0 \quad \forall y > 0$.

D'autre par on aura en tenant compte de (3.3.9)

$$\begin{aligned}
(3.3.14) \quad \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u_j(x,y) &= \sum_{k=1}^{m_0} (2\pi)^{-n+1} \int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi iz} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} (\rho+z)^{-j+1} \\
&\quad \beta_{jk}(\omega) A^{k\ell}(\rho+z, \omega, y) \int e^{i(x-\tau)(\xi+z\omega)} \varphi_j(\tau) d\tau .
\end{aligned}$$

Comme $y \rightarrow 0$ entraîne $A^{k\ell}((\rho+z)\omega, y) = (\rho+z)^{\ell-1} \alpha_{k\ell}(\omega)$

$$\begin{aligned}
(3.3.15) \quad \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u_j(x,0) &= \sum_{k=1}^{m_0} (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi iz} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} (\rho+z)^{-j+1} \\
&\quad \beta_{jk}(\omega) \alpha_{k\ell}(\omega) e^{ix(\xi+z\omega)} \widehat{\varphi}_j(\xi) d\xi .
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=1}^{m_0} \beta_{jk}(\omega) \alpha_{k\ell}(\omega) = \delta_{j\ell}$, donc

$$\frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u_j(x,0) = 0 \quad \text{si } j \neq \ell$$

ou si $j = \ell$

$$\frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} u_j(x,0) = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi iz} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} \widehat{\varphi}_j(\rho+z) e^{ix(\rho+z\omega)} d\xi$$

D'où après intégration sur le contour $|z| = b$ et la transformation de Fourier inverse :

$$\frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} u(x,0) = \sum_{k=1}^{m_0} \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} u_k(x,0) = \varphi_j(x) .$$

Ce qui achève le théorème.

Théorème 3.2. - Supposons que :

$$(3.3.16) \quad |\varphi_j|_{-j+1/2, H^{m_0+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^* < \infty \quad j \leq m_0 .$$

On peut alors définir $u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_0} u_j(x,y)$ où :

$$(3.3.17) \quad \begin{aligned} u_j(x,y) &= \sum_{k=1}^{m_0} \overline{\mathcal{F}}_{\xi}[\rho^{-j+1} \beta_{jk}(\omega) G'_k(\rho,\omega,y) \widehat{\varphi}_j(\xi)](x) \quad j \leq m_0 \\ &= \sum_{k=1}^{m_0} u_{jk}(x,y) . \end{aligned}$$

$u(x,y)$ ainsi définie est alors une solution du problème (3.3.6) qui appartient à $T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)$.

Preuve : C'est l'analogie du théorème 1.3 en plus simple.

Corollaire 3.2. - Si l'on suppose de plus que $\varphi_j(x) \in H^{m_0+r+k-j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, alors la solution $u(x,y)$ appartient à $T^{m_0+k,r}(\mathbb{R}_+^n)$.

C H A P I T R E I V

Le problème perturbé

4.1.- Position du problème et premier résultat de convergence.

On se donne un réel positif ε destiné à tendre vers zéro et on considère le problème :

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} \mathbb{L}(\frac{\varepsilon}{i} D_{\bar{x}}) u_{\varepsilon}(x,y) = 0 & y > 0 \\ \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} u_{\varepsilon}(x,0) = \varphi_j(x) & j = 1, \dots, m_1 \quad \varphi_j(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \end{cases} .$$

On prend alors la solution de ce problème donnée par P. Fife [1] à savoir :

$$(4.1.2) \quad u_{\varepsilon}(x,y) = \sum_{j=1}^{m_1} u_{j\varepsilon}(x,y) \quad \text{où}$$

$$(4.1.3) \quad u_{j\varepsilon}(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^{-j+n}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j \left[\frac{(x-\xi)}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right] \varphi_j(\xi) d\xi .$$

Le problème limite de (4.1.1) c'est-à-dire lorsque l'on fait formellement $\varepsilon = 0$ est donné par :

$$(4.1.4) \quad \begin{cases} L_0(\frac{1}{i} D_{\bar{x}}) u(x,y) = 0 & y > 0 \\ \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} u(x,0) = \varphi_j(x) & j = 1, \dots, m_0 \end{cases} .$$

C'est donc le problème homogène (3.3.6) étudié dans le chapitre précédent.

Théorème 1.1.- Avec les notations ci-dessus, lorsque $y > 0$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{j\varepsilon}(x,y) = u_j(x,y)$$

où $u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_0} u_j(x,y)$ est donnée par le théorème 3.3.1.

Preuve : C'est une conséquence des théorèmes (7.1), (7.3) et (7.4) de P. Fife [1]

Ici on a seulement une convergence ponctuelle pour tout (x,y) avec $y > 0$ c'est-à-dire une limite intérieure au domaine \mathbb{R}_+^n . Le paragraphe suivant donnera une convergence plus globale.

4.2.- Théorème de convergence dans les $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$.

On notera :

$$(4.2.1) \quad f_{jk\varepsilon}^{\alpha\beta}(\xi, y) = \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) A_{jk}(\varepsilon\rho\omega) D_y^\beta [G_k(\varepsilon\rho, \omega, \frac{y}{\varepsilon})] \widehat{D^\alpha \varphi_j}(\xi)$$

$$(4.2.2) \quad f_{j\varepsilon}^{\alpha\beta}(\xi, y) = \sum_{k=1}^{m_1} f_{jk\varepsilon}^{\alpha\beta}(\xi, y)$$

$$(4.2.3) \quad g_{j\varepsilon}^\beta(\xi, y) = (1 - \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right)) \int_{C_a} \frac{\rho^{-j+1} N_j(\varepsilon\rho, \omega, \zeta) e^{\rho\zeta y} (\rho\zeta)^\beta}{\prod_{i=1}^{m_1} \left(\zeta + \frac{\eta_i(\varepsilon\rho\omega)}{\varepsilon\rho}\right)} d\zeta$$

On a alors le théorème :

Théorème 2.1. - Reprenons les hypothèses du théorème 3.1.3

$$(4.2.4) \quad |\varphi_j|_{-j+1/2, H^{m_1+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^* < \infty \quad j \leq m_0$$

$$(4.2.5) \quad |\varphi_j|_{-m_0+1/2, H^{m_1+r-j+m_0}(\mathbb{R}^{n-1})}^* < \infty \quad j \geq m_0+1$$

On peut alors définir la fonction $u_\varepsilon(x, y) = \sum_{j=1}^{m_1} u_{j\varepsilon}(x, y)$ où :

$$(4.2.6) \quad u_{j\varepsilon}(x, y) = \varepsilon^{j-1} \overline{\mathcal{F}}_\xi [f_{j\varepsilon}^{00}(\xi, y)](x) + \overline{\mathcal{F}}_\xi [g_{j\varepsilon}^0(\xi, y) \widehat{\varphi}_j(\xi)](x)$$

et $u_{j\varepsilon}(x, y)$ appartient à $T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$, est solution du problème perturbé (4.1.1) et converge dans $T^{m_0, r}(\mathbb{R}_+^n)$ vers $u(x, y)$ la solution de (4.1.4) donnée par (3.3.7)

De plus on a les inégalités :

$$(4.2.7) \quad \|u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2}$$

$$(4.2.8) \quad \|\varepsilon^{m_1} u_\varepsilon(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C .$$

Preuve : Le fait que $u_\varepsilon(x,y)$ soit dans $T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)$ n'est rien d'autre que le théorème 3.1.3. De même dans ce cas, pour montrer que $u_\varepsilon(x,y)$ est solution de (4.1.1), il suffit de reprendre la vérification faite dans le théorème 3.1.3 en introduisant ε . Il reste donc à montrer la dernière partie, c'est-à-dire la convergence de $u_\varepsilon(x,y)$ vers $u(x,y)$ dans $T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)$. Pour cela on commencera par décomposer $u_{j\varepsilon}(x,y) = u_{j\varepsilon}^1 + u_{j\varepsilon}^2$ comme le montre (4.2.6); ensuite on pose $u_{j\varepsilon}^1 = \sum_{k=1}^{m_1} u_{jk\varepsilon}^1$ où :

$$(4.2.9) \quad u_{jk\varepsilon}^1 = \varepsilon^{j-1} \overline{\mathcal{F}}_\varepsilon[f_{jk\varepsilon}^{00}(\varepsilon,y)](x) .$$

On traitera alors successivement $u_{j\varepsilon}^2$, $u_{jk\varepsilon}^1$ pour $j \leq m_0$ et $k \geq m_0+1$, $u_{jk\varepsilon}^1$ pour $j \geq m_0+1$ et $k \geq m_0+1$, $u_{jk\varepsilon}^1$ pour $j \geq m_0+1$ et $k \leq m_0$ et finalement $u_{jk\varepsilon}^1$ pour $j \leq m_0$ et $k \leq m_0$.

Lemme 2.1.- $u_{j\varepsilon}^2$ converge vers zéro dans $T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et on a les inégalités :

$$(4.2.10) \quad \|u_{j\varepsilon}^2(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C' \varepsilon \quad j = 1, \dots, m_1$$

et

$$(4.2.10)' \quad \|u_{j\varepsilon}^2(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C$$

Preuve : Considérons les multi-indices $q = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) = (\beta_0, \beta)$ et $p = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. La formule de Plancherel permet alors d'écrire :

$$(4.2.11) \quad \|D^q(D_x^p u_{j\varepsilon}^2(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |g_{j\varepsilon}^{\beta_0}(\xi,y)| \widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi dy .$$

Le lemme (3.1.1) reste encore vrai après introduction de ε , et donne donc une majoration en $\frac{1}{\rho}$, donc :

$$(4.2.12) \quad \int_0^\infty |g_{j\varepsilon}^{\beta_0}(\xi,y)|^2 dy \leq C (1 - \chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}))^2 \rho^{-2j+2+2\beta_0-1} \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon\rho \geq a$$

et donc de (4.2.11) on tire :

$$(4.2.13) \quad \|u_{j\varepsilon}^2(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}))^2 \rho^{-2j+1} \sum_{|p| \leq r} \rho^{2\beta_0} \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}))^2 (\varepsilon\rho)^{-1} \rho^{-2j+2} \sum_{\substack{|p| \leq r \\ |q| \leq m_0}} \rho^{2\beta_0} \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi .$$

Or $(1 - \chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}))^2 (\varepsilon\rho)^{-1} \leq (\frac{a}{2})^{-1}$ puisque nulle pour $\varepsilon\rho \leq \frac{a}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } \rho^{-2j+2} \sum_{|p| \leq r} \rho^{2\beta_0} \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} &\leq \\ &\leq \rho^{-2j+2} \sum_{\substack{|p| \leq r \\ |q| \leq m_0}} \rho^{2|p|+2|q|} \end{aligned}$$

au voisinage de l'infini.

Mais $|p| \leq r$, $|q| \leq m_0$ et $m_1 \geq m_0+1$ entraîne que

$2|p|+2|q|+2-2j \leq 2m_1+2r-2j+1$, d'où :

$$\|u_{j\varepsilon}^2(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon .$$

Ce qui donne la première inégalité cherchée. La deuxième vient de la première inégalité (4.2.13) où l'on prend la somme pour $|q| \leq m_1$ au lieu de m_0 . On a alors exactement la majoration correspondant à l'hypothèse à l'infini sur les $\varphi_j(x)$ et on ne peut pas alors introduire de ε comme précédemment.

Lemma 2.2. - Lorsque $j \leq m_0$ et $k \geq m_0 + 1$ $u_{jk\epsilon}^1(x, y)$ converge vers zéro dans $T^{m_0, r}(\mathbb{R}_+^n)$. Ces termes seront appelés termes frontières. Et on a l'inégalité

$$(4.2.14) \quad \|u_{jk\epsilon}^1(x, y)\|_{T^{m_0, r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C' \epsilon.$$

Preuve : Comme précédemment on a :

$$(4.2.15) \quad \|D^q(D^p u_{jk\epsilon}^1(x, y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 = \epsilon^{2j-2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_{jk\epsilon}^{\alpha+\beta, \beta_0}(\xi, y)|^2 d\xi dy.$$

Or pour $\epsilon\rho \leq a$ le théorème 2.3.1 donne pour $j \leq m_0$ et $k \geq m_0 + 1$

$$(4.2.16) \quad |A_{jk}(\epsilon\rho\omega)| \leq C(\epsilon\rho)^{m_0-j+1}$$

et le lemme (2.5.2) donne après introduction de ϵ :

$$(4.2.17) \quad \left| \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G_k(\epsilon\rho, \omega, \frac{y}{\epsilon}) \right| \leq \frac{C}{\epsilon^{2\beta_0}} e^{-2(\beta+\alpha\epsilon\rho)\frac{y}{\epsilon}} \text{ pour } \epsilon\rho \leq a \text{ et } k \geq m_0 + 1.$$

Donc (4.2.16) et (4.2.17) entraînent dans (4.2.15) :

$$(4.2.18) \quad \|D^q(D^p u_{jk\epsilon}^1(x, y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \\ \leq C \epsilon^{2j-2-2\beta_0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\epsilon\rho}{a}\right) (\epsilon\rho)^{2(m_0-j+1)} \int_0^\infty e^{-2(\beta+\alpha\epsilon\rho)\frac{y}{\epsilon}} dy |\widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi \\ \leq C \epsilon^{2m_0-2\beta_0+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\epsilon\rho}{a}\right) \rho^{2m_0-2j+2} \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi$$

Et en tenant compte que $\xi_i = \rho\omega_i$ avec $\omega_i^2 \leq 1$, on aura :

$$(4.2.19) \quad \|D^q(D^p u_{jk\epsilon}^1(x, y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \\ \leq C \epsilon^{2m_0-2\beta_0+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\epsilon\rho}{a}\right) \rho^{-2j+1} \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2\beta_0+2m_0+1}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \\ \cdot (1+\rho^2)^{m_1+r} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi.$$

Or nous considérons ici $|q| \leq m_0$ donc $2m_0 - 2\beta_0 \geq 0$ et

$$(\varepsilon\rho)^{2m_0-2\beta_0} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \leq a^{2m_0-2\beta_0} .$$

Car $\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) = 0$ si $\varepsilon\rho \geq a$ et $\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \leq 1$ si $\varepsilon\rho \leq a$.

D'autre part

$$\frac{\rho^{2|p|+2|q|+1}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \text{ est borné pour } \rho \in [0, +\infty] .$$

Car elle est continue valant zéro à l'origine et est équivalente à l'infini à :

$$\rho^{2|p|+2|q|+1-2m_1-2r}$$

et comme $2|p| - 2r \leq 0$ et $|q| \leq m_0$, $m_1 \geq m_0+1$ entraîne que

$2|q| + 1 - 2m_1 \leq 2m_0 - 2m_1 + 1 < 0$, donc converge vers zéro à l'infini.

D'où :

$$\|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2j+1} (1+\rho^2)^{m_1+r} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi .$$

Or par hypothèse cette intégrale est finie donc :

$$\|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C' \varepsilon \quad j \leq m_0 \text{ et } k \geq m_0+1 .$$

Lemme 2.3. - Lorsque $j \geq m_0 + 1$ et $k \geq m_0 + 1$ $u_{jk\varepsilon}^1(x,y)$ converge vers zéro dans $T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et on a l'inégalité :

$$(4.2.20) \quad \|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C' \varepsilon .$$

Preuve : On a encore (4.2.15) et (4.2.17) , mais le théorème 2.3.1 donne dans le cas

où $j \geq m_0 + 1$ et $k \geq m_0 + 1$

$$(4.2.21) \quad |A_{jk}(\varepsilon\rho\omega)| \leq C \quad \text{pour} \quad \varepsilon\rho \leq a \quad .$$

Donc comme précédemment on aura

$$(4.2.22) \quad \|D^q(D_x^p u_{jk\varepsilon}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \\ \leq C\varepsilon \times \varepsilon^{2j-2-2\beta_0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \quad .$$

Décomposons cette dernière intégrale en introduisant $1 = (1 - \chi(\frac{\rho}{a})) + \chi(\frac{\rho}{a})$

$$(4.2.23) \quad \|D^q(D_x^p u_{jk\varepsilon}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \\ \leq C\varepsilon \times \varepsilon^{2j-2-2\beta_0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_0} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \\ + C\varepsilon \times \varepsilon^{2j-2-2\beta_0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_0} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi$$

Or pour $\rho < a$ on a $\chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_0} \leq a^{2|p|+2|q|-2\beta_0}$

et comme $j \geq m_0 + 1$ on a $2j-2-2\beta_0 \geq 0$ donc $\varepsilon^{2j-2-2\beta_0} \leq 1$ ($\varepsilon \leq 1$)

$\widehat{\varphi}_j(\varepsilon)$ appartenant à $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ le premier terme de (4.2.23) sera majoré par $C\varepsilon$.

Pour le deuxième terme on peut l'écrire comme suit :

$$(4.2.24) \quad C\varepsilon \int (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{2j-2-2\beta_0} \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2}}{(1+\rho^2)^{\frac{2m_1+2r-2j+1}{2}}} (1+\rho^2)^{\frac{2m_1+2r-2j+1}{2}} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \quad .$$

Comme $2j-2-2\beta_0 \geq 0$ et $\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) = 0$ si $\varepsilon\rho \geq a$ on a :

$$\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{2j-2-2\beta_0} \leq a^{2j-2-2\beta_0}$$

et

$$(1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2}}{(1+\rho^2)^{\frac{2m_1+2r-2j+1}{2}}} \leq C \quad \text{pour} \quad |q| \leq m_0 \quad \text{et} \quad |p| \leq r \quad .$$

Donc le deuxième terme est lui aussi majoré par $C \varepsilon$, d'où :

$$\|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C' \varepsilon \quad j \geq m_0+1 \text{ et } k \geq m_0+1 .$$

Lemme 2.4. - Lorsque $j \geq m_0+1$ et $k \leq m_0$ $u_{jk\varepsilon}^1(x,y)$ converge vers zéro dans $T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et on a l'inégalité :

$$(4.2.25) \quad \|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C' \varepsilon .$$

Preuve : On part toujours de l'égalité (4.2.15), mais ici le théorème 2.3.1 donne

$$(4.2.26) \quad |A_{jk}(\varepsilon\rho\omega)| \leq C(\varepsilon\rho)^{-m_0+1} \quad \text{pour } \varepsilon\rho \leq a$$

et le lemme (2.5.2), après modification en introduisant ε , donne :

$$(4.2.27) \quad \left| \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G_k(\varepsilon\rho,\omega, \frac{y}{\varepsilon}) \right|^2 \leq C \rho^{2\beta_0} e^{-2\alpha\rho y} \quad \text{pour } \varepsilon\rho \leq a .$$

Donc :

$$(4.2.28) \quad \begin{aligned} & \|D^q(D^p u_{jk\varepsilon}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq \\ & \leq C \varepsilon^{2j-2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{-2(m_0-1)} \rho^{2\beta_0} \left(\int_0^\infty e^{-2\alpha\rho y} dy \right) |\widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi \\ & \leq C \varepsilon^{2j-2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{-2(m_0-1)} \rho^{2\beta_0-1} \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi . \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du lemme précédent on décompose cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned}
(4.2.29) \quad & \|D^q(D^p u_{jk\varepsilon}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq \\
& \leq C \varepsilon^{2j-2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{-2(m_0-1)} \rho^{2|p|+2|q|-1} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \\
& + C \varepsilon^{2j-2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) (\varepsilon\rho)^{-2(m_0-1)} \rho^{2j-3} \\
& \quad \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2}}{(1+\rho^2)^{m_1+r-j+1/2}} (1 + \rho^2)^{m_1+r-j+1/2} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

On a $\chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{2|p|+2|q|} \leq \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) a^{2|p|+2|q|}$

et le premier terme est majoré par

$$C \varepsilon^{2j-2m_0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{-2m_0+1} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi .$$

Donc intégrale finie à cause de l'hypothèse sur φ_j pour $j \geq m_0+1$ et comme $2j - 2m_0 \geq 2$ on a $\varepsilon^{2j-2m_0} \leq \varepsilon^2$ et le premier terme de (4.2.28) est majoré par $C \varepsilon^2$.

Pour le deuxième terme, on met en évidence $\varepsilon\rho$ qui donnera le ε cherché pour la majoration et le ρ introduit multiplié avec ρ^{2j-3} donnera ρ^{2j-2} .

Il reste alors :

$$(\varepsilon\rho)^{2j-2-2m_0+1} = (\varepsilon\rho)^{2j-2m_0-1} .$$

L'exposant est positif puisque $j \geq m_0+1$, donc :

$$\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{2j-2m_0-1} \leq a^{2j-2m_0-1}$$

et

$$(1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2}}{(1+\rho^2)^{m_1+r-j+1/2}} \leq C$$

donc le deuxième terme est majoré par $C \varepsilon$ et

$$\|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon \quad j \geq m_0+1 \text{ et } k \leq m_0 .$$

Lemme 2.5. - Lorsque $j \leq m_0$ et $k \leq m_0$, $u_{jk\varepsilon}^1(x,y)$ converge vers $u_{jk}(x,y)$ (donnée par (3.3.17)) dans $T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et on a l'inégalité :

$$(4.2.30) \quad \|u_{jk\varepsilon}^1(x,y) - u_{jk}(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon .$$

Preuve : On commence par décomposer $u_{jk}(x,y)$ en deux parties en introduisant

$\chi(\frac{\varepsilon \rho}{a})$ et $1 - \chi(\frac{\varepsilon \rho}{a})$ et on note ces termes respectivement $u_{jk\varepsilon}$ et $w_{jk\varepsilon}$.

Etudions d'abord $w_{jk\varepsilon}$, on a :

$$(4.2.31) \quad \begin{aligned} & \|D^q(D^p w_{jk\varepsilon}(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[1 - \chi\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right)\right]^2 \rho^{-2j+2} \rho^{2\beta_0} \left(\int_0^\infty e^{-2\alpha y} dy\right) \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} \\ & \quad |\hat{\phi}_j(\xi)|^2 d\xi \\ & \leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[1 - \chi\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right)\right]^2 (\varepsilon \rho)^{-1} \rho^{2|p|+2|q|+2-2j} |\hat{\phi}_j(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

et comme $1 - \chi(\frac{\varepsilon \rho}{a}) = 0$ si $\varepsilon \rho \leq \frac{a}{2}$ on aura la majoration :

$$\left[1 - \chi\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right)\right]^2 (\varepsilon \rho)^{-1} \leq \left[1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)\right] \left(\frac{a}{2}\right)^{-1} \quad (\varepsilon \leq 1)$$

et $|p| \leq r$, $|q| \leq m_0$, $m_1 \geq m_0+1$ entraînent que $2|p|+2|q|+2-2j < 2m_1+2r-2j+1$

D'où :

$$(4.2.32) \quad \|w_{jk\varepsilon}(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon \quad j,k \leq m_0 .$$

Il reste alors à montrer que $u_{jk\varepsilon}^1(x,y)$ converge vers $v_{jk\varepsilon}(x,y)$ dans $T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)$ pour $j,k \leq m_0$.

Le lemme 2.1.1 donne le développement pour $\varepsilon\rho \leq a$

$$\eta_i(\varepsilon\rho\omega) = \varepsilon\rho \alpha_i(\omega) + (\varepsilon\rho)^2 A_i(\varepsilon\rho\omega) \quad \text{où} \quad |A_i(\varepsilon\rho\omega)| \leq C .$$

Ce qui entraîne en utilisant le théorème des résidus :

$$(4.2.33) \quad \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G_k(\varepsilon\rho, \omega, \frac{y}{\varepsilon}) = \rho^{\beta_0} \left[\int_C \frac{z^{\beta_0+k-1} e^{\rho y z}}{\sum_{i=1}^{m_0} (z+\alpha_i(\omega))} dz + \right. \\ \left. + (\varepsilon\rho) \sum_{i=1}^{m_0} B_{ik}(\varepsilon\rho, \omega, \rho y) e^{-\alpha_i(\omega)\rho y} \right]$$

$$\text{où} \quad B_{ik}(\varepsilon\rho, \omega, \rho y) = P_{ik\varepsilon}(\rho y) + \varepsilon\rho Q_{ik\varepsilon}(\rho y) e^{-A_i(\varepsilon\rho\omega)\rho y} .$$

$P_{ik\varepsilon}(\rho y)$ et $Q_{ik\varepsilon}(\rho y)$ sont des polynômes en ρy dont les coefficients sont bornés pour $\varepsilon\rho \leq a$.

De même le théorème 2.3.1 donne le développement pour $j, k \leq m_0$

$$(4.2.34) \quad A_{jk}(\varepsilon\rho\omega) = \beta_{jk}(\omega) (\varepsilon\rho)^{-(j-1)} + (\varepsilon\rho)^{-(j-2)} C_{jk}(\varepsilon\rho\omega) \quad \text{où} \quad |C_{jk}(\varepsilon\rho\omega)| \leq C .$$

Or (4.2.9) et (3.3.17) donnent :

$$(4.2.35) \quad D^q(D^p(u_{jk\varepsilon}^1(x, y) - v_{jk\varepsilon}(x, y))) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{j-1} A_{jk}(\varepsilon\rho\omega) \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G_k(\varepsilon\rho, \omega, \frac{y}{\varepsilon}) - \right. \\ \left. - \rho^{-j+1} \beta_{jk}(\omega) \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G'_k(\rho, \omega, y) \widehat{D^{\alpha+\beta}} \varphi_j(\xi) \right] (x)$$

et en tenant compte de (4.2.33) et (4.2.34)

$$(4.2.36) \quad D^q(D^p(u_{jk\varepsilon}^1(x, y) - v_{jk\varepsilon}(x, y))) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{\beta_0-j+1} (\varepsilon\rho) \right. \\ \left. (C_{jk}(\varepsilon\rho\omega) \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G'_k(\rho, \omega, y) + \beta_{jk}(\omega) \sum_{i=1}^{m_0} B_{ik}(\varepsilon\rho, \omega, \rho y) e^{-\alpha_i(\omega)\rho y} + \right. \\ \left. + (\varepsilon\rho) C_{jk}(\varepsilon\rho\omega) \sum_{i=1}^{m_0} B_{ik}(\varepsilon\rho, \omega, \rho y) \widehat{D^{\alpha+\beta}} \varphi_j(\xi) \right] (x) .$$

$$\text{Or } \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G'(\rho, \omega, y) = \sum_{i=1}^{m_0} E_{ik}(\rho y, \rho \omega) e^{-\alpha_i(\omega)\rho y} \quad (\text{Théorème des résidus}).$$

Donc (4.2.36) devient :

$$(4.2.37) \quad D^q(D^p(u_{jke}^1(x, y) - v_{jke}(x, y))) = \int_{\xi} \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{\beta_0-j+1}(\varepsilon\rho) \left(\sum_{i=1}^{m_0} F_{ik}(\rho y, \varepsilon\rho\omega) e^{-\alpha_i(\omega)\rho y} \widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi) \right) \right] (x)$$

où les $F_{ik}(\rho y, \rho\omega)$ sont des polynômes en ρy dont les coefficients sont bornés pour $\varepsilon\rho \leq a$.

Montrons qu'alors chacun des termes composant (4.2.37) converge vers zéro pour $|q| \leq m_0$ et $|p| \leq r$ dans $L^2(\mathbb{R}_+^n)$. Or d'après la formule de Plancherel la norme L^2 de chacun de ces termes au carré est majoré par :

$$(4.2.38) \quad C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{2\beta_0-2j+2}(\varepsilon\rho)^2 \int_0^\infty |F_{ik}(\rho y, \varepsilon\rho\omega)|^2 e^{-2\alpha_i(\omega)\rho y} dy |\widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varepsilon \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho) \rho^{-2j+1} \rho^{1+2|p|+2|q|} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi .$$

$$\text{Et comme } \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho) \leq a \quad \text{et} \quad \frac{\rho^{2|p|+2|q|+1}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \leq C \quad \text{pour } |p| \leq r \quad \text{et} \quad |q| \leq m_0 .$$

D'où :

$$(4.2.39) \quad \|D^q(D^p(u_{jke}^1 - v_{jke}))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2j+1} (1+\rho^2)^{m_1+r} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi .$$

Et comme l'intégrale est finie par hypothèse :

$$(4.2.40) \quad \|u_{jke}^1 - v_{jke}\|_{T^{m_0, r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon .$$

Donc si l'on réunit les résultats donnés par les lemmes (2.1) à (2.5) on a la première affirmation du théorème avec l'inégalité (4.2.7) .

Montrons maintenant la deuxième inégalité. Pour cela il suffit de reprendre les lemmes précédents en introduisant ε^{m_1} .

Du résultat du lemme 2.1 il est clair que l'on a :

$$(4.2.41) \quad \|\varepsilon^{m_1} u_{j\varepsilon}^2(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon^{2m_1} \quad j \leq m_1 .$$

Lorsque $j \leq m_0$ et $k \geq m_0+1$, l'inégalité (4.2.19) donne :

$$\varepsilon^{2m_1} \|D^q(D^p u_{jk\varepsilon}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon^{2m_1+2m_0+1-2\beta_0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho \times \rho^{-2j+1} \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2\beta_0+2m_0}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \left[(1+\rho^2)^{m_1+r} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \right] .$$

Comme $2m_0+1 \geq 0$ on a $\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{2m_0+1} \leq a^{2m_0+1}$. De plus $2m_1-2\beta_0 \geq 0$

si $\beta_0 \leq m_1$ et $0 \leq 2|q| - 2\beta_0 \leq 2m_1$ donc :

$$\frac{\rho^{2|p|+2|q|-2\beta_0}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \leq C \text{ et on aura :}$$

$$(4.2.42) \quad \varepsilon^{2m_1} \|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2j+1} (1+\rho^2)^{m_1+r} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi .$$

Lorsque $j \geq m_0+1$ et $k \geq m_0+1$, l'inégalité (4.2.22) donne :

$$\varepsilon^{2m_1} \|D^q(D^p u_{jk\varepsilon}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C\varepsilon \times \varepsilon^{2j-2+2m_1-2\beta_0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_0} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi$$

On introduit alors $\chi\left(\frac{\rho}{a}\right)$ et $1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)$ et comme pour $\rho < a$

$$\chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_0} \leq a^{2|p|+2|q|-2\beta_0}$$

et $\varepsilon^{2j-2+2m_1-2\beta_0} \leq 1$.

Le premier terme de la décomposition sera majoré par $C\varepsilon$ et le deuxième terme peut s'écrire :

$$C \varepsilon^{2j-1+2m_1-2\beta_0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2\beta_0-2j+1}}{(1+\rho^2)^{m_1+r-j+m_0}} \times \rho^{2j-1} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi .$$

Or $\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{2j-1} \leq a^{2j-1}$ et $2m_1 - 2\beta_0 \geq 0$ et

$$(1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2m_0-2\beta_0}}{(1+\rho^2)^{m_1+r-j+m_0}} \leq C .$$

D'où :

$$(4.2.43) \quad \varepsilon^{2m_1} \|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C .$$

Lorsque $j \geq m_0+1$ et $k \leq m_0$, l'inégalité (4.2.28) donne, en introduisant $\chi\left(\frac{\rho}{a}\right)$ et $(1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right))$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{2m_1} \|D^q(D^p u_{jk\varepsilon}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \\ & \leq C \varepsilon^{2m_1+2j-2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{-2m_0+2} \rho^{2\beta_0-1} \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_0} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \\ + C & \varepsilon^{2m_1+2j-2m_0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{2j-2m_0} \rho^{-2m_0+1} \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2m_0}}{(1+\rho^2)^{m_1+r-j+m_0}} \\ & (1 + \rho^2)^{m_1+r-j+m_0} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi . \end{aligned}$$

Comme $2j - 2m_0 > 0$, $\varepsilon^{2j-2m_0} \leq 1$ et $\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{2j-2m_0} \leq a^{2j-2m_0}$

$$(4.2.44) \quad \varepsilon^{2m_1} \|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon^{2m_1} .$$

Et finalement lorsque $j \leq m_0$ et $k \leq m_0$, on a :

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{2m_1} \|D^q(D^p u_{jk\varepsilon}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \\ & \leq C \varepsilon^{2j+2m_1-2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{-2j+2} \rho^{-1+2\beta_0} \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_0} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \\ & \leq C \varepsilon^{2m_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2j+1} \frac{\rho^{|p|+2|q|}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} (1+\rho^2)^{m_1+r} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

et donc :

$$(4.2.45) \quad \varepsilon^{2m_1} \|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon^{2m_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2j+1} (1+\rho^2)^{m_1+r} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi .$$

Ce qui achève ainsi la démonstration du théorème.

Remarque 4.2.1. - La démonstration précédente montre que la convergence a lieu dans l'espace de la solution du problème perturbé et qu'en général on ne peut pas avoir mieux. Et pourtant les hypothèses sur les $\varphi_j(x)$ entraînent à cause du corollaire 3.3.2 que la solution du problème limite appartient à $T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)$.

De même on voit que la convergence n'est pas la même pour tous les termes composant la solution du problème perturbé. Le lemme 2.1 montre que la partie au voisinage de l'infini converge faiblement dans $T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)$. De même lorsque $j,k \leq m_0$ on montre en raffinant un peu les majorations de la démonstration du lemme 2.5 que les $u_{jk\varepsilon}^1(x,y)$ convergent faiblement dans $T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)$ vers $u_{jk}(x,y)$. En effet de (4.2.38) on tire :

$$\|D^q(D^p(u_{jk\varepsilon}^1 - v_{jk\varepsilon}))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^2 \rho^{-2j+1} \rho^{2\beta_0+2|p|+2|q|-2\beta_0} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi$$

et

$$\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^2 \leq a^2 \chi\left(\frac{\rho}{a}\right); \frac{\rho^{2|p|+2|q|}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \leq C \text{ si } |q| \leq m_1 \text{ et } |q| \leq r$$

donc

$$(4.2.46) \quad \|u_{jk\varepsilon}^1(x,y) - v_{jk\varepsilon}(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C .$$

De plus (4.2.31) donne :

$$\|D^q(D^p w_{jk\varepsilon}(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right))^2 \rho^{2|p|+2|q|+1-2j} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi$$

et $2|p| + 2|q| - 2j + 1 \leq 2m_1 + 2r - 2j + 1$ entraîne que :

$$(4.2.47) \quad \|w_{jk\varepsilon}(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C .$$

(4.2.46) et (4.2.47) montre donc que $u_{jk\epsilon}^1(x,y) - u_{jk}(x,y)$ est borné dans $T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$, donc on peut extraire une sous suite que l'on note pareil qui convergera faiblement dans $T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$, cette limite ne pouvant être que zéro puisque l'on a déjà la convergence forte vers zéro dans $T^{m_0, r}(\mathbb{R}_+^n)$.

On peut remarquer que si l'on ajoute une hypothèse de régularité à l'infini soit $\varphi_j(x) \in H^{m_1+r-j+1}(\mathbb{R}^{n-1})$ ($j \leq m_0$) on a convergence forte dans $T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)$ et

$$\|u_{jk\epsilon}^1(x,y) - u_{jk}(x,y)\|_{T^{m_1, r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \epsilon^{1/2}.$$

Si l'on considère le cas où $j \geq m_0+1$ et $k \leq m_0$. On réécrit (4.2.29) comme suit :

$$\begin{aligned} \|D^q(D^p u_{jk\epsilon}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \chi^2\left(\frac{\epsilon\rho}{a}\right) (\epsilon\rho)^{2j-2m_0} \rho^{-2j+1} \rho^{2|p|+2|q|} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \\ &+ C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \chi^2\left(\frac{\epsilon\rho}{a}\right) (\epsilon\rho)^{2j-2m_0} \rho^{-2j+1} \rho^{2|p|+2|q|} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

On peut alors majorer le premier terme en tenant compte que :

$$\chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \chi^2\left(\frac{\epsilon\rho}{a}\right) \rho^{2|p|+2|q|} \leq a^{2|p|+2|q|} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

par :

$$C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \epsilon^{2j-2m_0} \rho^{-2m_0+1} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad \text{par hypothèse et le}$$

deuxième terme est majoré en tenant compte que

$$(1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \chi^2\left(\frac{\epsilon\rho}{a}\right) (\epsilon\rho)^{2j-2m_0} \leq (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) a^{2j-2m_0}$$

par :

$$C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) (1+\rho^2)^{m_1+r-2j+1} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad \text{par hypothèse.}$$

Donc $\|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C$ et comme précédemment on peut extraire une sous suite convergeant vers zéro dans $T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)$, la convergence étant forte si l'on suppose pour $j \geq m_0+1$ $\varphi_j(x) \in H^{m_1+r-j+1}(\mathbb{R}^{n-1})$ et l'on a alors :

$$(4.2.48) \quad \|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2} .$$

Par contre lorsque $j \leq m_0$ et $k \geq m_0+1$ d'une part et $j \geq m_0+1$ et $k \geq m_0+1$ d'autre part, c'est-à-dire les termes dits frontières, il n'y a pas d'espoir en général d'avoir une convergence dans un espace plus régulier que $T^{m_0,r}(\mathbb{R}_+^n)$, car ces termes contiennent des facteurs du type $e^{-\beta_i \frac{y}{\varepsilon}}$ et chaque dérivation en y introduit un facteur $\frac{1}{\varepsilon}$. Ce phénomène est dû au fait que la solution du problème limite a des dérivées en y qui sur la frontière $y = 0$ sont égales à $\varphi_j(x)$ pour $j \leq m_0$ mais en général sont différentes de $\varphi_j(x)$ pour $m_0+1 \leq j \leq m_1$. On verra sur des exemples dans le chapitre suivant que les termes frontières pour $j \leq m_0$ correspondent aux $\frac{\partial^{j-1}}{\partial u^{j-1}}(x,0)$ pour $j \geq m_0+1$ et les termes frontières pour $j \geq m_0+1$ correspondent aux $\varphi_j(x)$ pour $j \geq m_0+1$.

Exemples

Exemple 1. - On considère le problème :

$$(5.1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = 0 & y > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique associé à l'opérateur $-\Delta + I$ est, avec les notations du chapitre II :

$$(5.1.2) \quad \mathbb{L}(\bar{\xi}) = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 + 1 \quad .$$

Ici $2m_1 = 2$ et $2m_0 = 0$ c'est-à-dire $m_1 = 1$ et $m_0 = 0$. Nous sommes donc dans le cas traité dans le paragraphe 3.2 du chapitre III.

Vérifions les différentes hypothèses I, II, III, IV

$$H \ 1.- \quad \operatorname{Re} \mathbb{L}(\bar{\xi}) = \mathbb{L}(\bar{\xi}) = |\bar{\xi}|^{2m_1} + |\bar{\xi}|^0 \quad \forall \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n \quad .$$

On a toujours avec les notations du chapitre II :

$$\mathbb{L}_1(\bar{\xi}) = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{L}_0(\bar{\xi}) = 1$$

et en posant $L(\xi, \eta) = \mathbb{L}(\xi, i\eta)$

$$(5.1.3) \quad L(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 - \eta^2 + 1$$

$$(5.1.4) \quad L_1(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 - \eta^2$$

$$(5.1.5) \quad L_0(\xi, \eta) = 1 \quad .$$

H 2.- Soit $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec $|\omega| = 1$, on a $L_0(\omega, \alpha) = 1$ et $L_1(\omega, \gamma) = 1 - \gamma^2$.
 Il existe donc bien de manière évidente $m_1 = 1$ racine, $\gamma(\omega) = 1$ de $L_1(\omega, \gamma) = 0$ avec partie réelle positive et exactement $m_0 = 0$ racine $\alpha_i(\omega)$ de $L_0(\omega, \alpha) = 0$

H 3.- La racine $\eta(\xi)$ de $L(\xi, \eta) = 0$ est donnée par

$$(5.1.6) \quad \eta(\xi) = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2} \in \mathbb{R}_*^+ \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1} .$$

Cette racine est analytique en tout $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Opérateur frontière.-

Il est clair que $B(\xi, \eta) = 1$ c'est-à-dire $\mu = d^\circ B = 0$ et donc :

H 4.- $L^+(\xi, \tau) \equiv \tau + \eta(\xi)$ et $L_1^+(\xi, \tau) \equiv \tau + \gamma \equiv \tau + 1$, donc :

$$B(\xi, -\tau) = 1 = [\tau + \eta(\xi)] \times 0 + 1 \text{ c'est-à-dire}$$

$$B(\xi, -\tau) \neq 0 \text{ mod } (L_1^+(\xi, \tau)) .$$

Comme il n'y a qu'une seule racine nous sommes bien dans le cas de racines simples traité au chapitre II paragraphe 6. D'autre part comme $m_0 = 0$, il n'y aura pas de discontinuité à l'origine et donc le noyau associé au problème (5.1.1) sera donné par :

$$(5.1.7) \quad K(x, y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-y\sqrt{\rho^2+1}} e^{ix\xi} d\xi .$$

Il lui correspond alors la solution du problème (5.1.1), par exemple avec $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$(5.1.8) \quad u(x, y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-y\sqrt{\rho^2+1}} e^{i(x-\tau)\xi} \varphi(\tau) d\tau d\xi .$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$(5.1.9) \quad u(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi} (e^{-y\sqrt{1+\rho^2}} \widehat{\varphi}(\xi)) (x) .$$

Comme $m_0 = 0$, on aura, pour $\varphi \in H^{r+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, le théorème 3.2.1 c'est-à-dire que $u(x,y) \in T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)$ donnée par (5.1.9) est l'unique solution du problème (5.1.1). De plus un calcul direct dans cet exemple particulier donne l'égalité :

$$(5.1.10) \quad \|u(x,y)\|_{T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)} = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \|\varphi\|_{H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

Considérons alors le problème perturbé associé, à savoir :

$$(5.1.11) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_{\varepsilon} + u_{\varepsilon} = 0 \\ u_{\varepsilon}(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

dont une solution est donnée par :

$$(5.1.12) \quad u_{\varepsilon}(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi} (e^{-y/\varepsilon \sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}} \widehat{\varphi}(\xi)) (x) .$$

On suppose $\varphi \in H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$, on a alors les résultats du théorème 4.2.1 à savoir :

$$u_{\varepsilon}(x,y) \rightarrow 0 \text{ dans } T^{0,r}(\mathbb{R}_+^n) \text{ et on a les inégalités :}$$

$$(5.1.13) \quad \|u_{\varepsilon}(x,y)\|_{T^{0,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2}$$

$$(5.1.14) \quad \|\varepsilon u_{\varepsilon}(x,y)\|_{T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C .$$

Par contre on n'aura pas la convergence vers zéro dans $T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)$, mais on aura un correcteur en prenant le premier terme du développement de $u_{\varepsilon}(x,y)$ et ceci seulement pour $\varepsilon\rho \leq a$ où a est un réel positif. On pose

$$(5.1.16) \quad \theta_\varepsilon(x, y) = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-y/\varepsilon} \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) e^{ix\xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \quad .$$

Remarque 1.1. - Le plus souvent on omettra le terme $\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right)$, mais il faudra faire des hypothèses supplémentaires de régularité à l'infini sur $\varphi(x)$. Dans ce cas $\theta_\varepsilon(x, y) = \varphi(x) e^{-y/\varepsilon}$.

Théorème 1.1. - Si $\varphi(x) \in H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$, $u_\varepsilon(x, y) - \theta_\varepsilon(x, y)$ converge faiblement vers zéro dans $T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et si $\varphi \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ on a alors la convergence forte dans $T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)$ avec l'inégalité $\|u_\varepsilon - \theta_\varepsilon\|_{T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2}$.

Preuve :

$$(5.1.16)' \quad u_\varepsilon(x, y) - \theta_\varepsilon(x, y) = \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (e^{-y/\varepsilon \sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}} - e^{-y/\varepsilon}) \widehat{\varphi}(\xi) \right] (x) \\ + \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[((1 - \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right)) e^{-y/\varepsilon \sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}} \widehat{\varphi}(\xi)) \right] (x)$$

Nous allons nous placer dans le cas le plus défavorable pour la convergence c'est-à-dire la dérivation maximum en y qui sera ici d'ordre 1. Soit :

$$(5.1.17) \quad D^p \frac{\partial}{\partial y} (u_\varepsilon^1 - \theta_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} e^{-y/\varepsilon \sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}} + e^{-y/\varepsilon}) D^p \widehat{\varphi}(\xi) \right] (x)$$

où $p = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ et $|p| < r$.

Le théorème de Plancherel entraîne donc :

$$(5.1.18) \quad \|D^p \frac{\partial}{\partial y} (u_\varepsilon^1 - \theta_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 = \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \left[\int_0^\infty (-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} e^{-y/\varepsilon \sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}} + e^{-y/\varepsilon})^2 dy \right] |\widehat{D^p \varphi}(\xi)|^2 d\xi$$

Calculons déjà l'intégrale en y , en développant le carré, on obtient :

$$\varepsilon(2 + (\varepsilon\rho)^2 - 2\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}) = \varepsilon(\varepsilon\rho)^2 C(\varepsilon\rho) \quad .$$

Où $C(\varepsilon_0) = O(\varepsilon_0)$ et donc bornée au voisinage de 0 c'est-à-dire $\varepsilon_0 < a$.

D'où en reportant dans (5.1.18)

$$(5.1.19) \quad \|D^p \frac{\partial}{\partial y} (u_\varepsilon^1 - \theta_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varepsilon \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) (\varepsilon \rho)^2 C(\varepsilon \rho) |\widehat{D^p \varphi}(\xi)|^2 d\xi$$

et comme $\chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right)$ $\varepsilon \rho < a$ on aura :

$$(5.1.20) \quad \|D^p \frac{\partial}{\partial y} (u_\varepsilon^1 - \theta_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 < C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho |\widehat{D^p \varphi}(\xi)|^2 d\xi < C'$$

(par hypothèse sur φ) et donc $u_\varepsilon^1 - \theta_\varepsilon$ est borné dans $T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)$ donc admet une sous suite faiblement convergente et sa limite ne peut être que zéro.

Ce qui donne le premier résultat puisque le terme

$$u_\varepsilon^2(x,y) = \overline{\int}_\xi \left[(1 - \chi\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) e^{-y/\varepsilon \sqrt{1+(\varepsilon \rho)^2}} \widehat{\varphi}(\xi) \right] (x)$$

est borné dans $T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)$ d'après le lemme (4.2.1).

Le second résultat vient de ce que si $\varphi \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})$, (5.1.19) donne :

$$(5.1.21) \quad \|D^p \frac{\partial}{\partial y} (u_\varepsilon^1 - \theta_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^2 |\widehat{D^p \varphi}(\xi)|^2 d\xi < C' \varepsilon$$

Remarque 1.2. - On voit aussi que le correcteur donné par (5.1.16) est un correcteur comme il est défini dans le chapitre I, définition (1.4.10). En effet

$$(5.1.22) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_\varepsilon + \theta_\varepsilon = -\varepsilon^2 \Delta_x \theta_\varepsilon(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} \theta_\varepsilon(x,y) = \ell^\varepsilon(x) = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix\xi} \chi\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) \widehat{\varphi}(x) d\xi \end{cases}$$

Posons donc $G_{\varepsilon 1} = -\Delta_x \theta_\varepsilon(x,y)$ et $G_{\varepsilon 2} = 0$, on aura :

$$\|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-1,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 = \sum_{|p| \leq r} \int_0^\infty e^{-2y/\varepsilon} dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) \frac{\rho^4}{(1+\rho^2)} |\widehat{D^p \varphi}(\xi)|^2 d\xi$$

Comme $\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right)(\varepsilon\rho) \leq a$ et $\varphi \in H^{r+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, on aura après intégration en y

$$(5.1.23) \quad \begin{aligned} \text{a) } \|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-1,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 &\leq C \quad \text{ou si } \varphi \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ \text{b) } \|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-1,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 &\leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Considérons alors

$$\begin{aligned} \|\ell^\varepsilon - \varphi\|_{H^{r+1/2}}^2 &= \|(2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \overline{\mathcal{F}}_\xi \left((1 - \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right)) \widehat{\varphi}(\xi) \right)(x)\|_{H^{r+1/2}}^2 \\ &= \sum_{|p| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right))^2 (1 + \rho^2)^{r+1/2} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

On voit que cette quantité tend vers zéro quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (théorème de convergence dominée de Lebesgue).

Mais pour avoir l'hypothèse du théorème 4.2, il faut que cette quantité soit $O(\varepsilon^{1/2})$, ce que l'on aura dès que l'on suppose $\varphi(x) \in H^{1+r}(\mathbb{R}_+^n)$, car :

$$\|\ell^\varepsilon - \varphi\|_{H^{r+1/2}}^2 = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right))^2 (\varepsilon\rho)^{-1} \rho (1 + \rho^2)^{r+1/2} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$$

et comme $(1 - \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right))^2 (\varepsilon\rho)^{-1} < \left(\frac{a}{2}\right)^{-1}$ on a $\|\ell^\varepsilon - \varphi\|_{H^{r+1/2}}^2 \leq C\varepsilon$.

Dans ce cas puisque l'on a (5.1.23) b), on est dans les hypothèses de la remarque 1.4.2 et on la convergence forte du $u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)$ vers zéro dans $T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)$. Le théorème 1.1 ci-dessus est donc un peu plus fort.

Exemple 2. - On considère le problème :

$$(5.2.1) \quad \begin{cases} \Delta^2 u - \Delta u = 0 & (x,y) \in \mathbb{R}_+^n \\ u(x,0) = \varphi_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \varphi_2(x) \end{cases}.$$

Le polynôme caractéristique associé à l'opérateur $\Delta^2 - \Delta$ est alors :

$$(5.2.2) \quad \mathbb{L}(\bar{\xi}) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^2 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \left[\sum_{i=1}^n \xi_i^2 + 1 \right].$$

Le degré de ce polynôme est donc $2m_1 = 4$ et le degré d'ordre le plus petit est $2m_0 = 2$. Donc ici $m_1 = 2$ et $m_0 = 1$.

Vérifions les différentes hypothèses I, II, III, IV

H 1.- $\operatorname{Re} \mathbb{L}(\bar{\xi}) = \mathbb{L}(\bar{\xi}) = |\bar{\xi}|^4 + |\bar{\xi}|^2 \quad \forall \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$ donc bien vérifié.

Posons $\mathbb{L}_1(\bar{\xi}) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^2$ et $L_0(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$

On écrit alors :

$$(5.2.3) \quad L(\xi, \eta) \equiv \mathbb{L}(\xi, i\eta) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 - \eta^2 \right) \left[\sum_{j=1}^n \xi_j^2 + 1 - \eta^2 \right]$$

$$(5.2.4) \quad L_1(\xi, \eta) \equiv \left(\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 - \eta^2 \right)^2$$

$$(5.2.5) \quad L_0(\xi, \eta) \equiv \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 - \eta^2.$$

H 2.- Soit $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec $|\omega| = 1$. $L_0(\omega, \alpha) = 1 - \alpha^2$ et $L_1(\omega, \gamma) = (1 - \gamma^2)^2$.

Il existe donc bien exactement 2 racines $\gamma(\omega) = 1$ (racine double) de $L_1(\omega, \gamma) = 0$ avec partie réelle positive et exactement 1 racine $\alpha(\omega) = 1$ de $L_0(\omega, \alpha) = 0$ avec partie réelle positive.

H 3.- Les racines $\eta_i(\xi)$ de $L(\xi, \eta) = 0$ sont données par :

$$(5.2.6) \quad \eta_1(\xi) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2} \quad \text{et} \quad \eta_2(\xi) = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2} \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Elles sont manifestement analytiques en $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Opérateurs frontières.

Ce sont les opérateurs de Dirichlet, donc :

$$(5.2.7) \quad \begin{cases} B_1(\xi, \eta) = 1 & \mu_1 = d^\circ B_1 = 0 \\ B_2(\xi, \eta) = -\eta & \mu_2 = d^\circ B_2 = 1 \end{cases} .$$

H 4.- Nous définissons :

$$(5.2.8) \quad L^+(\xi, \tau) = (\tau + \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2}) (\tau + \sqrt{1 + \xi_j^2})$$

$$(5.2.9) \quad L^+(\omega, \tau) = (\tau + 1)^2$$

Comme $B_1(\xi, -\tau) = 1 = 0 \times L^+(\xi, \tau) + 1$

$$B_2(\xi, -\tau) = \tau = 0 \times L^+(\xi, \tau) + \tau .$$

$$d(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Donc les $B_j(\xi, \tau)$ comme polynômes en τ sont linéairement indépendants modulo $L^+(\xi, \tau)$.

Nous sommes encore dans le cas où les racines du polynôme caractéristique sont simples et où les $A_{jk}(\rho\omega)$ sont sans singularités à l'origine. On peut donc écrire les noyaux de Poisson associés à $\Delta^2 - \Delta$ en utilisant la formule (2.6.6)

$$(5.2.10) \quad K_1(x, y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{1 + \rho^2} (\sqrt{1 + \rho^2} + \rho) e^{-\rho y} e^{ix\xi} d\xi - \\ - (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\sqrt{1 + \rho^2} + \rho) e^{-\sqrt{1+\rho^2}y} e^{ix\xi} d\xi .$$

$$(5.2.11) \quad K_2(x, y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\sqrt{1 + \rho^2} + \rho) e^{-\rho y} e^{ix\xi} d\xi - \\ - (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\sqrt{1 + \rho^2} + \rho) e^{-\sqrt{1+\rho^2}y} e^{ix\xi} d\xi .$$

Il leur correspond alors la solution du problème (5.2.1) , par exemple pour $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$

$$(5.2.12) \quad u(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left[(\sqrt{1+\rho^2} + \rho) \left[(\sqrt{1+\rho^2} e^{-\rho y} - \rho e^{-\sqrt{1+\rho^2} y}) \widehat{\varphi}_1(\xi) + (e^{-\rho y} - e^{-\sqrt{1+\rho^2} y}) \widehat{\varphi}_2(\xi) \right] \right] (x) .$$

Le théorème 3.1.3 donne alors :

$$\text{Si } |\varphi_1|_{-1/2, H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^* < \infty \quad \text{et} \quad |\varphi_2|_{-1/2, H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^* < \infty$$

$u(x,y) \in T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)$ est solution du problème (5.2.1).

Considérons alors le problème perturbé associé, à savoir :

$$(5.2.13) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \Delta^2 u_{\varepsilon} - \Delta u_{\varepsilon} = 0 \\ u_{\varepsilon}(x,0) = \varphi_1(x) \\ \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y}(x,0) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

On a une solution de ce problème donnée par :

$$u_{\varepsilon}(x,y) = \sum_{i=1,2} \sum_{k=1,2} u_{ik\varepsilon}(x,y) \quad \text{où}$$

$$(5.2.14) \quad u_{11\varepsilon}(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left[\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} (\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) e^{-\rho y} \widehat{\varphi}_1(\xi) \right] (x)$$

$$(5.2.15) \quad u_{12\varepsilon}(x,y) = - \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left[\varepsilon\rho (\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} y} \widehat{\varphi}_1(\xi) \right] (x)$$

$$(5.2.16) \quad u_{21\varepsilon}(x,y) = \varepsilon \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left[(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) e^{-\rho y} \widehat{\varphi}_2(\xi) \right] (x)$$

$$(5.2.17) \quad u_{22\varepsilon}(x,y) = - \varepsilon \overline{\mathcal{F}}_{\xi} \left[(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} y} \widehat{\varphi}_2(\xi) \right] (x)$$

Dans les hypothèses sur φ_1 et φ_2 ci-dessus, on a le théorème 4.2.1, à savoir :

$u_\varepsilon(x,y) \rightarrow u(x,y)$ dans $T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et on a les inégalités :

$$(5.2.18) \quad \|u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)\|_{T^{1,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2}$$

$$(5.2.19) \quad \|\varepsilon^2 u_\varepsilon(x,y)\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C$$

où $u(x,y)$ est la solution du problème limite :

$$(5.2.20) \quad \begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \\ u(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

donnée par :

$$(5.2.21) \quad u(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_\xi(e^{-\rho y} \hat{\varphi}_1(\xi))(x) \quad (\text{cf. 3.3.7}) .$$

Par contre nous n'aurons pas l'Alsace-Lorraine dans $T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)$, on sera obligé pour cela d'introduire des correcteurs. On prendra le premier terme du développement de $u_{\varepsilon j 2}(x,y)$ et ceci seulement pour $\varepsilon \rho < a$ où a est un réel positif arbitraire et pour $j = 1, 2, \dots$. On pose donc :

$$(5.2.22) \quad \begin{aligned} \theta_\varepsilon(x,y) = & - \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) (\varepsilon \rho) e^{-y/\varepsilon} \hat{\varphi}_1(\xi) \right] (x) - \\ & - \varepsilon \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) e^{-y/\varepsilon} \hat{\varphi}_2(\xi) \right] (x) . \end{aligned}$$

Remarque 2.1. - Le plus souvent on omettra $\chi\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right)$, mais il faudra faire des hypothèses supplémentaires de régularité à l'infini sur $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$. Dans ce cas là le correcteur prend la forme :

$$(5.2.23) \quad \theta_\varepsilon(x, y) = \varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) - \varphi_2(x) \right] e^{-y/\varepsilon} .$$

On voit donc que l'on corrige la perte de la condition aux limites $u_2(x, 0) = \varphi_2(x)$; la correction n'ayant plus lieu si $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \varphi_2(x)$.

Théorème 2.1. - Si $|\varphi_1|_{-1/2, H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^* < \infty$ et $|\varphi_2|_{-1/2, H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^* < \infty$,

$u_\varepsilon(x, y) - (u(x, y) + \theta_\varepsilon(x, y))$ converge faiblement vers zéro dans $T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et si de plus $\varphi_1 \in H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $\varphi_2 \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ on a convergence forte vers zéro dans $T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)$ avec l'inégalité :

$$\|u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \varepsilon^{1/2} .$$

Preuve : Décomposons d'abord $u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)$ comme suit :

$$(5.2.24) \quad u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon) = (u_{11\varepsilon} - u) + u_{21\varepsilon} + (u_{12\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^1) + \\ + (u_{22\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^2) + u_{12\varepsilon}^2 + u_{22\varepsilon}^2$$

où $u_{j2\varepsilon}^1$ et $u_{j2\varepsilon}^2$ pour $j = 1, 2$ correspondent respectivement à l'introduction de $1 = \chi(\frac{\varepsilon \rho}{a}) + (1 - \chi(\frac{\varepsilon \rho}{a}))$ dans $u_{j2\varepsilon}$.

La remarque 4.2.1 nous donne déjà les inégalités :

$$(5.2.25) \quad \|u_{11\varepsilon} - u\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C$$

$$(5.2.26) \quad \|u_{21\varepsilon}\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C$$

et le lemme 4.2.1

$$(5.2.27) \quad \|u_{12\varepsilon}^2\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C$$

$$(5.2.28) \quad \|u_{22\varepsilon}^2\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C .$$

Il reste donc deux termes à évaluer dans $T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)$. Pour cela plaçons-nous dans le cas le plus défavorable à savoir pour des dérivations du second ordre en y . On a d'une part :

$$(5.2.29) \quad u_{12\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^1 = - \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} \frac{y}{\varepsilon}} - \varepsilon\rho e^{-y/\varepsilon} \widehat{\varphi}_1(\xi) \right] (x) .$$

Donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} D^p(u_{12\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^1) = - \frac{1}{\varepsilon} \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) ((1+(\varepsilon\rho)^2) \rho(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} \frac{y}{\varepsilon}} - \rho e^{-y/\varepsilon} \widehat{D^p \varphi}_1(\xi) \right] (x)$$

Le théorème de Plancherel entraîne :

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial y^2} D^p(u_{12\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^1) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 = \frac{2^{n+1}}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\dots)^2 |\widehat{D^p \varphi}_1(\xi)|^2 d\xi d\tau$$

or :

$$\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} \leq 1 + \left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right)^2 \quad \text{et} \quad e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} \frac{y}{\varepsilon}} \leq e^{-y/\varepsilon} \quad \text{donne :}$$

$$(\dots)^2 \leq \varepsilon^2 \rho^4 P(\varepsilon\rho) e^{-y/\varepsilon} \quad \text{où } P(\varepsilon\rho) \text{ est un polynôme en } \varepsilon\rho .$$

Et après intégration en y on aura :

$$(5.2.29)' \quad \left\| \frac{\partial^2}{\partial y^2} D^p(u_{12\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^1) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho) P(\varepsilon\rho) \rho^3 |\widehat{D^p \varphi}_1(\xi)|^2 d\xi .$$

$$\text{Et comme } \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho) P(\varepsilon\rho) \leq a P(a) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^3 |\widehat{D^p \varphi}_1(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad \text{pour}$$

$|p| \leq r$ par hypothèse, on a finalement :

$$(5.2.30) \quad \|u_{12\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^1\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C .$$

On a d'autre part :

$$(5.2.31) \quad u_{22\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^2 = -\varepsilon \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \left[(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} \frac{y}{\varepsilon}} - e^{-y/\varepsilon} \right] \widehat{D\varphi_2}(\xi) \right] (x)$$

donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} D^P(u_{22\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^2) = -\frac{1}{\varepsilon} \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (1+(\varepsilon\rho)^2) (\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} \frac{y}{\varepsilon}} - e^{-y/\varepsilon} \right] \widehat{D\varphi_2}(\xi) \Big] (x) .$$

Le théorème de Plancherel entraîne :

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial y^2} D^P(u_{22\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^2) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 = \frac{2^{n+1}}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\dots)^2 |\widehat{D^P\varphi_2}(\xi)|^2 d\xi dy .$$

Et comme précédemment on a la majoration :

$$(\dots)^2 \leq \varepsilon^2 \rho^2 P'(\varepsilon\rho) e^{-y/\varepsilon}$$

et après intégration en y :

$$(5.2.31)' \quad \left\| \frac{\partial^2}{\partial y^2} D^P(u_{22\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^2) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho) P'(\varepsilon\rho) \rho |\widehat{D\varphi_2}(\xi)|^2 d\xi .$$

Comme :

$$\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho) P'(\varepsilon\rho) \leq a P'(a) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho |\widehat{D\varphi_2}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

on aura finalement :

$$(5.2.32) \quad \|u_{22\varepsilon}^1 - \theta_\varepsilon^2\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C .$$

On réunit alors les résultats (5.2.25) (5.2.26) (5.2.27) (5.2.28) (5.2.30) et (5.2.32), ce qui donne :

$$\|u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C .$$

Donc on peut en extraire une sous suite convergeant faiblement dans $T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)$ vers une limite qui ne peut être que zéro.

Si l'on ajoute les hypothèses de régularité $\varphi_1 \in H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $\varphi_2 \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ la remarque 4.2.1 entraîne la convergence forte vers zéro dans $T^{2,r}(\mathbb{R}_+^n)$ des deux premiers termes de la somme (5.2.24). Celle des deux derniers termes étant donnée par (5.2.27) et (5.2.28). Quant aux autres termes il suffit de reprendre les inégalités (5.2.29)' et (5.2.31)' en conservant alors le terme $\varepsilon\rho$ donnant ainsi un ε pour la convergence et le ρ ajouté ne gêne pas la convergence de l'intégrale à l'infini à cause de l'hypothèse de régularité supplémentaire des $\varphi_j(x)$. On voit aussi que dans ce cas on peut supprimer $\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a})$ dans $\theta_\varepsilon(x,y)$ et donc prendre l'expression (5.2.23).

Remarque 2.2. - Si l'on considère $\theta_\varepsilon(x,y)$ défini en (5.2.22), on voit que c'est une solution du problème aux limites :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta^2 \theta_\varepsilon - \Delta \theta_\varepsilon &= \varepsilon^2 G_{\varepsilon 1} + \varepsilon G_{\varepsilon 2} \\ (5.2.33) \quad \theta_\varepsilon(x,0) &= -\varepsilon \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\rho \widehat{\varphi}_1(\xi) + \widehat{\varphi}_2(\xi)) \right] (x) = \ell_{0\varepsilon}(x) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial y}(x,0) = \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\rho \widehat{\varphi}_1(\xi) + \widehat{\varphi}_2(\xi)) \right] (x) = \ell_{1\varepsilon}(x)$$

où

$$(5.2.34) \quad G_{\varepsilon 1} = -e^{-y/\varepsilon} \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^4 (\varepsilon \rho \widehat{\varphi}_1(\xi) + \widehat{\varphi}_2(\xi)) \right] (x)$$

$$(5.2.35) \quad G_{\varepsilon 2} = e^{-y/\varepsilon} \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^2 (\rho \widehat{\varphi}_1(\xi) + \widehat{\varphi}_2(\xi)) \right] (x) .$$

Regardons maintenant si nous sommes dans les hypothèses du théorème 1.4.2 pour θ_ε .

$$a) \quad \|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-2,r}(\mathbb{R}_+^n)} \leq M .$$

$$\begin{aligned}
(5.2.36) \quad \|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-2}, r(\mathbb{R}_+^n)}^2 &= \sum_{|p| \leq r} \|(1 + \rho^2)^{-1} \mathcal{F}_x D^p G_{\varepsilon 1}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \\
&\leq \sum_{|p| \leq r} \int_0^\infty e^{-2y/\varepsilon} dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) \frac{\rho^8}{(1+\rho^2)^2} (\varepsilon \rho)^2 |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad \sum_{|p| \leq r} \int_0^\infty e^{-2y/\varepsilon} dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) \frac{\rho^8}{(1+\rho^2)^2} \varepsilon^2 |D^p \varphi_2(\xi)|^2 d\xi .
\end{aligned}$$

Lorsqu'on intègre en y , il s'introduit un ε en facteur et on peut majorer dans chacune des intégrales $\varepsilon^3 \rho^3 \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right)$ par a^3 et l'on obtient :

$$\begin{aligned}
\|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-2}, r(\mathbb{R}_+^n)}^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{|p| \leq r} \rho^3 |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi + \\
&C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{|p| \leq r} \rho |\widehat{D^p \varphi_2}(\xi)|^2 d\xi = M .
\end{aligned}$$

$$b) \quad \|G_{\varepsilon 2}\|_{T^{-1}, r(\mathbb{R}_+^n)} \leq M'$$

$$\begin{aligned}
(5.2.37) \quad \|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-1}, r(\mathbb{R}_+^n)}^2 &= \sum_{|p| \leq r} \|(1 + \rho^2)^{-1/2} \mathcal{F}_x D^p G_{\varepsilon 2}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \\
&\leq \int_0^\infty e^{-2y/\varepsilon} dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) \frac{\rho^4}{(1+\rho^2)} \rho^2 |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-2y/\varepsilon} dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) \frac{\rho^4}{(1+\rho^2)} |\widehat{D^p \varphi_2}(\xi)|^2 d\xi .
\end{aligned}$$

Lorsqu'on intègre en y , il s'introduit un ε en facteur et on peut majorer $\chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) \varepsilon \rho$ par a dans les deux intégrales et on obtient

$$\begin{aligned}
\|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-1}, r(\mathbb{R}_+^n)}^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^3 |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi + \\
&C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho |\widehat{D^p \varphi_2}(\xi)|^2 d\xi = M' .
\end{aligned}$$

$$c) \quad \ell_{0\varepsilon} \in H^{3/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$\begin{aligned} \|\ell_{0\varepsilon}\|_{H^{3/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 &= \sum_{|p| \leq r} \|(1+\rho^2)^{3/4} \mathcal{F}_x D^p \ell_{0\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \\ &\leq \sum_{|p| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{3/2} \varepsilon^2 \rho^2 \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \sum_{|p| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{3/2} \frac{\varepsilon^2(\rho^2+1)}{(1+\rho^2)} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) |\widehat{D^p \varphi_2}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

et on majore $(\varepsilon\rho)^2 \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right)$ par a^2 et donc $(\varepsilon \leq 1)$

$$\begin{aligned} \|\ell_{0\varepsilon}\|_{H^{3/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 &\leq C \sum_{|p| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{3/2} |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + C \sum_{|p| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{1/2} |\widehat{D^p \varphi_2}(\xi)|^2 d\xi < \infty \end{aligned}$$

$$d) \quad \ell_{1\varepsilon} \in H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$\begin{aligned} \|\ell_{1\varepsilon}\|_{H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 &= \sum_{|p| \leq r} \|(1+\rho^2)^{1/4} \mathcal{F}_x D^p \ell_{1\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \\ &\leq \sum_{|p| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (1+\rho^2)^{1/2} \rho^2 |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \sum_{|p| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (1+\rho^2)^{1/2} |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Cette quantité est manifestement finie par hypothèse.

e) Evaluons la quantité (1.4.8) c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \|\ell_{1\varepsilon} - (\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0))\|_{H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 &\leq \\ &\leq \sum_{|p| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right))^2 (1+\rho^2)^{1/2} \rho^2 |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \sum_{|p| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right))^2 (1+\rho^2)^{1/2} |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

On peut alors introduire dans les intégrales ci-dessus $(\varepsilon\rho)^\alpha$ en tenant compte que $(1 - \chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}))^2 (\varepsilon\rho)^{-\alpha} < (a)^{-\alpha}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \|\ell_{1\varepsilon} - |\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)\|_{H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 &\leq \\ &\leq c \varepsilon^\alpha \sum_{|p| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{1/2} \rho^{2+\alpha} |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + c \varepsilon^\alpha \sum_{|p| \leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{1/2} \rho^\alpha |\widehat{D^p \varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

et donc on aura l'hypothèse (1.4.8) pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire

$$\varphi_1(x) \in H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1}) .$$

Bien que cet exemple ne satisfait pas exactement aux hypothèses du chapitre I. (Il faudrait au moins prendre un ouvert borné au lieu de \mathbb{R}_+^n), on peut voir que le calcul direct sur la forme explicite d'une solution permet d'avoir un correcteur en conservant les hypothèses initiales, mais ce correcteur n'est pas un correcteur au sens du chapitre I. Pour ce faire il faut prendre comme dans Lions [1] les dérivations normales c'est-à-dire en y pour définir une fonction dont on vérifie ensuite qu'elle satisfait aux conditions des correcteurs. Soit donc θ'_ε défini par :

$$(5.2.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon^2 \partial^4 \theta'_\varepsilon}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 \theta'_\varepsilon}{\partial y^2} = 0 \quad y > 0 \\ \theta'_\varepsilon(x,0) = 0 \\ \frac{\partial \theta'_\varepsilon}{\partial y}(x,0) = \varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) \end{array} \right.$$

On a alors la solution, si l'on prend celle qui décroît le plus rapidement possible à l'infini en y :

$$(5.2.39) \quad \theta'_\varepsilon(x,y) = \varepsilon \left[\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) \right] (1 - e^{-y/\varepsilon}) .$$

On retrouve ainsi une partie de $\theta'_\varepsilon(x,y)$ qui est justement $\theta_\varepsilon(x,y)$ défini en (5.2.23), l'autre partie étant tout simplement les premiers termes du développement en ε de $u_{11\varepsilon}(x,y) - u(x,y)$ et de $u_{21\varepsilon}(x,y)$ pris en $y = 0$. En effet :

$$u_{11\varepsilon} - u = \overline{\mathcal{F}}_\xi [(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} (\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) - 1) e^{-\rho y} \hat{\varphi}_1(\xi)] (x) .$$

$$\text{Or} \quad \sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} (\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) - 1 = \varepsilon\rho + o(\varepsilon\rho) .$$

Donc :

$$u_{11\varepsilon} - u = \overline{\mathcal{F}}_\xi (\varepsilon\rho e^{-\rho y} \hat{\varphi}_1(\xi)) (x) + \overline{\mathcal{F}}_\xi (o(\varepsilon\rho) e^{-\rho y} \hat{\varphi}_1(\xi)) (x)$$

et

$$u_{11\varepsilon}(x,0) - u(x,0) = \varepsilon \overline{\mathcal{F}}_x (\rho \hat{\varphi}_1(\xi)) (x) = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) + o(\varepsilon) .$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} u_{21\varepsilon}(x,y) &= \varepsilon \overline{\mathcal{F}} [(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) e^{-\rho y} \hat{\varphi}_2(\xi)] (x) \\ &= \varepsilon \overline{\mathcal{F}} [(1 + o(\varepsilon\rho)) e^{-\rho y} \hat{\varphi}_2(\xi)] (x) \end{aligned}$$

$$u_{21\varepsilon}(x,0) = \varepsilon \varphi_2(x) + o(\varepsilon) .$$

Donc un correcteur défini comme en (5.2.39) ne corrige non seulement les termes frontières, mais aussi les termes intérieurs.

On peut alors vérifier les hypothèses du chapitre I pour $\theta'_\varepsilon(x,y)$. En tenant compte de (5.2.38) on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2 \Delta^2 \theta_\varepsilon - \Delta \theta_\varepsilon = \varepsilon^2 G'_{\varepsilon 1} + \varepsilon G'_{\varepsilon 2} \\ \theta'_\varepsilon(x,0) = 0 \\ \frac{\partial \theta'_\varepsilon}{\partial y}(x,0) = \varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) \end{array} \right.$$

$$\text{où } G'_{\varepsilon 1} = \varepsilon \Delta_x^2 (\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0)) (1 - e^{-y/\varepsilon})$$

$$\text{et } G'_{\varepsilon 2} = -\varepsilon \Delta_x (\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)) (1 - e^{-y/\varepsilon}) .$$

Et pour avoir les hypothèses du chapitre I sur $G'_{\varepsilon 1}$ et $G'_{\varepsilon 2}$, il faut déjà se limiter à y au voisinage de zéro par exemple $0 < y < 1$ et d'autre part imposer $\varphi_1(x) \in H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $\varphi_2(x) \in H^{1+r}$. On est alors dans les hypothèses du théorème 1.4.1.

Par contre si l'on considère la solution approchée définie par Vishik et Ljusternik et repris par P. Fife [1], on aura en se référant aux notations et définitions de ce dernier que le premier terme frontière $v_0(x)$ qu'il définit est donné : (lemme p. 107, P. Fife [1])

$$v_0(x, \zeta) \equiv \int_C \frac{g_{01}(x, z) e^{\zeta z}}{z+1} dz$$

$$\text{où } g_{01}(x, z) = a_0(x) \text{ avec } a_0(x) C_{02} = \psi_{02}(x)$$

$$\text{et } C_{02} = \int_C \frac{\Gamma_{20}(z) dz}{(z+1)} = -2i\pi$$

$$\text{donc } a_0 = \frac{1}{2i\pi} \psi_{20} = -\frac{1}{2i\pi} (\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)) .$$

D'où :

$$v_0(x, \zeta) \equiv \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) - \varphi_2(x) \right] e^{-\zeta} .$$

Et en tenant compte que $\zeta = \frac{y}{\varepsilon}$ et que le terme $v_k(x, y)$ est multiplié par ε dans le développement de $u_\varepsilon(x, y)$ donné par Vishik et Ljusternik, on retrouve exactement l'expression du correcteur donné en (5.2.23).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Agmon, A. Douglis et L. Nirenberg : Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, *Comm. Pure Appl. Math.* 12 (1959), pp 623-727.
- [1] P. C. Fife : Singularly perturbed elliptic boundary value problems. I Poisson Kernels and potential theory, *Annali. Mat. Pura ed Appl.* 1972, pp 99-147.
- [1] W. Greenlee : Rate of convergence in singular perturbations, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 18 (1968), fasc. 2, pp 135-191.
- [1] D. Huet : Décomposition spectrale et opérateurs, Presses Universitaires de France.
- [2] D. Huet : Perturbations singulières relatives au problème de Dirichlet dans un demi-espace, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Scienze Fisiche e Matematiche, Série III, Vol. XVIII, fasc. IV* (1964).
- [1] J.L. Lions : Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal, *Lectures notes in Mathematics, Springer-Verlag.*
- [1] J.L. Lions et E. Magénès : Problemi ai limiti non omogenei (I), *Ann. Scu. Norm. Pisa*, 14, 1960, pp 269-308.
- [1] M. Schmitt : *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 284 (1977) p. 1271-1273.

Michel GUEUGNON
Université des Sciences Exactes
Université de METZ